

УДК 535.14

## НОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*Н. Н. Боголюбов (мл.)*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*М. Козеровски*

Физический институт, Университет А. Мицкевича, Познань, ПНР

*Чан Куанг*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

*А. С. Шумовский*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор квантовых эффектов, не имеющих классических аналогов: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, нарушение классического неравенства Коши — Шварца и сжатое состояние света. Исследованы неклассические эффекты в процессах генерации гармоник и коллективной резонансной флуоресценции. Предложены различные схемы генерации сжатых состояний света и указаны условия получения большой степени сжатия. Также обсуждены возможные применения квантового света.

The review of the quantum effects having no classical analogies: antibunching and subpoissonian statistics, violation of the classical Cauchy—Schwarz inequality, squeezed states of light is given. The nonclassical effects in the processes of the harmonic generation and collective resonance fluorescence are investigated. Various schemes for the generation of squeezed states of light are presented. The potential applications of the quantum light are also discussed.

### ВВЕДЕНИЕ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Квантовая электродинамика, представляющая собой теорию электромагнитных взаимодействий, позволила объяснить и предсказать весьма широкий круг явлений, связанных с поведением электронов и фотонов. Именно эти частицы играют основную роль в оптических явлениях. Поэтому естественно было бы ожидать, что квантовая электродинамика станет теоретическим фундаментом оптики. Однако аппарат квантовой электродинамики в полной мере используется в оптике лишь при описании процессов излучения и в некоторых задачах взаимодействия света со средой, тогда как фотон-фотонные процессы, флуктуационные и статические свойства света рассматриваются обычно в рамках классической теории. Только в последние годы благодаря созданию высокостабильных лазерных источников когерентного излучения и детекторов фотонов с большой чувствительностью открылась возможность прямого экспериментального исследования флуктуационных свойств электромагнитного поля. В результате удалось открыть ряд новых эффектов, не имеющих классических аналогов,

Изучение таких эффектов представляет безусловный интерес как еще одна возможность прямой проверки предсказаний квантовой электродинамики. Этим, однако, их ценность не исчерпывается. Одно из важнейших приложений новых эффектов состоит в повышении точности оптических методов измерений в физике. А, как известно, оптические методы измерения уже сейчас относятся к числу наиболее точных. Имеются и другие перспективы применения новых эффектов, в частности, для создания систем оптической передачи и обработки информации с предельно низким уровнем шума. Кроме того, новые эффекты, открытые в оптике, обладают известной общностью; их аналоги должны существовать в физике конденсированных сред и в квантовой теории поля.

Прежде чем ответить на вопрос, какие явления в оптике следует считать явлениями, не имеющими классических аналогов, напомним некоторые сведения, относящиеся к когерентному состоянию электромагнитного поля Глаубера — Сударшана [1, 2]. Последнее определяется с помощью действия оператора смещения

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^* a};$$

$$D^+(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad D^+(\alpha) a^+ D(\alpha) = a^+ + \alpha^*;$$

$$D^+(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha),$$

на вакуумное состояние поля  $|0\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^+}|0\rangle. \quad (1)$$

Здесь  $a^+$ ,  $a$  — операторы рождения и уничтожения фотона и  $\alpha \in \mathbb{C}$  — произвольное комплексное число. Состояния нормированы ( $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ ) и образуют переполненную систему, т.е. любое состояние поля может быть разложено по состояниям  $|\alpha\rangle$ , но

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = e^{-|\alpha_2 - \alpha_1|^2}.$$

В частности, для состояния с определенным числом фотонов  $n$  имеем

$$|n\rangle = \int e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} |\alpha\rangle d\alpha, \quad (2)$$

где  $d\alpha$  — элемент площади в  $\mathbb{C}$ . Для матрицы плотности поля в представлении Глаубера — Сударшана справедливо выражение [2]

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d\alpha, \quad (3)$$

где  $P(\alpha)$  — функция, обычно интерпретируемая как плотность вероятности. Для когерентного состояния (1) квантово-механическое среднее от нормального произведения операторов фотонов с матрицей плотности (3) есть классическое среднее по ансамблю с функцией распределения  $P(\alpha)$ . В этом смысле когерентное состояние поля можно считать классическим состоянием.

Будем называть состояние поля «неклассическим», если выполнено одно из двух требований:

- 1) среднее число фотонов в моде  $\langle n \rangle$  меньше единицы;
- 2) функция  $P(\alpha)$  в выражении для матрицы плотности типа (3) не является положительно определенной или имеет сингулярность выше, чем  $\delta$ -функция Дирака.

В том случае, когда оба условия не выполнены, состояние поля является классическим.

Ниже мы рассмотрим теоретический и экспериментальный статус только тех эффектов, которые связаны с выполнением условия 2.

Важным моментом в становлении современной квантовой оптики можно считать эксперимент Брауна и Твисса [3], в котором была прямо измерена корреляция интенсивности света, полученного от теплового источника. Схема этого эксперимента приведена на рис. 1.

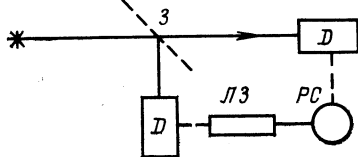


Рис. 1. Схема эксперимента Брауна и Твисса

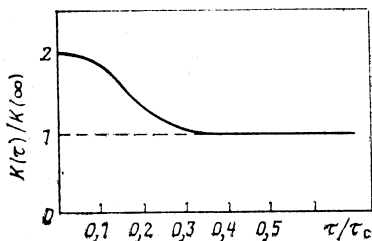


Рис. 2. Явление группировки фотонов в эксперименте Брауна и Твисса

Квазимонохроматический пучок фотонов зеркалом 3 делится на два идентичных пучка, поступающих на фотодетекторы  $D$ . Электрические импульсы от детекторов поступают на устройство  $PC$ , регистрирующее совпадение импульсов, т.е. одновременный приход фотонов на детекторы. В одной из электрических цепей установлена линия задержки  $ЛЗ$ , что позволяет регистрировать совпадение импульсов, вызванных фотонами, акты испускания которых разделены временем задержки  $\tau$ .

Для числа совпадения импульсов в зависимости от времени задержки  $\tau$  получается результат, приведенный на рис. 2. При  $\tau \gg \tau_c$  — времени когерентности, определяемого обратной шириной линии квазимонохроматического излучения, совпадение импульсов носит случайный характер, что согласуется с принципом ослабления корреляции. Однако при малых  $\tau \geq 0$  число совпадений существенно возрастает, что свидетельствует о наличии достаточно сильной корреляции. Здесь проявляется тенденция фотонов испускаться тепловым источником сгустками (эффект группировки фотонов).

Фактически в эксперименте Брауна и Твисса измеряется так называемая функция степени когерентности второго порядка

$$G^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I \rangle^2}, \quad (4)$$

где  $I(t)$  — классическая интенсивность света и усреднение производится по совокупности случайных значений комплексных амплитуд поля. В случае двух пучков фотонов со стационарными интенсивностями вместо (4) имеем

$$G_{ij}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_i(\tau) I_j(0) \rangle}{\langle I_i \rangle \langle I_j \rangle}. \quad (5)$$

Из неотрицательности классической интенсивности  $I$  имеем

$$\forall \tau \quad G_{ij}^{(2)}(\tau) \geq 0, \quad (6)$$

а из неотрицательности дисперсии

$$\langle I^2 \rangle \geq \langle I \rangle^2, \quad (7)$$

получаем

$$G_{ii}^{(2)}(0) \geq 1, \quad (8)$$

что согласуется с результатом эксперимента Брауна и Твисса.

В общем случае двух пучков имеет место соотношение

$$\langle I_i \rangle^2 \langle I_j \rangle^2 \geq \langle I_i I_j \rangle^2, \quad (9)$$

называемое обычно классическим неравенством Коши — Шварца [4]. Из (5) и (9) при фиксированном  $\tau$  имеем

$$G_{ii}^{(2)}(0) G_{jj}^{(2)}(0) \geq \{G_{ij}^{(2)}(\tau)\}^2. \quad (10)$$

В случае одного пучка ( $i = j$ ) (10) преобразуется к виду

$$G_{ii}^{(2)}(0) \geq G_{ii}^{(2)}(\tau). \quad (11)$$

Следовательно, в классическом случае функция степени когерентности второго порядка всегда имеет максимум в точке  $\tau = 0$ , что также согласуется с результатом эксперимента Брауна и Твисса.

В квантовом случае степень когерентности второго порядка определяется соотношением (для линейно поляризованного света)

$$G_{ij}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E_i^{(-)}(0) E_j^{(-)}(\tau) E_j^{(+)}(\tau) E_i^{+}(0) \rangle}{\langle E_i^{(-)} E_i^{+} \rangle \langle E_j^{(-)} E_j^{+} \rangle}, \quad (12)$$

где  $E^{(+)}(t) = \varepsilon a(t)$ ,  $E^{(-)}(t) = \varepsilon^* a^+(t)$  и усреднение понимается в квантовом смысле

$$\langle \dots \rangle = \text{Sp} (\dots \rho).$$

Как отмечено выше, функция  $P(\alpha)$  в представлении Глаубера — Сударшана не всегда является положительно определенной и, таким образом, квантовая корреляционная функция  $G_{ij}^{(2)}(\tau)$  (12) не обязательно должна удовлетворять классическим неравенствам (8) — (11). Состояния поля, в которых классические неравенства (8) — (11) не удовлетворены, представляют собой квантовые состояния, не имеющие классического аналога.

Следуя [4, 5, 7] мы говорим, что имеет место явление разгруппировки (или антигруппировки) фотонов, если удовлетворяется неравенство

$$G_{ii}^{(2)}(0) < 1, \quad (13)$$

и оно означает просто недостаток одновременных совпадений фотоотсчетов у двух детекторов по сравнению со случайными совпадениями.

Отметим, что некоторые авторы принимают нарушение классического неравенства (11) за условие существования явления антигруппировки фотонов (см. [6]).

В случае, когда поле является одномодовым, корреляционная функция (12) принимает вид

$$G^{(2)}(0) = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} - \frac{1}{\langle n \rangle}, \quad (14)$$

где  $\langle (\Delta n)^2 \rangle \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$  и  $n = a^+ a$  — оператор числа фотонов. В том случае, когда поле находится в когерентном состоянии (1) и усреднение в (14) проводится с матрицей плотности (3), имеем [2]

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle, \quad (15)$$

откуда  $G^{(2)}(0) = 1$ , что согласуется с результатом эксперимента Брауна — Твисса с когерентным источником поля.

Из (14) следует, что для выполнения (13), т.е. для существования разгруппировки фотонов, необходимо, чтобы

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle < \langle n \rangle. \quad (16)$$

Величина  $(\langle (\Delta n)^2 \rangle)^{1/2}$  определяет ширину распределения числа фотонов в эксперименте по фотоотсчетам. В случае когерентного состояния поля имеет место распределение Пуассона [соотношение (15)], тогда как выполнение условия разгруппировки (16) предполагает наличие распределения более узкого, чем пуассоновское. Иначе говоря, явление разгруппировки связано с субпуассоновской статистикой фотонов.

Если допустимо представление матрицы плотности поля вида (3), то

$$G^{(2)}(0) = 1 + \frac{\int P(\alpha) \{ |\alpha|^2 - \langle |\alpha|^2 \rangle \}^2 d\alpha}{\langle |\alpha|^2 \rangle^2}.$$

Следовательно, в случае разгруппировки фотонов функция  $P(\alpha)$  должна быть отрицательно определена и уже не может рассматриваться как плотность вероятности, т.е. в соответствии с введенной классификацией имеет место «неклассическое» состояние поля.

Явление разгруппировки фотонов подробно обсуждается в разд. 1 настоящей работы. Эффект разгруппировки фотонов предсказан в параметрической апконверсии и даунконверсии [16—20], многофотонном поглощении [21—27, 42], генерации гармоник [28—32], ком-

бинационном рассеянии света [33—37], а также в самоиндукцированном изменении показателя преломления света [38—41]. Разгруппировка фотонов в резонансной флуоресценции рассмотрена в [4—11, 43—52]. Явление разгруппировки фотонов впервые наблюдалось в экспериментах по резонансной флуоресценции [8—11]. Последующие наблюдения явления разгруппировки фотонов связаны с параметрическим понижением частоты [12, 13].

В настоящее время активно обсуждается возможность использования разгруппировки фотонов в невозмущающих экспериментах и для понижения шума в физических измерениях слабых сигналов [14, 15].

Другой эффект связан с нарушением в квантовом случае классического неравенства Коши — Шварца (10).

В одномодовом случае для степени когерентности второго порядка в системе двух пучков имеем

$$\forall \tau \quad G_{1,2}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_2 \rangle}{\langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle}. \quad (17)$$

Если поле в пучках находится в состоянии с определенными числами фотонов  $n_1, n_2$ , то  $G_{12}^{(2)}(\tau) = G_{12}^{(2)}(0) = 1$ . В то же время

$$G_{11}^{(2)}(0) G_{22}^{(2)}(0) = \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{n_1 n_2} < 1. \quad (17a)$$

Таким образом, неравенство (10) действительно может нарушаться для неклассических состояний поля. Такое нарушение впервые обнаружено экспериментально при двухфотонных каскадных процессах в трехуровневых атомах [53]. Позже эффект нарушения неравенства Коши — Шварца рассмотрен в двухфотонном лазере [54], в параметрическом процессе [4, 55, 56], в резонансной флуоресценции [57, 82], в суперрассеянии Рамана [83] и в модели Джейнса — Каммингса [93].

Наиболее интересным с физической точки зрения и весьма перспективным для дальнейшего применения в науке и технике является неклассический эффект генерации сжатого состояния фотонов, впервые предложенный в работе Столера [58] в 1970 г., хотя термин «сжатое состояние поля» был введен значительно позже [59].

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, описываемую выражением

$$E(t) = \lambda \{ a e^{-i(\omega t + \Phi_0)} + a^\dagger e^{i(\omega t + \Phi_0)} \}. \quad (18)$$

Определим так называемые операторы квадратур поля  $X_1$  и  $X_2$  соотношением

$$a = X_1 + iX_2, \quad a^\dagger = X_1 - iX_2.$$

Очевидно,

$$[X_1, X_2] = i/2. \quad (19)$$

В новых переменных вместо (18) имеем

$$E(t) = \frac{\lambda}{2} \{X_1 \cos(\omega t + \Phi_0) + X_2 \sin(\omega t + \Phi_0)\}. \quad (18a)$$

Таким образом,  $X_1, X_2$  можно рассматривать как операторные амплитуды двух компонент поля со сдвигом фазы на  $\pi/2$ .

С помощью (19) нетрудно получить соотношение неопределенностей для операторов квадратур поля:

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle \langle(\Delta X_2)^2\rangle \geq \frac{1}{16}, \quad (20)$$

где  $\Delta X_i \equiv X_i - \langle X_i \rangle$ .

Когерентное состояние поля является состоянием минимальной неопределенности. Иначе говоря, при усреднении по состояниям (1) с матрицей плотности (3) в соотношении (20) реализуется строгое равенство. Кроме того, для когерентного состояния

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle = \langle(\Delta X_2)^2\rangle = 1/4.$$

Сжатым состоянием поля принято называть такое состояние минимальной неопределенности, для которого

$$\langle(\Delta X_i)^2\rangle < 1/4, \quad (21)$$

где  $X_i$  — один из квадратурных операторов.

Пусть допустимо представление (3). Тогда

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \int P(\alpha) [(\alpha + \alpha^*) - (\langle\alpha\rangle + \langle\alpha^*\rangle)]^2 d\alpha \right\}.$$

Следовательно, для выполнения условия сжатия  $\langle(\Delta X_1)^2\rangle < 1/4$  необходима отрицательная определенность функции  $P(\alpha)$ , т.е. сжатое состояние также относится к неклассическим эффектам.

В более общем многомодовом случае условие сжатия (21) принимает вид

$$\langle : (\Delta X_i)^2 : \rangle < 0 \quad (i = 1 \text{ или } 2), \quad (22)$$

где  $\langle : \dots : \rangle$  обозначает среднее от нормального произведения операторов.

Рассмотрим структуру идеального сжатого состояния поля. Введем оператор сжатия Столера

$$\left. \begin{aligned} S(\xi) &= e^{(\xi^* a^2 - \xi (a^+) ^2)/2}, \quad \xi = r e^{i\theta}; \\ S^+(\xi) a S(\xi) &= a \operatorname{ch} r - a^+ e^{i\theta} \operatorname{sh} r; \\ S^+(\xi) a^+ S(\xi) &= a^+ \operatorname{ch} r - a e^{-i\theta} \operatorname{sh} r. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Определим двухпараметрическое состояние

$$| \alpha, \xi \rangle = D(\alpha) S(\xi) | 0 \rangle. \quad (24)$$

где  $D(\alpha)$  — оператор смещения Глаубера — Сударшана. Найдем средние  $\langle (\Delta X_i)^2 \rangle_{\alpha \xi}$  по состоянию (24). Имеем

$$\left. \begin{aligned} \langle (\Delta X_1)^2 \rangle_{\alpha \xi} &= \frac{1}{4} (\text{ch } r - \cos \theta \text{ sh } 2r); \\ \langle (\Delta X_2)^2 \rangle_{\alpha \xi} &= \frac{1}{4} (\text{ch } r + \cos \theta \text{ sh } 2r), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

откуда

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle_{\alpha \xi} \langle (\Delta X_2)^2 \rangle_{\alpha \xi} = \frac{1}{16} (1 + \sin^2 \theta \text{ sh}^2 2r). \quad (26)$$

Состояние минимальной неопределенности в силу (25) реализуется при условии  $\theta = 0$ , т.е. для  $\xi \in \mathbf{R}$ . В этом случае вместо (25) имеем

$$\left. \begin{aligned} \langle (\Delta X_1)^2 \rangle_{\alpha \xi} &= \frac{1}{4} e^{-2r}; \\ \langle (\Delta X_2)^2 \rangle_{\alpha \xi} &= \frac{1}{4} e^{2r}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Очевидно, при  $r = 0$  мы возвращаемся к ситуации, соответствующей когерентному состоянию, тогда как для  $r > 0$   $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle_{\alpha \xi} < 1/4$  (для  $r < 0$   $\langle (\Delta X_2)^2 \rangle_{\alpha \xi} < 1/4$ ), т.е. имеет место сжатое состояние поля.

Смысл явления сжатия иллюстрируется рис. 3, на котором изображены «области неопределенности» квадратурных амплитуд поля. Рис. 3, а соответствует когерентному состоянию, для которого соот-

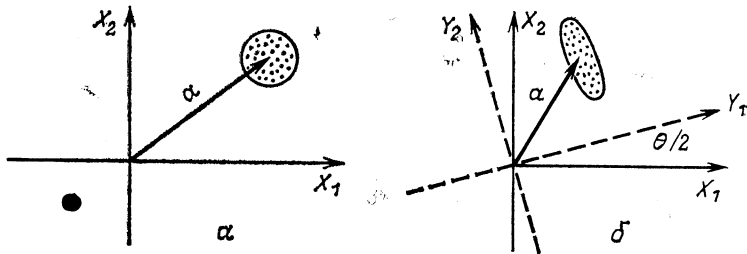


Рис. 3. Неопределенность для когерентного состояния (а) и сжатого состояния (б) света

ношение неопределенностей (20) (со строгим равенством) задает окружность радиусом  $1/4$ . Рис. 3, б отвечает сжатому состоянию поля, для которого соотношения (26) и (27) задают уравнение эллипса с полуосями  $e^{-r}/4$  и  $e^r/4$  соответственно. При этом площади обеих фигур совпадают. Таким образом, применение оператора (23) приводит к «сжатию» круга неопределенностей для когерентного состояния в эллипс той же площади. Параметр  $r$  при этом описывает степень сжатия.

Так как вариации  $\langle (\Delta X_i)^2 \rangle$  (27) не зависят от амплитуды поля  $|\alpha|$  (18), то явление сжатия может наблюдаться и в интенсивных полях.



С помощью преобразования

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2) e^{-i\theta/2},$$

соответствующего повороту комплексной плоскости на угол  $\theta/2$ , перейдем к «новым» операторным квадратурам  $Y_1, Y_2$ , для которых вариации могут быть записаны в виде

$$\langle (\Delta Y_1)^2 \rangle_{\alpha\xi} = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad \langle (\Delta Y_2)^2 \rangle_{\alpha\xi} = \frac{1}{4} e^{2r},$$

т.е. мы снова имеем состояние минимальной неопределенности. Следовательно, в выражении (18а) всегда с помощью выбора фазы  $\Phi_0$  можно сделать состояние  $|\alpha, \xi\rangle$  состоянием минимальной неопределенности.

Первое экспериментальное обнаружение сжатого состояния относится к 1985 г. (Слашер и др. [60]). При этом в параметрическом четырехфотонном процессе было достигнуто сжатие порядка 7 % (отношение малой полуоси эллипса к радиусу окружности). В 1986 г. был реализован целый ряд экспериментов [61—63], из которых наибольшее сжатие порядка  $\sim 50$  % было получено в параметрической даунконверсии (Кимбл и др. [63]).

Из определения оператора сжатия (23) видно, что генерация сжатого состояния должна представлять собой нелинейный процесс. Сказанное относится к нелинейности 2-го порядка по полю. Для высших нелинейностей Хонгом и Манделом было введено понятие сжатия  $N$ -го порядка [64]. В этом случае вместо (21) должно выполняться условие [64]

$$\langle (\Delta X_i)^N \rangle < \frac{1}{2^N} (N-1)!! \quad (28)$$

Кроме того, имеет место соотношение [64]

$$\langle (\Delta X_i)^N \rangle = \frac{(N-1)!!}{2^N} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \binom{N}{2r} \frac{(2r)!}{r! 2^{N-r}} \langle :(\Delta X_i)^{N-2r}: \rangle \quad (29)$$

В последующих разделах настоящей работы мы детально обсудим все три перечисленных здесь эффекта.

## 1. ПРОЦЕСС ГЕНЕРАЦИИ ГАРМОНИК И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОТОНОВ

Процессы генерации гармоник могут быть использованы для получения как разгруппировки фотонов, так и сжатия фотонного поля. Генерация второй гармоники была рассмотрена с точки зрения разгруппировки фотонов одним из авторов и Танасем [29], а с точки зрения сжатия — Манделом [66]. Впоследствии результаты были

обобщены на случай генерации высших гармоник как для эффекта разгруппировки фотонов [30], так и сжатия [67]. Изучено также влияние зависимости константы связи от числа фотонов на оба эффекта в генерации второй гармоники [68].

При полном фазовом синхронизме, в отсутствие потерь в среде, генерация  $k$ -й гармоники описывается следующим гамильтонианом:

$$H = \hbar\omega a_f^\dagger a_f + k\hbar\omega a_k^\dagger a_k + \hbar L_k (a_k^\dagger a_f^k + a_f^{\dagger k} a_k), \quad (30)$$

где индексы  $f$  и  $k$  относятся к основному пучку и гармонике соответственно;  $L_k$  — константа связи.

В силу нелинейного взаимодействия операторы уничтожения и рождения фотонов имеют временную зависимость типа

$$\left. \begin{aligned} a_f(t) &= a_{fs}(t) e^{-i\omega t}; \\ a_k(t) &= a_{ks}(t) e^{-ik\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Используя гамильтониан (30), получаем следующую систему уравнений движения для медленно меняющихся частей  $a_s$  операторов уничтожения фотонов:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_{fs} &= -ikL_k a_{fs}^{\dagger k-1} a_{ks}; \\ \dot{a}_{ks} &= -iL_k a_{fs}^k. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Эти уравнения можно решить лишь в приближении коротких отрезков времени, что соответствует малому пути, проходимому пучками в среде. С физической точки зрения это означает, что среднее число фотонов генерируемой гармоники мало по сравнению со средним числом фотонов, падающих на нелинейную среду. Приближение коротких отрезков времени связано с разложением операторов в ряд по степеням  $t$ .

В момент времени  $t = 0$  поле  $k$ -й гармоники находится в состоянии вакуума.

Особенно удобным параметром в исследовании статистических свойств процессов генерации гармоник является параметр

$$q = \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (33)$$

введенный Манделом [66].

Тогда для (14) имеем

$$G^{(2)}(0) = 1 + q/\langle n \rangle. \quad (34)$$

При когерентном падающем свете со средним числом фотонов  $\langle n_{j0} \rangle$  для пучка с основной частотой находим [41]

$${}^k q_f(t) = -k(k-1)C(t), \quad (35)$$

где левый верхний индекс  $k$  обозначает порядок процесса, а  $C(t)$  — коэффициент конверсии

$$C(t) = \langle n_k(t) \rangle / \langle n_{f_0} \rangle = L_k^2 t^2 \langle n_{f_0} \rangle^{k-1}. \quad (36)$$

Для  $k$ -й гармоники находим в таком случае [69]

$$q_k(t) = -\frac{1}{3} k C^2(t) \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \sum_{r=1}^{k-1-s} s! r! \times \\ \times \binom{m}{s} \binom{k-1}{s} \binom{k-1-s}{r} \langle n_{f_0} \rangle^{1-s-r}. \quad (37)$$

Отрицательные значения функций  ${}^k q_f(t)$  и  $q_k(t)$  означают субпуассоновскую статистику фотонов в обоих пучках. В классическом описании те же функции  ${}^k q_f(t)$  принимали бы нулевые значения, откуда  $G_{f,k}^{(2)}(0) = 1$ .

Отличие квантового результата от классического можно объяснить следующим образом. Скорость генерации зависит от корреляционных функций высшего порядка [41] падающего света, т.е. от флуктуаций интенсивности или флуктуаций числа фотонов. В случае когерентного пучка интенсивность постоянна, так что в различные интервалы времени эффективность генерации всегда неизменна. Следовательно, и интенсивность гармоники будет постоянной. Она, конечно, увеличивается во времени, однако не флуктуирует. Интенсивность основного пучка уменьшается, но также не флуктуирует. Следовательно, оба пучка фотонов остаются в когерентном состоянии.

Иная картина получается в представлении фотонов. Фотоны когерентного пучка попадают на среду беспорядочно. Генерация происходит в основном в интервалы времени, содержащие относительно большое число фотонов (не меньше чем  $k$ ). В единичном акте из основного пучка отбирается  $k$  фотонов. Кроме уменьшения их числа происходит уменьшение беспорядка, связанные с выравниванием расстояний между фотонами. Почти равномерно распределенные во времени фотоны уже должны проявлять эффект разгруппировки.

Иначе говоря, из  $k$  фотонов основного пучка генерируется лишь один фотон гармоники. Следовательно, неупорядоченность (во времени) в генерируемом пучке будет меньше, чем в падающем на среду, что характерно для эффекта разгруппировки.

Приближение коротких отрезков времени становится плохим, когда интенсивность гармоники начинает приближаться к интенсивности падающего пучка. Однако, как показали численные расчеты для генерации второй гармоники [29, 31], разгруппировка фотонов все еще имеет место. Она переходит в группировку на расстояниях, совершенно недостижимых в эксперименте [29]. Уже из этих численных расчетов [29] следует возможность получения разгруппированных фотонов в процессе генерации второй гармоники. Авторы работы

[29] не обратили, однако, внимания на этот эффект для малых времен, обсуждая в своей работе только случай больших времен, для которого характерен эффект корреляции фотонов.

Хмела [70] показал, что каскадная генерация второй гармоники в  $n$  тонких пластинках (справедливо приближение коротких отрезков времени) с исключением за каждой пластинкой второй гармоники при помощи фильтра ведет к значительному усилению разгруппировки фотонов в основной моде. Эта идея также относится к процессу генерации высших гармоник.

Для нормально упорядоченных дисперсией квадратурных компонент основного пучка при когерентном падающем свете получаем [65]

$$\left. \begin{aligned} \langle :[\Delta^k X_1^{(f)}(t)]^2: \rangle &= +\frac{1}{4} {}^k q_f(t) \cos 2\theta; \\ \langle :[\Delta^k X_2^{(f)}(t)]^2: \rangle &= -\frac{1}{4} {}^k q_f(t) \cos 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где  $\theta$  обозначает начальную фазу комплексной амплитуды  $\alpha$  падающего света:  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$  и  $\langle n_{j0} \rangle = |\alpha|^2$ .

В зависимости от фазы  $\theta$  одна или другая квадратурная фазовая компонента проявляет сжатие. Максимальное сжатие есть  $\frac{1}{4} {}^k q_f(t)$ .

Отсюда, в частности, полагая  $k = 2$ , находим результат Мандела [64] для основного пучка в генерации второй гармоники.

Хмела и др. [71] показали, что упомянутая каскадная генерация в  $n$  тонких пластинках ведет к  $n$ -кратному увеличению сжатия в основном пучке.

Для  $k$ -й гармоники имеем [69]

$$\begin{aligned} \langle :[\Delta X_{1,2}^{(k)}(t)]^2: \rangle &= \mp \frac{1}{4} q_k(t) \cos(2k\theta) \mp \frac{1}{24} k^2 c^2(t) \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{z=0}^s \times \\ &\times \sum_{r=0}^{\min(m, k-2-z)} r! z! \binom{s}{z} \binom{k-1}{z} \binom{m}{v} \binom{k-2-z}{r} \langle n_{j0} \rangle^{-r-z} \cos(2k\theta). \end{aligned} \quad (39)$$

В генерируемой гармонике максимальное сжатие уже не равняется  $q_k(t)$ .

Пользуясь идеей Хонга и Мандела [64] для нормально упорядоченных центральных моментов  $M$ -го порядка квадратурных компонент основного пучка, можно получать [65]:

$$\left. \begin{aligned} \langle :[\Delta^k X_1^{(f)}(t)]^M: \rangle &= {}^k q_f(t) \frac{(k-2)!}{2^M (k-M)!} \langle n_{j0} \rangle^{1-\frac{M}{2}} \cos(M\theta); \\ \langle :[\Delta^k X_2^{(f)}(t)]^M: \rangle &= {}^k q_f(t) \frac{(k-2)!}{2^M (k-M)!} \langle n_{j0} \rangle^{1-\frac{M}{2}} \cos \left[ M \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Здесь  $M$  может быть четным либо нечетным числом. Однако разложение (40) справедливо только для четных  $M$  ( $M = N - 2r$ ). Отсюда в дальнейшем надо помнить, что  $M$  есть всегда четное число.

Согласно [64] центральные нормально упорядоченные моменты описывают внутреннее сжатие  $M$ -го порядка. В силу зависимости от факториала  $(k - M)!$  они имеют смысл только для  $M \leq k$ . Следовательно,  $M$  может достигать значения  $k$ , если является четным числом, и принимать максимальное значение  $M = k - 1$  для нечетных  $k$ . Таким образом, в случае генерации четных гармоник внутреннее сжатие проявляется до  $k$ -го порядка, а в случае генерации нечетных гармоник — до  $(k - 1)$ -го порядка. В зависимости от значения фазы компонента  $X_1$  (если  $\theta = m\pi$ ,  $m$  — произвольное целое число) либо компонента  $X_2$  (если  $\theta = (m + 1/2)\pi$ ) проявляет внутреннее сжатие для всех достигнутых значений  $M$  ( ${}^k q_f(t) < 0$ ).

Легко убедиться, что для  $M = 2$  выражение (40) переходит в (39). В свою очередь, при  $k = 2$  находим из (40) результат Хонга и Манделя [64] для случая генерации второй гармоники, когда  $M$  может равняться только 2.

В выражении (40)  $M$  приобретает значение  $N - 2r$ . Так как  $M$  ограничено сверху, надо соответствующим образом выбрать нижние границы суммирования в (40). Отсюда для генерации четных гармоник имеем

$$\langle [\Delta^k X_1^{(f)}(t)]^N \rangle = \frac{(N-1)!!}{2^N} + \frac{1}{2^N} {}^k q_f(t) (k-2)! \times \\ \times \sum_{r=(N-k)/2}^{N/2-1} \left\{ \binom{N}{2r} \frac{(2r)! \langle n_{f0} \rangle^{1-\frac{N}{2}+r}}{r! 2^r (k-N+2r)!} \right\} \cos[(N-2r)\theta]; \quad (41)$$

$$\langle [\Delta^k X_2^{(f)}(t)]^N \rangle = \frac{(N-1)!!}{2^N} + \frac{1}{2^N} {}^k q_f(t) (k-2)! \times \\ \times \sum_{r=(N-k)/2}^{N/2-1} \{ \dots \} \cos \left[ (N-2r) \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (42)$$

где выражение внутри скобок  $\{ \dots \}$  в (42) и в дальнейших формулах аналогично выражению в (41).

В случае генерации нечетных гармоник

$$\langle [\Delta^k X_1^{(f)}(t)]^N \rangle = \frac{(N-1)!!}{2^N} + {}^k q_f(t) \frac{(k-2)!}{2^N} \times \\ \times \sum_{r=(N-k+1)/2}^{N/2-1} \{ \dots \} \cos[(N-2r)\theta]; \quad (43)$$

$$\langle [\Delta^k X_2^{(f)}(t)]^N \rangle = \frac{(N-1)!!}{2^N} + {}^k q_f(t) \frac{(k-2)!}{2^N} \times \\ \times \sum_{r=(N-k+1)/2}^{N/2-1} \{ \dots \} \cos \left[ (N-2r) \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (44)$$

Итак, сжатие  $N$ -го порядка ( $N$ , конечно, не может превышать  $k$ ) проявляется за счет всех разрешенных внутренних сжатий низших порядков.

## 2. РЕЗОНАНСНАЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ

Явление резонансной флуоресценции играет в квантовой оптике ту же роль, что мухи дрозофилы в генетике или модель Изинга в теории фазовых переходов. Именно при исследовании резонансной флуоресценции впервые был обнаружен эффект разгруппировки фотонов [8, 9, 11] и субпуассоновская статистика света [10]. Первые теоретические предсказания других неклассических эффектов также связаны с задачей резонансной флуоресценции [51, 72—76]. Здесь, опираясь в основном от результатов наших работ [77—80], мы рассмотрим коллективные свойства резонансной флуоресценции.

Простейшая формулировка задачи о коллективной резонансной флуоресценции связана с рассмотрением  $N$  двухуровневых атомов в модели Дикке, взаимодействующих с модой поля накачки с частотой

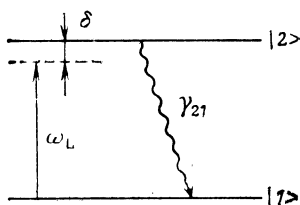


Рис. 4. Двухуровневые атомы взаимодействуют с внешним лазерным полем и полем излучения

той  $\omega_L$ , не совпадающей с резонансной частотой перехода (рис. 4). В приближении вращающейся волны для матрицы плотности системы двухуровневых атомов можно получить следующее уравнение [81] (считая внешнее поле классическим):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i \left[ \frac{\delta}{2} (J_{22} - J_{11}) + G_{21} (J_{21} + J_{12}), \rho \right] - \gamma_{21} (J_{21} J_{12} \rho - 2J_{12} \rho J_{21} + \rho J_{21} J_{12}). \quad (45)$$

Здесь  $\delta = \omega_{21} - \omega_L$  — частотная расстройка резонанса;  $2\gamma_{21}$  — скорость спонтанного перехода  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  в атоме;  $G_{21}$  — резонансная частота Раби перехода  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ ;  $J_{ij}$  — операторы коллективных угловых моментов атомной системы. В представлении Швингера они могут быть записаны в виде

$$J_{ij} = b_i^\dagger b_j \quad (i, j = 1, 2),$$

где  $b_i^\dagger$  ( $b_i$ ) — бозе-оператор рождения (уничтожения) атомов на  $i$ -м уровне ( $i, j = 1, 2$ ). Так как

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij},$$

то

$$[J_{ij}, J_{i'j'}] = J_{ij}\delta_{i'j} - J_{i'j}\delta_{ij'}$$

Будем далее считать выполненным условие [77—79]

$$G \equiv (\delta^2/4 + G_{21}^2)^{1/2} \gg N\gamma_{21}, \quad (46)$$

соответствующее случаю интенсивного внешнего поля или большой частотной расстройки. Совершим каноническое преобразование бозонных переменных типа преобразования Боголюбова:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \sin \varphi; \\ b_2 &= -\beta_1 \sin \varphi + \beta_2 \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где  $\operatorname{tg} 2\varphi = 2G_{21}/\delta$ . После подстановки (47) в правую часть (45) перейдем к секулярному приближению, т.е. в операторе  $L$  пренебрежем быстро осциллирующими членами с частотами  $2G$  и  $4G$ . В результате для стационарной матрицы плотности находим [77]

$$\tilde{\rho} = U\rho U^+ = A^{-1} \sum_{M=0}^N x^M |M\rangle \langle M|, \quad (48)$$

где  $x = \operatorname{ctg}^4 \varphi$ ;  $A = (x^{N+1} - 1)/(x - 1)$ ;  $U$  — унитарный оператор, соответствующий каноническому преобразованию (47), и  $|M\rangle$  — собственное состояние оператора  $R_{11}$  и  $\hat{N} = R_{11} + R_{22}$ ,

$$R_{ij} = \beta_i^\dagger \beta_j \quad (i, j = 1, 2).$$

Оператор  $R_{ij}$  можно интерпретировать как коллективный угловой момент «одетых» атомов. Очевидно, для операторов  $R_{ij}$  справедливы те же перестановочные соотношения, что и для  $J_{ij}$ .

Следуя [77], введем характеристическую функцию

$$\chi_{R_{11}}(\xi) = \langle e^{i\xi R_{11}} \rangle_s = A^{-1} (y^{N+1} - 1)/(y - 1),$$

где  $y = xe^{i\xi}$  и  $\langle \dots \rangle_s$  — среднее с матрицей плотности стационарного состояния (48). Через характеристическую функцию выражаются статистические моменты любого порядка:

$$\langle R_{11}^n \rangle_s = \frac{\partial^n}{\partial (i\xi)^n} \chi_{R_{11}}(\xi) \Big|_{i\xi=0}. \quad (49)$$

С помощью канонического преобразования (47) запишем выражение для  $J_{12}$  в формализме одетых атомов:

$$\begin{aligned} J_{12} &= \sin \varphi \cos \varphi D + \cos^2 \varphi R_{12} - \sin^2 \varphi R_{21}; \\ D &= R_{22} - R_{11}. \end{aligned} \quad (50)$$

Операторы  $S_{-1} = R_{12} \cos^2 \varphi$ ;  $S_0 = D \sin \varphi \cos \varphi$ ;  $S_1 = -R_{21} \sin^2 \varphi$  — источники спектральных компонент триплета резонансной флуоресценции с частотами соответственно  $\omega_L - 2G$ ,  $\omega_L$  и  $\omega_L + 2G$ . В рас-

сматриваемом случае квантовое выражение для функции степени когерентности второго порядка (12) имеет вид

$$G_{ij}^{(2)}(0) = \frac{\langle S_i^+ S_j^+ S_j S_i \rangle_s}{\langle S_i^+ S_i \rangle_s \langle S_j^+ S_j \rangle_s} \quad (i, j = -1, 0, +1). \quad (51)$$

Используя явный вид матрицы плотности стационарного состояния (48) и операторов  $S_i$ , находим

$$G_{00}^{(2)}(0) = \langle D^4 \rangle_s / \langle D^2 \rangle_s^2;$$

$$G_{11}^{(2)}(0) = G_{-1-1}^{(2)}(0) = \langle R_{12} R_{12} R_{21} R_{21} \rangle_s / \langle R_{12} R_{21} \rangle_s^2,$$

где

$$\langle D^4 \rangle_s = 16 \langle R_{11}^4 \rangle_s - 32N \langle R_{11}^3 \rangle_s + 24N^2 \langle R_{11}^2 \rangle_s - 8N^3 \langle R_{11} \rangle_s + N^4; \quad (52)$$

$$\langle D^2 \rangle_s = 4 \langle R_{11}^2 \rangle_s - 4N \langle R_{11} \rangle_s + N^2; \quad (53)$$

$$\langle R_{12}^2 R_{21}^2 \rangle_s = \langle R_{11}^4 \rangle_s - 2(N+2) \langle R_{11}^3 \rangle_s + (N^2 + 5N + 5) \langle R_{11}^2 \rangle_s - (N^2 + 3N + 2) \langle R_{11} \rangle_s; \quad (54)$$

$$\langle R_{12} R_{21} \rangle_s = -\langle R_{11}^2 \rangle_s + (N+1) \langle R_{11} \rangle_s; \quad (55)$$

$$\langle R_{21} R_{12} \rangle_s = -\langle R_{11}^2 \rangle_s + (N-1) \langle R_{11} \rangle_s + N. \quad (56)$$

Входящие сюда статистические моменты  $\langle R_{11}^n \rangle_s$  определяются соотношением (49) с помощью характеристической функции  $\chi R_{11}(\xi)$  и являются функциями параметра  $x = \text{ctg}^4 \varphi$ , определяемого соот-

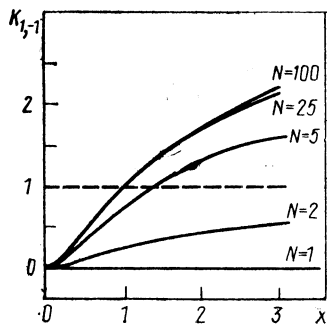


Рис. 5. Фактор  $K_{1,-1}$  как функция от параметра  $\text{ctg}^4 \varphi = x$

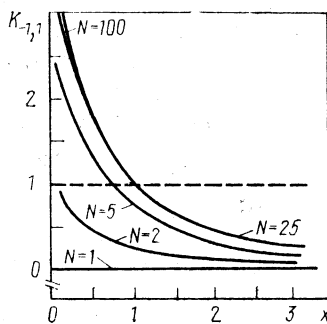


Рис. 6. Фактор  $K_{-1,1}$  как функция от параметра  $\text{ctg}^4 \varphi = x$

ношением характеристик внешнего поля накачки и частотной расстройки. В случае одного атома ( $N = 1$ ) имеем

$$G_{00}^{(2)}(0) = 1; \quad G_{\pm 1 \mp 1}^{(2)}(0) = 0.$$

Следовательно, центральная спектральная компонента  $S_0$  имеет пуассоновскую статистику фотонов, тогда как крайние компоненты



$S_1$  и  $S_{-1}$  имеют субпуассоновскую статистику. При  $N = 1$  также имеем

$$\langle J_{21}^2 J_{12}^2 \rangle = 0,$$

и, следовательно, полное поле флуоресценции также имеет субпуассоновскую статистику фотонов [44].

В коллективном случае ( $N \geq 2$ ) центральная компонента имеет суперпуассоновскую статистику ( $G_{00}^{(2)}(0) > 1$ ) и демонстрирует явление группировки фотонов. Коллективные эффекты уменьшают разгруппировки фотонов крайних спектральных компонент [52] и полного поля флуоресценции [47—51], и это означает, что разгруппировка фотонов является микроскопическим квантовым эффектом.

Рассмотрим теперь корреляции между компонентами спектра резонансной флуоресценции. С этой целью введем функцию

$$K_{ij} = \frac{G_{ii}^{(2)}(0) G_{jj}^{(2)}(0)}{\{G_{ij}^{(2)}(0)\}^2} \quad (i, j = 0, \pm 1).$$

Как видно из условия (17а), имеет место нарушение классического неравенства Коши — Шварца (10), если

$$K_{ij} < 1. \quad (57)$$

Таким образом, функцию  $K_{ij}$  можно рассматривать как фактор нарушения классического неравенства Коши — Шварца для корреляций между спектральными компонентами  $S_i$  и  $S_j$ .

Как следует из приведенных выше вычислений, в случае одного атома ( $N = 1$ )  $K_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , что означает нарушение неравенства Коши — Шварца для корреляций между любой парой спектральных компонент триплета резонансной флуоресценции. Как показывают дальнейшие вычисления для коллективного случая ( $N \geq 2$ ) [57], условие (57) выполняется только для корреляций между крайними компонентами спектра ( $K_{\pm 1, \mp 1} < 1$ ). Зависимость функций  $K_{\pm 1, \mp 1}$  приведена на рис. 5, 6. Таким образом, нарушение классического неравенства Коши — Шварца проявляется уже как макроскопический квантовый эффект, возможный в сильных полях.

Перейдем теперь к обсуждению проблемы генерации сжатого состояния фотонов в резонансной флуоресценции. Эта проблема исследовалась в целом ряде работ [72—77]. В частности, в [76] обсуждались спектральные свойства сжатия, а в [75] — влияние коллективных эффектов. Однако в указанных работах предсказанные степени сжатия были невысоки. Иная схема генерации сжатого света, позволяющая получить высокую степень сжатия, была предложена в наших работах [77]. Основная идея состоит в смещении крайних спектральных компонент триплета резонансной флуоресценции в том случае, когда сжатие для полного поля и для отдельных компонент отсутствует.

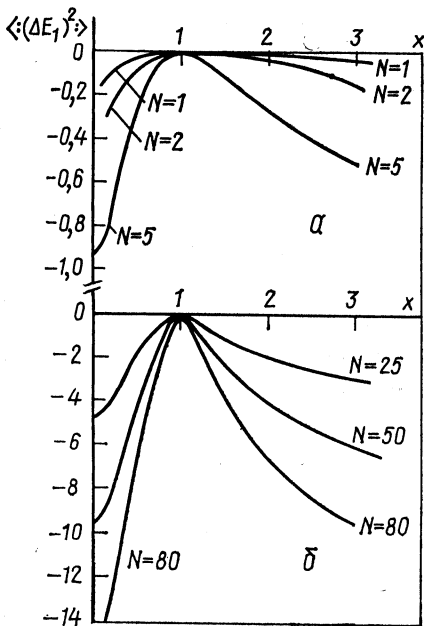


Рис. 7. Функция  $\langle (\Delta E_1)^2 \rangle$  в зависимости от параметра  $\operatorname{ctg}^4 \varphi = x$

Следуя [72, 73], воспользуемся представлением поля флуоресценции через атомные операторы:

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_f^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \Psi(\mathbf{r}) J_{12}(t - |\mathbf{r}|/c) e^{-i\omega(t - |\mathbf{r}|/c)}. \quad (58)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — положение точки наблюдения;  $c$  — скорость света;  $\Psi(\mathbf{r})$  — геометрический фактор;  $E^{(+)}$  — положительно-частотная часть поля и  $E_f^{(+)}$  — свободное поле. В стационарном случае можно пренебречь временем задержки  $|\mathbf{r}|/c$  и воспользоваться для коллективного углового момента  $J_{12}$  выражением (50). Нетрудно убедиться прямыми вычислениями, что при выполнении условий (46) сжатие отсут-

ствует как в каждой из компонент спектра флуоресценции, так и в полном поле. В то же время имеет место сильное сжатие в смеси двух крайних компонент спектра  $S_{-1}$  и  $S_{+1}$ . Действительно, совершив в (58) замену  $J_{12} \rightarrow \tilde{J}_{12} = S_1 + S_{-1}$  и с помощью (48) и коммутационных соотношений для операторов  $R_{ij}$  одетых атомов найдем вариацию фазовых квадратур поля  $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  (в смысле нормального произведения):

$$\begin{aligned} \langle (\Delta E_{1,2})^2 \rangle &= \frac{1}{2} \Psi^2 \sin^2 \varphi \langle R_{12} R_{21} \rangle_s (\sin^2 \varphi \mp \cos^2 \varphi) + \\ &+ \frac{1}{2} \Psi^2 \cos^2 \varphi \langle R_{21} R_{12} \rangle_s (\cos^2 \varphi \mp \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь

$$E_1 = \frac{1}{2} (E^{(+)} + E^{(-)}); \quad E_2 = -\frac{i}{2} (E^{(+)} - E^{(-)}).$$

Следовательно, сжатие возможно только в квадратурной компоненте  $E_1$  поля. Поведение  $\langle (\Delta E_1)^2 \rangle$  в зависимости от параметра приведено на рис. 7. Как нетрудно видеть, существуют значения, для которых имеет место сильное сжатие в смеси крайних компонент спектра резонансной флуоресценции, хотя условие (46) выполняется и сжатие для отдельных компонент и полного поля отсутствует.

Будем далее пренебрегать вкладом свободного поля в (58), не влияющим на величину вариации (59). Найдем в секулярном приближе-

нии фурье-образы крайних спектральных компонент поля резонансной флуоресценции с частотами  $\nu_1$  и  $\nu_{-1}$  соответственно. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega_L + 2G - \varepsilon_1) &= \Psi(\mathbf{r}) \cos^2 \varphi \tilde{R}_{12}(\varepsilon_1); \\ \tilde{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \omega_L - 2G + \varepsilon_2) &= -\Psi(\mathbf{r}) \cos^2 \varphi \tilde{R}_{21}(\varepsilon_2), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где  $\varepsilon_1 = \omega_L + 2G - \nu_1$ ;  $\varepsilon_2 = -(\omega_L - 2G) + \nu_{-1}$ . Две фазовые квадратурные компоненты смеси двух частотных компонент  $\tilde{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \nu_1)$ ,  $\tilde{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \nu_{-1})$  определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_1(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{2} [\tilde{E}_M^{(+)}(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \tilde{E}_M^{(-)}(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)]; \\ \tilde{E}_2(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{-i}{2} [\tilde{E}_M^{(+)}(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) - \tilde{E}_M^{(-)}(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)], \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{E}_M^{(+)}(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \nu_1) + \tilde{E}^{(+)}(\mathbf{r}, \nu_{-1})]; \\ \tilde{E}_M^{(-)}(\mathbf{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{E}^{(-)}(\mathbf{r}, \nu_1) + \tilde{E}^{(-)}(\mathbf{r}, \nu_{-1})]. \end{aligned}$$

Для достаточно большого числа атомов можно показать [79], что в стационарном решении

$$\left. \begin{aligned} \langle \tilde{R}_{21}(\varepsilon_1) \tilde{R}_{12}(\varepsilon_2) \rangle_s &= \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \langle R_{21} R_{12} \rangle_s \frac{2\Gamma_+}{\varepsilon_1^2 + \Gamma_+^2}; \\ \langle \tilde{R}_{12}(\varepsilon_2) \tilde{R}_{21}(\varepsilon_1) \rangle_s &= \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \langle R_{12} R_{21} \rangle_s \frac{2\Gamma_-}{\varepsilon_1^2 + \Gamma_-^2}, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= 2\gamma_{21} \left[ \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) (N - 2 \langle R_{11} \rangle_s) \right]; \\ \Gamma_- &= 2\gamma_{21} \left[ \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) (N - 2 \langle R_{11} \rangle_s) \right]. \end{aligned}$$

Параметры  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  определяют спектральные ширины двух крайних спектральных компонент  $S_{+1}$  и  $S_{-1}$  триплета резонансной флуоресценции. Теперь с помощью (60) — (62) находим вариацию для квадратурных компонент:

$$\langle : (\Delta E_{1,2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^2 : \rangle_s = \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S_{1,2}(\varepsilon_1), \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} S_{1,2}(\varepsilon_1) &= \frac{\gamma_{21}}{4} \left\{ (\cos^4 \varphi \mp \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \langle R_{21} R_{12} \rangle_s \frac{\Gamma_+}{\varepsilon_1^2 + \Gamma_+^2} + \right. \\ &\quad \left. + (\sin^4 \varphi \mp \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \langle R_{12} R_{21} \rangle_s \frac{\Gamma_-}{\varepsilon_1^2 + \Gamma_-^2} \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Отметим, что в соотношениях (62) — (64) мы для простоты пренебрегли пространственными зависимостями и воспользовались нормировкой корреляционных функций, предложенной Манделом [72]. Как нетрудно убедиться, интегрирования  $S_{1,2}(\varepsilon_1)$  по частотам приводит к соотношению (59).

Поведение спектра сжатия  $S_1(\varepsilon_1)$  как функция параметра  $\varepsilon_1/2\gamma_{21}N$  при фиксированном  $x = 0,8$  и различных  $N$  приведено на рис. 8. Спектр сжатия приближенно имеет лоренцевский вид (при большом  $N$ ). Наибольшей степени сжатия соответствует  $\varepsilon_1 = 0$ ; в этом случае частоты компонент спектра резонансной флуоресценции есть  $\nu_1 = \omega_L + 2G$  и  $\nu_{-1} = \omega_L - 2G$ . Поведение  $S_1(0)$  в зависимости от  $x$

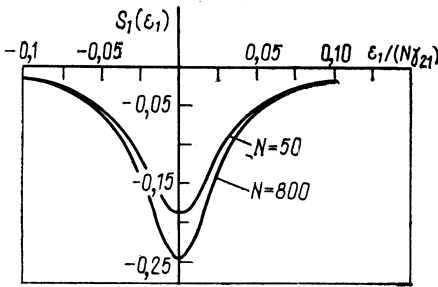


Рис. 8. Функция  $S_1(\varepsilon_1)$  в зависимости от параметра  $\varepsilon_1/2\gamma_{21}N$  при  $x = 0,8$

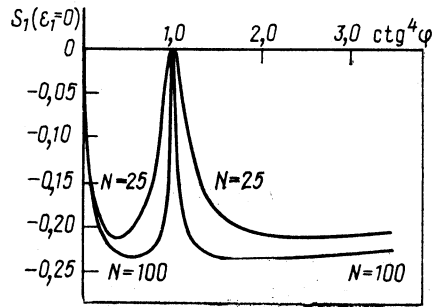


Рис. 9. Функция  $S_1(\varepsilon_1 = 0)$  в зависимости от параметра  $x = \text{ctg}^4 \varphi$

приведено на рис. 9. Как нетрудно видеть, при  $N \gg 1$  максимальное сжатие  $S_1(0)$  близко к  $-1/4$ , т.е. к 100 %-ному сжатию. Другие работы по сжатию в резонансной флуоресценции предсказывали результат не менее  $-0,07$  [76] (и только для одного атома), что весьма далеко от предельного сжатия. Подчеркнем, что достижение большого сжатия в предложенной нами схеме обусловлено наличием сильной корреляции между крайними компонентами спектра резонансной флуоресценции, а процесс генерации указанных компонент представляет собой рассеяние с нелинейностью второго порядка.

В связи с обсуждением возможности постановки эксперимента рассмотрим далее смесь двух крайних компонент спектра резонансной флуоресценции, проходящих через два фильтра типа резонаторов Фабри — Перо с центральными частотами  $\omega_{D1} = \omega_L + 2G$ ,  $\omega_{D2} = \omega_L - 2G$ . Для соответствующих фотонных полей имеем [79]

$$E_{D1}^{\dagger}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_1(t-t') e^{-i\omega_{D1}(t-t')} E^{(+)}(t') dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_{D1} - \varepsilon_1)t} \tilde{J}_1(-\varepsilon_1) \tilde{E}^+(\omega_{D1} - \varepsilon_1) d\varepsilon_1; \quad (65)$$

$$\begin{aligned} E_{D2}^{(+)}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_2(t-t') e^{-i\omega_{D2}(t-t')} E^{(+)}(t') dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_{D2} + \varepsilon_2)t} \tilde{J}_2(\varepsilon_2) \tilde{E}^{(+)}(\omega_{D2} + \varepsilon_2) d\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь

$$J_i(\tau) = \theta(\tau) \sqrt{2\Gamma_i} e^{-\Gamma_i \tau}, \quad i = 1, 2.$$

Величины  $\Gamma_1, \Gamma_2$  определяют спектральные ширины фильтров и  $\tilde{J}_i(\varepsilon_i)$  — фурье-образы функций  $J_i(\tau)$ . Фазовые квадратурные компоненты смеси двух полей резонаторов (65), (66) вводятся по аналогам с (61) соотношением

$$\begin{aligned} E_1(i) &= \frac{1}{2} [E_{MD}^{(+)}(t) + E_{MD}^{(-)}(t)]; \\ E_2(t) &= -\frac{i}{2} [E_{MD}^{(+)}(t) - E_{MD}^{(-)}(t)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E_{MD}^{(+)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [E_{D1}^{(+)}(t) + E_{D2}^{(+)}(t)]; \\ E_{MD}^{(-)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [E_{D1}^{(-)}(t) + E_{D2}^{(-)}(t)]. \end{aligned}$$

С помощью (60), (62) получаем для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} \langle : (\Delta E_{1,2})^2 : \rangle &= \frac{\gamma_{21}}{4} \left\{ (\cos^4 \varphi \mp \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \frac{R_{21}R_{12}\langle s \rangle}{\Gamma_D + \Gamma_+} + \right. \\ &\left. + (\sin^4 \varphi \mp \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \frac{\langle R_{12}R_{21}\rangle_s}{\Gamma_D + \Gamma_-} \right\}, \end{aligned} \quad (67)$$

где для простоты мы положили  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_D$ . Исследуя соотношение (67), можно показать [79], что при  $N \gg 1$  и  $\Gamma_D \sim \Gamma_+, \Gamma_-$

$$\langle : (\Delta E_1)^2 : \rangle \geq -1/8,$$

т.е. возможно 50 %-ное сжатие. В другом случае  $\Gamma_D \ll \Gamma_+, \Gamma_-$  величина вариации квадратуры  $E_1$  совпадает со спектром сжатия  $S_1$  ( $\varepsilon_1 = 0$ ) и при  $N \gg 1$ :

$$\langle : (\Delta E_1)^2 : \rangle \geq -1/4,$$

т.е. возможно предельно сильное сжатие. Таким образом, предложенная нами [79] схема сжатия в смеси двух крайних компонент триплета резонансной флуоресценции позволяет надеяться на достижение рекордной степени сжатия в эксперименте.

Отметим здесь также, что в наших работах [84] рассматривалась возможность исследования неклассических эффектов в более сложном случае системы трехуровневых атомов, взаимодействующих с фотонными полями.

### 3. ГЕНЕРАЦИЯ СЖАТОГО СОСТОЯНИЯ В ПРОЦЕССЕ СМЕШИВАНИЯ ВОЛН

Другой активно разрабатываемый метод генерации сжатых состояний света, связанный с процессами смешиваний четырех волн, был предложен в работе Иена [85]. Его дальнейшему теоретическому изучению было посвящено значительное число работ [86—90]. Именно в таком процессе впервые было осуществлено сжатие света [60]. При этом было достигнуто лишь 7 %-ное сжатие.

Здесь мы изложим теорию невырожденного смешивания волн в системе двух- и трехуровневых атомов и установим условие, при выполнении которого можно получить высокую степень сжатия в сильном поле.

Как в предыдущем разделе, рассмотрим систему  $N$  двухуровневых идентичных атомов в резонаторе взаимодействующих с одним (или с двумя) интенсивным монохроматическим внешним полем  $\mathbf{E}$  частоты  $\omega_L$  и с двумя резонаторными модами  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  с частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответственно и с вакуумом всех других мод. Внешнее поле  $\mathbf{E}$  (или два внешних поля) предполагается достаточно сильным, чтобы его можно было рассматривать как классическое поле.

В случае сильного внешнего поля или большой частотной расстройки между внешним полем и атомным переходом [ср. условие (46)] можно применить секулярное приближение и получить стационарную матрицу плотности для системы атомов в виде (48) и выражения для статических моментов  $\langle R_{11}^n \rangle_s$  (49) [78].

Следуя теории лазера Хакена [91], запишем уравнения Ланжевена для резонаторных мод следующим образом:

$$\dot{a}_1(t) = (-i\delta_1 - \kappa_1) a_1(t) - ig_1 J_{12}(t) + f_1(t); \quad (68)$$

$$\dot{a}_2(t) = (-i\delta_2 - \kappa_2) a_2(t) - ig_2 J_{12}(t) + f_2(t), \quad (69)$$

где

$$\delta_\lambda = \nu_\lambda - \omega_L \quad (\lambda = 1, 2),$$

$a_1$  и  $a_2$  — бозе-операторы двух резонаторных мод  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ ;  $g_\lambda$  и  $\kappa_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ) — соответственно константы связи и коэффициенты затухания резонаторной моды  $\mathbf{E}_\lambda$ ;  $f_\lambda(t)$  — операторы шума для резонаторных мод  $\mathbf{E}_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ), удовлетворяющие следующим соотношениям [91]:

$$\left. \begin{aligned} \langle f_\lambda(t) \rangle_H &= \langle f_\lambda^*(t) \rangle_H = 0; \\ \langle f_\lambda^*(t) f_{\lambda'}^*(t') \rangle_H &= \langle f_\lambda(t) f_{\lambda'}(t') \rangle_H = 0; \\ \langle f_\lambda^*(t) f_{\lambda'}(t') \rangle_H &= n_{\text{th}, \lambda}(T) 2\kappa_\lambda \delta(t-t') \delta_{\lambda, \lambda'}; \\ \langle f_\lambda(t) f_{\lambda'}^*(t') \rangle_H &= (n_{\text{th}, \lambda}(T) + 1) 2\kappa_\lambda \delta(t-t') \delta_{\lambda, \lambda'}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle_H$  обозначено усреднение по состояниям полевого термостата;  $n_{\text{th}, \lambda}(T)$  — число тепловых квантов мод  $E_\lambda$  при температуре  $T$ .

В соотношениях (68), (69)  $J_{12}$  — коллективные угловые моменты атомов, имеющие в секулярном приближении вид [см. формулу (50)]

$$J_{12}(t) = \sin \varphi \cos \varphi D(t) + \cos^2 \varphi R_{12}(t) - \sin^2 \varphi R_{21}(t). \quad (71)$$

В секулярном приближении можно также написать

$$R_{12}(t) = e^{-2iGt} \tilde{R}_{12}(t), \quad R_{21}(t) = \tilde{R}_{21}(t) e^{2iGt},$$

где  $\tilde{R}_{12}(t)$  и  $\tilde{R}_{21}(t)$  медленно изменяются со временем;  $G$  является частотой Раби (46).

Дальнейшие вычисления показывают [78], что сильное сжатие света возможно получить только в случае, когда частоты сигнальных мод  $E_1$  и  $E_2$  лежат вблизи двух крайних спектральных компонент резонансной флуоресценции, т.е. когда выполняется соотношение

$$|\tilde{\delta}_1|, |\tilde{\delta}_2| \ll G, \quad (72)$$

где  $\tilde{\delta}_1 = \delta_1 - 2G$ ;  $\tilde{\delta}_2 = \delta_2 + 2G$ .

Применяя условие (72) и секулярное приближение, можем записать соотношения (69), (70) в виде

$$\tilde{a}_1(t) = (-i\tilde{\delta}_1 - \kappa_1) \tilde{a}_1(t) - iG_1 \tilde{R}_{12}(t) + \tilde{f}_1(t); \quad (73)$$

$$\tilde{a}_2(t) = (-i\tilde{\delta}_2 - \kappa_2) \tilde{a}_2(t) - iG_2 \tilde{R}_{21}(t) + \tilde{f}_2(t), \quad (74)$$

где  $G_1 = \cos^2 \varphi g_1$ ;  $G_2 = -\sin^2 \varphi g_2$  и операторы  $\tilde{a}_\lambda(t)$ ,  $\tilde{f}_\lambda(t)$  ( $\lambda = 1, 2$ ) связаны с  $a_\lambda(t)$ ,  $f_\lambda(t)$  соотношениями

$$a_1(t) = e^{-2iGt} \tilde{a}_1(t); \quad a_2(t) = e^{2iGt} \tilde{a}_2(t);$$

$$f_1(t) = e^{-2iGt} \tilde{f}_1(t); \quad f_2(t) = e^{2iGt} \tilde{f}_2(t).$$

Для простоты мы рассматриваем только случай  $n_{\text{th}, \lambda}(T) = 0$ , т.е. когда температура поля равна нулю. В этом случае из уравнений (73), (74) и (70) нетрудно видеть, что операторы шума  $\tilde{f}_\lambda(t)$  не оказывают влияния на нормально упорядоченную вариацию резонаторных мод. Наличие членов с  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$  приводит только к появлению у коммутаторов  $[a_1, a_1^\dagger]$  и  $[a_2, a_2^\dagger]$  дополнительных слагаемых, равных  $1 - e^{-2\kappa_1 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$  и  $1 - e^{-2\kappa_2 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$  соответственно [78, 91]. Опуская операторы шума  $\tilde{f}_{1,2}(t)$  в уравнениях (73), (74), можно получить стационарное решение в виде

$$\tilde{a}_1 = \frac{-iG_1 \tilde{R}_{12}}{i\tilde{\delta}_1 + \kappa_1}; \quad \tilde{a}_2 = \frac{-iG_2 \tilde{R}_{21}}{i\tilde{\delta}_2 + \kappa_2}. \quad (75)$$

Рассмотрим нормально упорядоченную вариацию операторов  $b_1$  и  $b_2$ :

$$b_1 = \frac{1}{2} (b^+ + b); \quad b_2 = -\frac{i}{2} (b^+ - b),$$

где

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + a_2); \quad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+ + a_2^+).$$

Используя стационарное решение (75) для операторов  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$ , находим

$$\begin{aligned} \langle : (\Delta b_{1,2})^2 : \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{g_1^2}{\kappa_1^2} \cos^4 \varphi \langle R_{21} R_{12} \rangle_s + \right. \\ &+ \frac{g_2^2}{\kappa_2^2} \sin^4 \varphi \langle R_{12} R_{21} \rangle_s \pm \frac{g_1 g_2}{\kappa_1 \kappa_2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left. \left( \langle R_{21} R_{12} \rangle_s + \langle R_{12} R_{21} \rangle_s \right) \right\}, \quad (76) \end{aligned}$$

где статистические моменты  $\langle R_{12} R_{21} \rangle_s$ ,  $\langle R_{21} R_{12} \rangle_s$  находятся по формулам (55) и (56). В соотношении (76) и далее для простоты принято, что  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ .

Учитывая вклад операторов шума  $f_{1,2}(t)$ , для коммутатора операторов  $b_1$  и  $b_2$  находим

$$\langle [b_1, b_2] \rangle = \frac{i}{4} \left( \frac{g_1^2}{\kappa_1^2} \cos^4 \varphi - \frac{g_2^2}{\kappa_2^2} \sin^4 \varphi \right) \langle D \rangle_s - \frac{i}{2}, \quad (77)$$

где  $\langle D \rangle_s = N - 2 \langle R_{11} \rangle_s$  определяется (49). Для фактора сжатия в смеси двух резонаторных мод  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  имеем [78]

$$F_{1,2} = \frac{\langle : (\Delta b_{1,2})^2 : \rangle}{\frac{1}{2} | \langle [b_1, b_2] \rangle |}, \quad (78)$$

а условием существования сжатия в фазовых квадратурных компонентах  $b_1$  и  $b_2$  является неравенство

$$F_\lambda < 0, \quad \lambda = 1 \text{ или } 2. \quad (79)$$

Легко показать, что в зависимости от знаков параметров  $g_1$  и  $g_2$  сжатие света может происходить в компоненте  $b_1$  или  $b_2$ .

В случае точного резонанса, когда  $x = \operatorname{ctg}^4 \varphi = 1$ , можно показать, что  $\langle R_{12} R_{21} \rangle_s = \langle R_{21} R_{12} \rangle_s = \frac{1}{3} N(N+2)$  и формула (76) приводится к виду

$$\langle : (\Delta b_{1,2})^2 : \rangle = \frac{1}{24} N(N+2) \left( \frac{g_1}{\kappa_1} \pm \frac{g_2}{\kappa_2} \right)^2 \geq 0,$$

так что сжатие света отсутствует. Легко проверить, что сжатие света также отсутствует для каждой из сигнальных мод  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  в отдельности, т.е.  $\langle : (\Delta b_{1,2})^2 : \rangle \geq 0$  для случая  $g_2/\kappa_2 \rightarrow 0$  или  $g_1/\kappa_1 \rightarrow 0$ .

Конкретное поведение фактора сжатия  $F_2$  как функция параметра  $x$  при  $g_1/\kappa_1 = g_2/\kappa_2 = 1$  показано на рис. 10 и как функции параметра  $g_1/\kappa_1$  при  $x = \operatorname{ctg}^4 \varphi = 0,75$ ;  $g_2/\kappa_2 = 3$  на рис. 11.



Как видно из рис. 10, степень сжатия для случая одного атома не высока. Для большого числа атомов  $N$  можно таким образом подобрать значения параметров  $g_1/\kappa_1$ ,  $g_2/\kappa_2$  и  $x$ , что сжатие света будет сильным (предсказано 90 %-ное сжатие для случая  $N = 500$  [78], см. рис. 11). В коллективном пределе  $N \rightarrow \infty$  фактор сжатия стре-

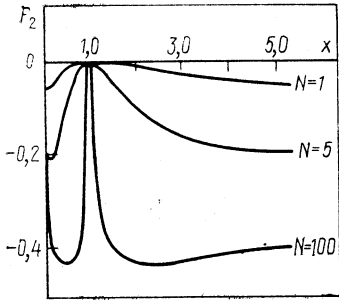


Рис. 10. Фактор  $F_2$  как функция параметра  $x$  при  $\frac{g_1}{\kappa_1} = \frac{g_2}{\kappa_2} = 1$

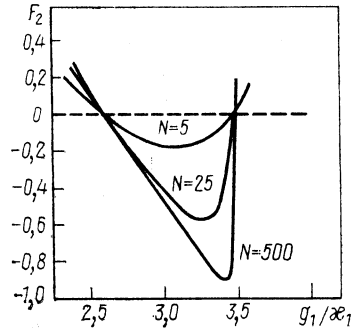


Рис. 11. Фактор  $F_2$  как функция от параметра  $g_1/\kappa_1$  при  $x = 0,75$ ;  $g_2/\kappa_2 = 3$

мится к предельному значению  $F_2 = -1$ , т.е. смесь двух мод  $E_1$  и  $E_2$  имеет тенденцию к полному сжатию в указанном пределе.

Таким образом, предсказанная нами возможность оптимального выбора параметров системы [78] открывает возможность существен-

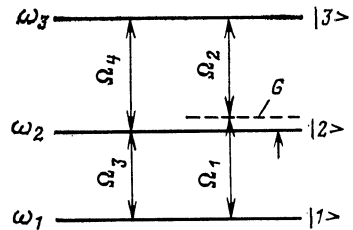


Рис. 12. Трехуровневые атомы, взаимодействующие с двумя полями накачки  $E_3, E_4$  и с двумя резонаторными модами  $E_1$  и  $E_2$

ного улучшения результатов в экспериментах по четырехволновому смешиванию в системе двухуровневых атомов.

Перейдем теперь к рассмотрению процесса генерации сжатого состояния через невырожденное смешивание четырех волн в системе трехуровневых атомов.

Рассмотрим  $N$  трехуровневых атомов в модели Дикке, взаимодействующих с двумя резонаторными модами  $E_1, E_2$  и с двумя волнами накачки  $E_3, E_4$  с частотами  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  и  $\Omega_4$  соответственно (рис. 12).

Пусть поля накачки  $E_3$  и  $E_4$  являются сильными и их можно рассматривать как классические поля. Для простоты предположим, что поле  $E_3$  находится в резонансе с переходом  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  и поле  $E_4$  находится в резонансе с переходом  $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ , т.е.

$$\Omega_3 = \omega_2 - \omega_1 = \omega_{21}; \quad \Omega_4 = \omega_3 - \omega_2 = \omega_{32}.$$

Обозначим  $a_\lambda$  и  $a_\lambda^\dagger$  ( $\lambda = 1, 2$ ) операторы уничтожения и рождения фотонов моды  $E_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ). Когерентная часть гамильтониана системы в приближении вращающихся волн и в представлении взаимодействия имеет вид [80]

$$H_{\text{coh}} = \Delta_1 a_1^\dagger a_1 + \Delta_2 a_2^\dagger a_2 + G_{21} (J_{12} + J_{21}) + \\ + G_{32} (J_{32} + J_{23}) + g_1 (J_{21} a_1 + a_1^\dagger J_{12}) + g_2 (J_{32} a_2 + a_2^\dagger J_{23}), \quad (80)$$

где  $\Delta_1 = \Omega_1 - \omega_{21}$ ;  $\Delta_2 = \Omega_2 - \omega_{32}$ ;  $g_1$  и  $g_2$  — константы связи двух мод  $E_1$  и  $E_2$  с атомами, а  $G_{21}$  и  $G_{32}$  — резонансные частоты Раби атомных переходов  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  и  $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ , возбуждаемых действием полей накачки  $E_3$  и  $E_4$  соответственно;  $J_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) — коллективные угловые моменты трехуровневых атомов и имеют следующий вид в бозонном представлении атомных переменных [80]:

$$J_{ij} = C_i^\dagger C_j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где  $C_i$  и  $C_i^\dagger$  удовлетворяют бозонному коммутационному соотношению

$$[C_i, C_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

и могут рассматриваться как операторы уничтожения и рождения атомов на уровне  $|i\rangle$ .

Пусть резонаторные моды  $E_1$  и  $E_2$  в начальный момент времени находятся в когерентных состояниях. Следуя Агарволу [81], применяя марковское приближение, можно найти уравнение для матрицы плотности атомной системы в виде [81]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i [\tilde{H}_{\text{coh}}, \rho] - \gamma_{21} (J_{21} J_{12} \rho - J_{12} \rho J_{21} + \text{с.с.}) - \\ - \gamma_{32} (J_{32} J_{23} \rho - J_{23} \rho J_{32} + \text{с.с.}), \quad (81)$$

где факторы  $2\gamma_{ij}$  являются скоростями переходов  $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) из-за взаимодействия с вакуумными флуктуациями поля; оператор  $\tilde{H}_{\text{coh}}$  отличается от гамильтониана  $H_{\text{coh}}$  в (80) заменами оператора  $a_\lambda$ ,  $a_\lambda^\dagger$  ( $\lambda = 1, 2$ )  $c$ -числами.

Будем далее рассматривать только случай сильных полей накачки  $E_3$  и  $E_4$ , так что выполняется следующее неравенство:

$$G = (G_{21}^2 + G_{32}^2)^{1/2} \gg N\gamma_{ij}, \quad g_\lambda |E_\lambda|. \quad (82)$$

После проведения канонического преобразования

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha Q_1 - \sin \alpha Q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha Q_3; \\ C_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} Q_2; \\ C_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha Q_1 + \cos \alpha Q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha Q_3 \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

и использования секулярного приближения [пренебрегая быстро осциллирующими членами с частотами  $nG$  ( $n = 1 \div 4$ )], можно найти стационарную матрицу плотности атомной системы в виде [80]

$$\tilde{\rho} = U \rho U^+ = A^{-1} \sum_{P=0}^N Z^P \sum_{M=0}^P |M, P\rangle \langle P, M|, \quad (84)$$

где  $Z = (\gamma_{32} \cos^2 \alpha) / (\gamma_{21} \sin^2 \alpha)$ ;

$$A = [(N + 1) Z^{N+2} - (N + 2) Z^{N+1} + 1] / (Z - 1)^2;$$

$U$  — унитарный оператор, представляющий каноническое преобразование (83); состояние  $|M, P\rangle$  является собственным состоянием операторов  $R_{11}$ ,  $R = R_{11} + R_{33}$  и  $\hat{N} = R_{11} + R_{22} + R_{33}$ , где  $R_{ij} = Q_i^+ Q_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) — коллективные угловые моменты одетых атомов.

Используя стационарную матрицу плотности (84), можно определить характеристическую функцию

$$\chi_R(\xi) = \langle e^{i\xi R} \rangle_s = A^{-1} \frac{(N+1) Y^{N+2} - (N+2) Y^{N+1} + 1}{(Y-1)^2}, \quad (85)$$

где  $Y = Ze^{i\xi}$ .

В выражении (85) и далее  $\langle B \rangle_s$  обозначается средним значением оператора  $B$  в стационарном состоянии (84).

Зная характеристическую функцию, можно вычислить статистические моменты

$$\langle R^n \rangle_s = \frac{\partial^n}{\partial (i\xi)^n} \chi_R(\xi) \Big|_{i\xi=0}. \quad (86)$$

Вернемся к гамильтониану (80). Следуя теории лазера Хакена [91], можно получить уравнения Ланжевена для резонаторных мод 1 и 2, подобные уравнениям (68), (69) для случая смешивания волн в двухуровневой системе:

$$\dot{a}_1(t) = (-i\Delta_1 - \beta_1) a_1(t) - ig_1 J_{12}(t) + f_1(t); \quad (87)$$

$$\dot{a}_2(t) = (-i\Delta_2 - \beta_2) a_2(t) - ig_2 J_{23}(t) + f_2(t), \quad (88)$$

где  $\beta_1, \beta_2$  и  $f_1(t), f_2(t)$  — коэффициенты затухания и операторы шума для резонаторных мод  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  соответственно. Операторы шума  $f_\lambda(t)$  ( $\lambda = 1, 2$ ) удовлетворяют соотношению (70).

Используя каноническое преобразование (83), можно записать коллективные угловые моменты  $J_{12}$  и  $J_{23}$  в виде

$$J_{12} = \frac{1}{2} \cos \alpha (R_{33} - R_{11}) + \frac{1}{2} \cos \alpha (R_{31} - R_{13}) - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha (R_{21} + R_{23}); \quad (89)$$

$$J_{23} = \frac{1}{2} \sin \alpha (R_{33} - R_{11}) + \frac{1}{2} \sin \alpha (R_{13} - R_{31}) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha (R_{12} + R_{32}). \quad (90)$$

Как показано в [80, 92], в секулярном приближении имеют место соотношения

$$R_{12}(t) = e^{-iGt} \tilde{R}_{12}(t); \quad R_{21}(t) = e^{iGt} \tilde{R}_{21}(t); \\ R_{23}(t) = e^{-iGt} \tilde{R}_{23}(t); \quad R_{32}(t) = e^{iGt} \tilde{R}_{32}(t); \\ R_{13}(t) = e^{-2iGt} \tilde{R}_{13}(t); \quad R_{31}(t) = e^{2iGt} \tilde{R}_{31}(t),$$

где  $R_{ii}(t)$  и  $\tilde{R}_{ij}(t)$ , ( $i \neq j$ ) — медленно меняющиеся со временем величины.

Дальнейшие расчеты показывают [80], что значительное сжатие света в смеси двух мод  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  можно получить, если частоты мод  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  находятся вблизи компонент спектра флуоресценции с частотами  $\omega_{21} \pm G$  и  $\omega_{32} \mp G$  соответственно (см. рис. 12), т.е.

$$|\tilde{\Delta}_1|, |\tilde{\Delta}_2| \ll G, \quad (91)$$

где  $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 - G$ ;  $\tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 + G$ ,  
или

$$|\Delta_1 + G|, |\Delta_2 - G| \ll G. \quad (92)$$

Отметим, что применения условий (91) или (92) дают одинаковые результаты в дальнейших расчетах.

С помощью условия (91) и секулярного приближения уравнения (87), (88) приводятся к виду

$$\dot{\tilde{a}}_1(t) = (-i\tilde{\Delta}_1 - \beta_1) \tilde{a}_1(t) + i \frac{g_1}{\beta_1} \sin \alpha \tilde{R}_{23}(t) + \tilde{f}_1(t); \quad (93)$$

$$\dot{\tilde{a}}_2(t) = (-i\tilde{\Delta}_2 - \beta_2) \tilde{a}_2(t) - i \frac{g_2}{\beta_2} \cos \alpha \tilde{R}_{32}(t) + \tilde{f}_2(t), \quad (94)$$

где  $a_1(t) = e^{-iGt}\tilde{a}_1(t)$ ;  $a_2(t) = e^{iGt}\tilde{a}_2(t)$ ;  $f_1(t) = e^{-iGt}\tilde{f}_1(t)$ ;  $f_2(t) = e^{iGt}\tilde{f}_2(t)$ . Действуя по аналогии со случаем двухуровневых атомов, можно получить формулу для нормально упорядоченной вариации фазовых квадратурных компонент  $b_1$  и  $b_2$  смеси двух мод  $E_1$  и  $E_2$  в виде

$$\begin{aligned} \langle (\Delta b_{1,2})^2 \rangle = & \frac{1}{8} \left\{ \frac{g_1^2}{\beta_1^2} \sin^2 \alpha \langle R_{32} R_{23} \rangle_s + \right. \\ & + \frac{g_2^2}{\beta_2^2} \cos^2 \alpha \langle R_{23} R_{32} \rangle_s \pm \frac{g_1 g_2}{\beta_1 \beta_2} \sin \alpha \cos \alpha \times \\ & \left. \times (\langle R_{32} R_{23} \rangle_s + \langle R_{23} R_{32} \rangle_s) \right\}, \end{aligned} \quad (95)$$

где

$$\begin{aligned} \langle R_{23} R_{32} \rangle_s = & \frac{1}{2} (N-2) \langle R \rangle_s - \frac{1}{2} \langle R^2 \rangle_s + N; \\ \langle R_{32} R_{23} \rangle_s = & \frac{1}{2} (N+1) \langle R \rangle_s - \frac{1}{2} \langle R^2 \rangle_s \end{aligned}$$

и  $\langle R \rangle_s$  и  $\langle R^2 \rangle_s$  найдены по формулам (86). В выражении (95) и далее для простоты принято, что  $\tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_2 = 0$  и  $n_{th}(T) = 0$ .

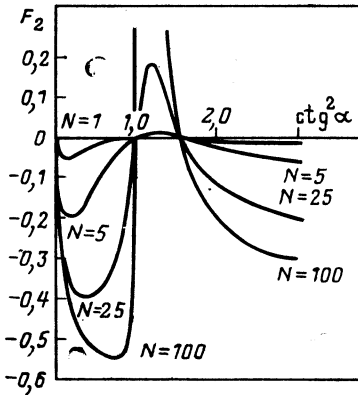


Рис. 13. Фактор  $F_2$  как функция от параметра  $ctg^2 \alpha$  для случая  $g_1/\beta_1 = g_2/\beta_2 = 1$ ;  $\gamma_{32}/\gamma_{21} = 0,8$

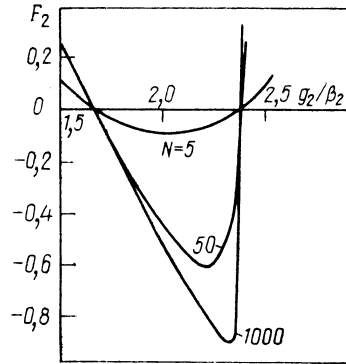


Рис. 14. Фактор  $F_2$  как функция от параметра  $g_2/\beta_2$  для случая  $ctg^2 \alpha = 0,7$ ;  $g_1/\beta_1 = 2$ ;  $\gamma_{32}/\gamma_{21} = 1$

Учитывая роль операторов шума  $f_{1,2}(t)$ , можно найти коммутатор операторов  $b_1$  и  $b_2$  [80]:

$$\langle [b_1, b_2] \rangle = \frac{-i}{8} \left( \frac{g_1^2}{\beta_1^2} \sin^2 \alpha - \frac{g_2^2}{\beta_2^2} \cos^2 \alpha \right) \left( N - \frac{3}{2} \langle R \rangle_s \right) - \frac{i}{2}.$$

Фактор сжатия квадратурных операторов  $b_1$  и  $b_2$  определяется соотношением (78). Его поведение приведено на рис. 13, 14, из которых

видно, что в случае большого числа атомов можно найти подходящую область значений параметров  $g_1/\beta_1$ ,  $g_2/\beta_2$ ,  $\text{ctg}^2 \alpha$  и  $\gamma_{32}/\gamma_{21}$ , в которой имеет место большое сжатие света. Отметим также, что в отличие от [76] коллективные эффекты в нашей схеме не уменьшают, а увеличивают степень сжатия света. Это позволяет надеяться на получение сильного светового поля с высокой степенью сжатия.

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ КВАНТОВОГО СВЕТА

В предыдущих разделах мы рассмотрели методы генерации и свойства квантового света, т.е. не имеющего классического аналога. Интерес к исследованию световых полей, находящихся в квантовых состояниях, вызван не только принципиальной новизной такого рода физических явлений, но и открывающимися возможностями снижать естественные шумы света в точных оптических измерениях и оптической связи.

Как известно, принцип неопределенности Гейзенберга определяет квантово-механический предел точности измерения [94, 95]. Например, в эксперименте передачи информации с использованием когерентного света квантовый предел определяется соотношением неопределенности между фотонным числом  $n$  и фазой поля

ф:  $\langle(\Delta n)^2\rangle \langle(\Delta\varphi)^2\rangle \geq \frac{1}{4}$ . Квантовые пределы измерений числа фотонов

и фазы поля равны  $\langle(\Delta n)^2\rangle \simeq \langle n \rangle$  и  $\langle(\Delta\varphi)^2\rangle \simeq \frac{1}{4\langle n \rangle}$ . Такие пределы измерений вызваны квантовым шумом когерентного состояния [2]. За последнее время большое количество работ сосредоточено на попытке создания «квантового невозмущенного эксперимента» [96—99], целью которого является преодоление стандартного квантового предела шума. В оптическом квантовом невозмущенном эксперименте сжатые состояния света играют ключевую роль. Идея состоит в том, что информацию несет только одна квадратурная фазовая компонента, которая обладает меньшей квантовой флуктуацией, чем обыкновенный когерентный свет, и, таким образом, можно снизить естественные шумы [14, 100—102].

Применение сжатого света в интерференционном детекторе гравитационных волн было обсуждено в [100, 101], где было показано, что хотя применение одномодового сжатого света в одночастотном интерферометре типа Майкельсона не позволяет преодолеть квантовый предел шума, однако его использование намного уменьшает требования к мощности поля, необходимо для достижения квантового предела точности измерения.

Вондурант и Шапиро предложили [101] применять многомодовый сжатый свет в мультимодовом интерферометре для обнаружения гравитационных волн. Было показано [101], что применение двухчастотного сжатого света в двухчастотном интерферометре и использование гетеродинамирования позволяют значительно повысить точ-

ность измерения по сравнению с точностью, определенной стандартным квантовым пределом.

Позже в [14, 102, 105] обсуждено применение субпуассоновского света (названного амплитудным сжатым светом [14]) в невозмущенном эксперименте [14, 105] и в детектировании гравитационных волн [102]. Возможность применения сжатого света в передаче оптической информации обсуждена в [103, 104].

В заключение авторы выражают благодарность Н. Н. Боголюбову, П. Н. Боголюбову, Фам Ле Киену, Э. Капусдику, Р. Танашу, Ю. М. Голубеву, К. А. Прохорову, Г. П. Арумову за полезные обсуждения по разным вопросам этой статьи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глаубер Р. // Квантовая оптика и радиофизика / Под ред. О. В. Богданкевича и А. Н. Крохина. М.: Мир, 1966. С. 91—279.
2. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики: Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
3. Hanbury Brown R., Twiss R. Q. // Nature. 1956. Vol. 177. P. 27—31.
4. Loudon R. // Rep. Progr. Phys. 1980. Vol. 43. P. 913—949.
5. Walls D. F. // Nature. 1979. Vol. 280. P. 451—455.
6. Mandel L. // Physica Scripta. 1986. Vol. 12. P. 34—42.
7. Paul H. // Rev. Mod. Phys. 1982. Vol. 54. P. 1061—1102.
8. Kimble H. J., Dagenais M., Mandel L. // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39. P. 691—695.
9. Dagenais M., Mandel L. // Phys. Rev. 1978. Vol. A18. P. 2217—2223.
10. Short R., Mandel L. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 384—387.
11. Cresser J. D., Häger J., Leuchs G. e. a. // Dissipative Systems in Quantum Optics / Ed. R. Bonifacio. Topics in Current Physics. Berlin — Heidelberg — N.Y.: Springer — Verlag. 1982. Vol. 21. P. 21—59.
12. Friberg S., Hong C. K., Mandel L. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 2409—2412.
13. Hong C. K., Mandel L. // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 59. P. 58—60.
14. Yamamoto Y., Haus H. A. // Rev. Mod. Phys. 1986. Vol. 58. P. 1001—1020.
15. Голубев Ю. М., Соколов Н. В. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 408—416.
16. Stoler D. // Phys. Rev. Lett. 1974. Vol. 33. P. 1397—1400.
17. Mišta L., Peřina J. // Czech. J. Phys. 1977. Vol. B27. P. 831—833.
18. Chmela P. // Acta Phys. Polonica. 1977. Vol. A52. P. 835—843.
19. Голубев Ю. М. // Оптика и спектроскопия, 1979. Т. 46. С. 398—400.
20. Neuman R., Haug H. // Optics. Comm. 1979. Vol. 31. P. 267—270.
21. Agarwal G. S. // Phys. Rev. 1970. Vol. A1. P. 1445—1459.
22. Chandra N., Prakash H. // Phys. Rev. 1970. Vol. A1. P. 1696—1704.
23. Tornau N., Bach A. // Optics Comm. 1974. Vol. 11. P. 46—48.
24. Simaan H. D., Loudon R. // J. Phys. 1978. Vol. A11. P. 435—441.
25. Paul H., Mohr U., Brunner W. // Optics Comm. 1976. Vol. 17. P. 145—148.
26. Паул Х. // Квантовая электроника. 1977. Т. 4. С. 2513—2519.
27. Voight H., Bandilla A., Ritz H. H. // Z. Physik. 1980. Vol. B35. P. 461—463.
28. Walls D. F., Tindle C. T. // Lett. Nuovo cimento. 1971. Vol. 2. P. 915—918.
29. Koziarowski M., Tana's R. // Optics. Comm. 1977. Vol. 21. P. 229—232.
30. Kielich S., Koziarowski M., Tana's R. // Coherence and Quantum Optics IV / Eds. L. Mandel, E. Wolf. N.Y.: Plenum Press. 1978. P. 511—525.
31. Mostowski J., Rzazewski K. // Phys. Lett. 1978. Vol. 166. P. 275—278.

32. Drummond P. D., McNeil K. J., Walls D. F.//Optics Comm. 1979. Vol. 28. P. 255—257.
33. Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S., Tran Quang. J. de Physiq. 1987. Vol. 48. P. 1671—1676.
34. Simaan H. D.//J. Phys. 1975. Vol. A8.P. 1620—1637.
35. Simaan H. D., Loudon R.//J. Phys. 1975. Vol. A8. P. 539—554.
36. Perinova V., Perina J., Srlachetka P., Kielich S.//Acta Phys. Polonica. 1979. Vol. A56. P. 267—281.
37. Szlachetka P., Kielich S., Perina J., Perinova V.//J. Phys. 1979. Vol. A12. P. 1921—1933.
38. Tanas R., Kielich S.//Optics Comm. 1979. Vol. 30. P. 443—447.
39. Ritze H. H.//Z. Physik. 1980. Vol. B39. P. 353—360.
40. Perina J.//Progress in Optics/Ed. E. Wolf. Amsterdam: North-Holland. 1980. Vol. 18. P. 127.
41. Козеровски М.//Квантовая электроника. 1981. Т. 8. С. 1157—1169.
42. Hildred G. P., Hall A. G.//J. Phys. 1978. Vol. B11. P. L209—L212.
43. Cohen-Tannoudji C.//Frontiers in Laser Spectroscopy/Ed. R. Batian, S. Haroch, S. Libetman. Amsterdam: North-Holland, 1977.
44. Apanasevich P. A., Kilin S. Ja.//J. Phys. 1979. Vol. B12. P. L83—L86.
45. Jakeman E., Pike E. R., Pusey P. N., Vaughan J. M.//J. Phys. 1977. Vol. A10. P. L257—L259.
46. Charmichael H. J., Drummond P., Meystre P., Walls D. F.//J. Phys. 1978. Vol. A11. P. L121—L126.
47. Agarwal G. S., Brown A. C., Narducci L. M., Vetri G.//Phys. Rev. 1977. Vol. A15. P. 1613—1624.
48. Narducci L. M., Feng A. H., Gilmore R., Agarmal G. S.//Phys. Rev. 1978. Vol. A18. P. 1571—1580.
49. Stheadel H., Richter Th.//Ann. Physik. Lpz. 1978. Vol. 35. P. 122—13f.
50. Ficek Z., Tana's R., Kielich S.//Optics Comm. 1981. Vol. 36. P. 121—124.
51. Ficek Z., Tana's R., Kielich S.//Phys. Rev. 1984. Vol. A29. P. 2004—2011.
52. Bogolubov N. N., Jr., Aliskenderov E. I., Shumovsky A. S., Tran Quang//J. Phys. 1987. Vol. B2Q. P. 1885—1890.
53. Clauser J. F.//Phys. Rev. 1974. Vol. D9. P. 853—860.
54. Zubairy M. S.//Phys. Lett. 1982. Vol. 87A. P. 162—164.
55. McNeil K. J., Gardiner C. W.//Phys. Rev. 1983. Vol. A28. P. 1560—1566.
56. Reid M. D., Walls D. F.//Phys. Rev. 1986. Vol. 34A. P. 1260—1276.
57. Bogolubov N. N., Shumovsky A. S., Tran Quang//Phys. Lett. 1987. Vol. 123A. P. 71—74.
58. Stoler D.//Phys. Rev. 1970. Vol. D1. P. 3217—3219.
59. Hollenhorst N. N.//Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 1669—1679.
60. Slusher R. E., Hollberg L. W., Yurke B. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 2409—2412.
61. Shelby R., Levenson D., Perlmutter S. H. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 691—694.
62. Schumaker B. L., Perlmutter S. H., Shelby R. M., Levenson M. D.//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 357—359.
63. Ling-An-Wu, Kimble H. J., Hall J. L., Huifa Wu.//Phys. Rev.Lett. 1986. Vol. 57. P. 2520—2523.
64. Hong C. K., Mandel L.//Phys. Rev. 1985. Vol. 32A. P. 974—982.
65. Kozierowski M.//Phys. Rev. 1986. Vol. 34A. P. 3474—3477.
66. Mandel L.//Optics Comm. 1982. Vol. 42. P. 437—439.
67. Kozierowski M., Kielich S.//Phys. Lett. 1983. Vol. A94. P. 213—216.
68. Kozierowski M., Kielich S., Tana's R.//Coherence and Quantum Optics V/Eds. L. Mandel, E. Wolf. N. Y.: Plenum Press. 1984. C. 71—78.
69. Kielich S., Kozierowski M., Tana's R.//Optica Acta. 1985. Vol. 32. P. 1023—1037.
70. Chmela P.//Optics Comm. 1982. Vol. 42. P. 201—204.
71. Kozierowski M., Shumovsky A. S.//Physica. 1987. Vol. 145A. P. 290—304.



72. Mandel L.//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 136—138.
73. Walls D. F., Zoller P.//Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 709—711.
74. Loudon R.//Optics Comm. 1984. Vol. 49. P. 24—27.
75. Lakshmi P. A., Agarwal G. S.//Phys. Rev. 1984. Vol. A29. P. 2260—2264;  
Optics Comm. 1984. Vol. 51. P. 425—427.
76. Collet M. J., Walls D. F., Zoller P.//Optics Comm. 1984, Vol. 52. P. 145—  
149.
77. Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S., Tran Quang//Phys. Lett. 1986.  
Vol. A118. P. 315—318.
78. Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S., Tran Quang//Optics Comm. 1987.  
Vol. 62. P. 49—53.
79. Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S., Tran Quang//Optics Comm. 1987.  
Vol. 64. P. 341.
80. Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S., Tran Quang//J. Phys. B. 1988.  
Vol. 20. P. L 447—L 452.
81. Agarwal G. S.//Springer Tracts in Modern Physics 1974. Vol. 70. P. 115—  
117.
82. Dalibard J., Reynaud S.//New trends in Atomic physics/Ed. by G. Gryn-  
berg and R. Stora. Amsterdam: North-Holland. 1984. P. 181—194.
83. Sainz L. de los Terreros, Santos M., Gonzabz-Dias P. F.//Phys. Rev. 1985.  
Vol. A31. P. 1598—1606.
84. Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S., Tran Quang//J. de Physiq. 1987.  
Vol. 48. P. 1925—1931.
85. Yuen H. P.//Phys. Rev. 1976. Vol. A13. P. 2226—2243.
86. Yuen H. P., Shapiro J. H.//Opt. Lett. 1979. Vol. 4. P. 334—337.
87. Bondurant R. S., Kumar P., Shapiro J. H., Maeda M.//Phys. Rev. 1984.  
Vol. A30. P. 343—353.
88. Reid M. D., Walls D. F.//Phys. Rev. 1985. Vol. A31. P. 1622—1635.
89. Reid M. D., Walls D. F., Dalton B. J.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55.  
P. 1288—1290.
90. Klauder J. R., NcCall S. L., Yuske B.//Phys. Rev. 1986. Vol. A33. P.  
3204—3218.
91. Haken H., Laser Theory//Handbuch der Physik, Band XXV/2C. Berlin:  
Springer. 1970. P. 33—49.
92. Bogolubov N. N., Jr., Shumovsky A. S., Tran Quang//Phys. Lett. 1985.  
Vol. 112A. P. 323—326; Ibid. 1986. Vol. 116A. 175—179.
93. Bogolubov N. N., Jr., Fam Le Kien, Shumovsky A. S.//Europhysics Lett.  
1987. Vol. 4. P. 281—285.
94. Bohr N.//Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 696—702.
95. Einstein A., Podolsky B., Rosen N.//Phys. Rev. 1935. Vol. 47. P. 777—  
780.
96. Braginsky V. B., Caves C. M., Thorn K. S.//Phys. Rev. 1977. Vol. D15.  
P. 2047—2068.
97. Unruh W. G.//Phys. Rev. 1978. Vol. D18. P. 1764—1772.
98. Thorne K. S., Drever R. W. P., Caves C. M. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1978.  
Vol. 40. P. 667—671.
99. Yuen H. P.//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 719—722.
100. Caves C. M.//Phys. Rev. 1981. Vol. D23. P. 1693—1708.
101. Bondurant R. S., Shapiro J. H.//Phys. Rev. 1984. Vol. D30. P. 2548—  
2556.
102. Колобов М. И., Соколов И. В.//ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 1889—1899.
103. Shapiro J. H., Wagner S. S.//IEEE J. Quantum Electron. 1984. Vol.  
QE-20. P. 803—809.
104. Yuen H. P., Shapiro J. H.//IEEE Trans. Inform. Theory. 1980. Vol.  
IT-26. P. 78—82.
105. Imoto N., Haus H. A., Yamamoto Y.//Phys. Rev. 1985. Vol. 32A. P.  
2287—2292.