

УДК 539.12.01

МОДЕЛЬ СКИРМА: НУКЛОНЫ, ДИБАРИОНЫ, ЯДРА

В. А. Николаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен популярной в настоящее время теоретико-полевой модели протяженных сильно взаимодействующих объектов. Нелинейный характер модели Скирма приводит к решениям уравнений Эйлера — Лагранжа, которые уже на классическом уровне имеют свойства, подобные свойствам барионов. Приводятся некоторые детали получения эффективных квантовых гамильтонианов на пути использования коллективных переменных, работа с которыми позволяет доводить расчеты до числа. Модель Скирма используется сейчас для анализа очень широкого круга задач теории сильных взаимодействий. Так, например, она с успехом применялась для анализа спектра нуклонных возбуждений и статических свойств барионов, нуклон-нуклонных сил, мезон-нуклонного рассеяния, ди- и мультибарионных состояний, мезонных обменных токов, процессов фоторождения и др. Чрезвычайно привлекательным свойством модели является единообразие средств и методов исследования как изолированных барионов, так и их систем, каковыми являются, например, атомные ядра.

The review is devoted to an actual field-theoretical model of extended strongly interacting objects. The nonlinear nature of the Skyrme model provides for the solutions of the Euler — Lagrange equations, even at a classical level, properties that are similar to those of baryons. Some details are presented of deriving the effective quantum Hamiltonians with the use of collective variables that allows one to obtain certain numerical results. The Skyrme model is now used for analyzing a very large class of problems of the strong-interaction theory. In particular, it has been a success in examining the spectrum of nucleon excitations and static properties of baryons, nucleon-nucleon forces, meson-nucleon scattering, di- and multibaryon states, meson-exchange currents, photoproduction. A specific feature of the model is a unique approach to studying both the isolated baryons and their system, e.g. atomic nuclei.

ВВЕДЕНИЕ

Модель Скирма — пример теоретико-полевой модели протяженных объектов. Динамическими переменными модели являются бозонные поля. Предмет исследования — структура барионов и их взаимодействия при низких энергиях.

Большой недавний интерес к модели Скирма [1] в теории сильно взаимодействующих частиц обусловлен надеждой на то, что эффективные мезонные лагранжианы могут проложить мост между квантовой хромодинамикой (КХД) и знакомой теорией ядерной структуры.

В низкоэнергетической области квантовой хромодинамики благодаря растущей константе связи динамика элементарных кварковых

и глюонных полей становится трудной для анализа. Хотя все верят, что физика любого известного атомного ядра тоже описывается лагранжианом КХД, никому не удалось получить основные свойства ядра в терминах кварк-глюонных полей.

Поиск малого параметра в КХД привел 'т Хоофта [2] к идее рассмотрения КХД с большим (стремящимся к бесконечности) числом цветов N_c . Виттен [3] показал, что если предел $N_c \rightarrow \infty$ существует, то КХД будет теорией эффективных локальных мезонных полей с локальными взаимодействиями порядка N_c^{-1} . Более того, в этом пределе барионные массы оказываются порядка N_c , в то время как число цветов вообще выпадает из уравнений, определяющих размер и форму барионов.

Известно, что нелинейные теории могут иметь решения, соответствующие локализованным объектам конечных размеров, — солитоны [4] с аналогичными зависимостями от константы связи. Таким образом, результат Виттена приводит к рассмотрению барионов как солитонов эффективной мезонной теории. Такое рассмотрение не требует дальнейших ссылок на кварковое происхождение эффективного лагранжиана. Именно такого типа теория была предложена в работах Скирма в 1961—1962 гг. [1].

Не следует считать, что эффективные теории (и модель Скирма) проверяют КХД в низкоэнергетической области. Скорее, они только моделируют ту область КХД, где не работают методы теории возмущений.

В настоящее время проблема получения эффективного мезонного лагранжиана непосредственно из лагранжиана КХД находится в стадии разработки. Этому посвящен большой поток работ (см., например, [5, 6] и литературу к ним). Вывод эффективного мезонного лагранжиана органически включает изучение механизма спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД [7], а это, в свою очередь, включает изучение структуры вакуума КХД.

С другой стороны, мы стоим перед задачей изучения структуры барионов, систем барионов и их взаимодействий, которые можно получить теоретически, если мы располагаем эффективным мезонным лагранжианом.

Оказалось, часть результатов вообще не зависит от деталей эффективного лагранжиана, но лишь отражает его симметрии и тот факт, что барионы суть солитоны нелинейных уравнений Эйлера — Лагранжа, определяемых этим лагранжианом. Симметричные же соображения довольно жестко определяют возможный вид эффективного мезонного лагранжиана.

Ограничившись простейшей моделью такого типа — моделью Скирма, мы не можем, вероятно, претендовать на хорошее количественное согласие с экспериментальными данными, но качественно хорошее описание основных закономерностей, характеризующих систему сильновзаимодействующих частиц, свидетельствовало бы в пользу концепции барионов как солитонов эффективного мезонного лагран-

жиана. И в этом смысле модель Скирма представляет собой прекрасную теоретическую лабораторию, в которой мы сталкиваемся со всей спецификой нелинейной полевой теории.

КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ И СОЛИТОНЫ

Основные идеи киральной динамики довольно прозрачны. В инфракрасной области КХД, где формируется адронный спектр, она предлагает коллективные степени свободы, являющиеся наблюдаемыми полями, для описания явлений в ограниченной области энергий. Хотя применение феноменологических киральных лагранжианов обычно ограничивалось полуклассическим приближением, феноменологический успех уже на уровне древесных графов заставил относиться к киральной динамике более серьезно [8]. Были разработаны последовательная схема квантования [9] и суперпропагаторный метод регуляризации квантовой киральной теории [10].

Нелинейные киральные теории естественным образом приводят к солитонным секторам. Уже классические киральные солитоны очень похожи на адроны [11]:

1. Они несут некоторый точно сохраняющийся топологический заряд как следствие вакуумной вырожденности. Этот локализованный заряд — хороший кандидат в барионные числа.

2. Представляют собой протяженные сильно взаимодействующие объекты.

3. Они очень массивны по сравнению с массами полей, входящих в лагранжиан.

Отмеченные черты и богатый спектр порождаемых состояний делают киральную динамику очень привлекательной теорией низкоэнергетических событий в физике сильных взаимодействий.

Фиксируем некоторые симметрии, восходящие к КХД, и будем их последовательно эксплуатировать.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О СИММЕТРИЯХ КХД

Кварковая часть плотности лагранжиана КХД (а следовательно, и весь $\mathcal{L}_{\text{КХД}}$)

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}}^q = -\bar{q}_L \gamma_\mu D_\mu q_L - \bar{q}_R \gamma_\mu D_\mu q_R,$$

где D_μ суть ковариантные производные, инвариантна относительно отдельных унитарных преобразований по ароматическим индексам левых q_L и правых q_R кварков. Мы имеем дело с $U(N_f) \times U(N_f) \equiv U(N_f)_L \times U(N_f)_R = U(2)_L \times U(2)_R$ -группой симметрии, при которой кварки преобразуются согласно правилу

$$q_L \Rightarrow u_L q_L, \quad q_R \Rightarrow u_R q_R.$$

Векторная $U(1)_V$ -подгруппа этой группы, при которой q_L и q_R умножаются на один и тот же фазовый множитель $q_L \Rightarrow \{\exp(i\theta)\} q_L$, $q_R \Rightarrow \{\exp(i\theta)\} q_R$, является точной симметрией и отвечающий ей

заряд соответствует барионному числу. Аксиальная $U(1)_A$ -подгруппа, при которой левые и правые кварки преобразуются с противоположными фазами $q_L \Rightarrow e^{i\theta} q_L$, $q_R \Rightarrow e^{-i\theta} q_R$, уже не является группой симметрии квантованного лагранжиана (аномалия Адлера — Белла — Джекива). Таким образом, остается киральная симметрия

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R = SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A,$$

где правые и левые преобразования ограничиваются матрицами с единичным детерминантом. И, наконец, отсутствие дублетов по четности в физическом спектре частиц с явной изоспиновой симметрией указывает на то, что $SU(2)_L \times SU(2)_R$ нарушена * до $SU(2)_V$ посредством механизма спонтанного нарушения киральной симметрии с появлением безмассовых псевдоскалярных голдстоуновских возбуждений с квантовыми числами пионов.

Когда говорят об эффективном бозонном лагранжиане, имеют в виду лагранжиан, описывающий динамику голдстоуновских бозонов, передающий описанные выше симметрии. Проще всего построить такой эффективный лагранжиан, взяв в качестве основных переменных элементы U некоторой $SU(2)$ -группы, локальные координаты которых будут отождествляться с бозонными полями. Тогда левым и правым преобразованиям кварков можно сопоставить левые и правые умножения элементов этой группы. Киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -группе преобразований кварковых полей будет соответствовать прямое произведение левых и правых преобразований элементов группы $SU(2)$, так что произвольному элементу кварковой глобальной группы отвечает $U \Rightarrow AUB^+$ -преобразование с произвольными постоянными A и $B \in SU(2)$.

Обычно плотность кирально-инвариантного действия строится с помощью левоинвариантных форм Картана $L_\mu = U + \partial_\mu U$. При правых преобразованиях R они изменяются согласно правилу $L_\mu \Rightarrow RL_\mu R^+$, оставаясь инвариантами $SU(2)_L$. Аналогично можно пользоваться правоинвариантными формами $R_\mu = \partial_\mu U \cdot U^+$, которые, в свою очередь, не изменяются при правых преобразованиях, но преобразуются при левых: $R_\mu \Rightarrow LR_\mu L^+$. Произвольный кирально-инвариантный полином $P(L_\mu)$ равен $P(R_\mu)$ и обратно, так как $P(R_\mu) = P(AL_\mu A^+) = P(L_\mu)$.

ЛАГРАНЖИАН СКИРМА

$SU(2)$ -модель Скирма определяется плотностью лагранжиана [12]

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr} L_\mu L_\mu + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [L_\mu, L_\nu]^2. \quad (1)$$

Здесь токи $L_\mu = U + \partial_\mu U$ выражаются через $SU(2)$ -матрицы $U(x) = \exp\left(\frac{2}{F_\pi} i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\right)$, определяемые изотриплетом пионных полей $\boldsymbol{\pi}$ - и $\boldsymbol{\tau}$ -

* Здесь и далее мы ограничиваем себя числом ароматов $N_f = 2$.

матрицами Паули. Лагранжиан записан в явно лоренц-ковариантной форме. Нетрудно убедиться, что лагранжиан определяет кирально-инвариантную теорию. Налицо инвариантность лагранжиана относительно глобальной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ киральной группы преобразований $U(x) \Rightarrow AU(x)B^+$ для любых постоянных унитарных 2×2 матриц A и B . Этой инвариантности отвечает сохранение аксиального и векторного токов в модели. Единственную размерную постоянную F_π в (1) можно определить в бозонном секторе по амплитуде слабого распада пиона. (В этом случае F_π следует положить равной 186,4 МэВ.) Первый член лагранжиана обобщает кинетическую энергию пионного поля до кирально-инвариантной формы (нелинейная сигма-модель). Появление же в модели члена четвертого порядка по производным весьма существенно для всей модели. Без него мы не имели бы солитонов, квантуя которые мы надеемся описывать тяжелые протяженные объекты, какими являются нуклоны, мультитароны и атомные ядра.

Из размерных соображений вклад первого члена лагранжиана в классическую массу пропорционален некоторому линейному размеру, а второго — обратно пропорционален ему. Таким образом, наличие второго (так называемого скирмовского) члена в лагранжиане может обеспечить существование нетривиального минимума энергии для солитонов конечных размеров. Несколько более строго доказывается теорема Деррика, утверждающая, что минимальная пространственная размерность, при которой мы будем иметь нетривиальное решение, равна трем. Это то, что нам нужно.

Тривиальное решение, определяющее вакуумное состояние, очевидно, есть $U_0(x) = \mathbb{1}$. И в силу того, что в общем случае $AU_0(x)B^+ \neq \mathbb{1}$, мы имеем дело со спонтанным нарушением киральной симметрии (симметрия основного состояния ниже симметрии лагранжиана).

В [13] было отмечено, что член четвертого порядка можно рассматривать как результат специфического выбора контрчленов на однопетлевом уровне в регуляризованном суперпропагаторным методом лагранжиане [14]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{Ren}} = & \frac{1}{2} (1 + Z_1 \lambda^2) L_\mu L_\mu + \lambda^4 Z_2 (L_\mu L_\mu)^2 + \lambda^3 Z_3 (\partial_\mu L_\mu \partial_\nu L_\nu) + \\ & + \lambda^4 Z_4 ([L_\mu, L_\nu]^2) + \frac{1}{2} \Lambda^{-4} \partial_\mu L_\mu \square \partial_\nu L_\nu. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Z_1 расходится квадратично, а другие — логарифмически. Последний член — регулятор, удаляющий расходимости в Z_2 , Z_3 и Z_4 ; Z_1 и Z_3 суть перенормировки волновой функции. Остаются свободные параметры Z_2 и Z_4 . В пределе, когда параметр обрезания $\Lambda \rightarrow \infty$ член с Z_3 исчезает. Отсюда выбор $Z_4 = Z_2 = 1/32e^2$ определяет модель Скирма. Известно, что (2) удовлетворяет алгебре токов, частичному сохранению аксиально-векторного тока, дает разумное пороговое поведение и унитарность до некоторых энергий ниже обрезания,

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД И МАССА КЛАССИЧЕСКОГО СОЛИТОНА

Теперь среди всех возможных полевых конфигураций мы ограничим себя только удовлетворяющими условию $U(x) \Rightarrow 1$ при $|x| \rightarrow \infty$ для любого произвольного момента времени t (в противном случае энергия была бы бесконечной). Таким образом, $U(x)$ для любого фиксированного t отображает физическое пространство R^3 в $SU(2)$ -группу, при этом все точки пространственной бесконечности из R^3 отображаются в единичный элемент $SU(2)$ -группы. Пространство R^3 с отождествленными бесконечными точками компактифицируется до S^3 -сферы. Следовательно, мы имеем дело с отображением $U(x)$ из S^3 в S^3 -сферу пространства параметров $SU(2)$ -группы. Такие отображения разбиваются на классы эквивалентности, характеризуемые некоторым целым числом, степенью отображения. Любые два отображения, принадлежащие одному классу, могут непрерывным образом быть деформированы одно в другое, принадлежащие же различным классам — не могут. Примерами таких деформаций (гомотопий) являются глобальные $SU(2)$ -вращения и временная эволюция. Следовательно, степень отображения (топологический заряд), являясь гомотопическим инвариантом, сохраняется независимо от динамики системы. Геометрически степень отображения определяет, сколько раз S^3 -сфера параметров $SU(2)$ -матриц покрывается в данном отображении.

Можно построить [1, 11, 15] тривиально сохраняющийся топологический ток

$$J_\mu^B = -\frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(L_\nu L_\rho L_\sigma), \quad (3)$$

удовлетворяющий условию непрерывности

$$\partial_\mu J_\mu^B = 0 \quad (4)$$

с зарядом, соответствующим индексу отображения:

$$B = \int d^3x J_0^B(x). \quad (5)$$

Топологический заряд B аддитивен. Действительно, произвольная конфигурация $U(x)$ может быть факторизована

$$U(x) = U_1(x) \cdot U_2(x)$$

в согласии с групповым законом умножения. Нетрудно показать, что

$$B(U(x)) = B(U_1(x)) + B(U_2(x)).$$

Кроме того, если $B(U(x)) = 1$, то $B(U^+(x)) = -1$. Справедливо также $J_B^\mu \sim v^\mu$, где v^μ — 4-скорость центра солитона, который для $B = 1$ определяется условием $U(x_0) = -1$.

Скирм сделал заключение, что совокупность этих свойств отождествляет топологический заряд с барионным.

Чтобы убедиться в правильности такой интерпретации в $SU(2)$ -модели, можно показать, что дираковское море кварков включает, всякий раз, новую орбиталь, как только топологический заряд кирального поля увеличивается на единицу. Хотя детальное поведение решений уравнений Эйлера — Лагранжа здесь несущественно, остановимся на некоторых свойствах сферически-симметричных стационарных полевых конфигураций вида $U(\mathbf{r}) = \exp(i\pi n F(r))$, где $\mathbf{n} = \boldsymbol{\pi}/|\boldsymbol{\pi}| = \mathbf{r}/r$ и $F(r) = |\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r})|$. Эта конфигурация получила название «анзац Скимра — Виттена». Именно такие конфигурации обеспечивают абсолютный минимум энергетического функционала модели Скимра в секторе с единичным топологическим зарядом [16]. Для плотности топологического заряда тогда нетрудно получить

$$\rho^B(r) = -\frac{1}{2\pi r^2} \sin^2 F(r) \frac{dF(r)}{dr}. \quad (6)$$

Функция профиля $F(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{x^2}{4} + 2 \sin^2 F\right) F'' + \frac{x F'}{2} + \sin 2F (F')^2 - \frac{\sin 2F}{4} - \frac{\sin^2 F \sin 2F}{x^2} = 0, \quad (7)$$

где $x = eF\pi r$ — безразмерная переменная.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $F(0) = \pi n$, где n — целое, и $F(\infty) = 0$, обеспечивает конечность и минимум энергетического функционала, определяющего массу солитона:

$$M = \pi \frac{F\pi}{e} \left[\frac{1}{2} \int \left[(F')^2 + \frac{2}{x^2} \sin^2 F \right] x^2 dx + 4 \int \sin^2 F \left[(F')^2 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 F}{x^2} \right] dx \right] \quad (8)$$

в секторе с топологическим зарядом

$$B = \int d^3r \rho^B(r) = n.$$

Возвращаясь к лагранжиану, выпишем его часть, не зависящую от временных производных:

$$-M = \frac{F\pi}{16e} \left\{ \int d^3x \operatorname{Tr} L_i(x) L_i(x) + \frac{1}{2} \int d^3x \operatorname{Tr} [L_i, L_j]^2 \right\}. \quad (9)$$

Взятая с обратным знаком, именно эта часть лагранжиана определяет энергию (массу) стационарной конфигурации. Проведя тривиальную процедуру «прибавить и отнять» представим массы в виде

$$M = -\frac{F\pi}{16e} \left\{ \int d^3x \operatorname{Tr} (L_i(x) \pm \varepsilon_{ijk} L_j L_k)^2 \pm \frac{F\pi}{16e} \cdot 2 \cdot 24\pi^2 \int \operatorname{Tr} \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{ijk} L_i(x) L_j(x) L_k(x) \right\}, \quad (10)$$

откуда для массы классического солитона имеем оценку [17]:

$$M \geq F\pi \cdot 3\pi^2 |B|/e. \quad (11)$$

Воспользовавшись анзацем Скирма — Виттена, приведем M к форме [18]:

$$M = \frac{F\pi}{e} \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ \int \left[\frac{dF(x)}{dx} + 2 \frac{\sin^2 F(x)}{x^2} \right]^2 x^2 dx + \right. \\ \left. + 2 \int \sin^2 F(x) \left(1 + 2 \frac{dF}{dx} \right)^2 dx + \frac{F\pi}{e} 3\pi^2 \int \rho_B(x) d^3x. \right. \quad (12)$$

Таким образом, нижняя граница в топологической оценке Фаддеева недостижима в силу того, что условия зануления первых двух интегралов в правой части этого выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} + 2 \frac{\sin^2 F(x)}{x^2} &= 0; \\ 1 + 2 \frac{dF(x)}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

несовместны.

Точное решение уравнения (7) в секторе $B = 1$ дает массу солитона $M \approx 36,5 F\pi/e$, что приблизительно на 23% превышает значение, соответствующее нижней границе в оценке (11).

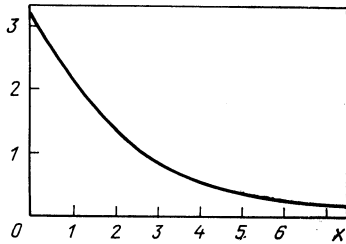


Рис. 1. Решение уравнения (7) для кирального угла $F(x)$ в секторе с $B = 1$

График численного решения уравнения (7) с граничными условиями $F(0) = \pi$, $F(\infty) = 0$ представлен на рис. 1. Решение представляет собой монотонную функцию. Нетрудно убедиться, что непрерывной деформацией солитон нельзя превратить в тривиальное поле $\pi = 0$, $U = 1$. Действительно, при попытке «выключить» солитон мы должны непрерывным образом перевести $F(0) = \pi$ в $F(0) = 0$. Однако, как только $F(0) \neq \pi$, энергия солитона стано-

вится бесконечной [см. уравнение (8)]. При $x \rightarrow \infty$ уравнение (7) переходит в уравнение

$$F'' + \frac{2}{x} F' - \frac{2F}{x^2} = 0 \quad (14)$$

и определяет асимптотику

$$F(x) \sim \beta/x^2.$$

Нетрудно видеть, что в окрестности нуля

$$F(x) \sim B\pi - \alpha x.$$

Последние два выражения используются иногда как аналитическая аппроксимация решения [18] после выбора точки сшивания (сшивающие негладкие). Среди других аппроксимаций следует отметить паде-аппроксимацию, использованную в [19].

КВАРКИ В КИРАЛЬНОМ ПОЛЕ. БАРИОННЫЙ ЗАРЯД

Вернемся к вопросу об интерпретации топологического заряда как барионного. С этой целью рассмотрим модельную задачу о движении массивных кварков в поле кирального солитона [20, 21]. Пусть кварковые орбитали $|\lambda\rangle$ удовлетворяют дираковскому уравнению

$$\begin{aligned} & \left[-i\alpha \cdot \nabla + \beta \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) U + \beta \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) U^+ \right] |\lambda\rangle = \\ & = [-i\alpha \cdot \nabla + \beta (\cos F(r) + i\gamma_5 \tau_n \sin F(r))] |\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda |\lambda\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где ε_λ — энергии орбиталей в единицах кварковых масс в физическом вакууме. Гамильтониан задачи коммутирует с операторами четности и «большого спина» $\mathbf{G} = \mathbf{j} + \mathbf{t}$ (являющегося суммой спина и изоспина), инвариантен относительно одновременных вращений в пространстве и изопространстве. Состояния классифицируются по «большому спину» и четности G^π . В [20] эта задача решалась для линейно изменяющейся функции профиля $F(x)$ (или кирального угла) в конечной области пространства $(0, X)$. Киральный угол изменялся от $F(0) = \pi$ до $F(X) = 0$. Полученный таким образом спектр кварковых орбиталей показан на рис. 2. Для малых X киральное поле слишком слабо, чтобы связать кварки, и спектр демон-

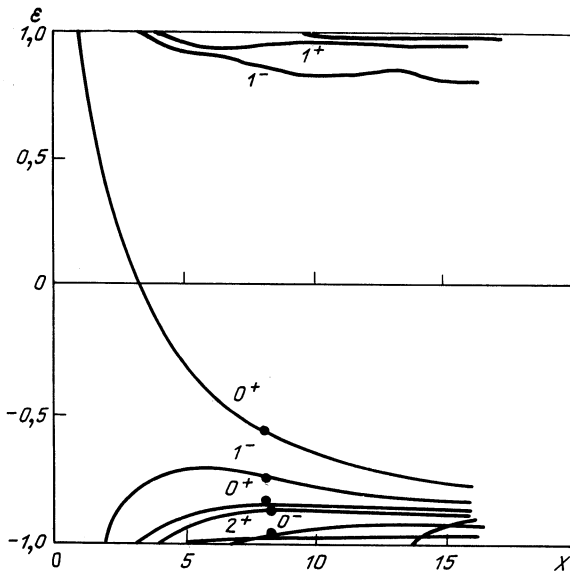


Рис. 2. Спектр кварковых орбиталей в зависимости от солитонного размера X

стрирует только массовую щель свободных кварков. Для $1,5 \leq X \leq 3$ связанная орбиталь 0^+ покидает верхний континуум и при $X \geq 3$ имеет уже отрицательную энергию. Система с барионным числом $B = 1$ относительно физического вакуума получается заполнением (и насыщением по цвету) этой 0^+ -орбитали и орбиталей, вышедших из нижнего континуума. Для достаточно больших X 0^+ -орбиталь присоединяется к уровням дираковского моря и мы имеем новую массовую щель нового дираковского моря, которое несет барионный заряд 1 относительно старого. Новое море приобретает целый или полуцелый спин в зависимости от того, четно или нечетно число N_c цветов, требуемое для насыщения 0^+ -орбитали. Таким образом, для больших X основному состоянию многочастичного дираковского гамильтониана

$$H_D = \int d^3x \Psi^+ [-i\alpha \cdot \nabla + \beta (\cos F + i\tau \cdot n \gamma_5 \sin F)] \Psi \quad (16)$$

соответствует заполнение всех уровней с отрицательными энергиями (включая 0^+ , пришедший из верхнего континуума). Это состояние можно отождествить со скирмионным, а энергию перестройки вакуума — с массой скирмиона.

Для топологического заряда солитона $B = 2$ дополнительная орбиталь 0^- выходит из верхнего континуума и присоединяется к морю отрицательно энергетических уровней и т. д. Это рассмотрение свидетельствует в пользу интерпретации топологического заряда как барионного.

Голдстоун и Вилчек [22] впервые вычислили барионный ток $\langle \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \rangle$ дираковских частиц в киральном поле по теории возмущений. Барионная плотность $\langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle = \langle \psi^+ \psi \rangle$, которую они получили, идентична плотности, даваемой моделью Скирма [23].

Барионную плотность в точке \mathbf{x} относительно невозмущенного вакуума можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{tr} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \left\{ \sum'_\lambda | \lambda \rangle \langle \lambda | - \sum'_k | \mathbf{k} - \rangle \langle \mathbf{k} - | \right\}, \quad (17)$$

где в суммах ограничиваемся только заполненными кварковыми орбиталями, которые включают все отрицательно-энергетические орбитали (и, возможно, положительно-энергетическую 0^+ -орбиталь). Сумма \sum'_k

включает отрицательно частотные плосковолновые орбитали $| \mathbf{k} - \rangle$ невозмущенного вакуума. Подчеркнем, что когда солитонный размер достаточно велик, валентная орбиталь имеет отрицательную энергию. Более того, Маккензи и Вилчеку принадлежит замечание, основанное на рассмотрении квадратурованного уравнения Дирака, что эта орбиталь не может лежать далеко от континуума.

Разложение плотности по теории возмущений получается, если переписать определение в виде

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= -\text{tr} \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega |x\rangle \langle x| \left[\frac{1}{h-\omega} - \frac{1}{h_0-\omega} \right] = \\
 &= -\text{tr} \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega |x\rangle \langle x| \gamma_0 \left[\frac{1}{1-\hat{p}+V} - \frac{1}{1-\hat{p}} \right] = \\
 &= \text{tr} \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega |x\rangle \langle x| \gamma_0 \left[\frac{1}{1-\hat{p}} V \frac{1}{1-\hat{p}} - \frac{1}{1-\hat{p}} V \frac{1}{1-\hat{p}} V \frac{1}{1-\hat{p}} + \dots \right] = \\
 &= \text{---} \circlearrowleft \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 h &= -i\alpha\nabla + \beta(\sigma + i\tau\varphi\gamma_5); & h_0 &= -i\alpha\nabla + \beta; \\
 \hat{p} &= \gamma_0\omega + i\gamma\nabla; & V &= \sigma + i\tau\varphi\gamma_5 - 1; \\
 \sigma &= \cos F(r); & \varphi^i &= n^i \sin F(r).
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

На диаграммах волнистая линия представляет собой оператор плотности $|x\rangle \langle x|$; пунктир соответствует взаимодействию V , а ориентированные линии — свободному кварковому пропагатору $(1-\hat{p})^{-1}$. Энергетический интеграл взят вдоль контура, который окружает точки, соответствующие энергиям занятых орбиталей в сумме. Плотность сходится, когда число учитываемых отрицательно энергетических состояний возрастает. Нижайшие вклады в барионную плотность возникают от диаграмм третьего и четвертого порядков. Это дает

$$\rho(x) = -\frac{1}{2\pi x^2} \sin^2 F(x) \frac{dF(x)}{dx}, \quad (20)$$

что совпадает с плотностью топологического заряда скирмиона. На рис. 3 показана барионная плотность кварков для поля с топологическим зарядом $B = 1$ и линейным размером $X = 5$. Плотность получена суммированием вкладов отдельных уровней. Оценка по теории возмущений (совпадающая с результатом модели Скирма), практически воспроизводит точный результат. Более того, из рисунка видно, что плотность сильно отличается от плотности 0^+ -орбитали, взятой отдельно. Таким образом, однопетлевые вклады в плотность не могут быть опущены (за исключением случаев солитонов малых размеров). Детальное исследование барионного заряда кварковых состояний в поле кирального солитона можно найти в [21, 24].

Наконец, следует отметить следующее обстоятельство, свидетельствующее в пользу интерпретации топологического заряда как барионного. Если рассматривать $SU(3)$ -обобщение модели Скирма,

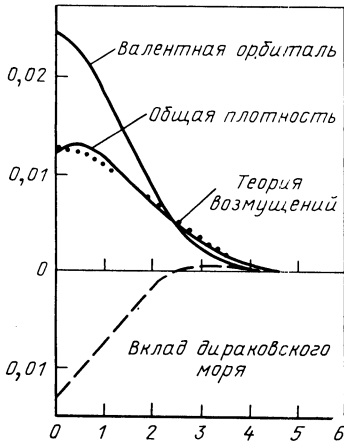


Рис. 3. Барионная плотность кварков для солитона с топологическим зарядом $B = 1$ ($X = 5$) из [20]:

показаны вклады валентных и морских кварков в общую плотность; точками представлены результаты расчетов по теории возмущений, которые идентичны результатам расчетов барионной плотности скирмиона

включающее весь октет псевдоскалярных мезонов, то лагранжиан будет с необходимостью содержать дополнительно так называемый весс-зуминовский член [25]

$$S_{WZ} = -\frac{iN_c}{240\pi^2} \int d^5x \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \text{Tr} (L_\alpha L_\beta L_\gamma L_\delta L_\epsilon), \quad (21)$$

записываемый как интеграл по пятимерному пространству (где N_c — число цветов, равное трем в реальном мире) или в виде интеграла по параметру [26, 27]

$$\left. \begin{aligned} S_{WZ} &= \frac{N_c}{24\pi^2} \int d^4x \int_0^1 d\sigma \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Tr} 2 \frac{\pi^a \lambda^a}{F_\pi} (L_\alpha^{(\sigma)} L_\beta^{(\sigma)} L_\gamma^{(\sigma)} L_\delta^{(\sigma)}); \\ L_\alpha^{(\sigma)} &= \exp(-i\pi^a \lambda^a \sigma) \partial_\alpha \exp(i\pi^a \lambda^a \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Этот член обязан, например, описывать амплитуду процесса $K\bar{K} \rightarrow 3\pi$. В такой модели сохраняющийся барионный ток можно уже получить как нетеровский, соответствующий инвариантности лагранжиана, относительно калибровочных преобразований. Явный вид этого тока совпадает с топологическим, хотя в $SU(2)$ -варианте модели соответствующий нетеровский ток отсутствует.

НУКЛОН. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Модель Скирма можно отнести к разряду коллективных моделей (в терминологии, принятой в теории ядра). Метод коллективных (групповых) переменных был сформулирован Н. Н. Боголюбовым

в задаче о поляроне [28]. Коллективные переменные модели Скирма определяют классические конфигурации пионного поля. Считается, что выбранный набор конфигураций поля является, в некотором смысле, наиболее важным. Это означает, что достаточно полный набор коллективных переменных, зависящих от времени, определит такое поле, которое приближенно удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа.

Впервые коллективные переменные, соответствующие вращению нуклона, были введены в модели пионного поля, связанного с источником [29]. В [12] они были использованы для квантования модели Скирма. В [30] был вычислен эффективный гамильтониан, учитывающий ротационные и монополярные вибрационные степени свободы, без учета и с учетом явного нарушения киральной инвариантности мезонным массовым членом лагранжиана.

Чтобы проквантовать модель, нам, очевидно, не обойтись без временных компонент токов, входящих в лагранжиан. Можно заметить, что энергия системы не изменится, если статическое решение $U_0(x)$ подвергнуть преобразованию $U_0 \Rightarrow A U_0 A^+$, где A — унитарная унимодулярная матрица вида $a_0 \mathbf{1} + i\tau^{\alpha} a^{\alpha}$. Матрица A , очевидно, дает $SU(2)$ -представление группы трехмерных вращений изотопического пространства. Параметры матрицы поворотов A могут служить коллективными переменными, описывающими вращательные степени свободы. Таким образом, ограничиваясь полевыми конфигурациями

$$U(\mathbf{r}, t) = A(t) U_0(\mathbf{r}) A^+(t), \quad (23)$$

лагранжиан, где явно выделены временные компоненты токов,

$$\mathcal{L} = -M - \frac{F_{\pi}^2}{16} \int d^3r \operatorname{Tr}(L_0, L_0) - \frac{2}{32e^2} \int \operatorname{Tr}[L_i, L_0]^2 d^3r \quad (24)$$

можно привести к виду

$$\mathcal{L} = -M + 4\pi \tilde{K}^2 \Lambda / 3e^2 F_{\pi}. \quad (25)$$

В последнем выражении

$$\Lambda = \int x^3 \sin^2 F \left\{ 1 + 4 \left((F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right\} dx; \quad \bar{K}^2 = \operatorname{Tr}(\dot{A}(t) \dot{A}^+(t)) / 2. \quad (26)$$

Чтобы дать физическую интерпретацию полученному эффективному лагранжиану, рассмотрим $SU(2) \times SU(2)$ -группу левых и правых умножений группы $SU(2)$, которой принадлежат матрицы A . Нетрудно видеть, что лагранжиан инвариантен относительно умножений матрицы A справа на некоторую постоянную матрицу h : $A \Rightarrow A \cdot h$.

При этом поле $U(\mathbf{r}, t)$ переходит в $\tilde{U} = A(t)hU_0(\mathbf{r})h^+A^+(t)$. Легко проверить, что действие матрицы h на U_0 переводит ее в $\tilde{U}_0(\mathbf{r}) = U_0(R_h^{-1}\mathbf{r})$, где R_h — 3×3 -матрица пространственных

вращений. С другой стороны, умножение матрицы A на $SU(2)$ -матрицу g слева переводит полеую конфигурацию $U(\mathbf{r}, t)$ в

$$\tilde{U}(\mathbf{r}, t) = gA(t)U_0(\mathbf{r})A^+(t)g^+ = gU(\mathbf{r}, t)g^+,$$

т. е. соответствует изотопическому вращению. Таким образом, мы имеем дело с конструкцией Кэли $SU(2) \times SU(2)$ -группы, построенной с помощью левых и правых преобразований исходной $SU(2)$ -группы. Рассмотрение вариаций эффективного действия при бесконечно малых правых и левых преобразованиях, зависящих от времени, приводит к тому, что сохраняющимися величинами будут генераторы $i\text{Tr} \tau^i \dot{A}^+ A$ и $i\text{Tr} \tau^i \dot{A} A^+$. Каноническое квантование требует соответствия $\dot{a}_i \Rightarrow -i\partial/\partial a_i$. Отсюда спиновый и изоспиновый операторы приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} J_j &= \frac{1}{2} i \left(a_j \frac{\partial}{\partial a_0} - a_0 \frac{\partial}{\partial a_j} - \varepsilon_{jem} a_e \frac{\partial}{\partial a_m} \right); \\ I_j &= \frac{1}{2} i \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_j} - a_j \frac{\partial}{\partial a_0} - \varepsilon_{jem} a_i \frac{\partial}{\partial a_m} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Эти операторы действуют в пространстве функций коллективных переменных a_0, a_i . В силу условий $AA^+ = 1$ и $A^+A = 1$ операторы J_i и I_i оказываются связанными между собой ортогональным преобразованием $g_{\alpha j} I_j = -J_\alpha$, где $g_{\alpha j} = \text{Tr}(A\tau^\alpha A^+ \tau^j)/2i$. Отсюда следует, что рассматриваемый анзац порождает состояния с равными значениями спина и изоспина $\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2$. Вращательная часть гамильтониана оказывается пропорциональной \mathbf{J}^2 или \mathbf{I}^2 . Мы приходим к задаче о шаровом волчке, который квантуется по полуприветным моментам, когда мы описываем ферми-частицы, и по целым, когда имеем дело с бозе-частицами. Собственными функциями задачи являются, очевидно, матрицы конечных вращений $D_{J_3, I_3}^{I=J}$, которые представляют собой гармонические полиномы коллективных переменных степени $2J$. Уровни энергии вырождены по проекциям J_3, I_3 с общей кратностью вырождения $(2J + 1)^2$.

ТОКИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Киральной инвариантности лагранжиана модели Скимма соответствуют два сохраняющихся тока. Чтобы их вычислить, достаточно рассмотреть бесконечно малое киральное преобразование

$$U(x) \Rightarrow \exp(-i\mathbf{t}\mathbf{a}) U(x) \exp(+i\mathbf{t}\mathbf{b})$$

и определяемую им вариацию лагранжиана. Коэффициентные функции перед $\partial_\mu \mathbf{a}$ и $\partial_\mu \mathbf{b}$ задают левый и правый сохраняющиеся токи:

$$\left. \begin{aligned} J_\mu^{Lk} &= i \frac{F_\pi^2}{8} \text{Tr} \tau^k L_\mu + i \frac{1}{4e^2} \text{Tr} \tau^k [L_\nu, L_\mu] L_\nu; \\ J_\mu^{Rk} &= i \frac{F_\pi^2}{8} \text{Tr} \tau^k R_\mu + i \frac{1}{4e^2} \text{Tr} \tau^k [R_\nu, R_\mu] R_\nu, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где латинские индексы отвечают изотопическим компонентам. В условии сохранения левого нетеровского тока $\partial_\mu J_\mu^{Lh} = 0$ нетрудно узнать общее уравнение движения в форме, данной Сकिрмом [1]

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta L_\mu^h} \right) = 0. \quad (29)$$

Использование анзаца Скирма — Витена немедленно приводит к уравнению (7) для функции профиля (кирального угла). В выражениях (28) правый ток «свободного» лагранжиана \mathcal{L}_2 : $R_\mu = U \partial_\mu U^+$. Полусумма и полуразность левого и правого токов определяют, в свою очередь, аксиальный и векторный токи.

Изоспин можно определить как интеграл от временной компоненты изовекторного тока $I_i = \int J_0^i d^3r$. Так, введя ортогональную 3×3 -матрицу изотопических вращений $I_{hi}(t)$, действующую на изовекторные компоненты в параметризации Эйлера — Родригеса для матрицы $U(x) = \sigma(x) + i\tau^i \varphi^i(x)$, и определив угловую скорость ω' во вращающейся системе координат равенством $\dot{I}_{ih} I_{hj}^{-1} = \varepsilon_{ijk} \omega'_k$, приходим к выражению $I_h = (F_\pi e^3)^{-1} \lambda \omega'_h$, связывающему изоспин I_h с угловой скоростью ω'_h и моментом инерции:

$$\lambda = \frac{2\pi}{3} \int x^2 \sin^2 F \left[1 + 4 \left((F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right] dx. \quad (30)$$

Аналогично можно определить спин через компоненты тензора энергии-импульса T_{0h}

$$J_i = i \int \varepsilon_{ijk} x_j T_{0k} d^3r, \quad (31)$$

где

$$T_{0h} = -\frac{F_\pi^2}{4} (\mathbf{L}_h, \mathbf{L}_0) - \frac{1}{e^2} ([\mathbf{L}_h, \mathbf{L}_v], [\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_v]). \quad (32)$$

Учитывая явную временную зависимость токов L_0 и определение угловой скорости ω в неподвижной системе координат, можно получить

$$J_i = -\frac{2\pi}{3} (F_\pi e^3)^{-1} \omega_i \int x^2 \sin^2 F \left((F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) dx. \quad (33)$$

Интеграл в последнем выражении определяет момент инерции в координатном пространстве. Видно, что он совпадает с моментом инерции в изотопическом (внутреннем) пространстве. Связь между угловыми скоростями ω_i и ω'_j обуславливает связь между спином и изоспином, отмеченную выше.

Удобной параметризацией матриц вращений I_{hl} является их параметризация в терминах углов Эйлера [31]. В [31] можно найти и представления операторов спина как дифференциальных операторов, действующих на D -функции от углов Эйлера. Между матрицами I_{hl} и A , использованными для вывода изоспиновых и спиновых опе-

раторов, можно отметить явную связь $I_{kl} = \text{Tr } \tau_k A \tau_l A + 2i$. Таким образом, мы заканчиваем раздел, касающийся интерпретации операторов I_i и J_k как изоспиновых и спиновых. В заключение этого раздела сделаем только замечание о структуре коллективной волновой функции. Если под вектором $|A\rangle$ подразумевать состояние, соответствующее определенной ориентации во внутреннем пространстве, отвечающей матрице A и полевой конфигурации $U = A U_0 A^+$, то нуклонному состоянию $|N\rangle$ соответствует суперпозиция, задаваемая интегралом (по группе)

$$|N\rangle = \int dA \chi(A) |A\rangle, \quad (34)$$

где $\chi(A)$ — волновая функция в пространстве коллективных координат. В то время как $|A\rangle$ соответствует состоянию, хорошо определенному во внутреннем пространстве, оно имеет плохо определенный изоспиновый и угловой моменты. Состояние $|N\rangle$, с другой стороны, имеет хорошо определенный спин и изоспин, но не определяет никакого конкретного направления во внутреннем пространстве. Здесь мы имеем дело с ситуацией, хорошо известной в теории ядерных вращений.

Если в $SU(2)$ -модели Скирма квантованное состояние скирмиона с нечетным барионным числом есть фермион только по построению, то в $SU(3)$ -обобщении фермионная природа таких состояний следует с необходимостью в силу линейности члена Весса — Зумино по временной производной [32].

СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НУКЛОНОВ В МОДЕЛИ СКИРМА

Статические свойства нуклонов в вышеописанной схеме были получены в [12], где величины F_π и e рассматривались как свободные параметры, выбираемые так, чтобы воспроизводились массы нуклона и дельта-резонанса. Таким образом, все статические величины становятся функциями от F_π и e .

Располагая выражениями для изовекторного $J_\mu^{V\alpha}(x)$ и барионного токов $J_\mu^B(x)$ в модели Скирма, можно определить электромагнитный ток

$$J_\mu^{em}(x) = J_\mu^{V3}(x) + \frac{1}{2} J_\mu^B(x). \quad (35)$$

Здесь J_μ^{V3} — третья компонента изовекторного тока, а $J_\mu^B/2$ — половина барионного тока, определяющая изоскалярную часть электромагнитного тока. Формула (35) отвечает известной формуле, связывающей электрический заряд Q , проекцию изоспина T_3 и барионный заряд B : $Q = T_3 + B/2$. Воспользовавшись анзацем Скирма — Виттена для кирального угла F и общим представлением для изовекторного тока, можно вычислить плотность третьей компоненты

векторного тока (усредненной по углам)

$$J_0^{V3}(x) = \frac{\left[1 + 4 \left((F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right)\right] \sin^2 F}{\int x^2 \left[1 + 4 \left((F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right)\right] \sin^2 F dx} \hat{T}_3, \quad (36)$$

где \hat{T}_3 — оператор третьей компоненты изоспина. Добавив сюда половину барионной плотности $-\frac{1}{\pi x^2} F'(x) \sin^2 F(x)$, мы имеем уже оператор плотности электрического заряда. Взятие матричного элемента от этого оператора между интересующими нас нуклонными состояниями определяет пространственную плотность электрического заряда для различных изотопических компонент. Так получается,

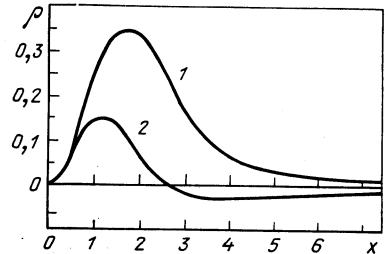


Рис. 4. Плотность электрического заряда $\rho e x^2$ для протона (1) и нейтрона (2) в зависимости от $x = F_\pi e r$

например, распределения плотности электрического заряда для протона и нейтрона, изображенные на рис. 4. Это распределение трудно получить в модели мешков (в модели кварковых мешков имеем скачок производной от плотности электрического заряда на поверхности мешка в силу обычно используемых граничных условий) [33]. Протонное распределение всюду положительно определено, в то время как нейтрон характеризуется положительно заряженным ядром и отрицательно заряженной оболочкой.

Для расчета наблюдаемых нам следует, прежде всего, выбрать значения F_π и e . Взяв численно интеграл (30), определяющий значение момента инерции λ , получим для него

$$\lambda \approx \frac{4\pi}{6} \left(\frac{1}{F_\pi e^3} \right) \cdot 51$$

и для масс нуклона и Δ -изобары

$$M_N = M + \frac{1}{2\lambda} \frac{3}{4}; \quad M_\Delta = M + \frac{1}{2\lambda} \frac{5}{4}. \quad (37)$$

Воспользовавшись экспериментальными значениями M_N и M_Δ , получим $F_\pi = 129$ МэВ и $e = 5,45$.

Изоскалярный среднеквадратичный радиус, определяемый интегралом,

$$\langle r^2 \rangle_{I=0} = \int_0^\infty r^2 \rho^B(r) dr = 4,47/e^2 F_\pi^2 \quad (38)$$

с таким выбором констант F_π и e принимает значение $\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2} = 0,59$ фм. Изоскалярный и изовекторный магнитные моменты имеют прозрачный физический смысл и задаются значениями следующих интегралов:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{I=0} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{B} d^3x; \\ \mu_{I=1} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}^{V3} d^3x, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где \mathbf{B} и \mathbf{J}^{V3} — пространственные компоненты барионного и третьей компоненты изовекторного тока. Отсюда для изоскалярной плотности магнитного момента имеем

$$\rho_M^{I=0} = \frac{x^2 F'(x) \sin^2 F(x)}{\int x^2 F' \sin^2 F(x) dx}.$$

Это выражение позволяет вычислить соответствующий среднеквадратичный радиус. Расчет магнитных моментов протонов μ_p и нейтронов μ_n требует уже использования явного вида коллективной волновой функции (см. [12]).

Как оценить аксиальную постоянную g_A в такой модели? Стандартное определение матричного элемента аксиального тока в общепринятых обозначениях

$$\langle N'(p_2) | A_\mu^a(0) | N(p_1) \rangle = \bar{u}(p_2) \tau^a [\gamma^\mu \gamma^5 g_A(q^2) + g_\mu \gamma^5 h_A(q^2)] u(p_1). \quad (40)$$

Взятие симметричного нерелятивистского предела при $q \rightarrow 0$ дает

$$\langle N'(p_2) | A_i^a(0) | N(p_1) \rangle = \frac{2}{3} g_A \langle N' | \sigma_i \tau^a | N \rangle,$$

где $g_A = g_A(0)$. Этому же пределу соответствует расчет интеграла $\int d^3x A_i^a(x)$, в котором сначала проводится взятие интеграла по угловым переменным, а потом по радиальным. Такая процедура дает

$$\int d^3x A_i^a(x) = \frac{\pi}{3e^2} D \text{Tr} [\tau_i A^{-1} \tau_a A]. \quad (41)$$

Значение постоянной D в правой части последнего выражения задается некоторым интегралом, который вычисляется по решению стационарного уравнения для кирального угла. Учитывая, что в стандартных обозначениях $\text{Tr} [\tau_i A + \tau^a A] = -\frac{2}{3} \langle \sigma_i \tau^a \rangle$, находим отсюда величину g_A .

Сравнивая традиционное представление для пионного поля в асимптотической области

$$\langle \pi^a(x) \rangle = -\frac{g_{\pi NN}}{8\pi M_N} \frac{x_i}{r^3} \langle \sigma_i \tau^a \rangle \quad (42)$$

с определением пионного поля π в асимптотической области модели Скирмы

$$U \sim 1 + 2i\pi\pi/F_\pi, \tag{43}$$

где $U = AU_0A^+$ и $U_0 \sim 1 + iC\tau\pi/r^2$, а C — числовой коэффициент, который находится по асимптотике решения стационарного уравнения Эйлера — Лагранжа, можно убедиться в выполнении соотношения Гольдбергера — Треймана

$$g_A = \frac{F_\pi g_{\pi NN}}{2M_N}. \tag{44}$$

Это соотношение можно использовать для вычисления величины $g_{\pi NN}$.

Некоторые из этих статических величин, вычисленных в такой схеме, хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными значениями, а некоторые существенно отличаются. Так, полученные величины F_π и g_A отличаются от экспериментальных значений на 30 и 50 % соответственно. Здесь обычно говорят, что модель Скирмы может хорошо описывать величины, не зависящие от числа цветов N_c исходной калибровочной группы $SU(N_c)$ теории, но может совсем не описывать величины, существенно зависящие от N_c . Приведем таблицу из [34] некоторых величин, характеризующих нуклон в такой модели и их зависимость от числа цветов. Численные значения — из [12]. Расчетные величины в табл. 1, не зависящие от числа

Таблица 1. Статические свойства нуклонов в модели Скирмы (учтены только вращательные степени свободы) и их зависимость от числа цветов

Величина	N_c -зависимость	Предсказание	Эксперимент	Погрешность, %
$\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}$	N_c^0	0,59 фм	0,72 фм	18
$\langle r^2 \rangle_{M, I=0}^{1/2}$	N_c^0	0,92 фм	0,81 фм	14
μ_p	N_c	1,87	2,79	33
μ_n	N_c	-1,31	-1,91	31
μ_p/μ_n	N_c^0	1,43	1,46	2
g_A	N_c	0,61	1,23	50
F_π	$N_c^{1/2}$	129 МэВ	186 МэВ	31
F_π^2/g_A	N_c^0	27 280 МэВ ²	28 127 МэВ ²	3
$g_{\pi NN}$	$N_c^{3/2}$	8,9	13,5	34
$g_{\pi N\Delta}$	$N_c^{3/2}$	13,2	20,3	35
$g_{\pi N\Delta}/g_{\pi NN}$	N_c^0	1,5	1,5	1

цветов N_c , действительно, лучше согласуются с экспериментом. Такими величинами являются изоскалярные электрический $\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}$

и магнитный $\langle r^2 \rangle_{M, I=0}^{1/2}$ среднеквадратичные радиусы, отношение магнитных моментов протона μ_p и нейтрона μ_n , отношение квадрата пионной постоянной F_π к аксиальной константе g_A и отношение постоянных взаимодействия $g_{\pi N \Delta}$ и $g_{\pi N N}$.

Изовекторный среднеквадратичный радиус в рассматриваемом кирально-инвариантном пределе ($m_\pi = 0$) расходится. Чтобы избежать этого, к лагранжиану следует добавить явно нарушающий киральную симметрию «массовый» член

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{8} m_\pi^2 F_\pi^2 (\text{Tr } U - 2), \quad (45)$$

что приводит к добавке в уравнении для профильной функции

$$-\frac{1}{4} \frac{m_\pi^2}{e^2 F_\pi^2} x^2 \sin x$$

и к соответствующему изменению числовых значений всех интегралов, определяющих массы, моменты инерции и прочие величины, а следовательно, и значений констант связи. Так, выбор e и F_π по M_N и M_Δ теперь приводит к $e = 4,84$ и $F_\pi = 108$ МэВ. Очевидно, меняется и асимптотика решения дифференциального уравнения для кирального угла. Теперь

$$F(r) \sim \frac{1}{r} e^{-m_\pi r} \quad (46)$$

вместо $F(r) \sim 1/r^2$, как было при $m_\pi = 0$. Вычисление поля пионов на больших расстояниях от нуклона дает $g_{\pi N N} = 11,9$. Изовекторные электрический и магнитный среднеквадратичные радиусы оказываются конечными. Изовекторная электрическая плотность определяется временной компонентой векторного тока, а изовекторная магнитная плотность задается пространственной частью векторного тока. Изовекторные электрическая и магнитная плотности оказываются равными друг другу.

$$\begin{aligned} \rho_{I=1}(\mathbf{r}) &= \rho_{M, I=1}^{(r)} = \\ &= \frac{r^2 \sin^2 F \left\{ F_\pi^2 + \frac{4}{e^2} \left[(F')^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right] \right\}}{\int_0^\infty r^2 \sin^2 F \left\{ F_\pi^2 + \frac{4}{e^2} \left[(F')^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right] \right\} dr}; \end{aligned} \quad (47)$$

равны и соответствующие им среднеквадратичные радиусы

$$\langle r^2 \rangle_{I=1}^{1/2} = \langle r^2 \rangle_{M, I=1}^{1/2} = 1,04 \text{ фм.}$$

Это равенство, записываемое в терминах протонного и нейтронного магнитных моментов как

$$[\langle r^2 \rangle_p - \langle r^2 \rangle_n]^{1/2} = \left[\frac{\mu_p \langle r^2 \rangle_{M, p} - \mu_n \langle r^2 \rangle_{M, n}}{\mu_p - \mu_n} \right]^{1/2}, \quad (48)$$

очень хорошо выполняется в реальности (левая часть равна 0,88 фм, а правая 0,80 фм).

При малых передачах электрический формфактор можно записать как фурье-преобразование плотности распределения электрического заряда (36). Выполняя интегрирование по угловым переменным и усредняя по волновым функциям состояний, можно представить результат в виде [35—37]

$$F_e(Q) = -\frac{1}{\pi} \int F'(x) \sin^2 F j_0(Qx) dx + \frac{\int x^2 \sin^2 F \left(1 + 4 \left[(F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right] \right) (j_0(Qx) + j_2(Qx))}{\int x^2 \sin^2 F \left(1 + 4 \left[(F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right] \right) dx} T_3. \quad (49)$$

В этом выражении $j_0(Qx)$ и $j_2(Qx)$ суть сферические функции Бесселя. Безразмерный передаваемый импульс $Q = q/F_{\pi e}$.

Как неоднократно подчеркивалось, изоскалярная часть электромагнитного тока в модели Скирма определяется непосредственно барионным током. Это значит, что даже в отсутствие уравнений движения для функции профиля F последнюю можно получить по одному из эмпирических изоскалярных формфакторов и затем использовать ее для расчетов других наблюдаемых. В таком подходе меньше ограничений, задаваемых явным видом лагранжиана, и больше шансов проверить саму концепцию — нуклон как киральный солитон.

Если мы ограничимся дипольной аппроксимацией для изоскалярного формфактора

$$F_{I=0}(q^2) = \frac{1}{(q^2 + \Lambda^2)^2},$$

то, как нетрудно видеть из предыдущей формулы (в которой следует опустить второй член в правой части, поскольку сейчас мы говорим об изоскалярном формфакторе), обратное фурье-преобразование приводит к следующему уравнению для профильной функции:

$$F(r) - \frac{1}{2} \sin 2F(r) = \rho e^{-\Lambda r} \left(1 + \Lambda r + \frac{1}{2} \Lambda^2 r^2 \right) \quad (50)$$

с $\Lambda^2 = 0,71 \text{ ГэВ}^2$.

Так, по эмпирическому формфактору можно восстановить «эмпирическую» функцию профиля. Полученная таким образом функция использовалась [38] для анализа электромагнитных формфакторов дейтрона (см. ниже).

Как была отмечено в [38], в модели Скирма существует простая связь между изоскалярным электрическим $F_{I=0}$ и магнитным формфакторами $F_{M, I=0}$ нуклона

$$F_{M, I=0}(q^2) = -\frac{2M_N}{\lambda} \frac{\partial}{\partial q^2} F_{I=0}(q^2). \quad (51)$$

При малых передачах это дает

$$F_{M, I=0}^{(0)} = -\frac{M_N}{3\lambda} \langle r^2 \rangle_{I=0}, \quad (52)$$

где $\langle r^2 \rangle_{I=0}$ — изоскалярный среднеквадратичный радиус. Если использовать момент инерции λ , получаемый по массовому спектру, правая часть последнего равенства дает изоскалярный магнитный момент около $(0,82 \div 0,86) \mu_N$, что соответствует области неопределенности в эмпирическом изоскалярном радиусе $0,72-0,79$ фм. Это значение находится в хорошем согласии с эмпирическим значением $0,88 \mu_N$.

Соотношение (52) можно использовать для определения значения момента инерции λ без каких-либо ссылок на Δ -резонанс.

ВИБРАЦИОННЫЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Рассмотренная выше схема вычисления свойств барионов ограничивалась учетом только ротационных степеней свободы. Уже первые расчеты с включением монополярных вибраций обнаружили весьма существенное влияние последних на свойства барионов [39] (дибарионов, см. выше).

Введение коллективных переменных, соответствующих монополярным вибрациям, осуществляется подстановкой в (1) более общего предположения о форме решения:

$$U(\mathbf{r}, t) = A(t) U_0(e^{\lambda(t)\mathbf{r}}) A^\dagger(t). \quad (53)$$

Зависящий от времени скалярный параметр λ выступает в роли коллективной переменной, описывающей монополярные вибрации, отвечающие масштабным преобразованиям решения стационарного уравнения $U_0(\mathbf{r})$ и однородным флуктуациям плотностей наблюдаемых величин. После проведения канонической процедуры квантования и диагонализации по угловым переменным приходим к эффективному гамильтониану [40]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\lambda^2}{2A(\lambda)} + B(\lambda) + \frac{j(j+1)}{C(\lambda)}. \quad (54)$$

Здесь \hat{p}_λ — импульс, соответствующий монополярным вибрациям; j — спин (равный изоспину) состояния. Эффективная масса $A(\lambda)$, потенциал $B(\lambda)$ и момент инерции $C(\lambda)$ даются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= e^{-3\lambda} Q_2 + e^{-\lambda} Q_4; \\ B(\lambda) &= e^{-\lambda} V_2 + e^\lambda V_4 + e^{-3\lambda} V_6; \\ C(\lambda) &= e^{-3\lambda} I_2 + e^{-\lambda} I_4. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Коэффициенты Q_i, V_i, I_i определяются следующими интегралами:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_2 &= \frac{\pi}{e^3 F \pi} \int_0^\infty (F')^2 x^4 dx; \\
 Q_4 &= \frac{8\pi}{e^3 F \pi} \int_0^\infty (F')^2 x^2 \sin^2 F dx; \\
 V_2 &= \frac{\pi F \pi}{2e} \int_0^\infty x^2 \left((F')^2 + \frac{2 \sin^2 F}{x^2} \right) dx; \\
 V_4 &= \frac{2\pi F \pi}{e} \int_0^\infty \sin^2 F \left(2 (F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) dx; \\
 V_6 &= \frac{\pi m_\pi^2}{e^2 F \pi} \int_0^\infty x^2 (1 - \cos F) dx; \\
 I_2 &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{F \pi e^3} \right) \int_0^\infty x^2 \sin^2 F dx; \\
 I_4 &= \frac{16\pi}{3} \left(\frac{1}{e^3 F \pi} \right) \int_0^\infty \left((F')^2 + \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) x^2 \sin^2 F dx.
 \end{aligned} \right\} (56)$$

Подынтегральные функции в этих интегралах определяются решением стационарного уравнения с $m_\pi = 0$ или $m_\pi \neq 0$ в зависимости от рассматриваемого случая. В случае $m_\pi = 0$ интеграл V_6 , очевидно, выпадает из выражения для $B(\lambda)$.

Спектр масс определяется решением уравнения Шредингера с гамильтонианом (54). Если пренебречь связью вибрационного и ротационного движений, то спектр задачи характеризуется следующей зависимостью от числа цветов:

$$E = aN_c + bN_c^0 + dN_c^{-1}. \tag{57}$$

Первый член в правой части соответствует классической массе солитона, второй — вкладу вибраций солитона в энергию состояния, третий — вкладу вращений. Зависимость спектра от N_c восстанавливается по зависимости от нее постоянных F_π и e . Таким образом, спектр имеет вид ротационных полос, построенных на вибрационных состояниях. Анализ эффективного гамильтониана обнаруживает сильную связь ротационного и вибрационного движений, что согласуется с экспериментальной ситуацией:

$$\frac{\Delta_{\text{rot}}}{\Delta_{\text{vib}}} = \frac{M_\Delta - M_N}{M_{1470} - M_N} = 0,564.$$

Здесь вибрационное расщепление между уровнями определено по репер-резонансу, а ротационное — по Δ -резонансу. Следует под-

черкнуть, что жесткость относительно λ -деформаций велика и определяется массой скирмиона (ситуация аналогична ситуации в «мешковых» моделях барионов).

Расчетные значения масс обнаруживают вырождение состояний $|1, 1/2\rangle$ и $|0, 3/2\rangle$ (первый индекс состояния дает число λ -фононов, второй — спин и изоспин). Это обстоятельство практически не зависит от константы связи e . Если мы обратимся к лежащим над Δ -и репер-резонансами экспериментально наблюдаемым состояниям $|n + 1, j\rangle$ и $|n, j + 1\rangle$, то они, действительно, подтверждают такое вырождение. Так, например, практически вырождены состояния $|3/2 (3/2^+)\rangle P_{33}'' (\Delta (1690))$ и $|1/2 (1/2^+)\rangle P_{11}'' - N (1710)$, которые представляют собой в нашей схеме первое вибрационное возбуждение над Δ и второе возбужденное состояние с квантовыми числами нуклона. Если постоянная F_π выбрана равной экспериментальному значению 186 МэВ, а постоянная e по экспериментальному расщеплению $N - \Delta$ масс, то расчетные значения масс P_{33}'' и P_{11}'' совпадают с экспериментальными.

При проведении процедуры квантования вибрационных степеней свободы сталкиваемся с проблемой упорядочения операторов из-за зависимости эффективной массы от λ [42]. Из результатов [42] можно прийти к заключению, что если на энергии (массы) нижних состояний упорядочение операторов, входящих в кинетическую энергию, практически не сказывается, то волновые функции сильно зависят от него. Последнее, в свою очередь, может оказывать определяющее влияние на расчетные формфакторы, учитывающие вибрационные степени свободы солитона. Аналогичные трудности возникают и при детальном рассмотрении квантования вращательных степеней свободы, на чем мы останавливаться не будем (см. по этому поводу [43]).

В [44] было обнаружено, что учет локальных радиальных флуктуаций пионного поля может приводить к отрицательным вкладам в массу квантованного скирмиона.

Более богатый спектр возбуждений возникает при включении в рассмотрение пространственно-несимметричных флуктуаций [45].

НЕСТРАННЫЕ ДИ- И МУЛЬТИБАРИОНЫ

После того, как были достигнуты определенные успехи в изучении свойств нуклонов и их возбуждений в модели Скирма, начались исследования в секторах с большими барионными числами — исследовались двухбарионные [46], трехбарионные [47] и многобарионные состояния [48], дибарионы нестранные и с ненулевой странностью [49].

Говоря о дибарионах (и вообще о мультибарионах)*, следует выделить три вида условий стабильности.

1. Топологическая стабильность. Классическая эволюция объекта, определяемая как деформация отображения $S^3 \Rightarrow S^3$, не выводит

* Мультибарионные состояния, вообще говоря, могут отличаться статическими характеристиками от ядерных состояний с теми же квантовыми числами.

его из данного класса эквивалентности, задаваемого индексом отображения — топологическим зарядом. Это (самое слабое для мультибарионов) условие обеспечивает лишь сохранение барионного заряда. Только топологическая стабильность характеризует мультибарионы, вычисляемые с анзацем Скирма — Виттена $\pi/|\pi| = n = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Такие мультибарионы имеют большую классическую массу, увеличивающуюся с ростом барионного заряда B как $B(B + 0,87)$ [50].

2. Квантовомеханическая стабильность. Масса нижайшего квантового состояния дибариона меньше суммы масс двух квантовых скирмионов с $B = 1$. Это более сильное условие выполняется для низших состояний дибарионов, рассчитанных с анзацем, в котором киральное поле при изменении азимутального угла φ вращается в целое число раз быстрее относительно оси симметрии [51]

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha \cos k\varphi, \sin \alpha \sin k\varphi), \quad (58)$$

где k — индекс отображения. Классическая же масса скирмиона с $B = 2$ равна 2,14 массы скирмиона с $B = 1$. Квантовомеханическая стабильность выполняется также для тороподобных солитонов [53].

3. Классическая стабильность. Классическая масса дибариона меньше суммы масс скирмионов с единичным барионным зарядом. Обнаруженные в [53] решения удовлетворяют этому условию.

Впервые возможность возникновения нестранных дибарионов малой массы и ротационные полосы в спектре масс дибарионов обсуждались в [51, 52]. Для статического решения U_0 использовался $k\varphi$ -анзац (58). Рассмотрение довольно общей временной зависимости поля

$$U(\mathbf{r}, t) = A(t) U_0(e^{\lambda(t)} R_{\alpha\beta}^{-1} r^\beta) A^+(t), \quad (59)$$

где $R_{\alpha\beta}$ — 3×3 -матрица пространственных вращений; $A(t)$ — координаты изотопических вращений; $\lambda(t)$ — координата монополярных вибраций, приводит к квантовому эффективному гамильтониану [41]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{F_\pi}{e} (M_2 e^{-\lambda} + M_4 e^\lambda) + \left\{ -\frac{1}{2V_2(\lambda)} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\hat{T}^2}{4(Q_2(\lambda) + 7\Delta(\lambda))} + \right. \\ & + \frac{\hat{S}^2}{4\left(\frac{7}{4}Q_2(\lambda) - 19\Delta(\lambda)\right)} + \frac{1}{16} \left([Q_2 - 16\Delta]^{-1} - [Q_2 - 7\Delta]^{-1} - \right. \\ & \left. \left. - 4 \left[\frac{7}{4}Q_2(\lambda) - 19\Delta(\lambda) \right]^{-1} \right) \right\} F_\pi e^3. \quad (60) \end{aligned}$$

Здесь \hat{T} и \hat{S} — операторы изоспина и спина; функции M_2 , M_4 , V_2 , Δ , Q_2 — см. в [52]. Используемый анзац устроен так, что вращению вокруг третьей оси соответствует изовращение вокруг той же оси на двойной угол. Это обстоятельство приводит к связи между третьи-

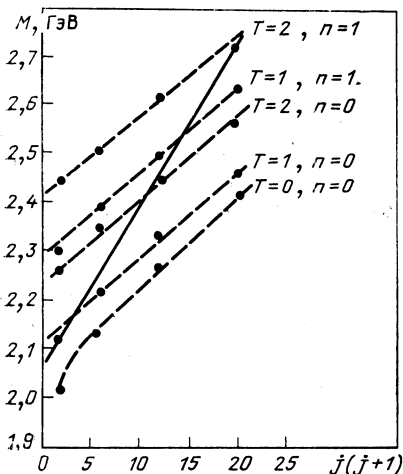


Рис. 5. Массы дибарионных состояний: точки — расчет с учетом λ -вибраций; сплошная прямая — расчет для $T=2$ без вибраций

ми проекциями спина и изоспина в системе, связанной с телом (*b.f.*): $S_3^{b.f.} = -2T_3^{b.f.}$. Эту связь следует рассматривать как операторное ограничение на выбор волновых функций. Ротационная часть гамильтониана диагонализуетя произведением D -функций, представляющих собой матрицы конечных вращений в координатном и изоспиновом пространствах:

$$\psi \sim D_{M_T L}^T D_{M_S - 2L}^S. \quad (61)$$

Здесь индексы имеют общепринятый смысл и принимают целочисленные значения, так как в данном случае мы имеем дело с бозоном. Решение уравнения Шредингера для вибрационной степени свободы включает расчет спектра масс (рис. 5). Выбранные значения $T_3 = 0$ соответствуют электрическому заряду дибариона $Q = +1$. Нетрудно видеть, что наклон и положение полос существенно определяются учетом вибрационной степени свободы. Масса состояния с квантовыми числами дейтрона приблизительно на 80 МэВ меньше суммы масс состояний с нуклонными квантовыми числами. Из исследования модели с $k\phi$ -анзацем можно сделать следующие выводы:

- могут существовать конфигурации с существенно меньшими массами, чем допускаемые анзацем Скирма — Виттена;
- квантовый гамильтониан приводит к состояниям со спином, отличным от изоспина. Возникают ротационные полосы, аналогичные предсказываемой модели кварковых мешков;
- λ -вибрации могут существенно менять наклон полос;
- энергия связи состояний определяется числом вовлеченных в движение (и учитываемых в теоретическом расчете) степеней свободы. Наконец, следует подчеркнуть, что для расчета абсолютных значений масс следует учесть изменение энергии нулевых флуктуаций пионного поля в присутствии скирмиона.

В [53] рассматривались конфигурации, описываемые двумя функциями — профильной $F(z, \rho)$ и определяющей направление вектора поля $\alpha(z, \rho)$ угловой функцией (z, ρ) координат цилиндрической системы. Расчеты показывают, что массы солитонов с меньшими B меньше, чем $BM_{B=1}$, т.е. такие солитоны классически стабильны. Плотность распределения массы найденных солитонов, приведенная в [53], свидетельствует о том, что в данном случае мы имеем дело с топологическими объектами.

Поскольку в целом ряде гибридных моделей дейтронных формфакторов к традиционному формфактору, определяемому нуклон-нуклонной компонентой полуфеноменологической волновой функции, добавляется вклад формфакторов дибарионных (шестикварковых) [54] состояний, представляется интересным вычислить формфактор дибарионов в модели Скирма. В [37] было показано, что все особенности κ -ф-анзаца, отличающие его от решения Скирма — Виттена, замечательным образом сокращаются в алгебраических вычислениях изовекторной компоненты электромагнитного тока. Отличие остается в изоскалярной части и, естественно, в численных значениях. Было показано, что электрический формфактор для дибариона, соответствующего анзацу в вычисленной области, лежит ближе к формфактору модели релятивистского гармонического осциллятора, чем для дибариона, соответствующего решению Скирма — Виттена.

Модель Скирма используется уже для анализа весьма гипотетических ситуаций. Так, в [55] рассматривается вопрос о достижимости в ядерных системах плотностей, достаточных для образования кварк-глюонной плазмы. Поскольку образование нового гипотетического ядерного состояния — кварк-глюонной плазмы должно проходить через область больших (в масштабах КХД) расстояний, можно попытаться использовать эффективный скирмовский лагранжиан, чтобы убедиться в принципиальной достижимости необходимой пространственной плотности энергии. Считается, что скирмион с большим барионным зарядом (в состоянии, соответствующем решению Скирма — Виттена) может представлять собой грубую модель начальной стадии перехода в кварк-глюонную плазму, так как здесь мы имеем дело с теоретической адронной материей, сконцентрированной в малой пространственной области. Такое состояние, конечно, будет нестабильным и будет распадаться на нуклоны. Авторы вычисляют плотность энергии скирмиона в зависимости от барионного числа. На основе представлений о кварк-глюонной плазме [56] предполагается, что если пространственная плотность энергии скирмиона больше плотности энергии в нуклоне в 2 раза, то разумно предположить, что модель Скирма допускает переход в кварк-глюонную плазму. На основе метода адиабатических инвариантов, впервые использованного в модели Скирма в [50], можно показать, что плотность энергии быстро возрастает с ростом барионного числа. Расчеты подтверждают результат Богомольного и Фатеева для классической массы мультибарионного состояния $E = 18,46 B (B + 0,8726)$. Рост среднеквадратичного радиуса можно аппроксимировать зависимостью $r_{RMS} = 2,17B^{1/2}$. Отсюда легко оценить зависимость плотности энергии от барионного числа для больших B . Плотность энергии уже при $B = 13$ становится в 2 раза больше, чем для $B = 1$. Таким образом, этот критерий не запрещает получение кварк-глюонной плазмы уже в ядерных системах с малым числом нуклонов. Вероятно, этот результат может быть распространен и на некоторые модификации модели Скирма (см. по этому поводу [57], где исследовалась асимптотика

массы при больших барионных числах для моделей, содержащих в лагранжиане стабилизирующие члены шестого порядка по пионному полю).

СКИРМИОН-СКИРМИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ. КОЛЛЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ

Исследование нуклон-нуклонных сил в рамках модели Скирма началось, вероятно, с [58]. Было показано, что зависимость от эйлеровых углов, фиксирующих поворот изотопических осей квантования относительно спиновых осей, в скирмион-скирмионном взаимодействии подобна зависимости, получаемой при поворотах кварковых «ежовых» волновых функций. Это обстоятельство было использовано для анализа центральной, спин-спиновой и тензорной компонент нуклон-нуклонного потенциала. Сравнение с соответствующими компонентами однобозонного обменного потенциала и полуфеноменологического парижского потенциала обнаружило качественное согласие.

Исследование скирмион-скирмионного взаимодействия в большей части опубликованных к настоящему времени работ [59] основано на следующем представлении о форме поля в секторе с барионным числом $B = 2$:

$$U_B(\mathbf{x}; \mathbf{r}_1, A_1; \mathbf{r}_2, A_2) = A_1 U_0(\mathbf{x} - \mathbf{r}_1) A_1^\dagger A_2 U_0(\mathbf{x} - \mathbf{r}_2) A_2^\dagger = U_1 U_2, \quad (62)$$

где $U_0(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)$ для $i = 1, 2$ есть стационарное решение, локализованное в r_i и A_i — коллективная координата, описывающая вращение. Скирмион-скирмионный потенциал определяется согласно

$$V_{SK-SK}(\mathbf{r}_{12}) = - \int d^3x \{ \mathcal{L}(U_1 U_2) - \mathcal{L}(U_1) - \mathcal{L}(U_2) \}, \quad (63)$$

а \mathbf{r}_{12} — координата, определяющая относительное положение скирмионов.

Другие определения скирмион-скирмионного потенциала отличаются именно определением относительной координаты. Так, Скирм, предложил в секторе $B = 2$ ввести координату, определяющую взаимное положение точек, в которых $U(r_i) = -1$. Нетрудно видеть, что такое определение не совпадает с определением (62), особенно на малых расстояниях. Более того, на малых взаимных расстояниях оба определения теряют прозрачный физический смысл, который мы обычно вкладываем в это понятие для точечных частиц. Можно определить расстояние между скирмионами, используя некоторую связь, как это сделано было в [60]. Все многообразие возможных определений говорит лишь о том, что относительная координата \mathbf{r}_{12} играет роль коллективной полевой координаты, которая удобным образом может быть использована в вариационных расчетах. Так, в секторе с $B = 2$ рассматривается [61] набор вариационных конфи-

гураций вида (62). Статическая энергия рассчитывается как функция относительной изоспиновой ориентации $A = A_1^+ A_2$ и полурасстояния $s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/2$ между скирмионами локализованными в \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Численно показывается, что минимальная энергия M_d достигается для некоторой конфигурации $U_d(\mathbf{x})$ с $A = i\tau^2$. Явный вид минимизирующей статической конфигурации: $U_d(\mathbf{x}) = U_1(\mathbf{x} + s\hat{d}\mathbf{z}) \tau^2 U_1(\mathbf{x} - s\hat{d}\mathbf{z}) \tau^2$, где $s_d = 2,8/eF_\pi$. Для выбранных авторами значений параметров $e = 4,84$ и $F_\pi = 108$ МэВ найденное $s_d = 1,1$ фм и $M_d - 2M_1 = -24$ МэВ. Далее следует введение коллективных переменных $A(t), \mathbb{R}(t)$: $U(\mathbf{x}, t) = A U_d(\mathbb{R}(t)\mathbf{x}) A^+$. Гамильтониан сводится к квадратичной форме

$$H = M_d + K_i X_{ij} K_j / 2 + K_i Z_{ij} L_j + L_i Y_{ij} L_j / 2, \tag{64}$$

где статическая энергия M_d и тензоры инерции X, Y, Z суть функционалы от $U_d(\mathbf{x})$. \mathbf{K} и \mathbf{L} — фиксированные в теле изоспиновый и спиновый операторы, связанные с «неподвижными» операторами \mathbf{I} и \mathbf{J} ортогональными преобразованиями. Решение задачи сводится к диагонализации матрицы с размерностью $(2i + 1)(2j + 1)$ в гильбертовом пространстве, базис которого образует векторы $|i, i_3, k_3\rangle \times |j, j_3, l_3\rangle$ ($-i \leq i_3, k_3 \leq +i; -j \leq j_3, l_3 \leq +j$). Были обнаружены два состояния с квантовыми числами дейтрона $i = 0, j = 1$ с близкими свойствами (табл. 2).

Таблица 2. Некоторые статические характеристики состояний с квантовыми числами дейтрона

Состояние	Энергия, МэВ	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$, фм	μ^*, μ_N	Q , фм ²
d	1764	1,3	0,69	0,22
d'	1767	1,3	0,66	0,21
Дейтрон	1875,6	2,095	0,8574	0,2859

* μ — магнитный момент, Q — квадрупольный момент состояний.

Энергия связи не оценивалась, так как не вычислялась разность энергий нулевых флуктуаций поля в присутствии солитона с $B = 2$ и двух разделенных солитонов с $B = 1$. Появление двух близких состояний с квантовыми числами дейтрона может свидетельствовать как о приближенном характере решения, так и, возможно, о том, что лагранжиан Скирма не является столь удовлетворительным приближением к КХД при низких энергиях, чтобы правильно передавать порядок следования ядерных уровней.

НУКЛОН-НУКЛОННЫЕ СИЛЫ

Анализ произведения (62) имеет некоторые технические преимущества. Он позволяет вычислить потенциал непосредственно по полной энергии статической конфигурации, и различные спин-изоспиновые каналы легко выделяются. Он автоматически дает корректную асимптотику в виде потенциала однопионного обмена и позволяет провести простой и качественно полезный анализ потенциала в терминах квантовых чисел, обмениваемых между скирмионами.

Кроме отмеченного однопионного характера асимптотики феноменологический нуклон-нуклонный потенциал характеризуется также, как известно, сильным отталкивающим центральным кором, возникающим в традиционных моделях, благодаря обмену ω -мезонами. И, наконец, еще одна характерная черта — центральное притяжение в промежуточной области, обязанное обмену коррелированными парами пионов (σ -мезонами). Наличие этого притяжения обеспечивает связанность ядерных систем.

Можно надеяться, что все эти черты будут воспроизводиться в последовательной теории нуклонов как солитонов скалярного поля. Сейчас, рассчитывая компоненты нуклон-нуклонного потенциала V_{NN} , уже не обязательно прибегать к сравнению с кварковыми моделями.

Достаточно воспользоваться проекционными теоремами [62] для матричных элементов $R_{ia} = \text{Tr} [A\tau_i A^\dagger \tau_a]/2$

$$\langle B | R_{ia} | B' \rangle = \Lambda(B, B') S_i T_a \quad (65)$$

для произвольного барионного состояния $|B\rangle$, где S_i , T_a — обобщенные спиновый и изоспиновый операторы, а $\Lambda(B, B')$ — геометрические коэффициенты, зависящие от состояний, чтобы убедиться в том, что в общем виде

$$V_{NN}(r) = V_C(r) + \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 [\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 V_{SS}(r) + S_{12} V_T(r)] + \text{тензоры высших рангов.} \quad (66)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для компонент, принятые в теории нуклон-нуклонного потенциала: $V_C(r)$ — центральный, $V_{SS}(r)$ — спин-спиновый, $V_T(r)$ — тензорный потенциалы. Разумеется, вместо обобщенных спиновых и изоспиновых операторов могут быть использованы обычные спиновые и изоспиновые матрицы Паули [63, 64], если воспользоваться соотношениями, аналогичными следующим:

$$\langle N' | A_k \tau A_k^\dagger | N \rangle = -\frac{1}{3} \langle N' | \sigma^k (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}^k) | N \rangle, \quad (67)$$

где матрицы σ^k и τ^k действуют на переменные k -го нуклона из пары взаимодействующих. G -четностная структура обнаруживает себя

при сравнении с нуклон-антинуклонным потенциалом [65]. Радиальная зависимость потенциалов из [66] показана (см. рис. 6) для параметров $F_\pi = 186$ МэВ и $e = 3,4$, что дает $g_{\pi NN} = 14,3$. Численные расчеты [58, 66—68] резюмируются следующим образом:

1) V_{SS} и V_T в хорошем согласии с соответствующими компонентами парижского потенциала [69] на больших расстояниях ($r > 2$ фм);

2) подобные ρ -мезонным вклады, выделяемые с помощью G -четностной зависимости потенциалов V_{SS} и V_T , имеют правильный порядок величины (вклады имитируют $m_\rho \sim 500$ МэВ и $f_{\rho NN}^2/4\pi \approx \approx 1,2 \div 1,8$);

3) центральная часть V_C имеет отталкивающий кор около 1 ГэВ.

Таким образом, в целом качественное согласие с характером ядерных сил замечательное. Однако кор в нуклон-нуклонном потен-

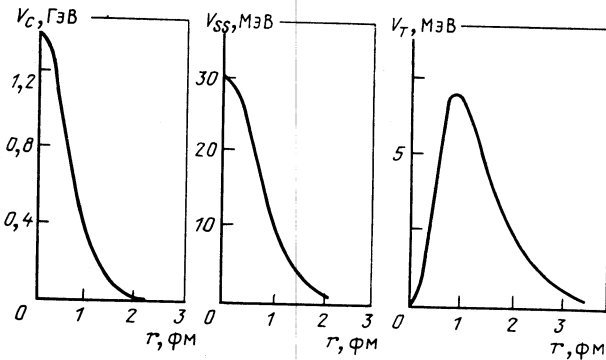


Рис. 6. Центральный, спин-спиновый и тензорные потенциалы [66], определенные уравнениями (62), (63), (66)

циале V_C слишком широк и подавляет промежуточную область возможного притягивающего потенциала. Последнее обстоятельство привело к необходимости исследования неадиабатических вкладов [70], вкладов, обязанных деформациям скирмионов в процессе взаимодействия [71], а также вкладов, соответствующих флуктуациям пионного поля в окрестности взаимодействующих скирмионов ($\sim O(N_c)$) [72]. Несмотря на значительный успех в исследованиях роли этих вкладов, значительного притяжения в промежуточной области, достаточного для образования ядер в традиционном смысле этого понятия, до сих пор не было получено. Вероятно, требуется некоторая модификация модели, органично включающая дополнительное скалярное поле, которое и обеспечило бы дополнительное притяжение в нуклон-нуклонных силах [73]. Здесь уместно подчеркнуть существенную роль однопетлевых поправок в ослаблении силы отталкивающего кора в промежуточной области.

СПИН-ОРБИТАЛЬНОЕ NN -ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Можно показать, что спин-орбитальные и квадратичные спин-орбитальные NN -силы естественным образом появляются в модели Скирма, если наряду с внутренними степенями свободы квантуются и орбитальные степени свободы.

Гамильтониан для медленно движущейся частицы конструируется введением зависящей от времени координаты $\mathbf{R}_{SK}(t)$ для центра скирмиона. Для отдельного солитона поле $U(\mathbf{r}) = A(t) \times \times U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{SK}^{(t)}) A^+(t)$ позволяет рассматривать трансляционное движение скирмиона и вычислить эффективный гамильтониан для трансляционного движения $\hat{H} = \hat{p}^2/2M_{SK}$, где p — импульс скирмиона. Это совсем не тривиальный результат [74]. Подстановка анзаца произведения в лагранжиану плотность порождает спин-орбитальное и квадратичное спин-орбитальное взаимодействия членами, содержащими временные производные. Согласно описанной выше процедуре квантования можно ввести однонуклонные операторы не взаимодействующих частиц. В результате вклад квадратичных членов лагранжиана в спин-орбитальное взаимодействие $V_{LS}^{(2)}$ имеет вид

$$V_{LS}^{(2)} = - \frac{\pi F_\pi^2}{18M_N \lambda r} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \cdot \mathbf{l} \times \times \int_0^\infty R^2 dR \int_{-1}^{+1} dz \frac{\sin^2 F(r_1) \sin^2 F(r_2)}{r_1^2} \left(\frac{1}{2} r - Rz \right). \quad (68)$$

В этом выражении λ — момент инерции, а

$$r_{1,2} = \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4} \mp Rr z}; \quad z = \hat{R} \cdot \hat{r}.$$

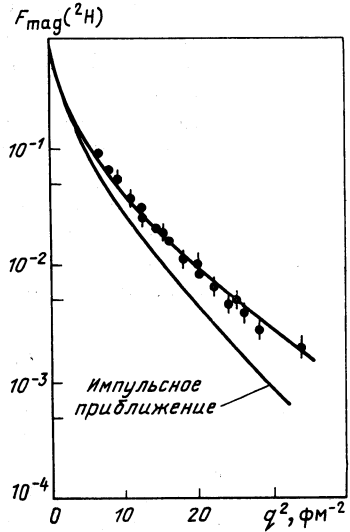
Мы опускаем здесь вклад скирмовского члена. Получающиеся потенциалы на больших расстояниях пропорциональны $F^2(r)$ и ассоциируются с обменом двумя пионами в состоянии с изоспином 1 (ρ -мезонный обмен).

Более подробно о спин-орбитальных нуклон-нуклонных силах — см. [75].

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ МЕЗОННЫЕ ОБМЕННЫЕ ТОКИ

Ограничимся только изоскалярными мезонными обменными токами. Как мы отмечали уже, в модели Скирма и всех ее обобщениях, где барионы суть солитоны мезонных полей, оператор изоскалярного тока пропорционален оператору аномального барионного тока. Барионный ток не зависит от деталей динамики модели и существенно определяется отображением компактифицированного простран-

Рис. 7. Магнитный формфактор дейтрона [38]. Показан вклад от полного топологического тока и импульсное приближение, где вклады обменных токов отсутствуют. Киральный угол был определен по изоскалярному формфактору нуклона [см. (50)]



ства на киральную сферу. С другой стороны, на уровне $SU(3)$ -симметрии он получается как нетеровский ток взаимодействия Весса — Зумино, требуемого киральной аномалией. В этом смысле изоскалярные формфакторы нуклонов и ядер определяются некоторым почти модельно независимым образом (в приближении топологических солитонов).

Анализ произведения позволяет разбить изоскалярный ток (половину барионного) на две части — сумму двух однонуклонных и двухчастичный оператор, который следует отождествить с обменным током:

$$J_\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}) = J_\mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + J_\mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + J_{\mu,ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}). \quad (69)$$

Фурье-преобразование пространственной части обменного тока с использованием проекционных теорем можно привести к виду [38]:

$$J_{ex} = -\frac{i}{72\pi^2\lambda} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \exp\left[\frac{1}{2} i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}\right] \mathbf{q} \int d^3r \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] \sin^2 F(|\mathbf{R} + \mathbf{r}|) \times \\ \times \left\{ \left[\alpha(r) + \frac{1}{3} \gamma(r) \right] \boldsymbol{\Sigma} + \gamma(r) \left[\boldsymbol{\Sigma} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\Sigma} \right] \right\}, \quad (70)$$

где $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2$, а вспомогательные функции $\alpha(R)$, $\gamma(R)$ определяются киральным углом $F(R)$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(R) &= \frac{1}{2R} \sin 2F(R); \\ \gamma(R) &= F'(R) - \frac{1}{2R} \sin 2F(R). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Аналогично можно вычислить фурье-образ временной компоненты обменного тока

$$\rho_{ex} = \frac{i}{16\pi^2} \mathbf{q} \int d^3r \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] \text{Tr} \{ U_1^+ \nabla U_1 \times U_2 \nabla U_2^+ \}. \quad (72)$$

Здесь индексы 1, 2 соответствуют двум скирмионам, а R — расстоянию между ними. Этот обменный токовый оператор можно проверить в расчетах электромагнитных формфакторов ядер. Такой расчет был предпринят в [76] для дейтрона. В расчете была использована волновая функция парижского потенциала, с которой и проводилось усред-

нение токового оператора (как если бы модель Скирма воспроизводила нуклон-нуклонный потенциал, приводящий к такой волновой функции). На рис. 7 мы приводим магнитный формфактор дейтрона [38]. Использование феноменологической функции профиля, определяемой по дипольному фиту изоскалярного электрического одно-нуклонного формфактора, приводит к согласию расчетного дейтронного магнитного формфактора с экспериментальным вплоть до $q \sim 1,7$ ГэВ/с. Следует отметить, что вычисление вкладов мезонных обменных токов в такой схеме не связано с теорией возмущений, и вряд ли можно указать, какие диаграммы Фейнмана соответствуют вычисляемой величине (см., однако, по этому поводу [77]).

ЯДЕРНАЯ МАТЕРИЯ

Ядерная материя представляет собой систему с большим барионным числом и постоянной пространственной плотностью барионного заряда. Средняя энергия связи на нуклон в основном состоянии (16 МэВ/нуклон) мала по сравнению с массой нуклона. Рассмотренные нами мультибарионные состояния не дают таких свойств в пределе больших барионных чисел. Был предпринят ряд опытов получить уравнения состояния ядерной материи в приближении Вигнера — Зейтца [78]. Как было показано [79], результат таких исследований существенно зависит от деталей короткодействующего отталкивания (и, следовательно, вклада членов с высшими производными в лагранжиане) и не обеспечивает насыщения сил в системе.

Скирмион с данной фиксированной ориентацией во внутреннем пространстве соответствует когерентной суперпозиции различных вращательных состояний: $N, \Delta, (5/2, 5/2) \dots$. Если взаимодействие между скирмионами меньше расщепления в ротационной полосе, то скирмионы в основном находятся в нуклонном состоянии с малой примесью Δ . В противном случае скирмионы просто осциллируют в окрестности конфигурации с максимальным притяжением.

Если вспомним, что, вообще говоря, выигрыш в энергии на нуклон, обязанный оптимальной ориентации во внутреннем пространстве, определяется относительным положением скирмионов в координатном пространстве, то можно надеяться на образование упорядоченной ядерной материи.

Так, в [80] рассматривается физически интересный случай кубической симметрии — нейтронный кристалл. Силы, действующие между скирмионами, сильно зависящие от взаимной ориентации во внутреннем пространстве, могут сделать предпочтительной упорядоченную кристаллическую конфигурацию. Основной фактор, который работает против такой модели, — нулевые флуктуации скирмионов в окрестности точек локализации. Для рассмотренной в [80] области плотностей $0,1 < \rho_B < 1,5$ фм⁻³ результат не должен существенно зависеть от вида стабилизирующего члена в лагранжиане. Выберем вариационную полевую конфигурацию в виде произведения скир-

мионов, повернутых относительно друг друга и центрированных в некоторых точках \mathbf{R}_i :

$$U_0(\mathbf{r}) = \prod_i A_i \exp\left(i F (|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|) \tau \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|}\right) A_i^+. \quad (73)$$

$SU(2)$ -матрицы $A_i = a_0^{(i)} + \mathbf{a}^{(i)} \cdot \tau$ определяют ориентацию скирмиона, локализованного около \mathbf{R}_i . Если воспользоваться тем обстоятельством, что для пары удаленных друг от друга скирмионов в киральном пределе потенциал взаимодействия

$$V(\mathbf{r}, A) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e_{ij}(A) \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{1}{r}, \quad (74)$$

где

$$e_{ij}(A) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^+ \tau_i A \tau_j);$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}, A) \sim \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{a}^2 r^2}{r^5}, \quad (75)$$

то приходим к выводу, что наиболее притягивающий асимптотический потенциал удовлетворяет условию

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{a}^2 = 1. \quad (76)$$

Среди невырожденных относительно трансляций конфигураций, удовлетворяющих этим условиям для каждой пары соседних скирмионов и несущих единичный топологический заряд, лежит конфигурация, в которой точки \mathbf{R}_i такие, что $U(\mathbf{R}_i) = -1$ образуют кубическую решетку.

Предположение (73) об $U_0(\mathbf{r})$ приводит к кристаллу, классическая энергия которого очень близка к нижней топологической оценке. Так, классическая энергия, приходящаяся на один барион, $\sim 32F_\pi/e$ (а топологическая оценка $29,6F_\pi/e$), что для использованных автором значений $F_\pi = 129$ МэВ и $e = 5,45$ дает вклад в энергию связи приблизительно 105 МэВ (масса свободного скирмиона вычтена).

Если ввести коллективные переменные $A(t)$, соответствующие общей ориентации кристалла в изопространстве $U(\mathbf{r}, t) = A(t) \times U_0(\mathbf{r}) A^{-1}(t)$, то совершенно аналогично одноуклонному случаю можно определить изоспин интегрированием плотности изовекторного тока и угловой момент по плотности и прийти к выражению для полной энергии, учитывающему вращательные степени свободы для n -барионного состояния:

$$E^{\text{tot}} = nM_{\text{cl}} + \frac{1}{2n\lambda} I^{\text{tot}} (I^{\text{tot}} + 1), \quad (77)$$

где λ — момент инерции в изопространстве. Следует подчеркнуть, что только полный изоспин I_{tot} удовлетворяет алгебре углового момента и является квантовой наблюдаемой.

Для конечных ядер эта ротационная энергия приводит к хорошо известной энергии симметрии $25(N - Z)^2/A$ МэВ и к очевидным соотношениям для расщеплений между аналоговыми уровнями в ядрах [81].

Для рассматриваемого в [80] нейтронного кристалла уравнение (77) дает для энергии на нуклон в кристалле величину $M_{cl} + 1/8\lambda$, что еще больше увеличивает (!) энергию связи. Однако оценка кинетической энергии вибраций в окрестности локализации скирмионов показывает, что кристалл весьма вероятно не будет стабильным состоянием.

В [82] предпринят опыт теоретического расчета кубической решетки, где число ближайших соседних скирмионов, удовлетворяющих оптимальному условию (76), доведено до двенадцати. Вариационная оценка энергии такой конфигурации говорит о том, что она может быть выгодной при плотностях, существенно больших нормальной ядерной плотности ρ_0 . Детальному исследованию симметрии скирмионского кристалла посвящена и работа [83].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует отметить богатство структур, представляемых моделью для исследований, большая часть которых проводится лишь в квазиклассическом приближении. Ясно проявляется некоторая аналогия в результатах, получаемых в кварковых моделях и модели Скирма (в жесткости состояний относительно однородных деформаций, в форме спектра — ротационные полосы по спину и изоспину для мультибарионных состояний, в формфакторах, в характере отталкивающего кора нуклон-нуклонных сил и др.). Такая аналогия, вероятно, не случайна и подчеркивает то обстоятельство, что модель Скирма есть лишь эффективная модель, представляющая удобные для работы степени свободы.

Модель удобна для исследований многих гипотетических ситуаций, а также таких, которые с трудом поддаются исследованию методами теории возмущений (мезонные обменные токи).

Полученные к настоящему времени модельно-независимые результаты согласуются с экспериментом с очень хорошей точностью.

Модель предсказывает связь между величинами, которые совсем не являются заранее очевидными в других теориях сильных взаимодействий (связь сдвигов фаз в различных парциальных волнах πN -рассеяния [84]).

Большой спектр используемых в литературе значений постоянных F_π и e , разумеется, свидетельствует о том, что с одним набором постоянных не удастся добиться количественного согласия со всеми известными наблюдаемыми. Кроме того, учет большего числа степеней свободы при квантовании модели и вычислении эффективного коллективного гамильтониана, вероятно, сильно скажется на значениях подгрупповых постоянных в барионном секторе. Весьма силь-

ным является выбор стабилизирующего члена в оригинальном виде, как это было сделано в работах Скирма. Фундаментальным инградиентом некоторой обобщенной модели Скирма может быть скалярное дилатонное поле, наличие которого в эффективном лагранжиане обязано конформной аномалии в квантовой хромодинамике [85, 86]. Исследование двухтоковых нуклонных наблюдаемых [87] (поляризуемости нуклонов, структурной функции нуклонов) даст ответ на вопрос о роли членов с высшими производными в эффективном лагранжиане.

И самое привлекательное свойство модели Скирма заключается в единстве методов и средств, впервые применяемых для исследования барионных и многобарионных ядерных состояний.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность М. К. Волкову, В. К. Лукьянову, Г. Хольцварту, Д. О. Риске, Д. И. Дьяконову, а также В. Б. Копелиовичу, В. А. Андрианову, В. Ю. Новожилову за критические замечания, высказанные на разных этапах написания этого обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skyrme T. H. R. // Proc. Roy. Soc. 1961. Vol. A260. P. 127—138; Nucl. Phys. 1962. Vol. 31. P. 556—569.
2. 't Hooft G. // Nucl. Phys. 1974. Vol. B75. P. 461—470.
3. Witten E. // Nucl. Phys. 1979. Vol. B160. P. 57—115.
4. Faddeev L. D., Korepin V. E. // Phys. Rept. 1978. Vol. C42. P. 1—87; Rajaraman P. Solitons and Instantons. Amsterdam: North-Holland, 1982; Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
5. Дьяконов Д. И., Эйдеес М. И. // Письма в ЖЭТФ. 1983. Vol. 38. P. 358—360; Andrijanov A., Novozhilov Yu. // Phys. Lett. 1985. Vol. B153. P. 422—427; Karchev N. I., Slavnov A. A. Imperial College preprint. Imperial/TP/84—85/28, 1985.
6. Aitchison I. J. R. // Acta Physica Polonica. 1987. Vol. B18. P. 191—206.
7. Волков М. К. // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 433—471.
8. Weinberg S. // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 18. P. 188—191; Coleman S., Wess I., Zumino B. // Phys. Rev. 1969. Vol. 177. P. 2239—2250; Волков Д. В. // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4. С. 3—41.
9. Gerstein S., Jackiw R., Lee B. W., Weinberg S. // Phys. Rev. 1971. Vol. D3, P. 2486—2492; Первушин В. Н. // ТМФ. 1975. Т. 22. С. 291—299; Волков М. К., Казаков Д. И., Первушин В. Н. // ТМФ. 1976. Т. 28. С. 46—56.
10. Волков М. К., Первушин В. Н. // ЭЧАЯ. 1975. Т. 6. С. 632—668; Kazakov D. I., Pervoushin V. N., Pushkin S. V. // J. Phys. A. 1978. Vol. 10. P. 2093—2105.
11. Фаддеев Л. Д. // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 141—144.
12. Adkins G., Nappi C., Witten E. // Nucl. Phys. 1983. Vol. B228. P. 552—566.
13. Pak N. K., Tze H. Ch. // Ann. Phys. 1979. Vol. 117. P. 164—194.
14. Slavnov A. A. // Nucl. Phys. 1971. Vol. B31. P. 301—315.
15. Faddeev L. D. CERN Preprint TH. 2188, 1976.
16. Rybakov Y. P., Sanyuk V. I. Preprint NBI-HE-81-49.
17. Faddeev L. D. // Lett. Math. Phys. 1976. Vol. 1. P. 289—294.
18. Manton N. S., Ruback P. J. // Phys. Lett. 1986. Vol. B181. P. 137—140.
19. Андрианов В. А., Новожилов В. Ю. // ЯФ. 1986. Т. 43. С. 983—990.
20. Kahana S., Ripka G. // Nucl. Phys. 1984. Vol. A429. P. 462—476.

21. Dyakonov D. I., Petrov V. Yu., Pobylytsa P. V. Preprint LNPI-1297, 1987.
22. Goldstone J., Wilchek F.//Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 986—989.
23. Balachandran A. P., Nair V. P., Rajeev S. G., Stern A.//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 1124—1127; Phys. Rev. 1983. Vol. D27. P. 1153—1164.
24. MacKenzie R. Preprint NSF-ITP-84-135; DAMTP/86-18.
25. Wess J., Zumino B.//Phys. Lett. 1971. Vol. 37B. P. 95—97.
26. Balachandran A. P. Syracuse Univ. Preprint COO-3533-314, SU-4222-314, 1985; Zahed I., Brown G. E.//Physics Repts. 1986. Vol. 142. P. 1—102.
27. Дьяконов Д. И., Петров В. Ю. Препринт ЛИЯФ № 967. Л., 1984.
28. Боголюбов Н. Н.//УМЖ, 1950. Т. 2. № 2. С. 3—18.
29. Pauli W., Dancoff S. M.//Phys. Rev. 1942. Vol. 62. P. 85—108.
30. Biedenharn L. C., Dothan Y., Tarlini M.//Phys. Rev. 1985. Vol. D31. P. 649—654; Николаев В. А., Рока Э.//Краткие сообщения ОИЯИ. Дубна, 1986, № 14-86. С. 28—32.
31. Биденхарн Л., Лаук Дж. Угловой момент в квантовой физике. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
32. Witten E.//Nucl. Phys. 1983. Vol. B223. № 3. P. 422—432.
33. Бунатян Г. Г. Сообщение ОИЯИ P2-86-408, Дубна, 1986.
34. Karliner M. Preprint SLAC-PUB-4268, 1987.
35. Ткачев О. Г. Некоторые свойства дибарионов в модели Сфирма. Дипломная работа ДВГУ, 1986.
36. Braaten E., Tse S. M., Wilcox Ch.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2008; Phys. Rev. 1986. Vol. D34. P. 1482—1492.
37. Николаев В. А., Ткачев О. Г. Сообщение ОИЯИ P4-87-422. Дубна, 1987.
38. Нуман Е. М., Riska D. O. Preprint HU-TFT-88-2, 1988.
39. Николаев В. А.//Труды Международного совещания по теории мало-частичных и кварк-адронных систем. ОИЯИ Д4-87-692. Дубна, 1987. С. 265—271.
40. Николаев В. А., Рока Э. К. Сообщения ОИЯИ P4-86-514. Дубна, 1986.
41. Николаев В. А.//Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий, ОИЯИ, Д4, 2-86-688. Т. 1. Дубна, 1986. С. 78—88.
42. Dey J., Dey H., Le Tourneux J.//IL Nuovo cimento. 1986. Vol. A91. № 1. P. 15—32.
43. Fujii K., Kobushkin A. P. Preprint ITP-87-1E. Kiev, 1987; Fujii K.e.a.//Phys. Rev. 1987. Vol. D35. P. 1896—1907.
44. Ereemeev M. I. e.a. Preprint ИТЭР № 77, 1987.
45. Hayashi A., Holzwarth G.//Phys. Lett. 1984. Vol. B140. P. 175—180; Lin Ch.-K.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A449. P. 673—682.
46. Eisenberg J. M., Erell A., Silbar R. R.//Phys. Rev. 1986. Vol. C33. P. 1531—1534.
47. Meissner U.-G., Kaulfus U. B.//Phys. Rev. 1984. Vol. C30. P. 2058—2066.
48. Kutschera M., Pethic C. J., Ravenhall D. G.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1041—1044.
49. Jaffe R. L., Korpa C. L.//Nucl. Phys. 1985. Vol. B258. P. 468—482; Balachandran A. P. e.a.//Nucl. Phys. 1985. Vol. B256. P. 525—556; Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 887—890.
50. Богомольный Е. Б., Фатеев В. А.//ЯФ. 1983. Т. 37. С. 228—241.
51. Weigel H., Schwesinger B., Holzwart G.//Phys. Lett. 1986. Vol. B168. P. 321—325.
52. Николаев В. А., Ткачев О. Г. Сообщение ОИЯИ P4-86-515. Дубна, 1986.
53. Копелиович В. Б., Штерн Б. Е.//Письма ЖЭТФ, 1987. Т. 45. С. 165—168.
54. Буров В. В., Лукьянов В. К., Титов А. И.//ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 1249—1295; Burov V. V., Dostovalov V. N.//Z. Phys. 1987. Vol. A326. P. 245—253.
55. Kalbermann G., Eisenberg J. M.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1987. Vol. 13. P. 1029—1035.

56. **Baym G.** In *Common Problem in Low- and Medium-Energy Nuclear Physics*/ed. B. Castel e.a. N.Y.: Plenum, 1979. P. 213; **Muller B.**//*The Physics of the Quark-Gluon Plasma. Lecture Note in Physics.* Berlin: Springer, 1985. P. 225.
57. **Иноземцев В. И.** Сообщение ОИЯИ P2-86-317, Дубна, 1986.
58. **Jackson A., Jackson A. D., Pasquier V.**//*Nucl. Phys.* 1985. Vol. A432. P. 567—609.
59. **Saito S.**//*Proceedings of the international conference on the theory of few body and quark-hadronic systems.* Dubna, 1987. P. 244—255.
60. **Verbaarschot J. J. M. e.a.** ILL-TH-86-56, 1986; *Nucl. Phys.* 1987. Vol. A468. P. 529—538.
61. **Braaten F., Carson L.**//*Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1897—1900.
62. **Otofuji T. e.a.** Preprint DPNU-86-19, 1986.
63. **Nyman E. M., Riska D. O.** Preprint HU-TFT-85-47. Helsinki, 1985.
64. **Nyman E. M., Riska D. O.** Preprint HU-TFT-88-2. Helsinki, 1988.
65. **Walliser H., Hayashi A., Holzwarth G.**//*Nucl. Phys.* 1986. Vol. A456. P. 717—732.
66. **Otofuji T. e.a.** Nagoya Univ. preprint DPNU-85-26, 1985.
67. **Vinh Mau R. e.a.**//*Phys. Lett.* 1985. Vol. B150. P. 259—264.
68. **Yabu H., Ando K.**//*Progr. Theor. Phys.* 1985. Vol. 74. P. 750—764.
69. **Vinh Mau R.**//*Mesons in Nuclei*/Eds. M. Rho and D. H. Wilkinson. North-Holland Publ. Comp. 1979. Vol. 1. P. 151—196.
70. **Nyman E. M., Riska D. O.** HU-TFT-85-17. Helsinki, 1985.
71. **De Pace A. e.a.**//*Nucl. Phys.* 1986. Vol. A457. P. 541—554; **Oka M., Lui K. F., Hong Yu.**//*Phys. Rev.* 1986. Vol. D34. P. 1575—1580; **Oka M.**//*Phys. Rev.* 1987. Vol. C36. P. 720—725.
72. **Saito S.** Nagoya Univ. Preprint DPNU-87-32, 1987.
73. **Zahed I., Wirzba A., Meissner U.-G.**//*Phys. Rev.* 1986. Vol. D33. P. 830—835; **Jackson A. D., Jackson A.**//*Nucl. Phys.* 1986. Vol. A457. P. 687—708;
- Jain P., Johnson R., Schechter J.**//*Phys. Rev.* 1987. Vol. D35. P. 2230—2237.
74. **Oka M.**//*Phys. Lett.* 1986. Vol. B175. P. 15—18.
75. **Riska D. O., Dannbom K.** Preprint HU-TFT-87-26. Helsinki, 1987.
76. **Ebbe M., Nyman E. M., Riska D. O.**//*Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 57, P. 3007—3010; *Nucl. Phys.* 1987. Vol. A468. P. 473—492.
77. **Wakamatsu M., Weise W.** Preprint TPR-87-20, Univ. Regensburg, 1987.
78. **Kutshera M., Pethick C. J.**//*Nucl. Phys.* 1985. Vol. A440. P. 670—684.
79. **Wüst E., Brown G. E., Jackson A. D.**//*Nucl. Phys.* 1987. Vol. A468. P. 450—472.
80. **Klebanov I.**//*Nucl. Phys.* 1985. Vol. B262. P. 133—143.
81. **Дьяконов Д. И.**//*ЯФ.* 1987. Т. 45. Вып. 6. С. 1592—1594.
82. **Dyakonov D. I., Mirlin A. D.** Preprint LNPI 1327, Leningrad, 1987.
83. **Goldhaber A. S., Manton N. S.**//*Phys. Lett. B.* 1987. Vol. 198. № 2. P. 231—234.
84. **Holzwarth G., Schwesinger B.**//*Rep. Prog. Phys.* 1986. Vol. 49. P. 825—872.
85. **Андрианов А. А., Андрианов В. А., Новожилов В. Ю., Новожилов Ю. В.** //*Письма в ЖЭТФ.* 1986. Т. 43. С. 557—559; **Andrianov V., Novozhilov V.** Preprint IC/87/411. Trieste, 1987.
86. **Reinhardt H., Kämpfer B.** Preprint NBF-HE-87-16, Univ. Copenhagen, 1987; **Ebert D., Reinhardt H.** JINR Communication E2-86-274. Dubna, 1986.
87. **Chemtob M.** Preprint SPHT/87-100. Saclay, 1987; *Nucl. Phys.* 1987. Vol. A473. P. 613—636.