

УДК 539.1.01:530.145

АСИМПТОТИКА ФОРМФАКТОРА ПИОНА В КХД

А. В. Радюшкин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

На примере исследования асимптотики формфактора пиона излагается пертурбативный подход к анализу жестких эксклюзивных процессов в квантовой хромодинамике. Изложены основные элементы подхода: методика доказательства теоремы о факторизации вкладов малых и больших расстояний для амплитуд жестких процессов в КХД, анализ эволюции волновой функции пиона в одно- и двухпетлевым приближениях, способы учета радиационных поправок.

Using as an example the study of the asymptotic behaviour of the pion electromagnetic form factor we describe the perturbative approach to the analysis of exclusive hard processes in quantum chromodynamics. The basic elements of the approach are presented: the methods of proving the theorem about factorization of the contributions due to short and long distances for the amplitudes of hard processes in QCD, the analysis of the pion wave function evolution in one- and two-loop approximation, the inclusion of the radiative corrections.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование асимптотического поведения упругих адронных формфакторов в рамках квантовой хромодинамики (КХД), начатое в работах [1—11], явилось необходимым шагом на пути расширения области применимости пертурбативной КХД и распространения ее на новый класс высокоэнергетических явлений — эксклюзивные жесткие процессы. Специфической чертой процессов упругого жесткого рассеяния является то, что сталкивающиеся частицы глубоко проникают друг в друга, не «рассыпаясь» при этом, однако, на огромное число вторичных частиц. Следовательно, изучение характеристик таких процессов дает важную информацию о наиболее глубинных свойствах частиц, в частности, не только о точности составляющих, но и о их числе. В качестве наиболее яркого примера можно привести правила кваркового счета [12, 13], сыгравшие важную роль в упрочении позиций кварковой картины строения адронов. Они непосредственным образом связывают показатель степенного убывания адронных формфакторов с числом валентных кварков адрона.

Одним из основных расчетных методов в КХД является теория возмущений (ГВ), т. е. разложение по КХД константе связи [14, 15]. Поскольку это разложение оправдано только в области больших передач импульса (или малых расстояний), краеугольным камнем

для любых приложений пертурбативной КХД к реальным процессам, как инклюзивным, так и эксклюзивным, является факторизация вкладов малых и больших расстояний. В настоящее время известно несколько различающихся в технических аспектах подходов к факторизации вкладов [16—22]. Основы развитой нами техники факторизации изложены в обзоре [23] на примере простейших характеристик процессов e^+e^- -аннигиляции в адроны и глубоконеупругого рассеяния. Эта техника эффективна и при анализе жестких эксклюзивных процессов. С ее помощью, в частности, удалось получить полное доказательство факторизационной теоремы для асимптотики простейшего процесса жесткого упругого рассеяния $el \rightarrow el$, т. е. для электромагнитного формфактора пиона в пространственноподобной области передач импульса. Использование методов пертурбативной КХД для более сложных задач (поведение формфакторов во времениподобной области, распады адронов, упругое адрон-адронное рассеяние и т. п. [10, 24, 25]) опирается на ряд предложений, в рамках самой пертурбативной КХД не доказанных, а возможно, и не следующих из нее. Поэтому в настоящем обзоре нашей целью будет изложение аппарата пертурбативного КХД-подхода к жестким эксклюзивным процессам на примере наиболее исследованной задачи об асимптотике электромагнитного формфактора пиона.

Здесь следует подчеркнуть, что для упругих формфакторов даже утверждение о том, что их асимптотика при больших передачах импульса определяется динамикой малых расстояний, вовсе не является очевидным. В теории поля существуют модели, в которых это не так. Эвристическое обсуждение (на языке партонной модели) взаимосвязи между различными механизмами, управляющими поведением формфакторов связанных состояний в области больших передач импульсов, приведено в разд. 1, имеющем вводный характер. Там же обсуждается постановка задачи о формфакторах связанных состояний в квантовой теории поля. Доказательство теоремы о факторизации вкладов малых и больших расстояний для асимптотики формфактора пиона в КХД дано в разд. 2. Раздел 3 посвящен изучению радиационных поправок к асимптотике формфактора пиона, без учета которых предсказания пертурбативной КХД не имеют нужной жесткости. Необходимые сведения об анализе асимптотик жестких процессов кратко изложены в приложении.

1. ФОРМФАКТОРЫ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Асимптотика упругих формфакторов в партонной модели. Как уже указывалось во введении, характер асимптотического поведения формфактора $F(Q^2)$ составной частицы определяется числом n ее точечноподобных составляющих (валентных кварков-партонов): чем больше составляющих, тем быстрее убывает $F(Q^2)$ с ростом Q^2 . Согласно правилам кваркового счета [12, 13], связь между асимпто-

тикой $F(Q^2)$ и n имеет следующий вид:

$$F(Q^2) \sim (1/Q^2)^{n-1}, \quad Q^2 \rightarrow \infty \quad (1)$$

(где $Q^2 = -q^2$, а q — передача импульса).

Жесткое перерасcеяние. Первоначально [12] правила кваркового счета (ПКС) были получены из общих принципов, основанных на анализе размерностей. Затем [13] был найден и конкретный динамический механизм — жесткое перерасcеяние кварков, обеспечивающий выполнение ПКС в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$. В картине жесткого перерасcеяния [12] считается, что большую передачу импульса сначала принимает на себя один из валентных кварков, а затем, посредством жесткого перерасcеяния (рис. 1), эта передача распределяется

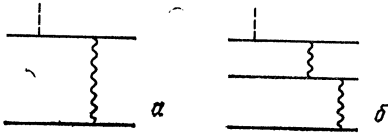


Рис. 1. Картина жесткого расcеяния для формфакторов: а — пиона; б — протона

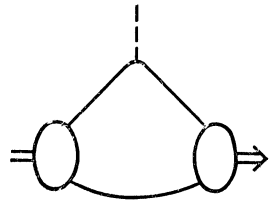


Рис. 2. Фейнмановский механизм для формфактора пиона

между всеми валентными кварками. Предполагается, что в системе бесконечного импульса все валентные кварки в начальном и конечном состояниях несут конечные доли импульсов соответствующим адронам. Как следствие, все импульсы, протекающие по линиям партонного подпроцесса, имеют виртуальность порядка Q^2 . Показатель $(n - 1)$ в формуле (1) в такой интерпретации есть просто минимальное число глюонных обменов.

Фейнмановский механизм. Ранее для объяснения степенного поведения формфакторов Фейнманом был предложен другой механизм [26], предполагающий, что основной вклад в асимптотику формфактора дает конфигурация, когда валентный кварк, поглощающий большую передачу импульса, несет весь импульс адрона. Остальные кварки считаются мягкими и могут быть ассоциированы с адроном как начального, так и конечного состояний (рис. 2). В этом случае, как видим, динамика малых расстояний не играет никакой роли.

Взаимосвязь механизмов. Очевидно, фейнмановский механизм работает только в том случае, если амплитуда вероятности найти адрон в состоянии, когда один единственный кварк несет весь его импульс, достаточно велика. Две упомянутые картины исключают друг друга, поэтому доминирует либо механизм Фейнмана, либо картина жесткого перерасcеяния. Попытаемся дать интуитивную картину взаимосвязи между двумя этими механизмами [27].

Предположим, что вклад диаграммы на рис. 1 может быть записан в форме, подсказываемой партонной моделью

$$F(Q^2) \sim \int \varphi(y, k'_\perp) \varphi(x, k_\perp) V(Q^2(1-x)(1-y) + (k_\perp - k'_\perp)^2) dx dy d^2k_\perp d^2k'_\perp, \quad (2)$$

где φ, φ^* — некоторые волновые функции, описывающие отщепление от адрона одного из валентных кварков с импульсом $k = (xP, k_\perp)$ ($k' = (yP', k'_\perp)$), а $V((k - k')^2)$ описывает взаимодействие между

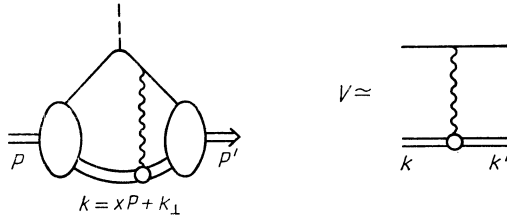


Рис. 3. Партонное представление для формулы жесткого рассеяния

лощепившимся кварком и остальной частью адрона (рис. 3). Предположим также, что волновые функции быстро падают с ростом поперечного импульса k_\perp , т. е. что можно заменить $(k_\perp - k'_\perp)^2$ некоторым средним значением $M^2 \simeq 2 \langle k_\perp^2 \rangle$. Если взять $V(t) \sim t^{-\alpha}$, то

$$F(Q^2) \sim \int dx dy \varphi^*(y) \varphi(x) [Q^2(1-x)(1-y) + M^2]^{-\alpha}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что величиной M^2 можно пренебречь только в том случае, когда интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha} \varphi(x) \quad (4)$$

сходится на верхнем пределе. В противном случае поведение фактора в (3) определяется при $Q^2 \rightarrow \infty$ областью $1-x \sim M^2/Q^2$, и результат зависит от вида функции $\varphi(x)$. Из формулы кваркового счета (1) следует, что для теорий с безразмерной константой связи (это предполагалось при выводе (1) в [12]) выполняется соотношение $\alpha = n - 1$. Поэтому вклад жесткого подпроцесса доминирует в асимптотике, если $\varphi(x)$ ведет себя при $x \rightarrow 1$ как $(1-x)^\beta$ с $\beta > \alpha - 1$ (т. е. $\beta > n - 2$). В обратной ситуации, когда $\beta < \alpha - 1$, поведение $F_\pi(Q^2)$ при больших Q^2 определяется видом волновой функции $\varphi(x)$ при $x \rightarrow 1$, и в результате

$$F(Q^2) \sim (Q^2)^{-\beta-1}. \quad (5)$$

В старой (не квантово-хромодинамической) партонной модели [26] предполагалось, что $V(t)$ очень быстро убывает при $t \rightarrow \infty$, т. е. что $\alpha \sim \infty$. В этом случае механизм Фейнмана доминирует всегда, но и тогда возможно выполнение закона (1). Для этого необходимо, чтобы β подчинялось условию $\beta = n - 1$, т. е. чтобы волновые функции адронов при $x \rightarrow 1$ вели себя следующим образом: $\varphi_\pi(x) \sim \sim \text{const}$, $\varphi_N(x) \sim (1 - x)$ и т. д. Если волновые функции $\varphi(x)$ при $x \rightarrow 1$ убывают быстрее, то в конечном итоге при $Q^2 \rightarrow \infty$ доминирует механизм жесткого рассеяния. Но при умеренно больших Q^2 , однако, основной вклад вполне может быть обусловлен вкладом фейнмановского механизма, если вклад диаграмм жесткого рассеяния по каким-либо причинам имеет численную малость. Иными словами, если $V(t)$ представляет собой сумму быстро (скажем, экспоненциально) убывающего мягкого вклада $V_1(t) \sim \sim A \exp(at)$ и ведущего себя при $|t| \rightarrow \infty$ степенным образом жесткого вклада $V_2(t) \sim B(at)^{1-n}$, и при этом $B \ll A$, то в достаточно широкой области по Q^2 может доминировать вклад, обусловленный $V_1(t)$, и лишь при очень больших Q^2 будет доминировать асимптотический вклад, обусловленный $V_2(t)$.

Формфакторы связанных состояний в квантовой теории поля. Приведенные выше рассуждения имеют качественный характер и их необходимо, конечно, подкрепить более серьезным теоретико-полевым анализом. Обычно в основу описания составных частиц в квантовой теории поля кладется формализм Бете — Солпитера [28]. В этом формализме частица с импульсом P , состоящая из частицы ψ_1 и античастицы $\bar{\psi}_2$, описывается волновой функцией Бете — Солпитера

$$\chi_P(x) = \left\langle 0 \left| T \left\{ \psi_1 \left(\frac{x}{2} \right) \bar{\psi}_2 \left(-\frac{x}{2} \right) \right\} \right| P \right\rangle, \quad (6)$$

которая зависит не только от относительного расстояния x , но и от относительного времени x_0 составляющих. В квазипотенциальном подходе [29], являющемся трехмерным формализмом, используется значение волновой функции Бете — Солпитера на какой-либо гиперповерхности, например, при $x_0 = 0$ [29], на нуль-плоскости $x_0 + x_3 = 0$ [30] или на поверхности $(xP) = 0$ [31] (ковариантное обобщение условия $x_0 = 0$).

Динамические переменные (формфакторы, амплитуды рассеяния) составных частиц могут быть выражены через функции Бете — Солпитера [32] или квазипотенциальные [33]. Формфакторы составных частиц рассматривались рядом авторов, использовавших, в частности, лестничное приближение для уравнения Бете — Солпитера [34], идеи конформной инвариантности [35], ряд результатов был получен в рамках трехмерных формализмов [36]. В [37, 38] были сделаны первые попытки использовать для исследования асимптотики формфакторов методы ренормгруппы и операторные разложения. В нашей работе [39] формфактор пиона был исследован в лест-

ничном приближении кварковой модели со скалярными глюонами методом, основанным на использовании анализа асимптотик фейнмановских диаграмм в альфа-представлении.

Дальнейшее обобщение методов, использованных в [39], послужило основой нашего подхода [1, 7, 8] к факторизации вкладов малых и больших расстояний для асимптотики формфактора пиона в КХД. Были предложены и другие подходы [2, 3—6, 9—11, 20, 25] к исследованию асимптотик адронных формфакторов в КХД, основанные на использовании операторных разложений [2, 3, 6, 9, 20, 25], формализма Бете — Солпитера [4], квазипотенциального формализма в переменных «светового фронта» [11] и тесно связанной с ним формулировки ТВ на световом конусе [5, 10].

Факторизация и формфакторы связанных состояний в теории возмущений. Связанные состояния отсутствуют в любом конечном

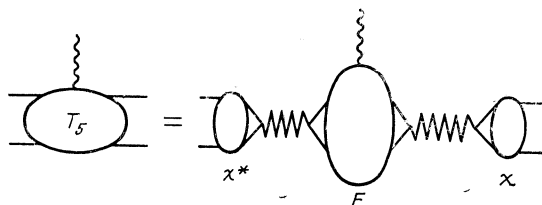


Рис. 4. Полюсная структура пятихвостки

порядке ТВ. Необходимо, следовательно, рассматривать полные амплитуды, получающиеся в результате суммирования по всем порядкам ТВ. Исследование электромагнитного формфактора пиона, трактуемого как связанное состояние кварка и антикварка в КХД, основывается поэтому на анализе полной амплитуды $T(P, P')$, описывающей процесс $q\bar{q}\gamma \rightarrow q'\bar{q}'$ (P, P' — суммарные импульсы начального и конечного состояний). Разумеется, нужно взять такую комбинацию кварковых полей $C(q, \bar{q})$, которая имеет ненулевую проекцию на пионное состояние $|P\rangle$:

$$\langle 0 | C(q, \bar{q}) | P \rangle \equiv \chi_P \neq 0. \quad (7)$$

В этом случае вспомогательная амплитуда T_5 будет иметь два полюса [ср. с [32)], соответствующие пионным связанным состояниям (рис. 4):

$$T(P, P' \dots) = i^2 \frac{\chi_{P'} F_\pi(q) \chi_P^*}{(P^2 - m_\pi^2)(P'^2 - m_\pi^2)} + \dots, \quad (8)$$

где $q = P' - P$, а $F_\pi(q)$ — формфактор пиона

$$\langle P' | J_\mu(0) | P \rangle = (P_\mu + P'_\mu) F_\pi(q). \quad (9)$$

Предположим далее, что нам удалось показать, что в любом конечном порядке теории возмущений поведение амплитуды T дается выражением, в котором вклады малых и больших расстояний факторизуются (рис. 5, а):

$$T(P', P) = f_{P'}^* \otimes E \otimes f_P \{1 + O(1/Q^2)\}, \quad (10)$$

причем функции $f_P, f_{P'}^*$ описывают взаимодействие на больших расстояниях (т. е. в начальном и конечном состояниях соответственно), а функция E — на малых. Если асимптотика полной амплитуды дается суммой асимптотик всех диаграмм (в рамках ТВ ничего

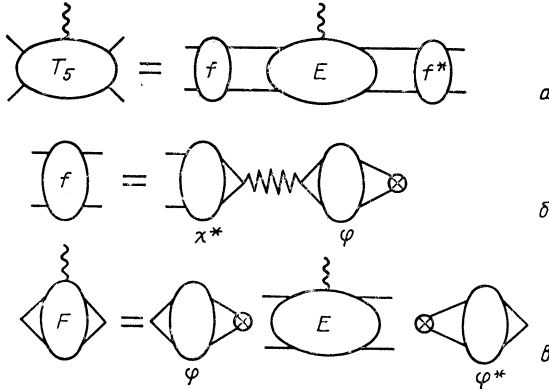


Рис. 5. Связь факторизованных представлений для пятиточечной функции и формфактора связанного состояния:

а — факторизованное представление для пятиточности; б — полная структура блока, описывающего вклад больших расстояний; в — факторизованное представление для формфактора связанного состояния

другого мы и не можем предположить), то выражение (10) будет справедливо и для полной амплитуды. Функции f, f^* в этом случае даются функциями Грина вида

$$f_P = \langle 0 | \mathcal{O} C_P(q, \bar{q}) | 0 \rangle, \quad (11)$$

где \mathcal{O} — некоторый оператор, построенный из кварковых и глюонных полей. Функции f, f^* , очевидно, тоже должны иметь полюсы, соответствующие пионным состояниям (рис. 5, б):

$$f_P = i \frac{\chi_P}{P^2 - m_\pi^2} \langle 0 | \mathcal{O} | P \rangle. \quad (12)$$

Сравнивая теперь выражения (8) и (10), (12), приходим к выводу, что

$$F_\pi(q) = \langle P' | \mathcal{O} | 0 \rangle \otimes E \otimes \langle 0 | \mathcal{O}' | P' \rangle \{1 + O(1/Q^2)\} \quad (13)$$

(рис. 5, в). Иными словами, если факторизация (10) установлена для вспомогательной амплитуды T в каждом порядке ТВ, то она

справедлива и для фактора связанного состояния (пиона), причем конкретный вид амплитуды T (т. е. проекции $\chi_P, \chi_{P'}^*$) на окончательном результате никак не сказывается: достаточно того, что эти проекции отличны от нуля. Это означает, что мы можем выбрать любую комбинацию кварковых q, \bar{q} и глюонных A_μ полей, какая нам покажется удобной, при условии, конечно, что $\langle 0 | C(q, \bar{q}, A) | P \rangle \neq 0$. Это обстоятельство весьма существенно в КХД, поскольку простейшая комбинация $q(p_1) \bar{q}(P - p_1)$ [или, в координатном представлении, $q(x) \bar{q}(y)$] не является калибровочно-инвариантной и поэтому не может, строго говоря, считаться бесцветной. Ее свойства (особенно в инфракрасной области) могут вследствие этого совершенно отличаться от свойств бесцветного состояния, каковым, несомненно, должен являться пион. Чтобы получить калибровочно-инвариантную комбинацию, можно в качестве $C(q, \bar{q}, A)$ взять, например,

$$C = \bar{q}(x) \gamma_5 \hat{E}(x, y; A) q(y), \quad (14)$$

где $\hat{E}(x, y; A)$ — P -экспонента

$$\hat{E}(x, y; A) = P \exp \left(ig(x^\mu - y^\mu) \int_0^1 dt A_\mu(xt + y(1-t)) \right). \quad (15)$$

Однако самый простой выход — взять поля q, \bar{q} в одной и той же точке

$$C(q, \bar{q}) = \bar{q}(x) \gamma_5 q(x) \equiv j_5(x)_x$$

т. е. исследовать трехточечную функцию Грина

$$T_3 = \int \langle 0 | j_5^*(x) J^\mu(0) j_5(y) | 0 \rangle \exp(iPx - iP'y) d^4x d^4y \quad (16)$$

в области больших передач импульса $q^2 = -Q^2$.

2. ФАКТОРИЗАЦИЯ ВКЛАДОВ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЙ

Альфа-представление для трехточечной функции. В основе нашего подхода к жестким процессам в КХД лежит анализ асимптотик диаграмм ТВ в альфа-представлении [40—42], обобщенный на случай калибровочных теорий в [43]. Его изложению посвящены обзоры [17, 23]. Необходимые для дальнейшего сведения об анализе в альфа-представлении можно найти в приложении.

Трехточечная функция $T_3(P, P')$ зависит от трех импульсных инвариантов: P^2 , P'^2 и $q^2 = (P' - P)^2$. В альфа-представлении ее можно записать в виде (см. [17, 23]):

$$T_3(P, P') = \sum_{\text{диаграммы ТВ}} \frac{(g^2)^{z-1}}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \prod_\sigma d\alpha_\sigma \frac{1}{D^2(\alpha)} G(\alpha; P, P') \times \exp \left\{ -iQ^2 \frac{A(\alpha)}{D(\alpha)} + iP^2 \frac{A_1(\alpha)}{D(\alpha)} + iP'^2 \frac{A_2(\alpha)}{D(\alpha)} - i \sum_\sigma (m_\sigma^2 - i\epsilon) \alpha_\sigma \right\}, \quad (17)$$

где z — число петель соответствующей диаграммы Фейнмана, предэкспонента $G(\alpha, P, P')$ — некоторый полином по P, P' ; величины $A(\alpha), A_1(\alpha), A_2(\alpha), D(\alpha)$ — положительные функции параметров α , однозначно связанные со структурой рассматриваемой диаграммы.

Общая структура вкладов для трехточечной функции. Согласно общему рецепту [23], для изучения асимптотики амплитуды необходимо найти области α -пространства, в которых множитель

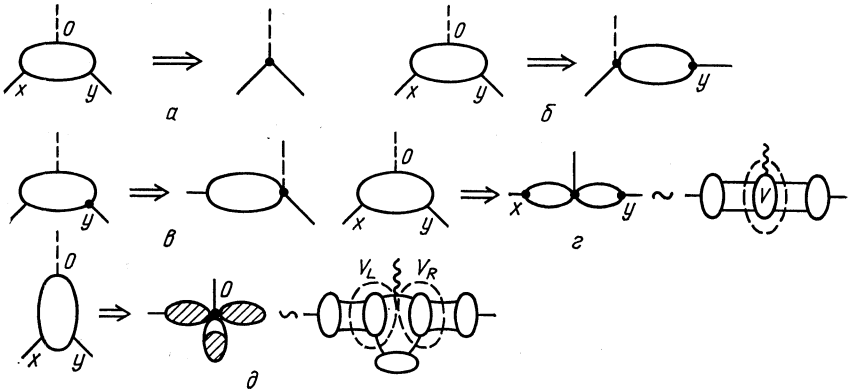


Рис. 6. Структура вкладов, соответствующих режиму малых расстояний для трехточечной функции

$A(\alpha)/D(\alpha)$ перед большим импульсным инвариантом Q^2 (единственным в данном случае) исчезает. Режим малых расстояний (РМР) обеспечивает это в четырех случаях (рис. 6):

- 1) в точку сжимается вся диаграмма (рис. 6, а);
- 2) в точку сжимается некоторый подграф, содержащий либо вершины 0 и x (рис. 6, б), либо
- 3) вершины 0 и y (рис. 6, в);
- 4) в точку сжимается подграф, содержащий только вершину 0 (рис. 6, г, д).

Лишь в четвертом случае редуцированная диаграмма содержит компоненты, описывающие взаимодействие на больших расстояниях как в начальном, так и в конечном состояниях и могущие, следовательно дать полюсы $(P^2 - m_\pi^2)^{-1}$, $(P'^2 - m_\pi^2)^{-1}$ после суммирования по всем порядкам. Коэффициентные функции конфигураций рис. 6, *a* — *в* вычисляются при нулевых значениях инвариантов P^2 и/или P'^2 (см. [23]) и никаких полюсов типа $1/(P^2 - m_\pi^2)$ по этим переменным, естественно, не содержат.

„Двойное сжатие“. Отметим, что четвертый случай имеет два варианта (рис. 6, *з* и *д*). Конфигурация рис. 6, *д* означает, что оба подграфа — V_L и V_R — одновременно дают ведущий полюс, скажем $(J + 1)^{-1}$, в меллиновский образ формфактора $\Phi(J)$. С этой конфигурацией реально приходится иметь дело в некоторых простых скалярных теориях [8]. В теориях со спинорными кварками эта конфигурация в действительности не работает (это будет продемонстрировано позже), поскольку если подграф V_L дает полюс $(J + 1)^{-1}$, то подграф V_R может генерировать полюс только при $J = -2$ или левее, а при $J = -1$ его вклад регулярен.

Иерархия вкладов. Оценки вкладов РМР-подграфов могут быть получены из формулы (П.7). Поскольку $T_\mu = (P_\mu + P'_\mu) F$, удобно рассматривать свертку $T = P_\mu T^\mu$. Тогда

$$F = 2T/Q^2 \tag{18}$$

и формула (П.7) будет давать оценку непосредственно на T , а для вклада в F будем иметь

$$F_V^{\text{РМР}} \propto Q^{2-\sum t_i} \tag{19}$$

Ведущий РМР-вклад $F_V^{\text{РМР}} \propto 1/Q^2$ дают, таким образом, подграфы с четырьмя внешними кварковыми линиями.

Конфигурация рис. 6, *в*, в которой нижний кварк находится в инфракрасном режиме ($\alpha \rightarrow \infty$), дает с учетом формулы (18) вклад

$$F^{\text{ИР}} \propto Q^{-2-\sum t_i} \rightarrow 1/Q^4, \tag{20}$$

поскольку подграф S имеет как минимум две внешние кварковые линии.

Комбинированный РМР — ИР-режим в случае, когда ИР-подграф S имеет только глюонные внешние линии, дает тот же вклад, что и РМР-режим для конфигурации без S . Это следует из оценки (П.9), которая в нашем случае дает

$$F_V^{\text{РМР}} \Big|_S^{\text{ИР}}(Q^2) \leq Q^{2-\sum_V t_i - \sum_S t_j} \tag{21}$$

Мягкие вклады. В действительности после суммирования по всем диаграммам данного порядка все ведущие РМР — ИР-вклады сократятся вследствие того, что мягкие длинноволновые глюоны «чув-

ствуют» только суммарный цветовой заряд системы и их взаимодействие с бесцветными системами подавлено. Наличие ведущих вкладов $F_V^{\text{RMP}} \text{ и } F_S^{\text{RMP}} \sim 1/Q^2$ в отдельных диаграммах отражает лишь тот факт, что исследуемая бесцветная система состоит из заряженных по цвету объектов: отдельная диаграмма «ничего не знает» о бесцветности всей системы.

Технически суммирование по всевозможным наборам мягких глюонов можно провести с помощью методики, описанной в [23]. Поскольку все внешние линии в рассматриваемом случае являются бесцветными, цветные линии соответствующих диаграмм образуют замкнутые циклы. Поэтому в результате суммирования мы получим P -экспоненту, взятую по замкнутому контуру. Затем нужно учесть, что

$$P \exp \left(ig \oint A_\mu(z) dz^\mu \right) = 1 + O(G).$$

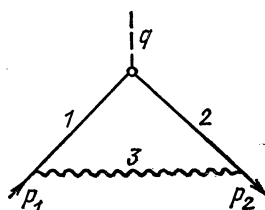


Рис. 7. Однопетлевой вклад в формфактор кварка

Единица соответствует конфигурации без мягких обменов (т. е. «чистому» РМР-случаю), а вклад $O(G)$ означает, что суммарный вклад всех конфигураций, содержащих мягкие обмены, подавлен степенным образом в силу (21), поскольку поле $G_{\mu\nu}$ имеет твист 1.

Следует отметить, что и РМР-вклады в задачах формфакторного типа имеют свою специфику, а именно наличие во вкладах отдельных диаграмм дваждылогарифмических (ДЛ) вкладов. Для иллюстрации этой специфики рассмотрим поведение формфактора кварка в КХД.

Формфактор кварка в однопетлевом приближении. Рассмотрим однопетлевой вклад в дираковский формфактор кварка $f(Q^2)$ (рис. 7). Введем меллиновское преобразование для $f(Q^2)$:

$$f(Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(1-J) (Q^2)^J \Phi(J) dJ. \quad (22)$$

Для нас интересна сейчас только ультрафиолетово-конечная часть вклада, меллиновский образ которой имеет следующее альфа-представление:

$$\Phi^{\text{сход}}(J) = -\frac{g^2}{8\pi^2} C_F \int_0^{i\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{D^2(\alpha)} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{D(\alpha)} \right)^{J-1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{D} \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{\alpha_2}{D} \right) \exp \left\{ p_1^2 \frac{\alpha_1 \alpha_3}{D} + p_2^2 \frac{\alpha_2 \alpha_3}{D} - m_g^2 \alpha_3 - m_q^2 (\alpha_1 + \alpha_2) \right\}, \quad (23)$$

где $D(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$; m_q — масса кварка; m_g — масса (фиктивная) глюона.

Исследуем сначала поведение этого вклада в судаковском режиме — $p_1^2 \sim -p_2^2 \gg m_g^2$. Отметим, что при таком выборе кинематики интегралы по α_3 имеют необходимое инфракрасное обрезание, и, следовательно, можно оставить нулевой массу глюона m_g . Однако пределы $Q^2 \rightarrow \infty$, $m_g \rightarrow 0$ в данном случае не коммутируют, и с методической точки зрения полезно исследовать оба случая: $m_g \neq 0$ и $m_g = 0$.

Рассматриваемая диаграмма имеет четыре ведущих РМР-подграфа:

$$V_1 = \{\sigma_1\}, V_2 = \{\sigma_2\}, V_3 = \{\sigma_1, \sigma_2\}, V_4 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

Интегрируя по малому λ ($\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$), затем по малому β_1 ($\beta_1 = \alpha_1/\lambda$) и малому β_2 ($\beta_2 = \alpha_2/\lambda$), получаем максимальную сингулярность J^{-3} , соответствующую ДЛ-вкладу $\sim g^2 \ln^2(Q^2/P^2)$. Заметим, что ДЛ-вклад обусловлен интегрированием по области $\lambda \gg \beta_1 \lambda \sim \beta_2 \lambda$, т. е. $\lambda_3 \gg \alpha_1 \sim \alpha_2$. Основной вклад дает область, в которой $Q^2 \alpha_1 \alpha_2 / \lambda \sim 1$, т. е. область $\alpha_1 \sim \alpha_2 \sim c/Q^2$, $\alpha_3 \sim c^2/Q^2$, где $c \ll 1$. В импульсном представлении это соответствует интегрированию по области $P^2 \ll k_3^2 \ll Q^2$.

Для безмассовых глюонов имеется еще и инфракрасный режим: $\alpha_3 \rightarrow \infty$, который также дает полюс J^{-1} . Основной вклад при этом дает область $\alpha_3 \sim Q^2/P^4$, или, в импульсном представлении, $k_3^2 \sim P^4/Q^2$. В этом случае сингулярность J^{-3} можно получить также и за счет интегрирования по области $\alpha_1 \sim \alpha_2 \rightarrow 0$, $\alpha_3 \rightarrow \infty$.

Таким образом, в судаковском режиме имеется два типа ДЛ-вкладов. Дваждылогарифмы первого типа, обусловленные интегрированием по малым α , имеются как при $m_g \neq 0$, так и при $m_g = 0$, а ДЛ второго типа, возникающие в результате интегрирования по области $\alpha_3 \rightarrow \infty$ (ИР), присутствуют только при $m_g = 0$. Как следствие, для $m_g = 0$ ДЛ-вклад в 2 раза больше, чем для $m_g \neq 0$:

$$f(Q^2)|_{m_g=0} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{Q^2}{-p_1^2}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{-p_2^2}\right). \quad (24)$$

При $m_g \neq 0$ вклад, полученный из области $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$, $\lambda > 1/p^2$, логарифмически зависит от массы глюона:

$$f(Q^2)|_{m_g \neq 0} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \ln^2\left(\frac{Q^2}{-p^2}\right) - \frac{g^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{Q^2}{-p^2}\right) \ln\left(\frac{p^2}{m_g^2}\right), \quad (25)$$

т. е. сингулярен при $m_g \rightarrow 0$. Эта бесконечность как бы сигнализирует о том, что при $m_g = 0$ необходимо учесть «инфракрасный» полюс J^{-1} , возникающий в результате интегрирования по области $\alpha \sim Q^2/p^4$. При $m_g \neq 0$ имеется, однако, режущий фактор $\exp(-i\alpha m_g^2)$, который приводит к экспоненциальному подавлению инфракрасного вклада, если $Q^2 m_g^2/p^4 \gg 1$. Таким образом, формула (25) справедлива только при $Q^2 \gg p_1^2 p_2^2/m_g^2$. Отсюда следует, что переход к пределу $m_g \rightarrow 0$ в (25) невозможен, т. е. пределы $Q^2 \rightarrow \infty$, $m_g \rightarrow 0$ в данном случае не коммутируют.

Для формфактора на массовой поверхности $p_1^2 = p_2^2 = m_q^2$ коэффициенты при p_1^2, p_2^2 в экспоненте выражения (23) в пределе $\alpha_3 \rightarrow \infty$ совпадают с α_1, α_2 и сокращаются с членом $m_q^2 (\alpha_1 + \alpha_2)$. В результате этого интеграл (23) инфракрасно расходится, если $m_g = 0$. В этой кинематике введение ненулевой массы глюона необходимо для инфракрасной регуляризации формфактора. При $m_g \neq 0$ предел $p^2 \rightarrow m_q^2$ в (25) является гладким, и (25) при $p^2 = m_q^2$ дает выражение для однопетлевого вклада в $f(Q^2, p^2 = m_q^2)$ — формфактор кварка на массовой поверхности.

Для бесцветных систем (или, что то же самое, для амплитуд с бесцветными внешними линиями) ведущие ИР-вклады сокращаются после суммирования по всем диаграммам данного порядка. В случае $m_g = 0$ это эквивалентно сокращению ведущих ИР-полюсов по J ,

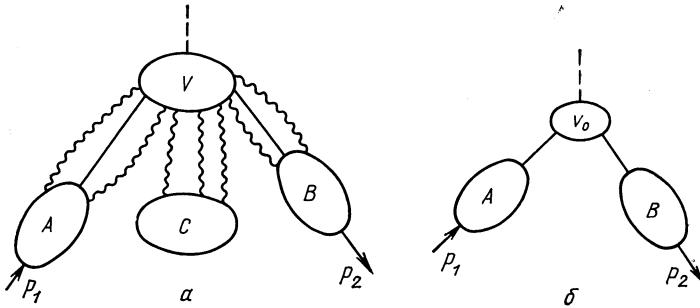


Рис. 8. Структура вкладов для формфактора кварка:
а — общий вид; б — примитивная конфигурация

а в случае $m_g \neq 0$ — сокращению логарифмических сингулярностей $\ln(m_g^2)$. Займемся поэтому подробнее исследованием РМР-вкладов.

Структура РМР-вкладов в формфактор кварка. В теории с $m_g \neq 0$ инфракрасные полюсы по J отсутствуют, и поведение формфактора кварка при $Q^2 \gg p^4/m_g^2$ обусловлено режимом малых α . Типичная конфигурация, дающая ведущий вклад, изображена на рис. 8. Подграф v , соответствующий интегрированию по малым α , имеет две спинорные внешние линии и произвольное число векторных линий. Последние можно разбить на три типа:

- а) соответствующиеначальному кварку (A -линии);
- б) конечному (B -линии) и
- в) вакуумные (C -линии).

Как и при анализе формфакторов глубоконеупругого рассеяния в КХД [23], имеет смысл рассматривать сразу сумму всех конфигураций, получающихся из одной и той же примитивной конфигурации (рис. 8, б). Вклад последней можно записать в виде

$$f^{\text{МР}}(Q^2) \propto \int d^4\xi d^4\xi' \langle P' | \bar{\psi}(\xi') | 0 \rangle \mathcal{E}_{v_0}(\xi, \xi') \langle 0 | \psi(\xi) | P \rangle. \quad (26)$$

В данной задаче, однако, появляется новая возможность: добавляемые глюонные линии можно присоединять не только к внутренним, но и к внешним линиям исходного подграфа v_0 (рис. 9). В частности, на рис. 9, б вставка во внешнюю спинорную линию соответствует замене

$$\psi(\xi) \rightarrow g \int d^4z S^c(\xi - z) \gamma_\mu A^\mu(z) \psi(z), \quad (27)$$

причем оператор $\psi(z)$ заменяет оператор $\psi(\xi)$ в матричном элементе $\langle 0 | \dots | P \rangle$, оператор $A_\mu^a(z)$ добавляется в матричный элемент $\langle P' | \dots | 0 \rangle$, а множитель $S^c(\xi - z) \gamma_\mu$ — в коэффициентную функцию $\mathcal{E}(\xi, \xi' \dots)$.

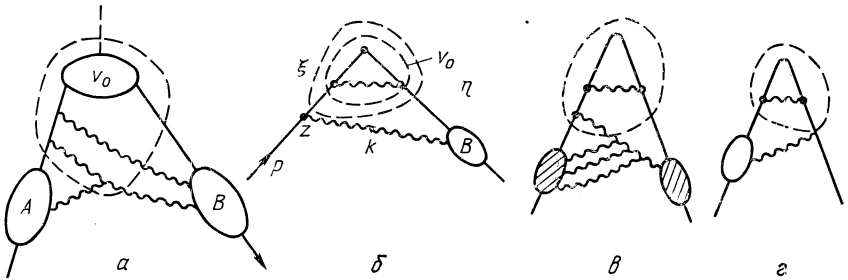


Рис. 9. Структура глюонных вставок во внешние линии

Модификация коэффициентной функции примитивного подграфа v_0 внешним глюонным полем. Суммирование по вставкам во внутренние линии подграфа v_0 можно провести с помощью методики, изложенной в [23] (см. также приложение), т. е. с помощью представления P -экспонент $E(x, z_0; A)$, $E(z_0, y; A)$, абсорбирующих « A -зависимость» (т. е. вклад полей с нулевым твистом), и пропагаторов $\mathcal{E}^c(x, y; A)$, $\mathcal{D}^c(x, y; A)$ в глюонном поле A , взятом в калибровке Фока — Швингера ($x^\mu - z_0^\mu$) $A_\mu(x) = 0$ [44, 45] (см. также [46—49]), в которой твист поля A_μ равен единице: $A = A(G)$. Добавление внешней линии, соответствующей полю с ненулевым твистом, напомним, приводит к степенному подавлению вклада возникающего при этом РМР-подграфа [см. (19)]. Таким образом, учет вставок во внутренние линии сводится к модификации соответствующих пропагаторов множителями $E(x, z_0; A)$, $E(z_0, y; A)$. Объединяя их с помощью вышеупомянутой методики [23], находим, что суммарный эффект глюонных вставок во внутренние линии примитивного подграфа v_0 сводится к замене

$$\bar{\psi}(\xi') E(\xi', \xi) \psi(\xi) \rightarrow \bar{\psi}(\xi') \hat{E}(\xi', z_0; A) \mathcal{E}_{v_0}(\xi, \xi') \hat{E}(z_0, \xi) \psi(\xi). \quad (28)$$

Учет глюонных вставок во внешние линии. Суммирование по глюонным вставкам во внешнюю кварковую линию подграфа v_0 приводит, очевидно, к замене оператора $\psi(\xi)$ ($\bar{\psi}(\xi')$) оператором $\Psi(\xi, A)$ ($\bar{\Psi}(\xi', A)$), описывающим кварковые поля во внешнем глюонном поле A , т. е. решением уравнения Дирака во внешнем глюонном поле

$$i\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} - igA_\mu \right) \Psi(\xi, A) = 0. \quad (29)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти для функции $\Psi(\xi, A)$ представление, которое правильно (применительно к рассматриваемой проблеме) отражало бы ее зависимость от полей A_μ с ненулевым твистом. Можно, по аналогии с пропагатором, представить $\Psi(\xi, A)$ в виде

$$\Psi(\xi, A) = \hat{E}(\xi, z_0) \Psi(\xi, \mathcal{A}; z_0). \quad (30)$$

Функция $\Psi(\xi, \mathcal{A}; z_0)$ тогда будет подчиняться уравнению (28), в котором вместо A_μ фигурирует глюонное поле \mathcal{A} , взятое в калибровке Фока — Швингера $(x^\mu - z_0^\mu) A_\mu = 0$. Поскольку $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$, то, пренебрегая $O(G)$ -вкладами, можно заменить $\Psi(\xi, \mathcal{A}; z_0)$ исходным оператором $\Psi(\xi)$. Иными словами, учет вставок во внешнюю кварковую линию свелся к добавлению P -экспоненты $\hat{E}(\xi, z_0)$.

Обратим еще внимание на то, что глюонные линии, добавляемые к примитивному подграфу v_0 , делятся на три типа в зависимости от того, из какого блока — A , B или C (рис. 8, *a*) они выходят. Соответственно этому операторы глюонных полей попадают либо в обкладку $\langle 0 | \dots | P \rangle$, либо в $\langle P' | \dots | 0 \rangle$, либо в $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$. Это означает, что суммирование по глюонным вставкам нужно осуществлять последовательно, скажем, сначала по A -вставкам при фиксированных B - и C -вставках, затем по B -вставкам при фиксированных C -вставках и лишь потом — по C -вставкам.

Примитивные подграфы для промежуточных стадий имеют не только кварковые, но и глюонные внешние линии, в которые тоже необходимо делать вставки (см. рис. 9, *e*). Глюонный полевой оператор $A_\mu(\xi)$ во внешнем глюонном поле B , очевидно, приобретает фактор $\tilde{E}(\xi, B; z_0)$. (Чтобы различать глюонные поля по их типу, мы будем, когда необходимо, обозначать их символами A , B или C соответственно.) Здесь важно подчеркнуть также, что A - и B -вставки можно делать не в любые внешние линии, а только в «противоположные», т. е. уходящие в противоположный блок.

Иными словами, суммирование по A -вставкам в примитивный однопетлевой подграф (рис. 9, *a*) даст множитель $\hat{E}(z_0, \xi')$ для поля $\bar{\psi}(\xi')$, но никак не затронет поля $\psi(\xi)$. Поэтому результат суммирования по всем A -вставкам (как во внешние, так и внутрен-

ние линии) с учетом (28) приведет в данном случае к замене

$$\bar{\psi}(\xi') \mathcal{E}_{v_0}(\xi', \xi) \psi(\xi) \rightarrow \bar{\psi}(\xi') \mathcal{E}_{v_0}(\xi', \xi) \hat{E}(z_0, \xi; A) \bar{\psi}(\xi). \quad (31)$$

Оптимизация выбора P -экспоненты. Вернемся к обсуждению того, какой выбор параметра z_0 наиболее адекватно отражает структуру исследуемой амплитуды, в частности ее поведение в импульсном представлении. Множители $E(x, z_0)$, $E(z_0, y)$ [произведение которых с точностью до $O(G)$ -членов совпадает с $E(x, y; A)$], фигурирующие в формуле для пропагатора $\mathcal{S}(x, y; A)$, означают, что поле A действует на кварк в его движении из z_0 в x . Аналогично фактор $E(x, z_0; A)$ в формуле (30) для $\Psi(x, A)$ означает, что поле A действует на кварк на пути его движения из z_0 в x . В рассмотренном выше примере суммирование по A -вставкам соответствовало учету эффектов, связанных с движением конечного кварка в поле A_μ глюонов, излученных начальным кварком. Естественно ожидать, что конечный кварк движется из точки ξ' на бесконечность в направлении, заданном импульсом P' , и поэтому в качестве контура (x, z_0) наиболее естественно взять прямую $z_\mu = \xi_\mu + P'_\mu s$. Такой выбор контура соответствует P -экспоненте:

$$E_{P'}(\xi, \infty) = P \exp \left(igP'_\mu \int_0^\infty ds A_\mu(\xi + sP') e^{-es} \right) \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad (32)$$

совпадающей с оператором калибровочного преобразования к аксиальной калибровке $P'_\mu A^\mu = 0$, которая, как и калибровка Фока — Швингера [44, 45], относится к разряду физических калибровок, в которых поле A имеет твист 1 (т. е. $A^{\text{axial}} = A(G)$ [77]). Поэтому во всех приведенных выше формулах P -экспоненты $E(x, z_0; A)$ можно понимать и как P -экспоненты $E_{P, P'}(x, A)$.

Выбор P -экспоненты в виде (32) для A -вставок в действительности однозначно диктуется анализом в импульсном представлении. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 9, б. Ей соответствует добавление множителя $\gamma^\mu (\hat{P}' - \hat{k}) / (P'^2 - m_q^2 - 2(P'k) + k^2)$ к коэффициентной функции примитивного подграфа v_0 . Здесь следует отметить, что согласно рецепту, сформулированному в [23], при построении коэффициентной функции (КФ) все малые импульсные инварианты (массы m_q^2 , виртуальности внешних линий P^2 , P'^2 , k^2 и т. п.) необходимо положить равными нулю, поскольку их учет эквивалентен включению в КФ вкладов, соответствующих высшим твистам. В нашем примере нужно отбросить и член \hat{k} в числителе дополнительного множителя, поскольку импульс \hat{k} глюона не имеет

в этом приближении компонент, пропорциональных P' :

$$i^n \langle 0 | \dots \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} A \dots | P \rangle = P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \int_0^1 \alpha^n f(\alpha) d\alpha \quad (33)$$

(т. е. $k_\mu \approx \alpha P$), а комбинация

$$\bar{u}(P') \gamma_\mu \hat{P} \dots \langle 0 | \dots A_\mu \dots | P \rangle, \quad (34)$$

соответствующая конфигурации рис 9, б, есть величина порядка $O(P^2)$. Таким образом, упомянутый дополнительный фактор пропорционален пропагатору кварка в эйкональном приближении

$$g \hat{A}_\mu(k) \gamma^\mu S(P' - k) \simeq g \frac{(P' A(k))}{(P' k) + i\epsilon}. \quad (35)$$

То же самое будет справедливо для следующих A -вставок во внешнюю кварковую линию, а суммирование эйконального ряда как раз и дает P -экспоненту (32).

К этому результату можно прийти и более простым путем. Заметим, что конфигурация, показанная на рис. 9, б, «работает» только, когда глюонная внешняя линия привносит в КФ множитель P_μ (это и соответствует тому, что поле A_μ имеет нулевой твист), который в комбинации с P'_μ дает $O(Q^2)$ -вклад, компенсирующий знаменатель дополнительного пропагатора. Таким образом, все держится на том, что $P'_\mu \langle 0 | \dots A^\mu \dots | P \rangle \sim (PP')$. Если же наложить на A_μ аксиальную калибровку $P'_\mu A^\mu = 0$, то конфигурация рис. 9, б не будет давать вклада. Это и означает, что в данном случае вся необходимая информация о вкладе полей с нулевым твистом содержится в операторе калибровочного преобразования к калибровке $P'_\mu A^\mu = 0$, т. е. в P -экспоненте (32).

Структура окончательного результата. Таким образом, суммирование по A -вставкам привело к модификации матричного элемента $\langle 0 | \psi(\xi) | P \rangle$, описывающего кварк начального состояния. Он превратился в $\langle 0 | E_{P'}(\xi, A) \psi(\xi) | P \rangle$. Аналогично суммирование по B -вставкам [с учетом того, что оператором калибровочного преобразования, «убивающего» вклад конфигурации рис. 9, г, будет в этом случае P -экспонента $E_P(\xi, B)$] превращает $\langle P' | \bar{\psi}(\xi') | 0 \rangle$ в $\langle P' | \bar{\psi}(\xi') E_{P'}^{-1}(\xi', B) | 0 \rangle$.

Несколько сложнее ситуация с C -вставками, поскольку в этом случае глюоны необходимо вставлять и в левые внешние линии, и в правые. Для левых внешних линий необходимо брать E_P , для правых $E_{P'}$, а что же брать для вставок во внутренние линии? Ответ очень прост: для C -вставок пропагаторы внутренних линий нужно брать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^c(x, y; C) &= E_P(x, C) \mathcal{S}^c(x, y; \mathcal{C}) E_{P'}^{-1}(y, C) \rightarrow \\ &\rightarrow E_P(x, C) S^c(x - y) E_{P'}^{-1}(y, C) \end{aligned} \quad (36)$$

для кварков и аналогично для глюонов. В результате, после всех необходимых коммутаций, C -вставки дают фактор $E_{P'}^{-1}(0, C) \times E_{P'}(0, C)$, где 0 — координата фотонной вершины. Таким образом, C -вставки дают P -экспоненту, вычисленную для контура, «вычерченного» кварком: из бесконечности вдоль P_μ до точки 0 и от точки 0 вдоль P'_μ на бесконечность. Здесь, правда, нужно сделать уточнение. Глюоны не должны быть слишком мягкими, поскольку вклад инфракрасного режима учитывается отдельно. Поэтому в альфа-представлении величины α -параметров, сопоставляемых дополнительным глюонным линиям, должны быть ограничены сверху: $\alpha_s < 1/\lambda^2$, где λ имеет смысл энергетической границы, отделяющей мягкие глюоны от немягких. На языке P -экспонент такое ограничение соответствует обрезанию длины контура, т. е. замене верхнего предела интегрирования по s в (32) некоторым конечным значением s_0 .

Подчеркнем, что это обрезание относится к объектам $\langle 0 | E_{P'}(\xi, B) \psi(\xi) | P \rangle$, $\langle 0 | E_{P'}^{-1}(0, C) E_P(0, C) | 0 \rangle$, описывающим вклад больших расстояний и поэтому имеющим обычное для таких объектов ультрафиолетовое ограничение на α -параметры снизу (типа $\alpha > 1/\mu^2$, где μ — граница между малыми и большими, но не инфракрасно большими расстояниями). Соответствующее ему инфракрасное обрезание $\alpha_V < 1/\mu^2$ относится уже к коэффициентной функции $\mathcal{E}(\xi, \xi')$. Как уже указывалось, в импульсном представлении коэффициентные функции $E(P, P', k, \dots)$ содержат логарифмы $\ln(Q^2/k^2)$, $\ln(Q^2/P^2)$, которые сингулярны ($\rightarrow \infty$) в пределе $P^2, k^2 \rightarrow 0$. Ограничение $\alpha_V < 1/\mu^2$ обеспечивает гладкость предела $P^2, k^2 \rightarrow 0$ и превращает $\ln(Q^2/P^2)$ в $\ln(Q^2/\mu^2)$.

Структура факторизации на однопетлевом уровне. Проиллюстрируем сказанное на примере однопетлевой диаграммы (см. рис. 7). Ее вклад в случае $m_g \neq 0$ равен [см. (25)]

$$-C_F \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ \ln^2 \left(\frac{Q^2}{-p^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{Q^2}{-p^2} \right) \ln \left(-\frac{p^2}{m_g^2} \right) \right\}.$$

Представим $\ln(Q^2/(-p^2))$ в виде суммы $\ln(Q^2/\mu^2) \pm \ln(\mu^2/-p^2)$. Тогда

$$\ln^2 \left(\frac{Q^2}{-p^2} \right) = \ln^2 \frac{Q^2}{\mu^2} + 2 \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right). \quad (37)$$

Первый вклад $\ln^2(Q^2/\mu^2)$, очевидно, соответствует режиму, когда все α малы (рис. 10, а). Второй вклад соответствует C -вставкам в порядке α_s :

$$\begin{aligned} \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} \langle 0 | \hat{E}_{p_2}^{-1}(0, C) |_{-p_1^2=\mu^2} \hat{E}_{p_1}(0, C) |_{-p_2^2=\mu^2} | 0 \rangle = \\ = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2} C_F \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

И наконец, третий вклад есть сумма матричных элементов

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{E}_{p_2}(0, A) \psi(0) | p_1 \rangle |_{1 \text{ петля}} &\simeq \frac{g^2}{16\pi^2} C_F \int_{\substack{\alpha_2 > 1/\mu^2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 > 1/\mu^2}} \frac{d\alpha_1 d\alpha_3}{\alpha_2 (\alpha_2 + \alpha_3)} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} \right) \exp \left(i p^2 \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} \right) \times \\ &\times \left[1 - \exp \left(i (\varphi_1 p_2)_0 \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} \right) \right] \sim \frac{g^2}{32\pi^2} C_F \ln^2 \mu^2, \end{aligned} \quad (39)$$

имеющих ДЛ-зависимость от параметра ультрафиолетового обрезания μ . Отметим, что только наличие второго члена в квадратных скобках обеспечивает конечность интеграла в инфракрасной области.

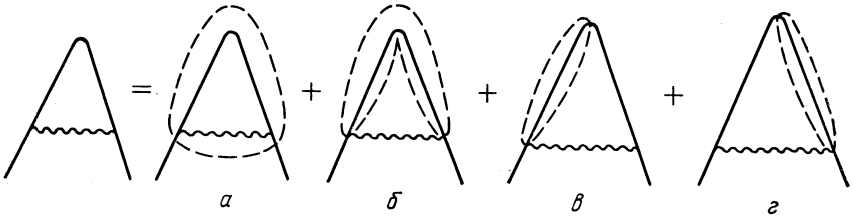


Рис. 10. Типы вкладов для однопетлевой диаграммы

Факторизация для асимптотики формфактора пиона в КХД.

Структура RMP-вкладов для трехточечной амплитуды $T_3^\mu(P, P')$ (17) совершенно аналогична структуре вкладов для формфактора кварка. Главное отличие состоит в том, что примитивная конфигура-

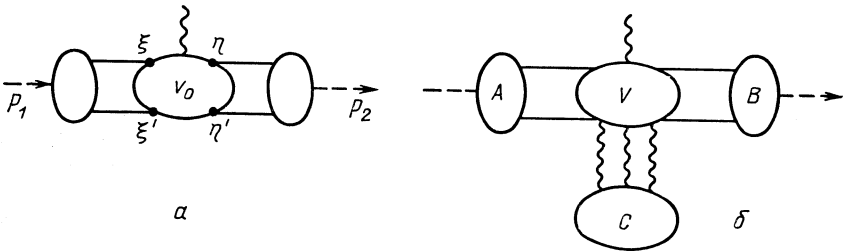


Рис. 11. Структура вкладов для формфактора пиона: а—примитивная конфигурация; б—мягкие глюонные обмены

ция соответствует подграфам с четырьмя кварковыми внешними линиями (рис. 11). Ее вклад запишем в виде

$$\begin{aligned} T_{v_0}^\mu(P, P') &= \int d^4\xi d^4\eta d^4\xi' d^4\eta' \int d^4ye^{-iP'y} \langle 0 | j_s(y) \bar{\psi}_C(\eta') \gamma_5 \gamma_\beta \psi_B(\xi') | 0 \rangle \times \\ &\times \mathcal{E}_{ABCD}^{\alpha\beta}(\xi, \xi', \eta, \eta') \int d^4xe^{iPx} \langle 0 | \bar{\psi}_A(\xi) \gamma_5 \gamma_\alpha \psi_D(\eta) j_5(x) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

где A, B, C, D — цветовые индексы кварков. Глюонные $A-, B-, C$ -вставки снова необходимо делать как во внутренние, так и во внешние линии примитивного подграфа v_0 . Поскольку при переходе в калибровку $P_\mu A_\mu = 0$ (или, соответственно, $P'_\mu A_\mu = 0$) вклады со вставками во внешние линии подграфа v_0 приобретают степенное подавление $O(1/Q^2)$, то, как и в случае фактора кварка, их суммирование дает P -экспоненты вида (32). Поэтому техника суммирования по глюонным вставкам, изложенная выше, применима в полном объеме, а полученные нами результаты непосредственно обобщаются на рассматриваемый случай. Необходимо, конечно, учитывать, что антикварковые линии направлены в обратную сторону.

Суммирование по C -глюонам дает, очевидно, P -экспоненту по контуру, «прочерченному» кварк-антикварковой парой. Поскольку этот контур замкнутый, вклады полей с нулевым твистом в нем сокращаются и эту P -экспоненту можно заменить единицей.

Суммирование по B -глюонам добавляют две P -экспоненты (одну для ψ , другую для $\bar{\psi}$) в первый матричный элемент, и он приобретает вид

$$\int d^4x e^{iPx} \langle 0 | j_5(x) (\bar{\psi}(\xi) E_{P'}^{-1}(\xi, A))_A \gamma_5 \gamma_\alpha (E_{P'}(\eta, B) \psi(\eta)) |_B | 0 \rangle. \quad (41)$$

Аналогично суммирование по A -глюонам дает

$$\int d^4y e^{-iP'y} \langle 0 | (\bar{\psi}(\eta') E_P^{-1}(\eta', B))_C \gamma_5 \gamma_\alpha (E_P(\xi', B) \psi(\xi'))_D j_5(y) | 0 \rangle. \quad (42)$$

Чтобы «расцепить» суммирование по цветовым индексам A, B, C, D , необходимо воспользоваться аналогом тождества Фирца для группы $SU(3)_C$:

$$\delta_A^A \delta_C^C = \frac{1}{3} \delta_A^C \delta_C^A + 2 \sum_a (\tau_a^A)_C (\tau_a^C)_A. \quad (43)$$

Сокращение ДЛ-вкладов. Поскольку j_5 -токи — бесцветные, отличными от нуля будут только синглетные проекции. Как следствие, в (41) и (42) возникнут бесцветные бислокальные операторы вида

$$\bar{\psi}(\xi) E_n^{-1}(\xi, A) E_n(\eta, A) \gamma_5 \gamma_\alpha \psi(\eta). \quad (44)$$

Заметим теперь, что произведение

$$E_n^{-1}(\xi; A) E_n(\eta; A) E(\eta, \xi; A)$$

представляет собой P -экспоненту, вычисленную для замкнутого контура ($\eta \rightarrow \xi \rightarrow \infty \rightarrow \eta$), и ее с точностью до $O(G)$ членов можно поэтому заменить единицей. По той же причине оператор (44) можно заменить бислокальным оператором

$$\mathcal{O}_{5\alpha}(\xi, \eta) = \bar{\psi}(\xi) E(\xi, \eta; A) \gamma_5 \gamma_\alpha \psi(\eta). \quad (45)$$

Операторы (45) могут быть разложены в ряд Тейлора по калибровочно-инвариантным локальным операторам

$$\mathcal{O}_{5\alpha}(\xi, \eta) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_N} \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_{\alpha} D^{\mu_1} \dots D^{\mu_N} \Psi, \quad (46)$$

где $\Delta_{\mu} = \xi_{\mu} - \eta_{\mu}$. Матричные элементы этих операторов имеют однологарифмическую зависимость от параметра ультрафиолетового обрезания, и это означает, что все дваждылогарифмические вклады в $T^{\mu}(P, P')$ сокращаются. Сокращение это опять обусловлено бесцветностью начального и конечного состояний. Если бы токи j_5 были цветными, то ненулевой вклад дали бы октетные проекции в тождестве Фирца (43) и вместо операторов (44) мы имели бы операторы вида

$$\bar{\Psi}(\xi) E_n^{-1}(\xi; A) \tau^a E_n(\eta; A) \gamma_5 \gamma_{\alpha} \Psi(\eta), \quad (47)$$

которые при всем стремлении нельзя представить в виде (45). Можно переписать (47) как

$$(\bar{\Psi}(\xi) \hat{E}(\xi, \eta; A) \gamma_5 \gamma_{\alpha} \tau^b \Psi(\eta)) (\tilde{E}_n(\eta; A))_{ba} (1 + O(G)), \quad (48)$$

но избавиться от P -экспоненты $\tilde{E}_n(\eta; A)$ по контуру, уходящему на бесконечность, уже никак не удастся.

Билокальный оператор в (48) можно, конечно, разложить в ряд по локальным, как в (46), но матричные элементы операторов $O_N^b(\eta) \times (E_n(\eta, A))^{ab}$ будут иметь ДЛ-зависимость от параметра μ^2 . Полного сокращения дваждылогарифмов в этом случае не произойдет. На однопетлевом уровне, например, сократятся ДЛ-вклады, имеющие цветовой фактор фундаментального представления C_F , но останутся ДЛ-вклады, пропорциональные октетному фактору $C_G (= N_c)$.

Факторизованное представление для формфактора. Таким образом, для асимптотики вспомогательной амплитуды мы получили факторизованное представление вида (10), в котором вклады малых и больших расстояний разделены. Согласно обсуждению в разд. 1, это означает, что и для асимптотики формфактора имеет место факторизация в форме (13):

$$F_{\pi}(Q^2) = \int d^4\xi d^4\eta d^4\xi' d^4\eta' \langle P' | \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} \mathcal{O}_{5\alpha}(\xi', \eta') | 0 \rangle \times \\ \times \text{Reg}_{\mu^2}^{IR}(\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\xi, \xi', \eta, \eta')) \langle 0 | \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} \mathcal{O}_{5\beta}(\xi, \eta) | P \rangle \{1 + O(1/Q^2)\}. \quad (49)$$

Коэффициентная функция $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ в импульсном представлении соответствует кварковой амплитуде $\gamma^* q \bar{q} \rightarrow q' \bar{q}'$ на массовой поверхности $k_i^2 = m_q^2 = 0$ и поэтому, формально, она калибровочно-инвариантна. Операторы $\mathcal{O}_{5\alpha}, \mathcal{O}_{5\beta}^*$ также калибровочно-инвариантны.

Если процедуры $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$, $\text{Reg}_{\mu^2}^{IR}$ не нарушают калибровочной инвариантности, то и фигурирующие в (49) регуляризованные выражения для матричных элементов и коэффициентной функции также будут калибровочно-инвариантны. Этого можно достичь, определив операцию $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$ как размерную ренормировку составных операторов.

Партонная картина для асимптотики формфактора пиона в КХД. Как и в случае инклюзивных процессов, выражения для асимптотики формфактора существенно упрощаются и приобретают наглядную интерпретацию, если переписать их в партонной форме, отождествив редуцированные матричные элементы локальных операторов с моментами партонных функций, которые в данном случае имеют смысл адронных волновых функций (а не функций распределения, фигурирующих в выражениях для сечений инклюзивных жестких процессов).

Партонные волновые функции. Билокальные калибровочно-инвариантные операторы $\mathcal{O}(\xi, \eta)$ можно разложить в ряд Тейлора по локальным операторам

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{O}_{5\alpha}(\xi, \eta) | P \rangle &= e^{iP \frac{\xi + \eta}{2}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_N} \times \\ &\times \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \gamma_\alpha \overleftrightarrow{D}_{\alpha_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\alpha_N} u | P \rangle \end{aligned} \quad (50)$$

с двусторонней $\overleftrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu$ или односторонней производной $\overrightarrow{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$:

$$\langle 0 | \mathcal{O}_{5\alpha}(\xi, \eta) | P \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_N} \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \gamma_\alpha \overrightarrow{D}_{\mu_1} \dots \overrightarrow{D}_{\mu_N} u | P \rangle, \quad (51)$$

где $\Delta = \xi - \eta$. Определяя редуцированные матричные элементы их бесследовых частей формулами

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \{ \gamma_\alpha \overleftrightarrow{D}_{\alpha_1} \dots \overleftrightarrow{D}_{\alpha_N} \} u | P \rangle_{|\mu^2} = \frac{1 + (-1)^N}{2} \Phi_N(\mu^2) \{ P_\alpha P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_N} \}, \quad (52)$$

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \{ \gamma_\alpha \overrightarrow{D}_{\alpha_1} \dots \overrightarrow{D}_{\alpha_N} \} u | P \rangle_{|\mu^2} = \Phi_N(\mu^2) \{ P_\alpha P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_N} \}, \quad (53)$$

можно ввести калибровочно-инвариантные партонные волновые функции [1–3] $\overline{\Phi}(\xi)$:

$$\int_{-1}^1 \Phi(\xi) \xi^n d\xi = \Phi_n \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad (54)$$

и $\varphi(x)$:

$$\int_0^1 \varphi(x) x^n dx = \varphi_n. \quad (55)$$

Между $\Phi(\xi; \mu^2)$ и $\varphi(\xi; \mu^2)$ существует очевидное соотношение

$$\Phi(\xi; \mu^2) = \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1+\xi}{2}; \mu^2\right). \quad (56)$$

Равенство нулю четных моментов в (52), (54) есть следствие свойств G -четности операторов (52). Оно приводит к симметрии волновой функции $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi)$, $\varphi(x) = \varphi(1-x)$ и выражает собой равноправие u - и d -кварков пиона. Выполнение спектрального свойства $\varphi(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$ (или при $x < 0$, $x > 1$) для волновой функции $\varphi(x)$ доказано в [50].

Волновая функция $\varphi(x; \mu^2)$ имеет очевидную партонную интерпретацию: она описывает амплитуду вероятности найти пион π^+ с импульсом P в состоянии, когда в системе бесконечного импульса u -кварк несет импульс $xP = \frac{1+\xi}{2}P$, а d -кварк — импульс $\bar{x}P = \frac{1-\xi}{2}P$. Фактически $\varphi(x; \mu^2)$ представляет собой квазипотенциальную волновую функцию на световом фронте $\varphi(x, k_\perp)$ [30], проинтегрированную по поперечному импульсу k_\perp , грубо говоря, до μ [5, 10]:

$$\varphi(x; \mu^2) = \int d^2k_\perp \varphi(x, k_\perp) \theta(k_\perp^2 < \mu^2). \quad (57)$$

Удаление логарифмических расходимостей из интеграла (57) может осуществляться и любым другим способом, скажем, путем размерной регуляризации $d^2k_\perp \rightarrow d^{2-2\epsilon}k_\perp$ с последующим вычитанием полюсов по ϵ . Выбор такого способа соответствует выбору вида процедуры $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$ для операторов.

Партонная волновая функция удовлетворяет специфическому условию нормировки [1, 3–5]

$$iP_\rho \int_{-1}^1 \Phi(\xi, \mu^2) d\xi = \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 \gamma_\rho u | P \rangle = iP_\rho f_\pi. \quad (58)$$

Матричный элемент аксиального тока известен из распада $\pi \rightarrow \mu\nu$, причем в силу сохранения аксиального тока в киральном пределе ($m_q = 0$) условие (58) выполняется при любых μ^2 .

Партонная картина. Используя для операторов (51) их выражение через волновую функцию (53), (55) и подставляя все в факторизованное представление (40), получаем формулу для асимптотики формфактора пиона

$$F_\pi(Q^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \varphi(x; \mu^2) \varphi^*(y; \mu^2) \mathcal{M}(xP, \bar{x}P, yP', \bar{y}P'; \mu^2), \quad (59)$$

имеющую простую партонную интерпретацию в терминах амплитуды жесткого подпроцесса $q\bar{q}\gamma^* \rightarrow q'\bar{q}'$ (рис. 12).

В низшем приближении амплитуда \mathcal{M} равна

$$M_0(x, y; Q^2) = \frac{g^2}{2xyQ^2} \frac{C_F}{N_c}, \quad (60)$$

где $C_F = 4/3$, $N_c = 3$ — цветовые множители. Для формфактора $F_\pi(Q^2)$ отсюда следует [1]

$$F_\pi^{(0)}(Q^2) = \frac{2\pi C_F \alpha_s(Q^2)}{N_c Q^2} \left| \int_0^1 \frac{\varphi(x; \mu^2)}{x} dx \right|^2. \quad (61)$$

Параметр μ^2 естественно выбрать пропорциональным Q^2 , но коэффициент пропорциональности можно надежно зафиксировать, только вычислив следующую по α_s поправку.

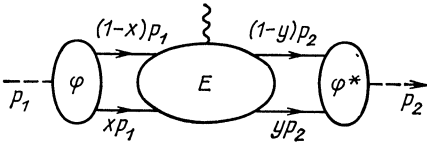


Рис. 12. Партонное представление для асимптотики формфактора пиона

Волновые функции $\varphi(x, \mu^2)$ определяются динамикой больших расстояний, поэтому явный их вид, вообще говоря, не известен. Пертурбативная КХД предсказывает лишь закон их изменения с ростом μ^2 .

Эволюция волновой функции пиона в главном логарифмическом приближении. Зависимость волновой функции $\varphi(x; \mu^2)$ от параметра μ^2 определяется аномальными размерностями операторов (52), (53). Характерной особенностью рассматриваемой задачи является наличие смешивания между фундаментальными операторами $O_{\mu_1 \dots \mu_N}(X)$ и их полными производными $(\partial/\partial X)^k O_{\mu_1 \dots \mu_{N-k}}$:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \langle 0 | \bar{\psi} D^n \psi | P \rangle = \sum_{k=0}^n Z_{nk} \langle 0 | \partial^{n-k} (\bar{\psi} D^k \psi) | P \rangle. \quad (62)$$

Заметим, что матричные элементы последних не содержат новой динамической информации

$$\begin{aligned} i^n \langle 0 | \frac{\partial}{\partial X_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial X_{\alpha_k}} O_{\mu_1 \dots \mu_N} | P \rangle &= \\ &= P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_k} \langle 0 | O_{\mu_1 \dots \mu_N} | P \rangle, \end{aligned} \quad (63)$$

и поэтому формула (62) означает, что при перенормировках имеет место смешивание величин φ_n с разными n :

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \varphi_n = \sum_{k=0}^n Z_{nk} \varphi_k. \quad (64)$$

Матрица аномальных размерностей. Непосредственный расчет диаграмм, показанных на рис. 13, дает для матрицы аномальных размерностей такой результат:

$$Z_{nk}^{(1)} = C_F \frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ -\delta_{nk} + \frac{2\theta_{nk}}{(n+1)(n+2)} \right\}; \quad (65)$$

$$Z_{nk}^{(2)} = C_F \frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ -4 \left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \right) \delta_{nk} + 2 \left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n+1} \right) (\theta_{nk} - \delta_{nk}) \right\}. \quad (66)$$

Символы δ_{nk} и θ_{nk} имеют следующий смысл:

$$\delta_{nk} = 1 \quad (n = k), \quad \delta_{nk} = 0 \quad (n \neq k); \quad (67)$$

$$\theta_{nk} = 1 \quad (n \geq k), \quad \theta_{nk} = 0 \quad (n < k). \quad (68)$$

Член $Z_{nk}^{(2)}$ в фейнмановской калибровке соответствует вкладу диаграммы рис. 13, б, т.е. обусловлен удлинением производных в локальных операторах.

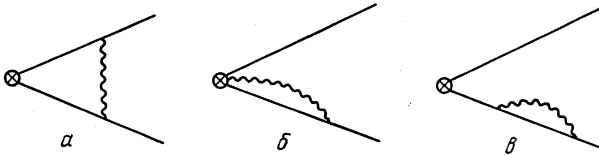


Рис. 13. Однопетлевые вклады в ядро эволюции для волновой функции пиона

Диагонализация матрицы аномальных размерностей. Надлежащим выбором операторного базиса можно добиться того, чтобы матрица аномальных размерностей стала диагональной. Процедура диагонализации резко упрощается, если заметить, что матрицы $Z_{nk}^{(1)}$ и $Z_{nk}^{(2)}$ коммутируют. Вследствие этого достаточно найти базис, в котором диагональна более простая матрица $Z_{nk}^{(1)}$, более громоздкая матрица $Z_{nk}^{(2)}$ будет автоматически диагональна в этом же базисе.

Поскольку матрица $Z_{nk}^{(1)}$ треугольна, ее собственные значения даются диагональными элементами:

$$\lambda^{(n)} = C_F \frac{g^2}{8\pi^2} \left(-1 + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right). \quad (69)$$

Следовательно, необходимо найти векторы k_n ,

$$k_n = \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} a_m, \quad (70)$$

удовлетворяющие уравнению

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) k_n = \lambda^{(n)} k_n. \quad (71)$$

Используя явный вид $\lambda^{(n)}$, получаем уравнение для d_{nm} :

$$\sum_{l=m}^{\infty} \frac{d_{nl}}{(l+1)(l+2)} = \frac{d_{nm}}{(n+1)(n+2)}, \quad (72)$$

вид которого зависит только от структуры коэффициента при θ_{nk} в (65). Вычитая из (72) уравнение для $d_{n,m+1}$, получаем рекуррентное соотношение, из которого следует, что

$$d_{nm} = (-1)^m \frac{(m+n+2)!}{m!(m+1)!(n-m)!} d^{(n)}, \quad (73)$$

где $d^{(n)}$ — произвольная нормировочная константа, которую удобно выбрать равной $1/2$. В этом случае мультипликативно-перенормируемая комбинация имеет вид

$$k_n = \sum_{m=0}^n \frac{(m+n+2)! (-1)^m}{2m!(m+1)!(n-m)!} \Phi_m. \quad (74)$$

С учетом определения коэффициентов Φ_m (53) это означает, что мультипликативно-перенормируемыми являются матричные элементы операторов

$$\begin{aligned} K_{\mu_1 \dots \mu_n} &= \sum_{m=0}^n \frac{(m+n+2)! (-1)^m}{2m!(m+1)!(n-m)!} \{(\partial_+^{n-m} (\bar{d}\gamma_5 \gamma_\mu \vec{D}^m u))_{\mu_1 \dots \mu_n}\} = \\ &= \bar{d}\gamma_5 \{\gamma_\mu (\partial_+^n C_n^{3/2} (2\vec{D}/\partial_+))_{\mu_1 \dots \mu_n}\} u, \end{aligned} \quad (75)$$

где $C_n^{3/2}(\xi)$ — полиномы Гегенбауэра (см. [51, формула (10.9.20)]);

$$2\vec{D} = \vec{D} - \vec{D}, \quad \partial_+ = \vec{\partial} + \overleftarrow{\partial} = \vec{D} + \overleftarrow{D}, \quad \partial_+^n (D/\partial_+)^k \equiv \partial_+^{n-k} D^k.$$

Интересно отметить (и это подчеркивалось в наших работах [8, 27]), что тензоры $K_{\mu_1 \dots \mu_n}$ являются конформными в приближении свободных полей. Связь мультипликативной инвариантности операторов на однопетлевом уровне с их конформными свойствами исследовалась затем в работах [52—54].

Разложение волновой функции по мультипликативно-перенормируемым комбинациям. Матричные элементы операторов $K_{\mu_1 \dots \mu_n}$ согласно (75) связаны с $\Phi(\xi)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \{P_\mu P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n}\} \int_{-1}^1 \Phi(\xi; \mu^2) C_n^{3/2}(\xi) d\xi = \\ = \langle 0 | K_{\mu_1 \dots \mu_n} | P \rangle \equiv K_n(\mu^2) \{P_\mu P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n}\}. \end{aligned}$$

Полиномы $C_n^{3/2}(\xi)$ ортогональны на отрезке $(-1, 1)$ с весом $(1 - \xi^2)$; с учетом их нормировки получаем

$$\Phi(\xi; \mu^2) = (1 - \xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\mu^2) \frac{n+3/2}{(n+1)(n+2)} C_n^{3/2}(\xi). \quad (76)$$

Коэффициенты $K_n(\mu^2)$ мультипликативно перенормируются с изменением μ^2 . Учитывая явный вид β -функции КХД в однопетлевом приближении [14, 15], находим

$$K_N(\mu^2) = \left(\frac{\ln(\mu_0^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right)^{\gamma_N/B} K_N(\mu_0^2), \quad (77)$$

где

$$\gamma_N = C_F \left(1 - \frac{2}{(N+1)(N+2)} + 4 \sum_{j=2}^{N+1} \frac{1}{j} \right);$$

$$B = 11 - \frac{2}{3} N_f. \quad (78)$$

Асимптотическая волновая функция. Поскольку все коэффициенты γ_N , кроме γ_0 , положительны, то вклады высших гармоник в (76) вымирают с ростом N , и в асимптотике $\mu^2 \rightarrow \infty$ волновая функция $\Phi(\xi, \mu^2)$ приобретает очень простой вид [7, 10]:

$$\Phi^{as}(\xi; \mu^2 \rightarrow \infty) = \frac{3}{4} f_\pi (1 - \xi^2). \quad (79)$$

Здесь учтено, что константа K_0 , определяемая матричным элементом аксиального тока, равна f_π .

Предельный вид волновой функции $\Phi(\xi; \infty) = 3f_\pi(1 - \xi^2)/4$ аналогичен предельному виду $f(x, \infty) \sim \delta(x)$ [15] для функций распределения партонов. Известно, однако, что при достигнутых ныне передачах функции $f(x, Q^2)$ заметно отличаются от своего предельного вида и если стремиться к нему с ростом Q^2 , то весьма медленно. Точно так же и волновая функция $\Phi(\xi, Q^2)$ в области умеренно больших Q^2 может, в принципе, существенно отличаться от $\frac{3}{4}(1 - \xi^2)f_\pi$ и, более того, иметь совершенно другой закон поведения в особенно важной для интеграла (61) области $\xi^2 \sim 1$.

Каждый член суммы (76) ведет себя при $\xi^2 \sim 1$ как $(1 - \xi^2)$, поскольку

$$\frac{n+3/2}{(n+1)(n+2)} (1 - \xi^2) C_n^{3/2}(\xi) \propto \sqrt{1 - \xi^2} J_1 \left(\left(n + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1 - \xi^2} \right) \sim (1 - \xi^2), \quad (80)$$

где J_1 — функция Бесселя, и $J_1(x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$. Но, если коэффициенты недостаточно быстро убывают при $n \rightarrow \infty$, бесконечная сумма высших гармоник может радикально изменить поведение

$\Phi(\xi)$ при $\xi^2 \sim 1$. Действительно, если $K_n \sim n^\alpha$, тогда в области $n \gg 1/\sqrt{1-\xi^2}$ с помощью хорошо известного асимптотического соотношения [51]

$$J_1(x) \sim \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad (81)$$

находим, что

$$\sum_{N_0}^{\infty} n^\alpha \sqrt{1-\xi^2} J_1\left(\left(n + \frac{3}{2}\right) \sqrt{1-\xi^2}\right) \sim (1-\xi^2)^{-\alpha/2}, \quad (82)$$

где $N_0 = A/\sqrt{1-\xi^2}$; $A \gg 1$. В результате

$$\Phi(\xi) = a(1-\xi^2) + b(1-\xi^2)^{-\alpha/2}, \quad (83)$$

откуда следует, что первый член, который дается суммой по $n < N_0$, доминирует лишь при $\alpha < -2$. Поведение коэффициентов $K_n(Q^2)$ при больших Q^2 может быть выражено через поведение $K_n(Q_0^2)$, если воспользоваться тем, что при больших n

$$\gamma_n = 4C_F \ln n + O(1) \quad (84)$$

[см. (77)]. Отсюда следует, что [7, 27]

$$\alpha(Q^2) = \alpha(Q_0^2) - \frac{4C_F}{B} \left(\ln \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} - \ln \ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2} \right), \quad (85)$$

и, таким образом, при достаточно больших Q^2 значение $\alpha(Q^2)$ становится меньше «критического» значения $\alpha_{\text{crit}} = -2$, а волновая функция $\Phi(\xi, Q^2)$ вследствие этого ведет себя при $\xi^2 \sim 1$ как $(1-\xi^2)$.

Асимптотический вклад в формфактор. Подставляя выражения (75), (76) для $\Phi(\xi; \mu^2)$ в формулу для формфактора (61) и полагая $\mu = Q$, находим, что

$$F_\pi(Q^2) = 8\pi\alpha_s(Q^2) \frac{f_\pi^2}{Q^2} \frac{C_F}{N_c} (\gamma(Q^2))^2, \quad (86)$$

где $\gamma(Q^2)$ — результат интегрирования по ξ :

$$\gamma(Q^2) = \frac{3}{2} + \sum_{n=2, 4, \dots} K_n(Q_0^2) \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{\ln Q_0^2/\Lambda^2}{\ln Q^2/\Lambda^2} \right)^{\gamma_n/B}. \quad (87)$$

Напомним, что гегенбауэровские моменты $K_n(Q_0^2)$ выражаются через обычные φ_n формулой (79).

Интересно отметить, что в рамках модели со скалярными глюонами для асимптотики формфактора пиона в нашей работе [39] методом прямого суммирования в лестничном приближении было получено

выражение, имеющее структуру, аналогичную (80). А именно, в [39] получена формула

$$F_{(\pi)}(Q^2) = \frac{c}{Q^2} \varphi^2 \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-g_0^2}, \quad (88)$$

где

$$\varphi \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)^\tau \frac{d\tau}{\tau} \xi(\tau); \quad (89)$$

$$\xi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\nu+1) \Gamma(n+\nu+2)}{n! (n+1)!} a_n, \quad (90)$$

причем $\nu(\nu+1) = -g_0^2/\tau$, $g_0^2 = \frac{g^2}{16\pi^2}$. Переходя от переменной интегрирования τ в (89) к переменной ν и вычисляя интеграл по ν взятием вычетов в точках $\nu = n + k + 1 \equiv N$, получаем для $\varphi(Q^2/\mu^2)$:

$$\begin{aligned} \varphi \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) &= \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \frac{2N+3}{(N+1)(N+2)} \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{g_0^2}{(N+1)(N+2)}} \times \\ &\times \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n a_n}{n! (n+1)! (N-n)!}. \end{aligned} \quad (91)$$

Поскольку величина $\gamma_n = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ есть аномальная размерность оператора $\psi\gamma_5\gamma_\mu \partial^n\psi$ в этой модели [81], то структура формулы (91) полностью совпадает со структурой КХД-выражения, причем мультипликативно-перенормируемые операторы и в этом случае выражаются через те же полиномы Гегенбауэра $C_n^{3/2}$.

Возвращаясь к (87), заметим, что в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ функция $\gamma(Q^2)$ стремится к $3/2$ — это значение соответствует, очевидно, подстановке в (61) асимптотической формы $\Phi^{as}(\xi)$ (79) для волновой функции пиона. Иными словами, в «строгой» асимптотике $Q^2 \rightarrow \infty$ формфактор пиона выражается через константу f_π и бегущую КХД-константу связи $\alpha_s(Q^2)$ [7, 9, 10]:

$$F_\pi^{as}(Q^2) |_{Q^2 \rightarrow \infty} = \frac{8\pi f_\pi^2 \alpha_s(Q^2)}{Q^2}. \quad (92)$$

Взяв для $\alpha_s(Q^2)$ ее значение $\alpha_s \simeq 0,3$, типичное для передач $Q^2 = 1 \div 5 \text{ ГэВ}^2$ (при $\Lambda_{\text{КХД}} \simeq 100 \text{ МэВ}$), находим из (92), что $Q^2 F_\pi(Q^2) \simeq 0,15 \text{ ГэВ}^2$. Это в два с лишним раза меньше экспериментально наблюдаемого значения. Данный факт можно интерпретировать как указание либо на то, что истинная низкоэнергетическая волновая функция отличается от асимптотической, либо на то, что при ныне

достигнутых довольно малых передачах $Q^2 \lesssim 5$ ГэВ асимптотический анализ еще не применим.

Ядро эволюции для волновой функции пиона. Воспользовавшись связью величин φ_N с волновой функцией $\varphi(x, \mu^2)$, можно получить уравнение эволюции непосредственно для $\varphi(x, \mu^2)$ [5, 10]:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g}\right) \varphi(x; \mu^2) = \int_0^1 V(x, y) \varphi(y; \mu^2) dy. \quad (93)$$

Ядро эволюции $V(x, y; g)$ связано с матрицей Z_{nk} соотношением

$$\int_0^1 V(x, y; g) x^n dx = \sum_{k=0}^n Z_{nk}(g) y^k \quad (94)$$

или, в явной форме,

$$V(x, y; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} dn x^{-n-1} \left(\sum_{k=0}^N Z_{nk}(g) y^k \right) \Big|_{\text{АП}}, \quad (95)$$

где символ «АП» означает, что результат суммирования по k необходимо аналитически продолжить в комплексную n -плоскость. Например, для вклада $Z_{nk}^{(1)}$ (65) сумма по k в (95) равна

$$\frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ -y^n + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{1-y^{n+1}}{1-y} \right\}, \quad (96)$$

и интегрирование по n дает

$$\begin{aligned} V_0^{(1)}(x, y) &= \frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ -\delta(x-y) + \left[\frac{x}{y} \theta(x < y) + \frac{\bar{x}}{y} \theta(\bar{x} < \bar{y}) \right] \right\} = \\ &= \frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{x}{y} \theta(x < y) + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}) \right\}_+. \end{aligned} \quad (97)$$

Операция $\{ \}_+$ определена следующим образом [55]:

$$\{V(x, y)\}_+ = V(x, y) - \delta(x-y) \int_0^1 V(z, y) dz. \quad (98)$$

Для ядер «с плюсом» выполняется соотношение

$$\int_0^1 \{V(x, y)\}_+ dx = 0. \quad (99)$$

Поскольку интеграл (99) для ядра эволюции волновой функции пиона равен $Z_{00} = \gamma_0$, т.е. аномальной размерности аксиального тока, обращаемой (в силу сохранения последнего) в нуль, то ядро эволюции волновой функции пиона во всех порядках ТВ имеет «плюсовую» форму.

Для вклада $Z_{NK}^{(2)}$ расчет по формуле (95) дает

$$V^{(2)}(x, y) = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{x}{y} \frac{\theta(x < y)}{x-y} + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}) \right\}. \quad (100)$$

Использование ядер эволюции существенно облегчает задачу диагонализации матрицы Z_{nk} , которая, очевидно, сведется к нахождению собственных функций ядра $\bar{V}(x, y; g)$. А эта задача решается тривиально [5, 10]. Достаточно заметить, что ядро $V(x, y) = V^{(1)}(x, y) + V^{(2)}(x, y)$ (впрочем, как и каждая его компонента $V^{(1)}, V^{(2)}$) после умножения на \overline{y} становится симметричным относительно замены $x \leftrightarrow y$. Отсюда немедленно следует, что собственные функции $\phi_N(x)$ ядра $V_0(x, y)$ должны быть ортогональными с весом

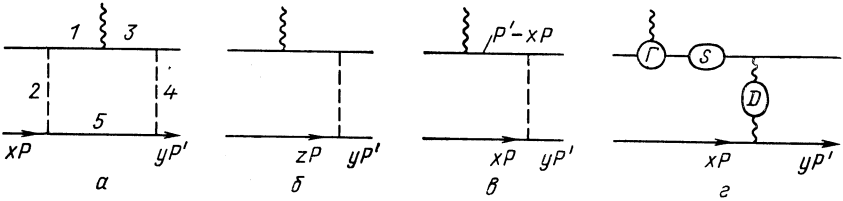


Рис. 14. Структура вкладов в режиме «двойного сжатия»

$x(1 - x)$. А таковыми в классе полиномов являются как раз полиномы Гегенбауэра $C_n^{3/2}(x - \bar{x})$.

Режим «двойного сжатия». С самого начала нашего анализа мы систематически игнорировали возможность «двойного сжатия» (см. рис. б, в) и пообещали обосновать в дальнейшем подобный образ действий.

Вопрос о наличии или отсутствии вкладов, обусловленных двойным сжатием (когда в RMP-режиме одновременно дают ведущий полюс два не лежащих один внутри другого подграфа V_L и V_R), вовсе не является академическим, а ответ на него само собой разумеющимся. В простых скалярных моделях типа $\phi_{(4)}^3, \phi_{(6)}^3$ он стоит со всей остротой — наличие этих вкладов приводит к тому, что анализ формфактора «пиона» (т. е. двухчастичного связанного состояния) в этих простых моделях, по сути дела, сложнее, чем в КХД.

Для иллюстрации этого тезиса рассмотрим простейшую однопетлевую «двустороннюю» диаграмму (рис. 14, а) в модели $\phi_{(6)}^3$ (эта модель, являясь ренормируемой, ближе к КХД, чем суперперенормируемая модель $\phi_{(4)}^3$).

Меллиновский образ вклада этой диаграммы имеет следующее альфа-представление:

$$\mathcal{M}(x, y; J) = \frac{eg^4}{(4\pi)^3} \int_0^{\infty} \prod_1^5 d\alpha_i \frac{(\alpha_1 + x\alpha_2)^J (\alpha_3 + y\alpha_4)^J}{(D(\alpha))^{J+3}} \exp\left(-m^2 \sum_1^5 \alpha_i\right), \quad (101)$$

где $D(\alpha) = \alpha_1 + \dots + \alpha_5$. РМР-подграфами в данном случае являются $V_1 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, $V_2 = \{\sigma_3, \sigma_4\}$, $V_3 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_5\}$. Проинтегрировав сначала по области $\lambda < 1/\mu^2$ ($\lambda \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_5$), затем по области $\beta_3 + \beta_4 \ll 1$ ($\beta_i = \alpha_i/\lambda$) и далее по области $\beta_1 + \beta_2 \ll 1$, получаем в точке $J = -2$ полюс третьего порядка, что соответствует вкладу $Q^{-4} \ln^2(Q^2/\mu^2)$ в однопетлевой диаграмме!

Чтобы понять происхождение «лишнего» логарифма, выпишем промежуточный результат, получающийся после того, как выполнено только интегрирование по $\lambda < 1/\mu^2$ и $\beta_3 + \beta_4 \ll 1$:

$$E(x, y; J) \simeq \frac{g^4 (1/\mu^2)^{J+2}}{(4\pi)^3 (J+2)^2} \int_0^1 d\kappa (\kappa + y(1-\kappa))^J \times \\ \times \int_0^1 \prod_{i=1}^3 d\beta_i (\beta_1 + x\beta_2)^J \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_5), \quad (102)$$

где $\kappa = \beta_3/(\beta_3 + \beta_4)$. Обозначив $\beta_1 + x\beta_2$ через z , можно представить E в виде

$$E(x, y; J) = \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^{J+2} \frac{1}{J+2} \int_0^1 dz z^{J+2} V(x, z) E_0(z, y; J), \quad (103)$$

где $E_0(z, y; J)$ — меллиновский образ древесной диаграммы (рис. 14, б),

$$E_0(z, y; J) = \frac{g^2}{(J+2) y z^2}, \quad (104)$$

а $V(x, z)$ — однопетлевое ядро эволюции для волновой функции,

$$V(x, z) = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 \prod_{i=1, 2, 5} d\beta_i \delta(z - (\beta_1 + \beta_2 x)) \delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_5) = \\ = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \left\{ \frac{z}{x} \theta(z < x) + \frac{1-z}{1-x} \theta(x < z) \right\} \quad (105)$$

[ср. с (97)].

Появление третьего полюса при $J = -2$ объясняется, таким образом, тем, что произведение $V(x, z) E_0(z, y)$ ведет себя при малых z как $1/z$. Заметим теперь, что свертка ядра $V(x, z)$ с исходной волновой функцией $\Phi_0(x, \mu_0^2)$ дает как раз добавку к Φ_0 , обусловленную эволюцией

$$\Phi(z, \mu^2) = \Phi(z, \mu_0^2) + \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) \int_0^1 V(z, x) \Phi(x, \mu_0^2) dx \equiv \Phi_0 + \Delta\Phi. \quad (106)$$

Таким образом, если записать вклад конфигурации с RMP-подграфом низшего порядка (рис. 14, б) в партонном виде

$$F^{(14, б)}(Q^2) = \int_0^1 \Phi(z) dz \int_0^1 \Phi(y) E(z, y; Q^2) dy \quad (107)$$

и взять эволюционирующие волновые функции (106), то вследствие высокой сингулярности амплитуды $E(z, y; Q^2) \sim 1/(z^2 y Q^4)$ при малых z поправка к Φ_0 , обусловленная эволюцией, даст логарифмическую расходимость. В более аккуратном подходе вместо расходимости появляется дополнительный логарифм. В КХД вклад диаграммы одноклассового обмена (рис. 14, в) пропорционален $1/(zyQ^2)$, а ядро эволюции $V(x, z)$ при малых z ведет себя как z , поэтому никаких сингулярностей в интеграле по z не возникает, а следовательно, в диаграмме типа рис. 14, а режим двойного сжатия невозможен, и она дает только единичный логарифм.

Проследим причину такого различия в поведении вкладов $E_0(z, y)$. Знаменатели пропагаторов в КХД дают тот же результат $1/(z^2 y Q^4)$, что и в модели ϕ^3 . Однако в числителе спинорного пропагатора в КХД-диаграмме (рис. 14, б) стоит фактор $(\hat{P}' - z\hat{P})$, из двух членов которого только второй, пропорциональный z , дает $O(Q^2)$ -множитель, а вклад первого имеет по сравнению с ним $O(P'^2/Q^2)$ -подавление. В результате $F_{\text{КХД}} \sim 1/(zyQ^2)$.

Можно показать, что и в произвольном порядке ТВ ведущий вклад подграфа V_R (или V_L) не имеет при $z \rightarrow 0$ сингулярностей $1/z^2$. В этом позволяют убедиться простые соображения размерности. Действительно, в амплитуду T и пропагатор S (рис. 14, г) импульс P входит только в виде произведения zP , поэтому

$$T \sim \gamma_5 \frac{aP' + b(z\hat{P})}{z(P\hat{P}')} , \quad S \sim \frac{\tilde{a}\hat{P}' + \tilde{b}(z\hat{P})}{z(P\hat{P}')} . \quad (108)$$

В результате $TSG \sim 1/z$ при $z \rightarrow 0$, поскольку вершинная функция $\Gamma(q, p_1, p_2) = \Gamma(P' - P, (1-z)P', P' - zP)$ имеет не более чем логарифмические сингулярности при $P_2^2/Q^2 \rightarrow 0$.

Таким образом, для ведущего вклада в асимптотику формфактора пиона, соответствующего аксиальной проекции (т.е. операторам вида $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$) режим «двойного сжатия» можно не учитывать.

Режим «двойного сжатия» для неведущих вкладов. Ослабление сингулярности древесной диаграммы (рис. 14, в) при $z \rightarrow 0$ за счет вклада числителя кваркового пропагатора было существенным образом основано на том, что $\sim \hat{P}'$ — члены числителя, не ослабляющие сингулярность, «убивались» проектирующим множителем $\gamma_5 P'$. Для псевдоскалярной проекции такого подавления не будет: $E_{PP} \sim \sim g^2 C_F / x^2 y Q^4 N_c$. Для ответа на вопрос о сходимости интегралов по x

необходимо привлечь какую-либо информацию о поведении псевдоскалярной волновой функции $\varphi_P(x)$:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \bar{d}(\xi) \gamma_5 \hat{E}(\xi, \eta; A) u(\eta) | P \rangle = \\ & = \int_0^1 dx \varphi_P(x) \exp[i(P\xi)x + i(P\eta)(1-x)] \{1 + O((\xi - \eta)^2)\} \quad (109) \end{aligned}$$

[ср. с (51), (55)] при $x \rightarrow 0$.

В работах [56, 57] утверждается, что при стремлении параметра перенормировки составных операторов μ^2 (выбранного равным внешней передаче Q^2) к бесконечности волновая функция $\varphi_P(x)$ выходит на константу, и, следовательно, интеграл по x линейно расходится при малых x .

С учетом неизбежного обрезания при малых x на величине $x_{\min} \sim \langle k_{\perp}^2 \rangle / Q^2$ вследствие ненулевого среднего поперечного импульса кварков $\langle k_{\perp}^2 \rangle$ эта расходимость превращается в дополнительную линейную степень $Q^2 / \langle k_{\perp}^2 \rangle$, и в результате $F_{\pi}^{PP}(Q^2)$ ведет себя при $Q^2 \rightarrow \infty$ не как $1/Q^4$, а как $1/Q^2$, т.е. как и аксиальный вклад $F_{\pi}^{AA}(Q^2)$, считающийся в нашем анализе ведущим. Поскольку упомянутое изменение закона степенного поведения связано с интегрированием по области очень малых фракций $x \ll \langle k_{\perp}^2 \rangle / Q^2$ (т.е. по виртуальностям $k^2 \sim \langle k_{\perp}^2 \rangle$), где теория возмущений ненадежна, могут возникнуть сомнения (см. [58]) в справедливости факторизованного представления для асимптотики формфактора пиона в КХД. Эти сомнения основаны, однако, на слишком поспешных заключениях. Если бы они были справедливы, то поведение $E^{(PP)}(Q^2) \sim 1/Q^2$ мы наблюдали бы уже в однопетлевой двусторонней диаграмме (рис. 14, а). В этом можно убедиться с помощью нижеследующих рассуждений [59].

Асимптотическая волновая функция $\varphi^{as}(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_0^1 V(x, y) \varphi^{as}(y) dy = \gamma \varphi^{as}(x) \quad (110)$$

[где $V(x, y)$ — ядро эволюции], выражающему тот факт, что ее форма в процессе эволюции не меняется. Поэтому если интеграл

$$I_{\varphi} = \int_0^1 dx E_0(x, y; Q^2) \varphi^{as}(x) \quad (111)$$

линейно расходится при малых x , то таким же образом будет расходиться и интеграл

$$I_V = \int_0^1 E_0(x, y; Q^2) V(y, z) dy, \quad (112)$$

фигурирующий в качестве коэффициента при $\ln Q^2$ в однопетлевом вкладе в коэффициентную функцию

$$E_1(x, z; Q^2) = \int_0^1 E_0(x, y) V(y, z) dy \ln Q^2 + \dots \quad (113)$$

Иными словами, если для асимптотической волновой функции $F_\pi^{(PP)}(Q^2) \sim 1/Q^2$, то и $E_1^{(P)} \sim 1/Q^2$. С другой стороны, из анализа размерностей категорически следует, что $E_1^{(P)} \propto 1/Q^4$, т. е. обсуждавшаяся выше линейная расходимость интеграла по x на самом деле для $E_1^{(P)}$ никак себя не проявляет. Этот парадокс, однако, лишь кажущийся. Дело в том, что правая часть выражения (113) имеет фактически матричный вид

$$E_1^{(PP)} = (E_0^{(PP)} \otimes V^{(PP)} + E_0^{(PT)} \otimes V^{(TP)}) \ln Q^2 + \dots, \quad (114)$$

где T обозначает тензорную фирцевскую проекцию. Поэтому тот факт, что $E_0^{(PP)} \otimes V^{(PP)} \sim 1/Q^2$, в принципе не противоречит тому, что $E_1^{(PP)} \sim 1/Q^4$. Необходимо лишь, чтобы $1/Q^2$ -вклады в $E_0^{(PP)} \otimes V^{(PP)}$ и $E_0^{(PT)} \otimes V^{(TP)}$ сокращались. А поскольку из анализа размерностей следует, что $E_1^{(PP)} \sim 1/Q^4$, то они в действительности просто обязаны сокращаться.

Аналогичным образом имеет смысл рассматривать сумму псевдоскалярного и тензорного вкладов в $F_\pi(Q^2)$, а не каждый из них по отдельности. В работах [56, 57] было показано, что если в диаграмме одноглюонного обмена (рис. 14, в) внешние линии сопоставить свободным кваркам, то для упомянутой суммы действительно имеет место сокращение наиболее сингулярных по x, y вкладов, так что результирующий вклад операторов твиста 3 ведет себя как $1/Q^4$. Аналогичный результат может быть получен и в рамках нашего подхода.

В фейнмановской калибровке, в силу свойства $\gamma^\alpha \sigma_{\mu\nu} \gamma_\alpha = 0$, тензорная (T) проекция для диаграммы (рис. 14, б) отлична от нуля только для кварковых полей начального состояния, а для конечного нужно взять P -проекцию. Для остальных диаграмм также «работает» только интерференционный TP -член. Используя определение тензорной волновой функции

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \bar{d}(\xi) \hat{E}(\xi, 0; A) \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} u(0) | P \rangle = \\ & = (P_\mu \xi_\nu - P_\nu \xi_\mu) \int_0^1 \varphi_T(x) e^{i(P\xi)x} \{1 + O(\xi^2)\}, \end{aligned} \quad (115)$$

находим, что в фейнмановской калибровке [59]

$$E_\pi^{(TP)}(Q^2) = \frac{8\pi}{9Q^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \varphi_T(x) \varphi_P(y) \left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{2}{x^3 y} \right), \quad (116)$$

т.е. коэффициентная функция $E^{TP}(x, y)$ при $x \rightarrow 0$ ведет себя как $1/x^3$.

Связь между функциями $\varphi_T(x)$ и $\varphi_P(x)$ можно найти (см. [59—61]), продифференцировав (116) по ξ и воспользовавшись уравнением движения $\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu) d(\xi) = 0$ (кварки считаются безмассовыми). После простых преобразований получаем

$$\varphi_T(x) = x^2 \int_x^1 \frac{\varphi_P(x)}{x^2} + (\bar{q}Gq), \quad (117)$$

где член $\bar{q}Gq$ соответствует вкладу волновой функции, сопоставляемой оператору, возникающему при дифференцировании (115) и содержащему напряженность глюонного поля $G_{\mu\nu}$.

Нетрудно видеть, что если при малых x функция $\varphi_P(x)$ ведет себя как $a + O(x)$, то $\varphi_T(x) = ax(1-x) + O(x^2) + (\bar{q}Gq)$, и в чисто двухкварковом секторе сингулярность $\varphi_P(x)/x^2$ в PP -вкладе сокращается с сингулярностью $\varphi_T(x)/x^3$ в TP -вкладе, в согласии с результатами работ [56, 57].

3. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К АСИМПТОТИКЕ ФОРМФАКТОРА ПИОНА В КХД

Основной результат, полученный в разд. 2, заключается в том, что при достаточно больших передачах импульса $q = P' - P$ амплитуда $T(P, P')$, соответствующая формфактору пиона, факторизуется во всех порядках и для всех логарифмов ТВ:

$$T(P, P') = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \varphi^*(y, \mu, \mu_R) \varphi(x, \mu, \mu_R), \quad (118)$$

$$E(Q^2/\mu^2, Q^2/\mu_R^2, x, y, \alpha_s)/Q^2,$$

где $Q^2 = -q^2$; μ_R — параметр R -операции; φ — волновая функция, описывающая переход пиона в $\bar{q}q$ -систему, а E/Q^2 — амплитуда партонного подпроцесса $q\bar{q}\gamma^* \rightarrow q'\bar{q}'$. Параметр $1/\mu$ является границей между «малыми» и «большими» расстояниями или, что то же самое, μ служит параметром ренормировки для вершин $(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu D^n\psi)$, соответствующих составным операторам.

От частного выбора параметров μ, μ_R произведение $\varphi^* \otimes E \otimes \varphi$ не зависит. Это, однако, обеспечивается лишь суммированием по всем порядкам. Если же ограничиться несколькими первыми членами ряда по α_s , то полученные выражения будут зависеть от μ, μ_R . Кроме того, можно проводить вычисления в различных ренормировочных схемах и пользоваться различными рецептами (схемами) разбиения вкладов малых и больших расстояний, и оборванный ряд будет зависеть также от выбранных схем.

Высказанные соображения, как оказывается, имеют в рассматриваемой задаче далеко не академический интерес, и имеет смысл остановиться на этом подробнее.

В низшем приближении амплитуда E имеет следующий вид:

$$E \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, x, y, \alpha_s(\mu_R) \right) = \frac{2\pi\alpha_s(\mu_R)}{xy} \frac{C_F}{N_c}, \quad (119)$$

где $C_F = 4/3$; $N_c = 3$ — обычные цветовые множители. Для формфактора это дает

$$F_\pi^{(0)}(Q^2) = \frac{2\pi C_F \alpha_s(\mu_R)}{Q^2 N_c} \int_0^1 \frac{\varphi(x, \mu, \mu_R) dx}{x} \int_0^1 \frac{\varphi^*(y, \mu, \mu_R)}{y} dy. \quad (120)$$

В этом приближении E не зависит от Q и μ , а от μ_R зависит только через α_s . Логарифмическая зависимость от Q , μ , μ_R [в виде $\ln(Q^2/\mu^2)$, $\ln(Q^2/\mu_R^2)$] появится только в следующем порядке по α_s . Логарифмические вклады стремятся, таким образом, скомпенсировать зависимость $F_\pi^{(0)}$ от μ и μ_R . При неудачном выборе μ , μ_R низшее приближение $F_\pi(Q, \mu, \mu_R)$ будет сильно отличаться от «истинного» значения $F_\pi(Q)$ (суммы всех порядков ТВ), и поправки, обусловленные высшими порядками ТВ, будут большими.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли выбрать μ и μ_R так, чтобы эти поправки были как можно меньше. Например, если взять $\mu = \mu_R = Q$, то из E исчезнут логарифмы $\ln(Q^2/\mu^2)$, $\ln(Q^2/\mu_R^2)$, которые при $Q \gg \mu$, μ_R (или $Q \ll \mu$, μ_R) приводят к росту коэффициентов ряда по α_s . Логарифмы $\ln(Q^2/\mu^2)$ как бы указывают нам на то, что виртуальность частиц в подпроцессе пропорциональна Q^2 : — $\langle k^2 \rangle \sim a^2 Q^2$, и поэтому $F_\pi(Q)$ нужно разлагать по $\alpha_s(Q^2)$. Аналогично, поскольку параметр μ в аргументе волновой функции $\varphi(x, \mu^2)$ означает, что структура пиона зондируется на расстояниях $1/\mu$, логарифмы $\ln(Q^2/\mu^2)$ указывают на то, что μ также необходимо взять порядка Q . Если, однако, отношение $a^2 \equiv \langle k^2 \rangle / q^2$ мало (или велико) по сравнению с единицей, то коэффициенты разложения $F_\pi(Q)$ в ряд по $\alpha_s(Q)$ будут содержать члены типа $\ln a^2$, и предпочтительнее будет выбор $\mu = \mu_R = aQ$. В частности, если кварк и антикварк в пионе имеют примерно равные импульсы [т.е. если $\varphi(x) \sim \delta(x - 1/2)$], то импульс глюона в данном случае равен $q/2$, и физически наиболее естественным будет разложение в ряд по $\alpha_s(Q/2)$. Хотя при этом a не очень сильно отличается от единицы, при экспериментально доступных передачах импульса ($Q \lesssim 2$ ГэВ) различие между $a = 1$ и $a = 1/2$ весьма существенно.

Волновые функции $\varphi(x, \mu^2)$ описывают динамику взаимодействия на больших расстояниях, поэтому их явный вид, вообще говоря, не известен. Квантовая хромодинамика предсказывает лишь их изменение с ростом μ^2 . В частности, при $\mu^2 \rightarrow \infty$ имеем [7, 10, 9]:

$$\varphi(x, \mu^2) \rightarrow 6f_\pi x(1-x), \quad (121)$$

где $f_\pi = 133 \text{ МэВ}$ — константа распада $\pi \rightarrow \mu\nu$. Появление множителя f_π связано с условием нормировки

$$\int_0^1 \varphi(x, \mu^2) dx = f_\pi. \quad (122)$$

Однако при $\mu^2 \ll 1 \text{ ГэВ}$ вид $\varphi(x, \mu^2)$ может сильно отличаться от $\varphi(x, \infty)$. Для слабозаимодействующих частиц $\varphi(x) \sim \delta(x - 1/2)$, а взаимодействие, очевидно, расширяет волновую функцию. Ширину волновой функции $\varphi(x, M^2)$ при $M \propto 1/R_{\text{conf}} \sim 200 \div 500 \text{ МэВ}$ (т. е. «мягкой» волновой функции) можно оценить как

$$\Gamma \sim (E_{\text{int}}/m_q)^2, \quad (123)$$

где E_{int} — параметр, характеризующий интенсивность взаимодействия, а m_q — масса составляющих. Таким образом, для адронов, построенных из тяжелых кварков, например, для J/ψ - и Υ -частиц волновая функция довольно узкая, поскольку $E_{\text{int}} \sim M \ll 500 \text{ МэВ}$, а $m_q \ll 1 \text{ ГэВ}$. Два пиона формула (123) дает $\Gamma > 1$ при любом разумном выборе m_q , т. е. волновая функция пиона должна быть широкой.

Заметим, что амплитуда (119) сингулярна при $x, y = 0$. Поэтому для достаточно широких волновых функций основной вклад в интеграл будет давать область $x, y \ll 1$, в которой виртуальности глюона (xyQ^2) и кварка (xQ^2) (см. рис. 14, в) гораздо меньше виртуальности зондирующего фотона. В такой ситуации выбор $\mu^2, \mu_R^2 \sim xyQ^2$ или xQ^2 явно предпочтительнее выбора $\mu^2 = \mu_R^2 = Q^2$. Чтобы определить, при каком именно выборе обеспечивается наиболее быстрая сходимость ряда по α_s , необходимо вычислить $E(x, y)$, по крайней мере, в однопетлевом приближении.

Поправку порядка α_s к главному логарифмическому приближению дает и учет двухпетлевого вклада в ядро эволюции для волновой функции пиона. Учет такого вклада тем более необходим, что только в этом случае суммарная $O(\alpha_s)$ -поправка не будет зависеть от используемых ренормировочной и факторизационной схем [62]. Кроме того, вычисление двухпетлевого вклада в ядро $V(x, y)$ дает ответ на интересный вопрос о том, сохраняется ли в высших порядках связь между мультипликативно-перенормируемыми и конформными операторами, обнаруженная на однопетлевом уровне, или она разрушается радиационными поправками.

Рецепт построения коэффициентной функции. Вклады многопетлевых диаграмм содержат, как правило, ренормгрупповые $(\alpha_s \ln Q^2/\mu_R^2)^N$ и массовые $(\alpha_s \ln Q^2/p^2)^N, (\alpha_s \ln^2 Q^2/p^2)^N$ логарифмы. Первые возникают в результате процедуры удаления ультрафиолетовых расходимостей, а вторые появляются в результате вычисления некоторых сходящихся (в УФ-области) интегралов. Все массы здесь и далее считаются равными нулю, а p^2 — это параметр, обеспечивающий инфракрасную регуляризацию, например виртуальность внешних частиц.

Процедура факторизации, изложенная в разд. 2, по существу состоит в следующем. Сначала доказывается сокращение всех ДЛ-вкладов $(\alpha_s \ln^2 Q^2/p^2)^N$. Для оставшихся однологарифмических вкладов $(\alpha_s \ln Q^2/p^2)^N$ проводится разбиение $\ln Q^2/p^2 = \ln Q^2/\mu^2 + \ln \mu^2/p^2$ на вклады, обусловленные «малыми» и, соответственно, «большими» расстояниями. Затем доказывается, что логарифмы $\ln Q^2/\mu^2$ и $\ln \mu^2/p^2$ собираются в отдельные множители, т. е. что

$$\begin{aligned} T(Q, p) &\equiv \alpha_s t_0 + \alpha_s^2 (t_1 + t_0 \otimes V_1 \ln(Q^2/p^2)) + \dots = \\ &= [\alpha_s t_0 + \alpha_s^2 ((t_1 - a_1) + t_0 \otimes V_1 \ln(Q^2/\mu^2)) + \dots] \otimes \\ &\otimes [1 + \alpha_s (V_1 \ln(\mu^2/p^2) + a_1) + \dots] \equiv E(Q^2/\mu^2) \otimes \Gamma(\mu^2/p^2), \end{aligned} \quad (124)$$

где V_1 — однопетлевое ядро эволюции. В формуле (124) учтено, что множитель $\Gamma(\mu^2/p^2)$ (обычно сопоставляемый матричным элементам некоторых локальных операторов) в однопетлевом приближении содержит, вообще говоря, и нелогарифмический член $\alpha_s a_1$. Поэтому, чтобы найти коэффициент при α_s^2 в разложении E по α_s , необходимо согласно (124) вычислить вклады однопетлевых диаграмм и для подпроцесса $q\bar{q}\gamma^* \rightarrow q'\bar{q}'$, и для матричных элементов соответствующих операторов. Заметим, что если инфракрасное обрезание обеспечивается приписыванием внешним частицам ненулевой виртуальности, то как t_1 , так и a_1 не будут калибровочно-инвариантными выражениями, и только их разность $e_1 = t_1 - a_1$ не будет зависеть от выбора калибровки (см. [62]). В КХД наиболее удобное инфракрасное обрезание основано на размерной регуляризации

$$\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \left(\frac{d^{4+2\varepsilon} k}{(2\pi)^{4+2\varepsilon}} \right) (4\pi e^{-\gamma_E}) (\mu^2)^{-\varepsilon}, \quad (125)$$

с последующим вычитанием полюсов по ε [формально соответствующих $\ln(\mu^2/p^2)|_{p^2=0}$]. Выбор (125) соответствует \overline{MS} -схеме [62], в которой специально введенный фактор $4\pi \exp(-\gamma_E)$ приводит к сокращению вкладов, содержащих $\ln(4\pi)$ и константу Эйлера γ_E . Виртуальности внешних частиц, а также и все массы, полагаются при этом равными нулю ($p^2 = m^2 = 0$). Исходная (нерегуляризованная) амплитуда, следовательно, калибровочно-инвариантна. Поскольку размерная регуляризация не нарушает калибровочной инвариантности, регуляризованные величины теперь также калибровочно-инвариантны.

При использовании размерной регуляризации [63] связь между амплитудой перехода $T(Q^2, \mu^2, g, \varepsilon)$ и коэффициентной функцией E в однопетлевом приближении дается формулой [64]

$$\begin{aligned} T_0(\varepsilon) + \left(\frac{B}{\varepsilon} + C \right) + \dots = \\ = \left(1 + \frac{V_1}{\varepsilon} + \dots \right) \otimes (E_0(\varepsilon) + E_1(\varepsilon) + \dots) \otimes \left(1 + \frac{V_1}{\varepsilon} + \dots \right). \end{aligned} \quad (126)$$

В случае, когда $E_0(\varepsilon)$ имеет нетривиальную зависимость от ε : $E_0(\varepsilon) + \varepsilon E'_0 + \dots$, вместо простого соотношения $E_1(0) = C$ имеет место более сложное:

$$E_1(0) = C - V_1 \otimes E'_0 - E'_0 \otimes V_1. \quad (127)$$

В рассматриваемой задаче вклад простейшей диаграммы (рис. 14, в) пропорционален $(1 - \varepsilon)$, поскольку

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = -2(1 - \varepsilon) \gamma_\nu. \quad (128)$$

Таким образом, $E_0(\varepsilon) = E_0(1 - \varepsilon)$, и поэтому

$$E_1(0) = C + V_1 \otimes E_0 + E_0 \otimes V_1. \quad (129)$$

Используя явный вид E_0 (119) и V_1 (97), (100), находим, что для получения E_1 необходимо добавить к сумме конечных частей C выражение

$$\Delta E^{(1)} = -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F (4 + \ln x + \ln y) E^{(0)}. \quad (130)$$

Результат вычислений для однопетлевой КФ. Непосредственный расчет КФ был выполнен первоначально в фейнмановской калибровке независимо двумя группами [65, 66], между результатами которых имелось разногласие. Более поздние, а также независимо выполненные расчеты в светоподобной калибровке $n_\mu A_\mu = 0$ ($n^2 = 0$) [64, 66] подтвердили правильность результата, полученного в [65].

Конкретная расчетная схема, выбранная в [65], соответствует тому, что и массовые сингулярности, и ультрафиолетовые расходимости регуляризуются размерным образом. Такая возможность обеспечивается тем, что эти два типа сингулярностей в рассматриваемой задаче не возникают одновременно для одного и того же интеграла, за исключением тривиальных вкладов, соответствующих вставкам во внешние линии. Размерная регуляризация УФ-расходящихся интегралов

$$d^4k \rightarrow d^{4-2\varepsilon}k \quad (131)$$

сопровождалась ренормировкой по 'т Хоофту [63], т.е. вычитанием полюсов по ε из расходящихся подграфов.

Результаты расчетов для отдельных диаграмм приведены в [65]. Суммарный вклад всех диаграмм равен

$$\begin{aligned} E^{(1)}(x, y; \alpha_s; Q, \mu, \mu_R) = & \\ = \frac{2\pi C_F \alpha_s}{N_c xy} \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[C_F \left((2 + \ln x) (L(\sqrt{xy}) - 1) - \frac{1}{2} L(1) + \right. \right. \right. & \\ + \frac{1}{2} \ln x \left(3 - \frac{x}{x} \right) - \frac{1}{3} \left. \right] - \frac{1}{4} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \left(L^{(R)}(xy) - \frac{5}{3} \right) + & \\ + \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) \left(\text{Sp}(x) - \text{Sp}(x) + \ln \bar{x} \ln \frac{y}{y} - \frac{5}{3} \right) + & \\ + \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) \frac{1}{(x-y)^2} \left(\frac{y^2 \bar{y} + x^2 \bar{x}}{y-x} (\text{Sp}(\bar{x}) - \text{Sp}(x) - \ln \bar{x} \ln y) + \right. & \\ \left. + 2xy \ln x + (x+y-2xy) \ln \bar{x} \right) + \{x \leftrightarrow y\} \left. \right\}, & \quad (132) \end{aligned}$$

где

$$\bar{x} = 1 - x, \quad \bar{y} = 1 - y; \quad (133)$$

$$C_F = 4/3, \quad N_c = 3; \quad (134)$$

$$L(a) \equiv \ln(aQ^2/\mu^2), \quad L^{(R)}(a) \equiv \ln(aQ^2/\mu_R^2), \quad (135)$$

а функция Спенса $\text{Sp}(a)$ определена равенством

$$\text{Sp}(a) = - \int_0^1 \frac{dz}{z} \ln(1-az). \quad (136)$$

Заметим, что, несмотря на присутствие в (132) членов, содержащих $(y-x)^3$ в знаменателе, $E'(x, y)$ не имеет сингулярностей при $x = y$.

Структура однопетлевой поправки к коэффициентной функции. Чтобы получить более наглядное представление о значении и структуре вычисленных поправок, представим $F_\pi(Q)$ в виде

$$F_\pi(Q) = F_\pi^{(0)}(Q, \mu, \mu_R) \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi} B(Q, \mu, \mu_R) + O(\alpha_s^2) \right\}, \quad (137)$$

где нулевое приближение $F_\pi^{(0)}$ дается формулой (120) и

$$B = \left[-A \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right] - \frac{1}{4} \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right) \ln \frac{Q^2}{\mu_R^2} + C. \quad (138)$$

Множитель, заключенный в квадратные скобки, соответствует вкладам, учет которых приводит к замене аргумента μ^2 у волновой функции $\varphi(x, \mu^2)$ величиной, пропорциональной Q^2 : $\mu^2 \rightarrow a_1^2 Q^2$, а член $\ln(Q^2/\mu_R^2)$ приводит к замене $g(\mu_R)$ эффективной константой связи $\bar{g}(a_2 Q)$. В принципе нет никаких оснований полагать a_1 и a_2 равными единице.

Значения коэффициентов A и C зависят от конкретного вида волновых функций $\varphi(x)$, $\varphi(y)$. Для анализа этой зависимости мы выбрали простейшую параметризацию

$$\varphi_r(x) = f_\pi \frac{\Gamma(2+2r)}{\Gamma^2(1+r)} x^r (1-x)^r. \quad (139)$$

Числовой множитель в (139) обеспечивает нормировку (122). Значения A и C при различных r приведены в табл. 1.

Если $a_1 = a_2 = 1$ (т.е. для $\mu = \mu_R = Q$), поправка определяется коэффициентом C . Видно, что даже при $r = 1$, т.е. для довольно узкой волновой функции, $B = C = 7,25$, что дает поправку в 70 % при $\alpha_s \simeq 0,3$. Как указывалось во вводном подразделе, для узких волновых функций более разумным кажется выбор $\mu^2 = \mu_R^2 = \frac{Q^2}{4} \div \frac{Q^2}{2}$. При таком выборе $B = 4,1 \div 5,7$, т.е. поправка заметно уменьшается. Строго говоря, выбор $\mu^2 = \mu_R^2 = \frac{Q^2}{2} - \frac{Q^2}{4}$ должен быть оптимальным в «физической» или MOM-схеме [66], когда $g(\mu_R)$

Т а б л и ц а 1. Значения коэффициентов A , C , фигурирующих в формуле (138) для функций $\varphi_r(x)$, заданных параметризацией (139), и значения B из (137) при $\mu^2 = \sqrt{xy} Q^2$ и различных $\varphi_r(x)$.

r	A	C	$B (\mu^2 = \sqrt{xy} Q^2)$
1	0	7,3	3,04
0,5	1,2	13,4	2,32
0,2	5,0	54,4	0,39
0,1	11,5	204	-0,63
0,05	24,8	803	-8,53
0,01	131	$2 \cdot 10^4$	-55,2

соответствует вершине, в которую входят импульсы с виртуальностью μ_R^2 . В используемой нами \overline{MS} -схеме смысл параметра μ_R менее прозрачен. Известно, однако, что если выразить эффективную константу связи $g_i(\mu)$, относящуюся к i -й схеме, в виде

$$\frac{\overline{g}_i^2(\mu)}{(4\pi)^2} = \frac{1}{b_0 \ln(\mu^2/\Lambda_i^2)} \left\{ 1 - \frac{b_1}{b_0^2} \frac{\ln(\ln(\mu^2/\Lambda_i^2))}{\ln(\mu^2/\Lambda_i^2)} + \dots \right\}, \quad (140)$$

то результаты, полученные в разных схемах, отличаются лишь заменой $\Lambda_i = \kappa_{ij} \Lambda_j$, где κ_{ij} — числовой коэффициент [66]. В частности, Λ_{phys} слабо зависит от вершины, выбранной для определения $\overline{g}(k)$: $\Lambda_{\text{phys}} \simeq 2\Lambda_{\overline{MS}}$ [66]. Иными словами, выбор $\mu^2 = \mu_R^2 = \frac{Q^2}{2} - \frac{Q^2}{4}$ в физической схеме соответствует выбору $\mu^2 = \mu_R^2 = Q^2/8 - Q^2/16$ в \overline{MS} -схеме. При таком выборе $B = 1,0 \div 2,6$ для $r = 1$.

С уменьшением r , т.е. для все более широких волновых функций, коэффициент C , а следовательно, и значение поправки при $\mu = \mu_R = Q$ растут как $O(1/r^2)$. Одновременно, но несколько медленнее (как $O(1/r)$) растет и коэффициент A . При малых x, y $E^{(1)}(x, y; \alpha_s)$ можно представить в виде

$$E^{(1)}(x, y; \alpha_s) = E^{(0)}(x, y) \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(\mu_R)}{4\pi} \left[C_F \left(\ln^2 \frac{xyQ^2}{\mu^2} - \ln^2 \frac{Q^2}{\mu^2} \right) + 4C_F \ln \left(xy \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)^2 \right) - 2C_F \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + 3C_F \ln(xy) - \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right) \ln \left(\frac{xyQ^2}{\mu_R^2} \right) - 2 \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) \ln(xy) + f(x, y) \right] \right\}, \quad (141)$$

где $f(x, y)$ регулярно при $x = y = 0$ и не зависит от μ, μ_R и Q . При малых r основной вклад в A и C дают явно выписанные в (141) члены, которые более сингулярны при $x = y = 0$, чем $E^{(0)}(x, y)$. Появление факторов $\ln x, \ln y$ в (141) связано, несомненно, с наличием инвариантов xQ^2 и xyQ^2 .

Минимизация однопетлевых поправок. Массовые и ренормгрупповые логарифмы имеют разную природу, поэтому рассмотрим их отдельно. Наиболее простую структуру имеют поправки к пропагатору глюона. Они зависят только от xyQ^2 .

В абелевой теории (например, в КЭД) поведение $\bar{g}(\mu_R)$ полностью определяется поправками к пропагатору векторных частиц, и, следовательно, наиболее целесообразным выбором для μ_R в этом случае будет $\mu_R^2 = xyQ^2$ (в физической схеме). Среднее значение μ_R^2 при таком выборе можно оценить, потребовав, чтобы поправка, обусловленная вкладом $\ln(xyQ^2/\mu_R^2)$ при $\mu_R^2 = \langle \mu_R^2 \rangle$, обращалась в нуль. Это дает

$$\langle \mu_R^2 \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle Q^2, \quad (142)$$

где

$$\langle x \rangle \equiv \exp(\langle \ln x \rangle) = \exp \left\{ \left[\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x} \ln x dx \right] \left[\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]^{-1} \right\}. \quad (143)$$

Для функций (139) при малых r имеем $\langle x \rangle = \exp(-1/r)$. В частности, $\langle x \rangle = 5 \cdot 10^{-5}$ при $r = 0,1$.

В КХД поведение эффективной константы $\bar{g}(\mu_R)$ зависит также и от значения поправок к кварк-глюонной вершине и кварковому пропагатору. Если взять все члены $\ln(Q^2 a/\mu_R^2)$, возникающие в диаграммах при вычислении расходящихся интегралов, то, как показывает простой расчет, для обращения в нуль их вклада при малых r необходимо взять

$$\mu_R^2 = \langle \mu_R^2 \rangle = Q^2 \exp \left\{ -\frac{1}{r} \frac{64 - 4N_f}{41 - 2N_f} \right\}. \quad (144)$$

При $N_f \ll 6$ коэффициент в экспоненте очень близок к $(-3/2r)$. Иными словами, данные поправки минимальны при

$$\mu_R^2 = \langle x \rangle^{3/2} Q^2 = \sqrt{\langle x Q^2 \rangle \langle y \rangle} Q^2,$$

т.е. когда μ_R^2 равно среднему геометрическому от средних виртуальностей кварка и глюона.

Ренормгрупповые логарифмы дают в C вклад, растущий при малых r лишь как $1/r$. Гораздо существеннее при малых r вклады, связанные с массовыми логарифмами. Основной вклад, равный

$$E^{(0)}(x, y) \frac{\alpha_s(\mu_R)}{4\pi} \frac{N_c}{2} \left(\ln^2(xy) + 2 \ln(xy) \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right), \quad (145)$$

дают в фейнмановской калибровке диаграммы, показанные на рисунке 15, *a*, *b*. Вклады с аналогичной структурой имеются и в «непланарных» диаграммах рис. 15, *e* — *e*. Но эти вклады имеют цветовой фактор $C_F - N_c/2$ в $N_c^2 = 9$ раз меньший, чем вклад диаграмм рис. 15, *a* и *b* в соответствии с правилами $1/N_c$ -разложения.

Легко заметить, что вклад (145) обращается в нуль при $\mu^2 = \sqrt{xy}Q^2$. Нетрудно вычислить и среднее значение параметра μ^2 при малых r :

$$\langle \mu^2 \rangle = Q^2 \exp\left(-\frac{3}{2r}\right). \quad (146)$$

В частности, для значения $r = 0,5$, которое обеспечивает для $Q^2 F_\pi(Q^2)$ значение, близкое к экспериментальному (около $0,3 \text{ ГэВ}^2$), имеем $\langle \mu^2 \rangle = Q^2/20$, что при существующих передачах $Q^2 \lesssim 4 \text{ ГэВ}^2$ оказывается заметно меньше значения $\mu^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$, при котором можно полагаться на применимость пертурбативных КХД-расчетов.

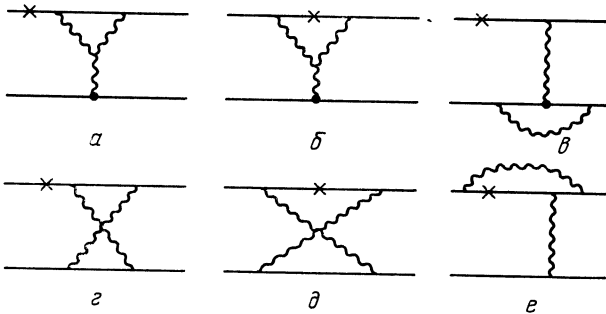


Рис. 15. Диаграммы, дающие основной вклад в однопетлевую поправку к коэффициентной функции

Двухпетлевое ядро эволюции. Еще один вклад в $O(\alpha_s^2)$ -поправку к $F_\pi(Q^2)$ обусловлен двухпетлевой эволюцией волновой функции пиона, т.е. $O(\alpha_s^2)$ -вкладом в ядро $V(x, y)$ или матрицу аномальных размерностей $Z_{nh}(g)$. Стандартный метод вычисления аномальных размерностей составных операторов основан на разложении величин $(nD)^N$ по формуле бинома, позволяющем выявить зависимость операторной вершины от кварковых и глюонных полей:

$$\bar{d}\hat{\gamma}_5 \hat{n} (nD)^N u = \bar{d}\hat{\gamma}_5 \hat{n} u^{(N)} + \sum_{m=0}^{N-1} C_N^{m+1} \bar{d}\hat{\gamma}_5 \hat{n} A^{(m)} u^{(N-1-m)}, \quad (147)$$

где $\varphi^{(h)} \equiv (n\hat{d})^h \varphi$; $\bar{A} = n_v A_v^a \tau_a g$.

Дальнейший расчет проводится стандартным образом [15, 16]. Однопетлевой расчет упрощается, если перейти к светоподобной аксиальной калибровке $(nA) = 0$, для которой в (147) остается только первый вклад. Первые расчеты [66, 67] двухпетлевого вклада в $V(x, y)$ были выполнены именно в такой калибровке. Однако вследствие более сложной структуры пропагатора глюона

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{(kn)} \right) \quad (148)$$

вычисления в этой калибровке существенно более громоздки. Кроме того, светоподобность вектора n_ν , фиксирующего калибровку, приводит к появлению дополнительных расходимостей как ультрафиолетового, так и инфракрасного типа [68, 69]. Последние должны сокращаться друг с другом после суммирования всех диаграмм данного порядка, а первые вычитаются фактически «руками» (см., например, [70]), так как никакого последовательного метода работы с ними пока не развито. Это связано, в частности, с тем, что дополнительные УФ-расходимости могут быть устранены только с помощью контрчленов, структура которых не имеет аналогов в исходном лагранжиане. Поэтому полная уверенность в надежности результатов (на данном этапе) может быть обеспечена только для расчетов в ковариантных калибровках, структура расходимостей в которых хорошо понятна. Расчет двухпетлевого вклада в ядро эволюции $V(x, y)$ в ковариантной (фейнмановской) калибровке был выполнен в [71]. Его результат подтвердил правильность расчетов [66, 67]. Один из наиболее нетривиальных вкладов в $V(x, y)$, пропорциональный C_F^2 , был независимо вычислен в фейнмановской калибровке в [72]. Совпадение результатов всех вышеупомянутых расчетов является достаточной гарантией правильности результата для $V^{(2)}(x, y)$, имеющего следующий вид:

$$V(x, y; g) = \left\{ V_0(x, y; g) + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 \left[-\frac{N_f C_F}{2} V_N(x, y) + C_F^2 V_F(x, y) + \frac{1}{2} C_F N_c V_G(x, y) \right] \right\}_+; \quad (149)$$

$$V_0 = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \theta(x < y) F + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}); \quad (150)$$

$$V_N(x, y) = \theta(x < y) \left[-\frac{10}{9} F - \frac{2}{3} \frac{x}{y} - \frac{2}{3} F \ln \left(\frac{x}{y} \right) \right] + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}); \quad (151)$$

$$V_G(x, y) = \theta(x < y) \left[\frac{67}{9} F + \frac{17}{3} \frac{x}{y} + \frac{11}{3} \ln \left(\frac{x}{y} \right) - 2\bar{F} \ln y \ln \bar{x} \right] + G(x, y) + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}); \quad (152)$$

$$\begin{aligned}
 V_F(x, y) = & \theta(x < y) \left[-\frac{\pi^2}{3} F + \frac{x}{y} - \left(\frac{3}{2} F - \frac{x}{2y} \right) \ln \left(\frac{x}{y} \right) - \right. \\
 & - (F - \bar{F}) \ln \left(\frac{x}{y} \right) \ln \left(1 - \frac{x}{y} \right) + \left(F + \frac{x}{2y} \right) \ln^2 \left(\frac{x}{y} \right) - 2\bar{F} \ln y \ln \bar{x} \left. \right] - \\
 & - \frac{x}{2y} \ln x (1 + \ln x - 2 \ln \bar{x}) - G(x, y) + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{x}); \quad (153)
 \end{aligned}$$

$$\{V(x, y)\}_+ = V(x, y) - \delta(x - y) \int_0^1 V(z, y) dz, \quad (154)$$

где $F = F(x, y) = x/y [1 - 1/(x - y)]$; $\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y})$, а «плюс»-операция определена выражением (154). Функция $G(x, y)$ дается формулой

$$G(x, y) = \theta(x > \bar{y}) \left[2(F - \bar{F}) \operatorname{Li}_2 \left(1 - \frac{x}{y} \right) + \right. \\ \left. + (F - \bar{F}) \ln^2 y - 2F \ln x \ln y \right] + 2F \operatorname{Li}_2(y) [\theta(x > \bar{y}) - \theta(x < y)] - \\ - 2F \operatorname{Li}_2(x) [\theta(x > \bar{y}) - \theta(x > y)], \quad (155)$$

а $\operatorname{Li}_2(x)$ — функция Спенса:

$$\operatorname{Li}_2(x) = - \int_0^x dt \frac{\ln(1-t)}{t}. \quad (156)$$

Структура двухпетлевого ядра эволюции. Для последующих приложений необходимо знать также явный вид решений уравнения эволюции (93). В низшем приближении эта задача сводится к нахождению собственных функций ядра $V(x, y; g)$, которыми, как мы видели, являются полиномы Гегенбауэра $xxC_n^{3/2}(x - \bar{x})$. Однопетлевое ядро эволюции V_0 [см. (97), (100)] становится симметричной функцией своих аргументов после умножения на $y\bar{y}$: $V_0(x, y) y\bar{y} = V_0(y, x) x\bar{x}$. Следовательно, собственные функции $\varphi_n/y\bar{y}$ уравнения

$$\int_0^1 V_0(x, y) \varphi_n(y) dy = \lambda_n \varphi_n(y) \quad (157)$$

должны быть ортогональны друг другу на отрезке $(0, 1)$ с весом $y\bar{y}$, т.е. они пропорциональны полиномам Гегенбауэра.

На двухпетлевом уровне, однако, комбинация $y\bar{y}V(x, y)$ содержит члены, нарушающие $x \leftrightarrow y$ -симметрию. В V_G и V_N [см. (151), (152)] такими членами являются $\frac{11}{3} F \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ и $-\frac{2}{3} F \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ соответственно. В сумме, с учетом групповых факторов, эти члены пропорциональны первому коэффициенту β_0 в β -функции Гелл-Мана — Лоу:

$$C_F \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) F \ln \frac{x}{y} = C_F \beta_0 \ln \left(\frac{x}{y} \right) \dots \quad (158)$$

Появление несимметричных членов на двухпетлевом уровне ожидалось (см. [73]) еще до того, как были выполнены конкретные расчеты. Мотивировка основывалась на связи между собственными функциями ядра $V(x, y)$, т.е. мультипликативно-перенормируемыми операторами и конформными операторами. Поскольку конформная инвариантность нарушается процедурой перенормировки (константы связи, например), нет никаких оснований ожидать, что являю-

щиеся конформно-инвариантными для свободных полей операторы окажутся мультипликативно-перенормируемыми на двухпетлевом уровне.

Выясним источники возникновения β -функции в полном ответе. В функцию

$$F \ln \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{x}{y} \ln \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \frac{1}{y-x} \ln \frac{x}{y}$$

в V_N и V_G , а также в член $\frac{2}{3} F \ln \left(\frac{x}{y} \right)$ в V_F вносят вклады два различных класса диаграмм. Коэффициент β_0 при структуре $\theta(x < y) \frac{x}{y} \ln \frac{x}{y}$ формируется диаграммами рис. 15, *a* — *д*. Учет

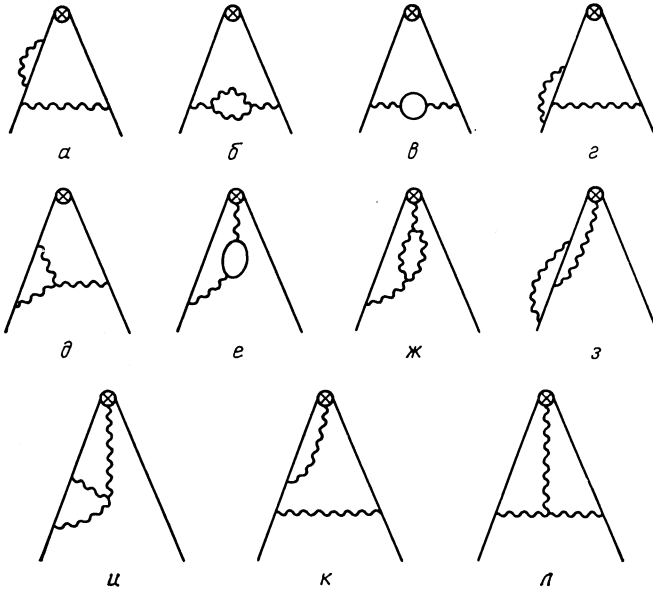


Рис. 16. Диаграммы, дающие двухпетлевую поправку в ядро эволюции

этих диаграмм приводит фактически к перенормировке заряда в вершинах однопетлевой диаграммы (см. рис. 13, *a*). Причем диаграммы рис. 15, *a*, *б* вносят вклад, пропорциональный аномальной размерности глюонной линии; диаграммы рис. 15, *г*, *д* вносят вклад в перенормировку вершины; диаграмма рис. 15, *a* перенормирует выходящую из вершины кварковую линию. Соответственно диаграммы рис. 16, *ж* — *к* формируют коэффициент β_0 при структуре $\frac{x}{y(y-x)} \ln \frac{x}{y}$. Этот класс диаграмм ответствен за перенормировку заряда в вершине однопетлевой диаграммы рис. 13, *б*.

Однако в полном ответе в $y\bar{y}V_F(x, y)$ имеются и вклады [например, пропорциональные $\ln^2(x/y)$], нарушающие $x \leftrightarrow y$ -симметрию более нетривиальным образом. Заметим, что в функциях V_N и V_G все вклады, кроме пропорциональных $F \ln(x/y)$, $x \leftrightarrow y$, симметричны после умножения на $y\bar{y}$.

Решение уравнения эволюции для волновой функции пиона в двухпетлевом приближении. Если бы двухпетлевое ядро обладало свойством симметрии $V_2(x, y) y\bar{y} = V_2(y, x) x\bar{x}$, то решения уравнения эволюции (93) имели бы вид

$$\Phi_n^{(D)}(x, \mu^2) = K_n(\mu_0^2) \exp \left\{ \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \gamma_n(\bar{g}(t)) \frac{dt}{t} \right\} x\bar{x} C_n^{3/2}(x), \quad (159)$$

где $\gamma_n(g) = -\alpha_s \gamma_n^{(1)} - \alpha_s^2 \gamma_n^{(2)}$ — диагональный элемент $Z_{nn}(g)$ -матрицы аномальных размерностей. Эта ситуация соответствует тому, что в базисе полиномов Гегенбауэра матрица аномальных размерностей

$$G_{nk} = \frac{4(2k+3)}{(k+1)(k+2)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy C_n^{3/2}(x-\bar{x}) V(x, y) y\bar{y} C_k^{3/2}(y) \quad (160)$$

диагональна: $G_{nk} = \text{diag}(\gamma_n)$.

В случае когда $G_{nk}^{(2)}$ содержит недиагональные члены, решения уравнения эволюции должны отличаться от $\Phi_n^{(D)}$ на вклады порядка α_s . Будем поэтому искать решения для этого общего случая в виде

$$\Phi_n = (1 + \alpha_s W) \otimes \Phi_n^{(D)}, \quad (161)$$

где $W = W(x, y)$ и \otimes обозначает интегральную свертку.

Задача теперь состоит в том, чтобы найти $W(x, y)$. Подставляя (161) в уравнение эволюции, получаем уравнение на W :

$$b_0 W + [v_0, W] - V_2^{(HD)} = 0, \quad (162)$$

где $V_2^{(HD)}$ — часть ядра V_2 , не коммутирующая с V_1 и ответственная, вследствие этого, за недиагональные вклады в G_{nk} .

Формально решение уравнения (162) дается выражением

$$W = \int_0^\infty e^{-(b_0+v_0)t} \otimes V_2^{(HD)} \otimes e^{v_0 t} dt. \quad (163)$$

Для приложений, однако, это представление не очень удобно. Более эффективным является использование матричного представления для W в гегенбауэровском базисе $\psi_n = x\bar{x} C_n^{3/2}(x-\bar{x})$:

$$W \otimes \psi_n = \sum_k \frac{G_{kn}^{(HD)} \psi_k}{\gamma_k^{(1)} - \gamma_n^{(1)} - b_0}. \quad (164)$$

Чтобы волновая функция $\varphi(x, \mu^2)$ при $\mu^2 = Q^2$ определялась непосредственно из ее вида при $\mu^2 = Q_0^2$, имеет смысл еще несколько видоизменить схему решения уравнения эволюции, а именно считать оператор W зависящим от Q^2 : $W \rightarrow \tilde{W}(Q^2)$ с граничным условием $\tilde{W}(Q_0^2) = 0$.

В этом случае уравнение (162) модифицируется и приобретает вид

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \tilde{W} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \left\{ b_0 \tilde{W} + [V_0, W] + V_2^{(HD)} \right\}. \quad (165)$$

Формальное решение этого уравнения получается совершенно аналогично (163):

$$\tilde{W} = W - \left(\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right)^{1+V_0/b_0} \otimes W \otimes \left(\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right)^{-V_0/b_0}. \quad (166)$$

В результате мы получим выражение для поправки в виде ряда

$$\left(1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \tilde{W} \right) \otimes \Psi_n = \Psi_n + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \sum_{k \geq 0} d_n^k(Q^2) \Psi_k, \quad (167)$$

где

$$d_n^k(Q^2) = \frac{(V_2^{(HD)})_{kn}}{\gamma_k^{(1)} - \gamma_n^{(1)} - b_0} S_{kn}(Q^2); \quad (168)$$

$$G_{kn}^{(2,HD)} = \frac{4(2k+3)}{(k+1)(k+2)} C_k^{3/2} \otimes G_2^{(HD)} \otimes \Psi_n, \quad (169)$$

а $\gamma_n^{(1)}$ — собственные значения ядра $\{V_0\}_+$:

$$\gamma_n^{(1)} = C_F \left(1 + 4 \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right); \quad (170)$$

$$\{V_0\}_+ \otimes \Psi_n = -\gamma_n^{(1)} \Psi_n, \quad (171)$$

наконец, $S_{kn}(Q^2)$ — фактор, определяющий Q^2 -зависимость оператора \tilde{W} :

$$S_{kn}(Q^2) = 1 - \left(\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right)^{(b_0 + \gamma_n^{(1)} - \gamma_k^{(1)})/b_0}. \quad (172)$$

Отметим, что у $(V_2^{(HD)})_{kn}$ -матрицы не равны нулю лишь элементы с k и n одной четности при $k > n$. Первое условие является проявлением «геометрической» симметрии ядра эволюции, а второе следует из треугольности матрицы перенормировок.

Используем теперь тот факт, что V_N и V_F имеют лишь такие недиагональные вклады в G_{nk} , которые индуцированы перенормировкой константы связи

$$2(N_f C_F V_N + C_F C_A V_G) = b_0 F \ln \frac{x}{y} + u_D(x, y) + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}), \quad (173)$$

где u_D дает только диагональный вклад в G_{nk} . Матричные элементы для недиагонального вклада $F \ln(x/y)$ могут быть вычислены аналитически. Для этого нужно учесть, что $F \ln(x/y)$ можно представить как производную от ядра $V_\delta(x, y)$:

$$V_\delta(x, y) = F \left(\frac{x}{y} \right)^\delta \theta(x < y) + (x \rightarrow \bar{x}, y \rightarrow \bar{y}), \quad (174)$$

которое становится $x \leftrightarrow y$ -симметричным, если умножить его на $(y\bar{y})^{1+\delta}$.

Собственные функции ядра $V_\delta(x, y)$ имеют вид

$$\psi_n^{(\delta)} = (x\bar{x})^{1+\delta} C_n^{3/2+\delta}(x - \bar{x}). \quad (175)$$

Иными словами, комбинация $F \ln(x/y)$ пропорциональна генератору сдвига верхнего индекса полиномов Гегенбауэра $C_n^\nu(x - \bar{x})$. Дифференцируя уравнение на собственные значения

$$V_\delta \otimes \psi_n^{(\delta)} = -\gamma_n^{(\delta)} \psi_n^{(\delta)} \quad (176)$$

по δ при $\delta = 0$, получаем уравнение

$$\dot{V} \otimes \psi_n = -(\gamma_n + V_0) \otimes \dot{\psi}_n + \dot{\gamma}_n \psi_n. \quad (177)$$

Производную $\dot{\psi}_n$ разложим в ряд по ψ_k :

$$\dot{\psi}_n = \sum_{k>n} a_{nk} \psi_k, \quad (178)$$

коэффициенты которого равны

$$a_{nk} = -\frac{2(n+1)(n+2)(2k+3)}{(k+1)(k+2)(k-n)(k+n+3)}. \quad (179)$$

Выражение (179) следует из общей формулы для полиномов Гегенбауэра

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\nu-\lambda)} \sum_{\tau=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\Gamma(\tau+\nu-\lambda)\Gamma(n+\nu-\tau)}{\tau!\Gamma(n-\tau)} \times \\ \times (n-2\tau+\lambda) C_{n-2\tau}^\lambda(x), \quad (180)$$

которую можно получить, комбинируя формулы разложения для $C_n^\nu(x)$ по x^k и для x^k по C_l^λ , приведенные в приложении к работе [74]. Таким образом, коэффициенты $d_n^k(Q^2)$ (168) имеют вид

$$d_n^k = \{b_0(\gamma_k^{(1)} - \gamma_n^{(1)}) a_{nk} + C_F^2 (G_F^{(HD)})_{nk}\} \frac{1}{\gamma_k^{(1)} - \gamma_n^{(1)} - b_0}. \quad (181)$$

Матричные элементы $(G_F^{HD})_{nk}$ были найдены численным интегрированием. Диагональные элементы $(G_F)_{nn}$, совпадающие с двухпетлевыми аномальными размерностями, приведены, например, в [70].

Волновая функция пиона с учетом ее эволюции в двухпетлевом приближении дается в результате выражением

$$\begin{aligned} \varphi(x, Q^2) = \sum_n b_n(Q_0^2) \exp \left\{ \int_{Q_0^2}^{Q^2} \gamma_n(g(t)) \frac{dt}{t} \right\} \times \\ \times \left(\psi_n(x) + \frac{\alpha_s}{4\pi} \sum d_n^k(Q^2) \psi_k(x) \right). \end{aligned} \quad (182)$$

Числовые результаты для эволюции волновой функции пиона [71]. Используя уравнения (181), (182), можно вычислять КХД-эволюцию с Q^2 любых волновых функций, заданных при некотором Q_0^2 . Общие свойства эволюции наиболее удобно формулировать для «парциальных» волновых функций ψ_n , входящих в разложение (192) с весом $b_n(Q_0^2)$.

1. Для $n \geq 2$ поправки, идущие от недиагональной части, примерно на порядок меньше поправок от диагональной части, аккумулированных в экспоненциальном факторе, т.е. ядро оказывается «квазидиагональным» в гегенбауэровском базисе (поправки при $n = 0$, т.е. для асимптотической функции, также очень малы и рассмотрены ниже).

2. Поправки высших гармоник к ψ_n определяются в основном первым членом $d_n^{n+2} \psi_{n+2}$ в сумме по k в (182). Последующие коэффициенты быстро убывают с ростом k .

3. Вклад двухпетлевых поправок возрастает с ростом номера n . При $n = 6$ они дают уже 6 %-ную поправку при $x = 0,5$ и $Q^2 = 125 \text{ ГэВ}^2$. (Здесь и ниже $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$, $\Lambda_{\text{КХД}} = 0,1 \text{ ГэВ}$.)

Так, при выборе $\varphi(x, Q_0^2) = 6x\bar{x}f_\pi$, что соответствует асимптотической волновой функции, поправки идут лишь за счет недиагональных членов:

$$\varphi(x, Q^2) = 6x\bar{x}f_\pi \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \sum_{k \geq 2} d_0^k C_k^{3/2}(x - \bar{x}) \right\}. \quad (183)$$

Вычисления показывают, что поправки составляют менее 0,5 % вплоть до $Q^2 = 6 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}^2$.

Другой известный пример низкоэнергетической волновой функции пиона был предложен Черняком и Житницким [26]:

$$\varphi^{\text{CZ}}(x, Q_0^2) = 30x\bar{x}f_\pi (1 - 4x\bar{x}). \quad (184)$$

В этом случае относительный вклад двухпетлевых поправок составляет примерно 2 % при $Q^2 = 125 \text{ ГэВ}^2$. При использовании данных табл. 2 можно вычислить поправки к любым волновым функциям, которые при $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ могут быть представлены суммой полиномов Гегенбауэра ψ_n с $n \leq 8$.

Таблица 2. Коэффициенты $d_n^k(181)$ вычислены при $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$,
 $\Lambda_{\text{КХД}} = 0,1 \text{ ГэВ}$, $Q^2 = 125 \text{ ГэВ}^2$

$k \backslash n$	0	2	4	6	8
2	-0,277				
4	+0,012	-0,89			
6	0,032	-0,26	-1		
8	0,027	-0,087	-0,4	-1	
10	0,021	-0,03	-0,187	-0,47	-0,96
12	0,012	-0,007	-0,094	-0,25	-0,5
14	0,016	-0,002	-0,05	-0,15	-0,29
16	0,01	0,006	-0,025	-0,09	-0,18
18	0,009	0,007	-0,008	-0,05	-0,12

Вклад двухпетлевой эволюции в α_s -поправки к асимптотике формфактора пиона. Для анализа роли $O(\alpha_s^2)$ -поправок к $F_\pi(Q^2)$, обусловленных двухпетлевой эволюцией волновой функции пиона, была проведена численная оценка формфактора для волновых функций $\varphi_\pi(x)$, совпадающих при $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ с $\psi_n(x)$ [79]. Результаты вычислений приведены в табл. 3, причем $T_1(n)$ соответствует $O(\alpha_s^2)$ -по-

Таблица 3. Значения коэффициентов в формуле (185) при $Q^2 = 33 \text{ ГэВ}^2$,
 $\alpha_s(Q^2) = 0,14$

n	0	2	4	6	8
$A(n)$	0,25	0,124	0,08	0,073	0,062
$T_1(n)$	7,22	19,3	29,1	37,0	43,9
$T_2(n)$	-0,16	-0,4	-0,7	-2,8	11,6
T_2/T_1	0,02	0,02	0,025	0,03	0,035

правке, обусловленной только однопетлевой коэффициентной функцией, а T_2 -поправке, связанной с двухпетлевой эволюцией, тогда как $A(n)$ характеризует вклад низшей диаграммы

$$Q^2 F_\pi^{(n)}(Q^2) = \frac{2\pi C_F}{N_c} f_\pi \alpha_s(Q^2) A(n) \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} [T_1(n) + T_2(n)] \right\}. \quad (185)$$

Из табл. 3 видно, что учет эволюционных поправок незначительно сказывается на полном результате.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре на примере анализа асимптотики электромагнитного формфактора пиона изложены основы пертурбативного подхода к жестким эксклюзивным адронным процессам в КХД. Пертурбативный подход, в принципе, применим и к исследованию более сложных проблем: для вычисления асимптотического поведения формфакторов нуклонов, амплитуд адронного рассеяния на большие углы, сечений рождения изолированных адронов и т.п. (см., например, [9, 10, 24, 25]). В плане практического использования полученных результатов для интерпретации и обработки существующих экспериментальных данных наиболее важной является проблема определения границ асимптотической области. Ответ на вопрос «с каких передач импульса применимы асимптотические формулы пертурбативной КХД», как мы выяснили, зависит от формы волновой функции — для узких функций асимптотический режим наступает раньше, для широких — позже. Вычисление явного вида волновой функции, однако, не может быть осуществлено в рамках чисто пертурбативной КХД, без привлечения информации о непертурбативных аспектах КХД-динамики. Одним из наиболее перспективных путей решения этой задачи представляется метод правил сумм КХД [78]. В его рамках уже получен ряд результатов о поведении волновых функций адронов и поведении формфакторов в области малых и умеренных передач импульса. Однако в этой области многое еще необходимо сделать, прежде чем можно будет сказать, что мы имеем полную КХД-картину поведения адронных формфакторов при любых передачах импульса.

В заключение я хочу выразить свою благодарность А. В. Ефремову, вместе с которым мы начинали исследование адронных формфакторов в КХД, Ф.-М. Диттесу, Е. П. Каданцевой, В. А. Нестеренко, С. В. Михайлову и Р. С. Халмурадову, в соавторстве с которыми были получены многие из результатов, вошедших в настоящий обзор. Я также признателен В. Н. Байеру, А. А. Владимирову, М. И. Высоцкому, С. В. Голоскокову, А. Г. Грозину, С. Дубничке, И. Ф. Гинзбургу, А. Р. и И. Р. Житницким, Е. М. Левину, Л. Н. Липатову, В. А. Матвееву, В. А. Мещерякову, Р. М. Мурадян, М. В. Терентьеву, А. Т. Филиппову, В. Л. Черняку, Д. В. Ширкову и М. А. Шифману за полезные обсуждения и замечания.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

АНАЛИЗ АСИМПТОТИК ЖЕСТКИХ ПРОЦЕССОВ

Подробное изложение основ нашего подхода к анализу жестких процессов в КХД дано в обзоре [23]. Здесь мы приведем краткую сводку выводов из [23], полезных для понимания доказательства факторизационной теоремы в разд. 2.

Подход, развитый в [23, 40–43], основан на альфа-представлении фейнмановских диаграмм (см., например, [75]), которое возникает, если записать знаменатель пропагатора каждой линии σ в виде

$$\frac{1}{m_\sigma^2 - k_\sigma^2 - i\varepsilon} = i \int_0^{i\infty} d\alpha_\sigma \exp \{ \alpha_\sigma (k_\sigma^2 - m_\sigma^2 + i\varepsilon) \} \quad (\text{П1})$$

и проинтегрировать по виртуальным импульсам k_σ . В результате для вклада каждой диаграммы получается выражение

$$T(p_1, \dots, p_n; m) = \frac{\Pi(\text{к.с.})}{(4\pi)^{zd/4}} \int_0^\infty \prod_\sigma d\alpha_\sigma D^{-d/2}(\alpha) \times \\ \times G(\alpha_\sigma; p_i, m_\sigma) \exp \left\{ iQ(\alpha; p_1, \dots, p_n)/D(\alpha) - i \sum_\sigma \alpha_\sigma (m_\sigma^2 - i\varepsilon) \right\}, \quad (\text{П2})$$

где d — число измерений пространства-времени; p_1, \dots, p_n — импульсы, соответствующие внешним линиям диаграммы; $\Pi(\text{к.с.})$ — произведение констант связи; z — число циклов диаграммы; D, Q, G — функции, однозначно определяемые структурой рассматриваемой диаграммы. В частности, $D(\alpha)$ есть определенная сумма произведений α -параметров, а $Q(\alpha, \{p\})$ имеет структуру

$$Q(\alpha, \{p\}) = \sum_{Y_j} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{z+1}} (p_{k_1} + \dots + p_{k_l})^2, \quad (\text{П3})$$

где $\{p_{k_i}\}$ — некоторый набор внешних импульсов, а $Y_j = \{\sigma_{j_i}\}$ — соответствующий набор внутренних линий (подробнее см. [23, 75]).

В ситуации, когда некоторые импульсные инварианты $(p_i p_k) = \omega_{ik} Q^2$ много больше остальных $(p_{i'}, p_{k'}) = v_{i'j'} \rho^2$, экспоненциальный фактор в (П2) можно представить в виде

$$\exp \left\{ i \left[Q^2 \frac{A(\alpha, \omega)}{D(\alpha)} + \rho^2 \frac{A_{\rho^2}(\alpha, v)}{D(\alpha)} - \sum_\sigma \alpha_\sigma (m_\sigma^2 - i\varepsilon) \right] \right\}. \quad (\text{П4})$$

Представление (П2), (П4) очень удобно при анализе предела $Q^2 \rightarrow \infty$. В частности, из (П2) следует, что область, в которой $A(\alpha, \omega) > \rho$, дает при $Q^2 \rightarrow \infty$ экспоненциально малый вклад $O(\exp(-Q^2 \rho))$. Следовательно, все вклады, имеющие степенное поведение по Q^2 , обусловлены интегрированием по областям, внутри которых $A(\alpha)/D(\alpha)$ обращается в нуль в некоторой точке.

Существуют три основных возможности добиться обращения в нуль функции $A(\alpha, \{\omega\})/D(\alpha)$:

1) РМР — режим малых расстояний (или малых α), когда одновременно обращаются в нуль α -параметры $\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_n}$ для некоторого набора линий $\{\sigma\}$. В этом случае $A(\alpha) \rightarrow 0$ быстрее, чем $D(\alpha) \rightarrow 0$;

2) ИР — инфракрасный режим (или режим $\alpha \rightarrow \infty$), когда α -параметры $\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_n}$ для некоторого набора $\{\sigma\}$ бесконечны. В этом случае $D(\alpha) \rightarrow \infty$ быстрее, чем $A(\alpha) \rightarrow \infty$;

3) ПР — пинчевый режим, когда $A(\alpha, \{\omega\})$ при ненулевых конечных α за счет того, что A представляет собой разность двух положительных величин. Для трехточечной функции $T(q^2 = -Q^2, p_1^2, p_2^2)$ этот режим невозможен.

Допустимы также различные комбинации основных режимов.

Одновременное стремление к нулю набора α -параметров $\{\alpha_{\tau_1}, \dots, \alpha_{\tau_k}\}$ удобно описывать с помощью замены

$$\lambda(V) = \sum_{j=1}^k \alpha_{\tau_j}; \quad \alpha_{\tau_j} = \lambda(V) \beta_{\tau_j}, \quad (\text{П5})$$

а одновременное стремление $\{\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_k}\}$ к бесконечности — с помощью замены

$$\kappa(S) = \sum_j \frac{1}{\alpha_{\sigma_j}}. \quad (\text{П6})$$

В импульсном представлении РМР соответствует интегрированию по области $k \sim Q$, ИР — по области $k \sim p^2/Q$, ПР — по области $k \sim p$. Поэтому ТВ в КХД применима только тогда, когда ИР и ПР, а также комбинированные режимы либо вообще не дают вклада, либо когда этими вкладами можно пренебречь по сравнению с вкладом РМР.

В случае, когда ПР не работает, общий анализ конфигураций, ответственных за тот или иной вклад, можно провести, не прибегая к явному анализу структуры функции $A(\alpha)/D(\alpha)$ в альфа-представлении. Вместо этого достаточно воспользоваться сформулированным ниже правилом, которое легко понять, исходя из известной аналогии [76] между фейнмановскими диаграммами и электрическими цепями. Параметры α_σ при этом трактуются как сопротивления соответствующих линий σ . Поскольку согласно (П2), (П4) при $A/D = 0$ амплитуда T теряет свою зависимость от Q^2 , то «необходимо найти подграфы V , S , сжатие которых в точку ($\alpha_{\sigma_V} = 0$) и/или удаление которых из диаграммы ($\alpha_{\sigma_S} = \infty$) лишает последнюю зависимости от Q^2 » [23]. Каждой такой конфигурации соответствует некоторый степенной вклад $O(Q^{-N})$. С помощью правил, $k_{\text{РМР}} \sim Q$, $k_{\text{ИР}} \sim p^2/Q$ можно получить следующие оценки величины N :

$$T_V^{\text{РМР}} \ll Q^{4 - \sum t_i}, \quad (\text{П7})$$

$$T_S^{\text{ИР}} \ll Q^{-\sum t_j}, \quad (\text{П8})$$

$$T_V^{\text{РМР ИР}} \ll Q^{4 - \sum_V t_i - \sum_S t_j}, \quad (\text{П9})$$

где t_i (t_j) — твист i -й (j -й) внешней линии подграфа V (S), соответствующего интегрированию по области $\{\underline{\alpha}\} \rightarrow 0$ ($\{\alpha\} \rightarrow \infty$).

Для кварковых полей ψ , $\bar{\psi}$ и напряженности глюонного поля $G_{\mu\nu}$ имеем $t = 1$, тогда как для векторного потенциала A_μ твист равен нулю. Поэтому в КХД, вообще говоря, необходимо суммировать по внешним глюонным линиям подграфов V , S . Физически это соответствует тому факту, что жесткий (партоновый) подпроцесс идет не в пустоте, а в глюонном поле адронов. По отношению к подпроцессу это поле, очевидно, может трактоваться как внешнее.

Если записать пропагатор кварка во внешнем глюонном поле A_μ в виде

$$\mathcal{J}^c(x, y; A) = \hat{E}(x, y; A) \{S^c(x-y) + \hat{R}(x, y; G)\}, \quad (\text{П10})$$

где E — P -экспонента

$$\hat{E}(x, y; A) = P \exp \left\{ ig \int_y^x \hat{A}_\mu(z) dz^\mu \right\}, \quad (\text{П11})$$

взятая по прямому контуру $z = y + t(x - y)$, то зависимость от поля A_μ (имеющего нулевую твист) окажется выделенной в E -фактор, поскольку функция R , как нетрудно убедиться (см. [17, 23, 43]), зависит только от напряженности $G_{\mu\nu}$ глюонного поля и ее ковариантных производных. Учитывая аналогичным образом глюонные вставки в глюонные линии и линии фиктивных частиц Фадеева — Попова, можно показать, что для вклада любого жесткого подблока всегда имеет место факторизация A_μ -зависимости в соответствующие E -факторы [17, 23, 43], роль которых в конечном итоге сводится к замене обычных производных ∂_μ в локальных операторах вида $(\psi \dots \partial_\mu \dots \psi)$ ковариантными $D_\mu = \partial_\mu - i g A_\mu$.

При анализе логарифмических по Q^2 вкладов очень удобной оказывается запись исследуемой амплитуды в виде меллиновского интеграла

$$T(Q^2, p^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \Gamma(-J) \left(\frac{Q^2}{p^2}\right)^J \Phi(J) dJ. \quad (П12)$$

В такой записи асимптотика амплитуды $T(Q^2, p^2)$ определяется самой правой особенностью функции $\Phi(J)$ в комплексной J -плоскости. В частности, если $\Phi(J) \sim (J - J_0)^{-n}$, то $T(Q^2) \sim (Q^2)^{J_0} (\ln(Q^2/p^2))^{n-1}$. Степенные поправки к ведущему вкладу обусловлены особенностями функции $\Phi(J)$ при $J = J_0 - 1, J_0 - 2, J_0 - 3$ и левее.

На языке меллиновского представления формула (П7), например, означает, что интегрирование по области $\lambda(V) \sim 0$ дает полюсной вклад в $\Phi(J)$ в точке

$$J = J_0 - \sum_{i \in V} (t_i/2). \quad (П13)$$

Кратные полюсы $(J - J_0)^{-n}$, приводящие к логарифмическим вкладам, возникают в тех случаях, когда полюс $(J - J_0)^{-1}$ может быть получен несколькими независимыми способами.

Конкретные примеры использования техники альфа-представления приведены в основном тексте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радюшкин А. В. Препринт ОИЯИ Р2-10717, Дубна, 1977.
2. Черняк В. Л., Житницкий А. Р.//Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25. С. 544—547.
3. Черняк В. Л., Житницкий А. Р., Сербо В. Г.//Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 760—763.
4. Jackson D. R. Thesis, CALTECH, Pasadena, 1977; Farrar G. R., Jackson D. R.//Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43. P. 246—249.
5. Brodsky S. J., Lepage G. P.//Phys. Lett. B. 1979. Vol. 87. P. 359—365.
6. Duncan A., Mueller A. H.//Phys. Rev. D. 1981. Vol. 24. P. 1636—1650.
7. Efremov A. V., Radyushkin A. V.//Phys. Lett. B. 1980. Vol. 94. P. 245—250.
8. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.//ТМФ. 1980. Т. 42. С. 147—166.
9. Черняк В. Л., Житницкий А. Р.//ЯФ. 1980. Т. 34. С. 1053—1068.
10. Brodsky S. J., Lepage G. P.//Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 2157—2198.
11. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.//ТМФ. 1979. Т. 40. С. 329—339.
12. Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N.//Nuovo cimento, 1973. Vol. 7. P. 719—723.
13. Brodsky S. J., Farrar G. R.//Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31. P. 1153—1156.
14. Gross D. J., Wilczek F.//Phys. Rev. D. 1974. Vol. 9. P. 980—1002.
15. Politzer H. D.//Phys. Repts. 1974. Vol. 14. P. 129—180.

16. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.//ТМФ. 1980. Т. 44. С. 17—33; 157—171; 327—341.
17. Efremov A. V., Radyushkin A. V.//Nuovo cimento. 1980. Vol. 3, N 2. Chap. 3. P. 50—76.
18. Ellis R. K., Georgi H., Machacek M. e.a.//Nucl. Phys. B. 1979. Vol. 152. P. 285—329.
19. Libby S., Sterman G.//Phys. Rev. D. 1978. Vol. 18 P. 3252—3268.
20. Mueller A. H.//Phys. Repts. 1981. Vol. 73. P. 237—368.
21. Collins J. C., Soper D. E., Sterman G.//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 261. P. 104—142.
22. Bodwin G.//Phys. Rev. D. 1985. Vol. 31. P. 2616—2642.
23. Радюшкин А. В.//ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 58—123.
24. Байер В. Н., Грозин А. Г.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 5—58.
25. Chernyuk V. L., Zhitnitsky A. R.//Phys. Repts. 1984. Vol. 112. P. 174—318.
26. Фейнман Р.//Взаимодействие фотонов с адронами: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
27. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.//Труды II Междунар. семинара «Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля». Протвино: ИФБЭ, 1979. С. 546—577; Препринт ОИЯИ Е2-12384, Дубна, 1979.
28. Bethe H. A., Salpeter E. E.//Phys. Rev. 1951. Vol. 82. P. 309—310; Gell-Mann M., Low F. E.//Phys. Rev. 1951. Vol. 84. P. 350—354.
29. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.//Nuovo cimento. 1963. Vol. 29. P. 380—399.
30. Гарсеванишвили В. Р., Квинихидзе А. Н., Матвеев В. А. и др.//ТМФ. 1975. Т. 23. С. 310—321.
31. Matveev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N. JINR preprint E2-3498, Dubna, 1967.
32. Mandelstam S.//Proc. Roy. Soc. 1955. Vol. A233. P. 248—266.
33. Tavkhelidze A. N.//Proc. of Solvay Congress, Bruxelles, 1967. P. 145—147.
34. Faustov R. N.//Ann. Phys. (N.Y.) 1973. Vol. 78. P. 176—189; Amati D., Caneschi L., Jengo R.//Nuovo cimento. 1968. Vol. 58A. P. 788—803; Ball J. S., Zachariassen F.//Phys. Rev. 1968. Vol. 170. P. 1541—1548; Drell S. D., Lee T. D.//Phys. Rev. D. 1972. Vol. 5. P. 1738—1763.
35. Menotti P.//Phys. Rev. D. 1976. Vol. 13. P. 1778—1790; Migdal A. A.//Phys. Lett. B. 1971. Vol. 37. P. 98—100; Polyakov A. M.//Proc. Intern. Symp. on Lepton and Photon Interactions. Stanford, 1975. P. 855—866.
36. Faustov R. N., Garsevanishvili V. R., Kvinikhidze A. N. e.a. Preprint JINR E2-8126. Dubna, 1974; Фаустов Р. Н.//ТМФ. 1970. Т. 3. С. 240—254; Gunion J. F., Brodsky S. J., Blankenbecler R.//Phys. Rev. D. 1973. Vol. 8. P. 287—312.
37. Goldberger M. L., Soper D. E., Guth A. H.//Phys. Rev. D. 1976. Vol. 14. P. 1117—1136.
38. Callan C. G., Gross D. J.//Phys. Rev. D. 1975. Vol. 11. P. 2905—2920.
39. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.//ТМФ. 1977. Т. 30. С. 168—182.
40. Efremov A. V., Ginzburg I. F.//Fortschr. Phys. 1974. Vol. 22. P. 575—609.
41. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.//ТМФ. 1980. Т. 44. С. 17—33.
42. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.//ТМФ. 1980. Т. 44. С. 157—171.
43. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.//ТМФ. 1980. Т. 44. С. 327—341.
44. Фок В. А.//Изв. АН СССР, ИМЕН. Сер. физ. 1937. С. 551—568.
45. Швингер Ю. Частицы, источники, поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. Т. 2.
46. Смилга А. В.//ЯФ. 1982. Т. 35. С. 473—484.
47. Shifman M. A.//Nucl. Phys. B. 1981. Vol. 173. P. 13—31.
48. Gronstroem C.//Phys. Lett. B. 1980. Vol. 90. P. 267—269.
49. Nikolaev S. N., Radyushkin A. V.//Nucl. Phys. B. 1983. Vol. 213. P. 285—304.

50. Радюшкин А. В.//ТМФ. 1984. Т. 61. С. 284—292.
51. Бейтмен Г., Эрдей А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2; Пер. с англ. М.: Наука, 1974.
52. Макеенко Ю. М.//ЯФ. 1981. Т. 33. С. 842—847; Brodsky S. J., Frishman Y., Lepage G. P., Sachrajda C.//Phys. Lett. B. 1980. Vol. 91. P. 239—244.
53. Craigie N. S., Dobrev V. K., Todorov I. T.//Ann. Phys. (N.Y.). 1985. Vol. 159. P. 411—444; Ohrndorff T.//Nucl. Phys. B. 1982. Vol. 198. P. 27—44.
54. Tesima K.//Nucl. Phys. B. 1981. Vol. 185. P. 522—540; Ibid. 1982. Vol. 202. P. 523—542.
55. Altarelli G., Parisi G.//Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 126. P. 298—318.
56. Geshkenbein B. V., Terentiev M. V.//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 117. P. 243—246.
57. Гешкенбеин Б. В., Терентьев М. В.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 873—887.
58. Espriu D., Yndurain F.//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 132. P. 187—190.
59. Радюшкин А. В., Халмурадов Р. С. Препринт ОИЯИ Р2-85-389, Дубна, 1985.
60. Черняк В. Л.//Материалы XV Зимней школы ЛИЯФ. Л., 1980. Т. 1, С. 65—155.
61. Gorsky A. S. Preprint ИТЕР-168, Moscow, 1984.
62. Bardeen W. A., Buras A. J., Duke D. W., Muta T.//Phys. Rev. D. 1978. Vol. 18. P. 3998—4017.
63. Радюшкин А. В., Халмурадов Р. С.//ЯФ. 1985. Т. 42. С. 458—466.
64. 't Hooft G.//Nucl. Phys. B. 1973. Vol. 61. P. 455—468.
65. Диттес Ф.-М., Радюшкин А. В.//ЯФ. 1981. Т. 34. С. 529—540.
66. Sarmadi M.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 143. P. 471—475; Dittes F.-M., Radyushkin A. V.//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 134. P. 359—362.
67. Celmaster W., Gonsalvez R.//Phys. Rev. D. 1979. Vol. 20. P. 1420—1434.
68. Konetschny W., Kummer W.//Nucl. Phys. B. 1975. Vol. 100. P. 106—124.
69. Pritchard D. J., Stirling W. J.//Nucl. Phys. B. 1980. Vol. 165. P. 237—268.
70. Curci G., Furmanski W., Petronzio R.//Nucl. Phys. B. 1980. Vol. 175. P. 27—92.
71. Mikhailov S. V., Radyushkin A. V.//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 254. P. 89—126.
72. Katz G.//Phys. Rev. D. 1985. Vol. 31. P. 652—656.
73. Migdal A. A.//Ann. Phys. (N.Y.). 1977. Vol. 109. P. 365—392.
74. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.//Nucl. Phys. B. 1980. Vol. 174. P. 345—361.
75. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
76. Бьеркен Дж., Дрелл С. Релятивистская квантовая теория. Т. 2; Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
77. Иванов С. В., Корчемский Г. П., Радюшкин А. В.//ЯФ. 1986. Т. 44. С. 230—240.
78. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.//Nucl. Phys. B. 1979. Vol. 147. P. 385—447; 448—534.
79. Каданцева Е. П., Михайлов С. В., Радюшкин А. В.//ЯФ. 1986. Т. 44. С. 507—516.