«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1989, ТОМ 20, ВЫП. 3

УДК 519.4

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ

А. Н. Лезнов, М. В. Савельев

Институт физики высоких энергий, Серпухов

Обзор в основном посвящен применению алгебраического метода для построения 2/2-мерных суперсимметричных нелинейных динамических систем и проблеме их интегрируемости. При этом существенным образом используется теория классических супералгебр Ли.

The survey is mainly devoted to an application of an algebraic method for constructing 2/2-dimensional supersymmetric non-linear dynamical systems and their integrability problem. In this the theory of classical Lie superalgebras is essentially used.

ВВЕДЕНИЕ

Последовательное развитие идей суперсимметрии в калибровочных теориях, супергравитации и суперструнных моделях, получивших в последние годы широкое распространение в физике элементарных частиц и космологии, приводит к необходимости рассмотрения суперсимметричных расширений нелинейных динамических уравнений и разработки эффективных методов их интегрирования. При этом геометрический базис таких идей, обусловленный в первую очередь требованием учета гравитационных взаимодействий в общей картине, в сочетании с размерной редукцией в духе Калуца — Клейна естественно формулировать в терминах интегрируемых супермногообразий $4/4\ N$ (с супергруппой движения G^0), вложенных тем или иным образом в объемлющее суперпространство со структурой некоторой супералгебры Ли J.

Наличие супергруппы симметрии соответствующих систем, образующих интегрируемый подкласс суперсимметричных расширений уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи, позволяет классифицировать их решения по неприводимым представлениям G^0. Естественно, при этом наиболее простыми свойствами обладают решения, ковариантные относительно преобразований из некоторой подсупергруппы G^0, отвечающие редукции полного числа степеней свободы физической системы к инвариантным по отношению, например, к некоторой подсупергруппе суперконформных преобразований.

На таком пути возникают модели более простые, чем исходные, и в то же время сохраняющие ряд их существенных свойств.

Дополнительную симметрию можно, в частности, наложить таким образом, чтобы свести степени свободы к двум четным ($x_{1,2}$) и $2N$ нечетным $\theta^{\alpha}_{1,2}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, координатам. Здесь имеется следующая аналогия с калибровочными теориями. Полной подалгеброй инвариантности цилиндрически-симметричных конфигураций полей Янга — Миллса в комплексифицированном двумерном евклидовом пространстве является прямая сумма $sl\,(2)$ и простой калибровочной группы J. Ее аналогом для их N-суперсимметричных расширений служит прямая сумма $osp\,(2/N)$ и простой супералгебры $\tilde{J}$. Если в двумерном пространстве классификация различных видов возникающих автодуальных уравнений согласована с вложениями $sl\,(2)$ в J, то в $2/2\,N$-мерном суперпространстве — с вложениями $osp\,(2/N)$ в $\tilde{J}$. В нашем обзоре мы в основном будем говорить о простейшем $N = 1$ варианте.

Предлагаемая работа представляет собой естественное развитие алгебро-групповых методов конструктивного исследования двумерных нелинейных интегрируемых систем, обзоры результатов которого в «приспособленной» для физических приложений форме последовательно публиковались в журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра», начиная с 1980 г. [1, 2] (см. также [3]). Поэтому мы сочли целесообразным дополнить их настоящим материалом, в котором эти методы применяются для изучения суперсимметричных уравнений, одним из основных ингредиентов которого является теория супералгебр Ли. В настоящее время в литературе имеется несколько публикаций обзорного характера, касающихся тех или иных аспектов используемых нами разделов данной теории (см., например, [4—6]). Однако опыт их изложения на различных семинарах показывает, что целый ряд принципиальных моментов остается «белым пятном», возможно, из-за недостаточной распространенности этих изданий в кругах физиков-теоретиков. Поэтому рассмотрению нелинейных суперсимметричных систем мы предпошлем, не претендуя на большую строгость и полноту изложения, краткий перечень используемых нами формулировок и результатов теории супералгебр Ли, основанный на работах [4, 6].

Развиваемый в работе метод построения суперсимметричных нелинейных уравнений, образующих подкласс супералгебраических систем (см. ниже), связан с представлением типа нулевой кривизны $dA + A \wedge A = 0$ в соответствующем суперпространстве. При этом связности A принимают значения в некоторой супералгебре Ли J и наложение условий на их градуировочный спектр (определяемый аналогично [3] как значения индексов градуировочных подпространств $J = \bigoplus\limits_{m \in \mathbb{Z}} J_m$, $[J_m, J_n] \subset J_{m+n}$, по которым разлагаются функции A) порождает посредством данного представления нетривиальные интегрируемые системы, которые будем называть супералгебраическими. Здесь под нетривиальностью имеется в виду то обстоятельство, что их решения не могут быть сведены к чистой калибровке посредством калибровочного преобразования $A \to g^{-1}(d+A)\,g$ с функцией g, генерируемой подалгеброй J_0. (Отметим, что если бы функции A принимали значения во всей супералгебре J, то решения были бы калибровочно-эквивалентны тривиальным. Наложение соответствующих условий на градуировочный спектр функций A приводит к тому, что он не меняется лишь при калибровочных преобразованиях, генерируемых J_0, в силу свойства градуировки $[J_0, J_m] \subset J_m$.) Те из супералгебраических систем, которые инвариантны относительно группы суперсимметричных преобразований, порождающих симметрию матрицы рассеяния, удовлетворяющую основным принципам релятивистской квантовой теории поля [7], принято называть суперсимметричными [8]. При этом число бозонных и фермионных состояний для каждого представления группы суперсимметрии одинаково.

Супералгебраические (по форме) системы можно получать разными способами. Можно, как это делалось в рамках двумерных построений [3], получать их, например, реализуя четные операторы $A_\pm$ двумерного представления типа Лакса $[\partial/\partial z_+ + A_+, \partial/\partial z_- + A_-) = 0$ в подпространствах $J_0 \oplus J_{\pm 1/2} \oplus J_{\pm 1}$ градуированной алгебры Ли $J = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} J_{m/2}$. При этом коэффициентные функции $f^\alpha_{\pm 1/2}$ при образующих подпространств $J_{\pm 1/2}$ являются взаимокоммутирующими (четными) функциями своих аргументов. С другой стороны, эта же система может быть точно так же получена, если считать, что соответствующие функции $A_\pm$ принимают значения в супералгебре $J = J_{\bar 0} \oplus J_{\bar 1}$, $\mathbb{Z}$-градуировка которой согласована с ее $\mathbb{Z}_2$-градуировкой, т. е. четная часть $J_{\bar 0} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} J_{2m}$, а нечетная $J_{\bar 1} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} J_{2m+1}$. При этом $\mathbb{Z}$-градуировка осуществляется картановским элементом h подалгебры $sl\,(2)$, целочисленно вложенной в $J_{\bar 0}$, а четность $A_\pm$ обеспечивается грассмановыми свойствами антикоммутирующих фукций $f^\alpha_{\pm 1}$. [Подчеркнем, что в первой конструкции градуировка осуществляется полуцелочисленными вложениями $sl\,(2)$ в соответствующую алгебру J.] Однако возникающие супералгебраические уравнения отнюдь не всегда оказываются суперсимметричными в смысле своих свойств инвариантности.

Отметим, что часто встречающееся в литературе непосредственное обобщение известных интегрируемых двумерных систем типа цепочек Тода и Вольтерра путем замены ad hoc в представлении типа Лакса производных $\partial/\partial z_\pm$ плоскими ковариантными $D_\pm \equiv \partial/\partial\theta_\pm + i\theta_\pm\partial/\partial z_\pm$ ($\theta_\pm$ — нечетные грассмановы координаты 2/2-мерного суперпространства), а $A_\pm$ — нечетными функциями на грассмановой оболочке супералгебры уже не гарантирует интегрируемость возникающих уравнений и лишь в отдельных случаях обеспечивает их суперсимметричность. Более того, отнюдь не для всех супералгебр Ли этого можно добиться. Причина заключается в ряде специфических отличий супералгебр Ли от обычных и одна из целей предворяющего основной текст изложения некоторых вопросов теории контрагредиентных супералгебр Ли состоит именно в акцентировании внимания читателя на этом обстоятельстве. Забегая вперед, скажем, что для обеспечения (в рамках используемой нами алгебраической конструкции) равенства числа фермионных и бозонных полей следует рассматривать супералгебры Ли J, порождаемые своей локальной частью при $\dim J_0 = \dim J_{\pm 1}$ и с нечетной системой простых корней. При этом $\mathbb{Z}$-градуировка супералгебры Ли J связана с теми вложениями $sl\,(2)$ в $J_{\bar{0}}$, которые содержатся во вложениях $osp\,(1/2)$ в $J_{\bar{0}} \oplus J_{\bar{1}} = J$. Такие вложения более определенно учитывают структуру J.

Наиболее подробно в обзоре рассмотрены суперсимметричные расширения двумерных обобщенных цепочек Тода, связанные с «суперглавными» вложениями $osp\,(1/2)$ в простые супералгебры Ли. Понятие суперглавного вложения, обобщающее на суперслучай главное вложение $sl(2)$ в простые алгебры Ли [9], было сформулировано и исследовано в работах [6] именно с целью построения супераналогов волновых и эволюционных нелинейных систем.

Авторы глубоко признательны Б. А. Арбузову, А. А. Кириллову, И. М. Кричеверу, П. П. Кулишу, Д. А. Лейтесу, Ю. И. Манину, М. А. Мествиришвили, С. П. Новикову, А. В. Разумову, В. В. Сергановой за полезное обсуждение вопросов, затрагиваемых в обзоре.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

В этом разделе содержатся определения и некоторые результаты теории супералгебр Ли, которые в дальнейшем потребуются в связи с изучением суперсимметричных нелинейных динамических систем. При изложении мы будем в основном следовать работам [4, 6], преследуя цель, с одной стороны, не останавливаясь на тех моментах, без которых мы здесь можем обойтись, максимально приспособить формулировки для понимания основного текста, а с другой — стараясь представить материал в достаточно самосогласованном виде. Никаких оригинальных результатов, помимо имеющихся в [4, 6], здесь не содержится.

Супералгеброй Ли J называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра $J = J_{\bar{0}} \oplus J_{\bar{1}}$ с произведением $[J_\varepsilon, J_{\varepsilon'}] \subset J_{\varepsilon+\varepsilon'}$ (т. е. $[e_\varepsilon, e_{\varepsilon'}] \subset \subset J_{\varepsilon+\varepsilon'} \forall e_\varepsilon \in J_\varepsilon$, $e_{\varepsilon'} \in J_{\varepsilon'}$; $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$), удовлетворяющим условиям перестановочности $[e_\varepsilon, e_{\varepsilon'}] = -(-1)^{\varepsilon\varepsilon'}[e_{\varepsilon'}, e_\varepsilon]$ и тождеству Якоби

$$(-1)^{\varepsilon\varepsilon'}[[e_\varepsilon, e_{\varepsilon'}]\, e_{\varepsilon''}] + (-1)^{\varepsilon'\varepsilon''} \times$$
$$\times [[e_{\varepsilon'}, e_{\varepsilon''}]\, e_\varepsilon] + (-1)^{\varepsilon\varepsilon''}[[e_{\varepsilon''}, e_\varepsilon]\, e_{\varepsilon'}] = 0$$

для любых элементов e_ε базиса J_ε. При этом произведение $[\,,\,]$ естественно задать формулой $[e_\varepsilon, e_{\varepsilon'}] = e_\varepsilon e_{\varepsilon'} - (-1)^{\varepsilon'} e_{\varepsilon'} e_\varepsilon$. Элементы $J_{\bar 0}$ называются четными, а $J_{\bar 1}$ — нечетными, т. е. степень однородности e_ε есть ε, $\deg e_\varepsilon = \varepsilon$. $\mathbb{Z}$-градуировка супералгебры Ли J, т. е. $J = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} J_m$, $[J_m, J_n] \subset J_{m+n}$, $\dim J_m < \infty$, согласована с ее $\mathbb{Z}_2$-градуировкой, если $J_{\bar 0} = \oplus J_{2m}$, $J_{\bar 1} = \oplus J_{2m+1}$.

В дальнейшем в основном рассматриваются классические супералгебры Ли, т. е. простые (не содержащие нетривиальных идеалов), для которых представление $J_{\bar 0}$ на $J_{\bar 1}$ вполне приводимо. Для их описания используется конструкция, связанная с контрагредиентными супералгебрами Ли [4].

Пусть k — $r \times r$-матрица с элементами из алгебраически замкнутого поля $\mathcal{A}$ характеристики 0, а I_0 — поднабор чисел из $I = \{1, \ldots, r\}$. Обозначим J_0 и $J_{\pm 1}$ векторные пространства над $\mathcal{A}$ с базисами $\{h_i\}$ и $\{y_{\pm i}\}$, $i \in I$, соответственно удовлетворяющие соотношениям

$$[h_i, h_j] = 0,\ [h_i, y_{\pm j}] = \pm k_{ji} y_{\pm j},\ [y_{+i}, y_{-j}] = \delta_{ij} h_i, \tag{1}$$

$$\deg h_i = \bar 0,\quad \deg y_{\pm i} = \begin{cases} \bar 0 & \\ & \text{для } i \\ \bar 1 & \end{cases} \begin{matrix} \notin I_0 \\ \\ \in I_0 \end{matrix}.$$

Эти соотношения определяют структуру суперпространства $\hat J(k, I_0) \equiv J_{-1} \oplus J_0 \oplus J_{+1}$, являющегося локальной частью некой минимальной $\mathbb{Z}$-градуированной супералгебры Ли $J(k, I_0)$. Последняя называется контрагредиентной супералгеброй Ли с матрицей Картана k ранга r. Если $I_0 = \varnothing$, то мы имеем дело с «обычной» алгеброй Ли; если $I_0 = I$, то $\mathbb{Z}$-градуировка J согласована с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой и в этом случае элементы $y_{\pm j}$ будем обозначать $Y_{\pm j}$. Контрагредиентные супералгебры Ли $J(k, I_0)$ и $J(k', I_0')$ изоморфны, если (k', I_0') может быть получено из (k, I_0) перенумеровкой индексов и $k' = k \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r)$, $d_i \in \mathcal{A}^*$. Поэтому будем считать, что если при некотором i $k_{ii} \neq 0$, то $k_{ii} = 2$, а если $k_{ii} = 0$, то ненулевые элементы i-го столбца минимальны по абсолютному значению. Так как если k разложима,

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},\ \text{то } J(k, I_0) = J(k_1, I_0^{(1)}) \oplus J(k_2, I_0^{(2)}).$$

Поэтому будем рассматривать только неразложимые матрицы Картана. При этом для простых супералгебр Ли $J(k, I_0)$ система (1) дополняется соотношениями типа Серра

$$\underbrace{[y_{\pm i}[y_{\pm i}[\ldots[y_{\pm i}}_{1-l_{ji}}, y_{\pm j}]\ldots]]] \equiv (\operatorname{ad} y_{\pm i})^{1-l_{ji}} y_{\pm j} = 0,\quad i \neq j,\ \text{если } k_{ii} \neq 0. \tag{2}$$

Здесь матрица l получается из k заменой в последней всех ненулевых элементов в столбцах с нулем на диагонали на — 1. Очевидно, что для алгебр Ли ($I_0 = \varnothing$) матрицы k и l совпадают.

Центр C супералгебры J (k, I_0) образован элементами $\sum\limits_i m_i h_i$, где числа m_i удовлетворяют $\sum\limits_i k_{ji} m_i = 0$.

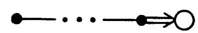
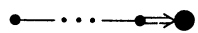
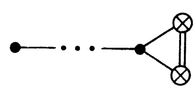
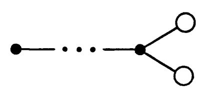
Линейные функции α_i на J_0, определенные соотношениями $\alpha_i\,(h_j) = k_{ij}$, будем называть простыми корнями J (k, I_0), а функции $\alpha = \Sigma\alpha_{i_s}$, которым отвечают ненулевые кратные коммутаторы $[y_{\pm i_p}\,[y_{\pm i_{p-1}}\,[\ldots\,[y_{\pm i_2},\ y_{\pm i_1}]\ldots]]]$, образующие базис подпространства $J_{\pm p}$, корнями J (k, I_0). При этом имеет место корневое разложение $J = J_0 \oplus (\oplus\ J_\alpha)$. Совокупность R (S) всех (простых) корней J называется системой (простых) корней, причем $R = R_0 \bigcup R_1$, где R_0 — корневая система $J_{\bar 0}$ (четные корни), а R_1 — система весов представления $J_{\bar 0}$ в $J_{\bar 1}$ (нечетные корни). Две системы R и R' эквивалентны (как и соответствующие матрицы Картана), если существует автоморфизм $\omega \in \operatorname{aut} J$, такой, что $\omega\,(y_{\pm\alpha_i}) = y_{\pm\alpha'_i}$, $\omega\,(h_{\pm\alpha_i}) = h_{\pm\alpha'_i}$.

Для того чтобы описать все (с точностью до изоморфизма) простые контрагредиентные супералгебры Ли J (k, I_0), удобно воспользоваться обобщением диаграмм Дынкина — Кокстера на суперслучай. Отметим сразу же, что здесь изоморфным супералгебрам отвечают, вообще говоря, различные диаграммы. Иначе говоря, изоморфные супералгебры J (k, I_0) могут обладать неэквивалентными относительно группы Вейля системами простых корней, которые, однако переводятся друг в друга отражениями из супергруппы Вейля [10]. (Это обстоятельство позволяет получить доказательство полноты системы простых корней.) При этом отражения ω_i относительно корня α_i определяются соотношениями

$$\omega_i\,(\alpha_j) = \alpha_j - k_{ji}\alpha_i,\ \text{если}\ k_{ii} = 2,$$
$$\omega_i\,(\alpha_j) = \alpha_j\ \text{при}\ k_{ji} = 0\ \text{для}\ i \neq j\ \text{и}\ k_{ii} = 0,$$
$$\omega_i\,(\alpha_i) = -\alpha_i\ \text{при}\ k_{ii} = 0,$$
$$\omega_i\,(\alpha_j) = \alpha_i + \alpha_j\ \text{при}\ k_{ji} \neq 0\ \text{для}\ i \neq j\ \text{и}\ k_{ii} = 0.$$

В отличие от диаграмм для простых алгебр Ли, в супералгебрах, помимо вершин ○, отвечающих подалгебре $sl\,(2)$, имеются вершины ⊗ и ●, ассоциируемые с подсупералгебрами $sl\,(1/1)$ и $osp\,(1/2)$ соответственно. Первая трехмерна, нильпотентна и имеет базис h, $Y_\pm$: $[h, Y_\pm] = 0$, $[Y_+, Y_-] = h$, $\deg Y_\pm = \bar 1$, $\{k, I_0\} = \{0, 1\}$; вторая — пятимерна и ее базис образуют $h, Y_\pm$ и $X_\pm = Y^2_\pm$: $[h, Y_\pm] = \pm Y_\pm, [Y_+, Y_-] = h$, $\deg Y_\pm = \bar 1$, $\deg X_\pm = \bar 0$, $\{k, I_0\} = \{2, 1\}$. Таким образом, супералгебра J (k, I_0) изображается диаграммой, состоящей из r вершин ○, ⊗ или ●, причем корню α_i (i-я вершина) приписывается символ ○, если $i \notin I_0$; символ ⊗, если $i \in I_0$, $k_{ii} = 0$; символ ●, если $i \in I_0$ и $k_{ii} = 2$. Вершины i и j соединены

Таблица 1. Простые конечномерные супералгебры Ли J (серии A, B, C, D)

Обозначение Картана	$J_{\bar{0}}$	Диаграмма	Обозначение матричное	r число всех вершин	$P_+ \geqslant 0$	$P_- \geqslant 1$	$P_{\otimes}$ четность числа вершин типа $\otimes$
$A_{m,n}$, $m \neq n$	$A_{m-1} \oplus A_{n-1} \oplus \mathcal{A}$		$sl\,(m/n)$	$m+n-1$	$m-1$	n	—
$A_{m,n}$, $m = n$	$A_{n-1} \oplus A_{n-1}$		$sl\,(n/n)/\{\lambda 1\!\!1_{2n}\}$ $\lambda \in \mathbb{C}$		$n-1$	m	
$B_{m,n}$	$B_m \oplus C_n$		$osp\,(2m+1/2n)$	$m+n$	$m-1$ n	n $m-1$	1 0
					m $n-1$	$n-1$ m	0 1
$C_{m,n}$	$D_m \oplus C_n$		$osp\,(2m/2n)$	$m+n$	m $n-1$	$n-1$ m	0 1
$D_{m,n}$					$m-1$ $n-1$	$n-1$ $m-1$	0 1
					$m-2$ n	n $m-2$	1 0

$\max(|k_{ij}|, |k_{ji}|)$ отрезками и стрелкой, направленной к вершине i, если $|k_{ji}| < |k_{ij}|$.

Принятое правило установления знака k_{ij} по диаграмме следующее. Если $k_{ii} = 2$, то $k_{ji} < 0$; если $k_{ii} = 0$, то $k_{ji} > 0$ в том случае, когда i-я вершина $\otimes$ расположена слева от j-й, и $k_{ji} < 0$ — когда справа. Для вершин же, расположенных вертикально одна над другой, $k_{ij} = k_{ji}$ и $\operatorname{sgn} k_{ji} = -\operatorname{sgn} k_{li}$, где l — номер вершины, соединенной с i-й.

Приведем вначале классификацию конечномерных классических супералгебр Ли. Пусть матрица Картана конечномерной контрагредиентной супералгебры Ли $J(k, I_0)$ удовлетворяет условию того, что для любых $i, j \in I$ существует последовательность $i_1, \ldots, i_t \in I$, при которой

$$k_{ii_1} k_{i_1 i_2} \ldots k_{i_t j} \neq 0.$$

Тогда, в соответствии с теоремой [4], супералгебра $J(k, I_0)/C$ является классической и принадлежит (если $I_0 \neq \varnothing$) к одной из четырех серий $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$ или трех исключительных супералгебр $D(2, 1; \alpha)$, $F(4)$ $(\equiv AB_3)$ и $G(3)$ $(\equiv AG_2)$. ($C \neq \varnothing$ только для $A_{n,n}$, и в этом случае $\dim C = 1$.) Сведения об этих супералгебрах, содержащие добавления, касающиеся некоторых неэквивалентных к приведенным в [4] системам простых корней, даются в виде табл. 1 и 2 из [6].

В таблицах точками $(\cdot)$ обозначена вершина $\otimes$ или $\bigcirc$, а структура поддиаграммы ●—···—● закодирована символами $P_\pm$, $\otimes$ и r. Смысл их следующий. Разобьем ее на схемы ○—···—○—⊗, ⊗ или ○—···—○ слева направо. Тогда P_+ и P_- — число всех вершин во всех четных и нечетных группах схем соответственно. Приведенная для $D(2, 1; \alpha)$ диаграмма отвечает значению $\alpha = 3$.

Стрелками указано действие супергруппы Вейля, переводящее одну диаграмму в другую. В целом все неэквивалентные относительно группы Вейля диаграммы (или системы простых корней) получаются из какой-либо одной соответствующими отражениями относительно простого корня, отвечающего $\otimes$, из супергруппы Вейля.

Уже из приведенных диаграмм видно, что отнюдь не у всех классических супералгебр Ли система простых корней может быть нечетной. Это обстоятельство оказывается весьма существенным при суперсимметризации нелинейных систем.

Прежде чем перейти к бесконечномерным простым супералгебрам конечного роста, введем понятие суперглавного вложения $osp(1/2)$ в конечномерные простые супералгебры Ли [6], обобщающее главное вложение [9] [или главную $sl(2)$ подалгебру] для простых алгебр Ли.

Таблица 2. **Исключительные конечномерные супералгебры Ли**

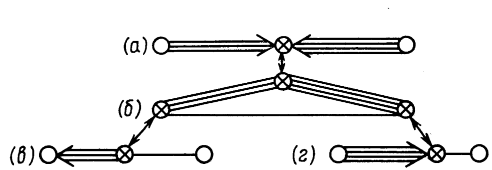
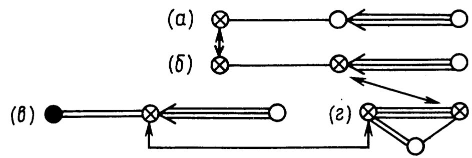
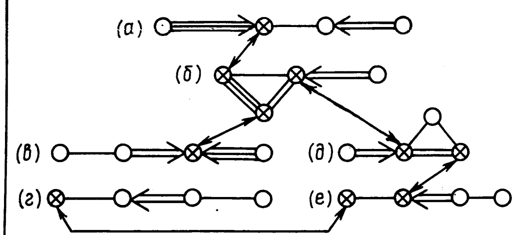
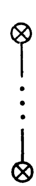
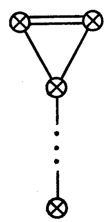
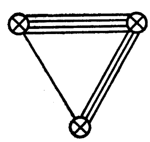
$D(2,\ 1;\ \alpha)$:		$k_{(\mathrm{а})}=\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix},\quad k_{(\mathrm{б})}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -(1+\alpha) \\ 1 & 0 & \alpha \\ -(1+\alpha) & \alpha & 0 \end{pmatrix},$ $k_{(\mathrm{в})}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix},\quad k_{(\mathrm{г})}=\begin{pmatrix} 2 & -(1+\alpha) & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
AG_2:		$k_{(\mathrm{а})}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix},\quad k_{(\mathrm{б})}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$ $k_{(\mathrm{в})}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad k_{(\mathrm{г})}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
AB_3:		$k_{(\mathrm{а})}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},\quad k_{(\mathrm{б})}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$ $k_{(\mathrm{в})}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad k_{(\mathrm{г})}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$ $k_{(\mathrm{д})}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad k_{(\mathrm{е})}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Таблица 3. Простые конечномерные супералгебры Ли, допускающие суперглавное вложение

$sl\,(n/n \pm 1)$	
$osp\,(2n \pm 1/2n)$	
$osp\,(2n/2m)$, $n = m,\ m + 1$	
$D\,(2,\ 1;\ \alpha)$, $\forall \alpha$	
$osp\,(1/2)$	

Именно оно будет в основном нами использоваться в дальнейшем.

Суперглавное вложение osp (1/2) с элементами h, $Y_\pm$, $X_\pm$ в простую супералгебру Ли J определяется как ее каноническая $\mathbb{Z}$-градуировка, осуществляемая картановским элементом $h = \sum c_i^0 h_i$, при которой подпространство J_0 абелево, а базис $J_{\pm 1}$ образован корневыми векторами $Y_{\pm i}$ системы простых нечетных корней ($I_0 = I$), т. е. $[h,\ Y_{\pm i}] = \pm Y_{\pm i}$, откуда $c_i^0 = \sum_j (k^{-1})_{ij}$; $Y_\pm = \sum_i c_i^\pm Y_{\pm i}$; $c_i^+ c_i^- = c_i^0$. Суперглавное вложение существует только для перечисленных в табл. 3 классических супералгебр Ли при указанном выборе системы простых (нечетных) корней [6]. [В ней, как и ранее, для D (2, 1; α) приведена диаграмма при $\alpha = 3$.]

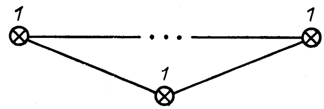
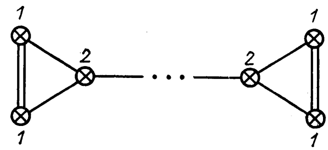
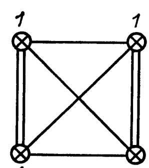
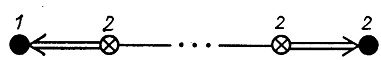
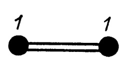
Переходя к бесконечномерным супералгебрам Ли конечного роста (супералгебры Каца — Муди), мы укажем лишь те из них, которые допускают суперглавное вложение osp (1/2) с системой нечетных простых корней. Вычеркивание любой вершины в соответствующих им диаграммах приводит к прямой сумме супералгебр Ли, допускающих суперглавное вложение. (Полный список супералгебр Каца — Муди со всеми неэквивалентными системами простых корней см. в [6].) Они даются табл. 4. В ней числовые отметки суть коэффициенты линейной зависимости строк в матрице Картана.

В заключение этого раздела отметим, что для супералгебр Ли $J = J_{\bar 0} \oplus J_{\bar 1}$ имеет место теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта, согласно которой элементы

$$e_1^{k_1} \dots e_m^{k_m} o_{i_1} \dots o_{i_s},\quad k_i \geqslant 0,$$

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_s \leqslant n,$$

Таблица 4. **Супералгебры Каца — Муди, допускающие суперглавное вложение**

$sl\,(n/n)^{(1)}$, $psq\,(2n+1)^{(2)}$ $r=2n$ $\quad r=2n+1$	
$osp\,(2n+2/2n)^{(1)}$, $sl\,(2n/2n)^{(2)}$ $r=2n+2\,n$ $\quad r=2n+1$	
$D^{(1)}\,(2,\ 1;\ \alpha)$, $\forall\alpha$	 $(\alpha=1)$, $k=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & -(1+\alpha) \\ 1 & 0 & -(1+\alpha) & \alpha \\ \alpha & -(1+\alpha) & 0 & \alpha \\ -(1+\alpha) & \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$osp\,(2n/2n)^{(2)}$, $sl\,(2n+1/2n+1)^{(2)}$ $r=2n$ $\quad r=2n+1$	
$osp\,(2/2)^{(2)}$	, $k=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

образуют базис соответствующей универсальной обертывающей супералгебры. Это позволяет для интересующих нас простых супералгебр Ли J, допускающих суперглавное вложение, построить в пространстве представления J базис типа Верма [11], образованный последовательным действием корневых векторов отрицательных простых корней на старший вектор.

2. СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ И ЗАДАЧА ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Построение суперсимметричных уравнений, связанных с вложениями ***osp*** **(1/2).** Рассмотрим 2/2-мерное супермногообразие с четными $z_\pm$ и нечетными $\theta_\pm$ координатами, снабженное структурой супералгебры Ли J. (Все необходимые обозначения и сведения из теории супералгебр Ли содержатся в разд. 1.) С помощью суперсимметричных ковариантных производных $D_\pm \equiv \partial/\partial\theta_\pm + i\theta_\pm\partial/\partial z_\pm$ и нечетных функций $A_\pm\,(z_+,\ z_-;\ \theta_+,\ \theta_-)$ со значениями в грассмановой оболочке $J\,(\Lambda)$ супералгебры J построим произведение (антикоммутатор) $[D_+ + A_+,\ D + A_-]_+$. Приравнивая его нулю, приходим к суперизованной модификации соотношения типа Маурера — Картана, которое представляет собой тождество ввиду форм-инвариантности относительно калибровочных преобразований $A_\pm \to \hat{g}^{-1}\,(D_\pm + A_\pm)\,\hat{g}$, генерируемых супералгеброй J. Для того чтобы сделать его нетривиальным, т. е. превратить в уравнение, следует сузить инвариантность, наложив некоторые дополнительные условия на $A_\pm$, сохраняющие вместе с тем суперсимметрию и обеспечивающие интегрируемость возникающих нелинейных уравнений. С этой целью в полной аналогии с алгебраической конструкцией двумерных интегрируемых систем [1, 3] снабдим супералгебру J $\mathbb{Z}$-градуировкой и реализуем функции $A_\pm$ в подпространствах $J_{\pm m}$, $m \geqslant 0$, т. е. возьмем $A_\pm = \sum\limits_{0\leqslant m\leqslant m_\pm} E^m_\pm\,(f_\pm)$, где $m_\pm$ — некоторые положительные целые числа. Здесь $E^m_\pm\,(f_\pm) \equiv \sum\limits_{\alpha=1}^{\dim J_{\pm m}} e^\alpha_{\pm m} f^\alpha_{\pm m}\,(z_+,\ z_-;\ \theta_+,\ \theta_-)$ — нечетные функции координат, принимающие значения в подпространствах $J_{\pm m}$ с базисом $e^\alpha_{\pm m}$. В дальнейшем будем считать $\mathbb{Z}$-градуировку $J = \bigoplus\limits_{m\in\mathbb{Z}} J_m$ согласованной с ее $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $J = J_{\bar 0} \oplus J_{\bar 1}$. При этом в разложении $E^{2m}_\pm$ функции $f^\alpha_{\pm 2m}$ являются нечетными (антикоммутирующими), а $f^\alpha_{\pm\,(2m+1)}$ в $E^{2m+1}_\pm$ — четными элементами алгебры Грассмана.

Очевидно, что в силу свойства $[J_0,\ J_m] \subset J_m$ градуировки, возникающее таким образом уравнение

$$\Big[D_+ + \sum_{0\leqslant m\leqslant m_+} E^m_+,\ D_- + \sum_{0\leqslant m\leqslant m_-} E^m_-\Big]_+ = 0 \tag{3}$$

форм-инвариантно только относительно калибровочных преобразований, генерируемых $J_0\,(\Lambda)$, и приводит к нетривиальной нелинейной системе для функций $f^\alpha_{\pm m}$.

Для компактной формулировки интересующих нас уравнений ограничимся случаем $m_+ = m_- = 1$, т. е. сохраним в (3) лишь вклад от локальной части $\hat{J} \equiv J_{-1} \oplus J_0 \oplus J_1$ супералгебры J. Кроме того, будем рассматривать J, содержащие $osp\,(1/2) \equiv \{h,\ X_\pm \equiv Y^2_\pm\}_{\bar 0} \oplus \{Y_\pm\}_{\bar 1}$ в качестве подсупералгебры, картановским элементом которой задается $\mathbb{Z}$-градуировка J. Иначе говоря, будем рассматривать градуировки J, согласованные с вложениями в нее $osp\,(1/2)$. Тогда в калибровке $E^0_- = 0$ с помощью техники, аналогичной [1, 3], получаем

$$[D_+ + \hat{g}_0^{-1} D_+ \hat{g}_0 + Y_+, \ D_- + \hat{g}_0^{-1} Y_- \hat{g}_0]_+ = 0. \tag{4}$$

Здесь $\hat{g}_0 (z_\pm; \theta_\pm)$ — функция на грассмановой оболочке группы Ли G_0 с алгеброй Ли J_0, представимая экспонентой бозонного суперполя $F(z_\pm; \theta_\pm) = F_0(z_\pm) + i\bar{\theta} F_1(z_\pm) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F_2(z_\pm)$ со значениями в $J_0(\Lambda)$, или эквивалентно

$$\hat{g}_0 = g_0 g_\theta, \ g_\theta \equiv \exp\left[i\bar{\theta}\psi(z_\pm) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\Phi(z_\pm)\right]; \tag{5}$$

$g_0(z_\pm)$ — функция на комплексной оболочке G_0; F_0, F_2, Φ — скалярные функции на комплексной оболочке J_0, а F_1 и ψ — двухкомпонентные столбцы майорановских спиноров (с антикоммутирующими значениями) на комплексной оболочке J_0, $\theta \equiv \begin{pmatrix}\theta_+\\ \theta_-\end{pmatrix}$, $\bar{\theta} \equiv (-\theta_-, \theta_+)$, $\psi \equiv \begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}$.

Из представления (4) непосредственно вытекает следующая суперсимметричная система уравнений для элемента $\hat{g}_0$ [12]:

$$D_+(\hat{g}_0^{-1} D_- \hat{g}_0) = [Y_-, \ \hat{g}_0^{-1} Y_+ \hat{g}_0]_+. \tag{6}$$

С учетом (5) имеем ее компонентную форму записи

$$\partial(g_0^{-1}\partial g_0/\partial z_-)/\partial z_+ = [X_-, \ g_0^{-1} X_+ g_0]_- + [\xi_-, \ g_0^{-1}\xi_+ g_0]_- + \\ + [\psi_-, \ [g_0^{-1}\xi_+ g_0, \ Y_-]_-]_+; \tag{7а}$$

$$\partial\xi_\pm/\partial z_\mp = [X_\pm, \ g_0^{\pm 1}\xi_\mp g_0^{\mp 1}]_-, \tag{7б}$$

где $\xi_+ \equiv [g_0\psi_+ g^{-1}_0, \ Y_+]_+$, $\xi_- \equiv [\psi_-, Y_-]_+$, причем $\Phi = \frac{1}{2}[\psi_+, \psi_-]_+ - [Y_-, \ g^{-1}_0 Y_+ g_0]_+$ в силу уравнений движения. Подчеркнем, что по построению число независимых бозонных (из g_0) и фермионных (из ψ) компонент исходного суперполя $F(z_\pm, \theta_\pm)$ одинаково и равно $\dim J_0$, а F_s, $s = 0, 1, 2$, связаны с параметрами g_0 и ψ суперизованной формулой типа Бейкера — Дынкина — Кемпбелла — Хаусдорфа. Естественно, при тривиализации нечетной части ($\xi_\pm = 0$) система (7) сводится к интегрируемому уравнению для элемента g_0 [3], отвечающему целочисленным вложениям $sl(2)$ в алгебру Ли $J_{\bar{0}}$.

При выводе уравнений (6) и (7) мы никоим образом не фиксировали выбор вложения подсупералгебры $osp(1/2)$ в J и тем самым ее градуировку, с ним согласованную. Вместе с тем для получения физических следствий из этих уравнений нужно задать требуемые свойства решений (как, например, регулярность для автодуальных калибровочных систем) различных подклассов (6), связанных с теми или иными вложениями. Построенная в работе [6] классификация вложений $osp(1/2)$ в супералгебры Ли позволяет в явном виде сопоставить каждому такому вложению интегрируемую суперсимметричную систему. В частности, суперглавным вложениям в простые супералгебры Ли (см. разд. 1) отвечают суперсимметричные расширения обобщенных двумерных цепочек Тода, рассматриваемые более подробно в следующем разделе. При этом с конечномерными супералгебрами связаны конечные непериодические цепочки (например, суперсимметричное уравнение Лиувилля). Суперсимметричные расширения периодических цепочек (например, синус-Гордона) порождаются бесконечномерными простыми супералгебрами Ли конечного роста, обладающими такими системами простых корней, что при вычеркивании любого из кружков соответствующей диаграммы Дынкина — Кокстера возникают диаграммы прямой суммы супералгебр Ли, допускающих суперглавное вложение.

Связь с супералгебраическими уравнениями, ассоциируемыми с полуцелочисленными вложениями sl (2) в алгебры Ли. В соответствии с результатом [13] уравнение Маурера — Картана в двумерном пространстве (или представление типа нулевой кривизны), $[\partial/\partial z_+ + A_+,\ \partial/\partial z_- + A_-]_- = 0$, реализуемое операторами $A_\pm = E^0_\pm + E^{1/2}_\pm + E^1_\pm$ в подпространствах $J_0 \oplus J_{\pm 1/2} \oplus J_{\pm 1}$ алгебры Ли J, градуировка которой согласована с полуцелочисленными вложениями в нее подалгебры sl (2), порождает систему

$$\left.\begin{aligned} &\partial(g_0^{-1}\partial g_0/\partial z_-)/\partial z_+ = [X_-,\ g_0^{-1}X_+g_0]_- + [\eta_-,\ g_0^{-1}\eta_+g_0]_-;\\ &\partial\eta_\pm/\partial z_\mp = [X_\pm,\ g_0^{\pm 1}\eta_\mp g_0^{\mp 1}]_-. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

При этом с точностью до калибровки

$$A_+ = g^{-1}_0\partial g_0/\partial z_+ + \eta_+ + X_+,\quad A_- = g^{-1}_0(\eta_- + X_-)\,g_0. \tag{9}$$

Из сравнения уравнений (7) и (8) видно, что они (по форме!) совпадают, если члены $Q \equiv [\psi_-,\ [g^{-1}_0\xi_+ g_0,\ Y_-]_+$ в правой части (7а) равен нулю. Однако, по смыслу, система (7) и супералгебраические уравнения (8) сильно различаются, так как функции $\eta_\pm$ не порождаются, вообще говоря, присоединенным действием g_0 на $Y_\pm$ с $Y^2_\pm = X_\pm$. Иначе говоря, система (7) фактически представляет собой суперсимметричный подкласс таких супералгебраических уравнений, связанный с теми вложениями sl (2) $\equiv [osp\ (1/2)]_{\bar 0}$ в $J_{\bar 0}$, которые содержатся во вложениях osp (1/2) в $J_{\bar 0} \oplus J_{\bar 1}$. Причина этого обусловлена спецификой супералгебр, благодаря чему суперсимметрия обеспечивается отнюдь не для всех даже простых супералгебр и лишь при определенном выборе их системы простых корней, приводящем к суперглавному вложению. Для обычных же простых алгебр Ли всегда имеется главное вложение.

Структуру элемента Q можно прояснить, переписывая его через структурные постоянные локальной части супералгебры J:

$$[e^\alpha_{\varepsilon_1},\ e^\beta_{\varepsilon_2}] = c_{\alpha\beta}^{(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)\,\gamma} e^\gamma_{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\ e_\varepsilon \in J_\varepsilon,\ \varepsilon = 0,\ \pm 1;$$
$$1 \leqslant \alpha,\quad \beta \leqslant \dim J_\varepsilon = \dim J_0$$

и коэффициенты $c_{\pm\alpha}$ разложения $Y_\pm\ (=c_{\pm\alpha}e^\alpha_{\pm1})$ по базису $J_{\pm1}$. (Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.) В параметризации

$$g_0=\exp\left(e^\alpha_0\tau_\alpha(z_+,\ z_-)\right),\quad \psi_\pm=e^\alpha_{\pm1}\psi^\pm_\alpha(z_+,\ z_-)$$

имеем

$$Q=\psi^-_\alpha c^{(0,\ 0)\,\eta}_{\alpha\rho}c^{(1,\ -1)\,\rho}_{\nu\mu}c_{-\mu}c_{+\sigma}\left(\exp\left(-f\right)\right)_{\sigma\gamma}c^{(0,\ +1)\,\nu}_{\beta\gamma}\psi^+_\beta e^\eta_0, \tag{10}$$

где $f_{\alpha\gamma}\equiv c^{(0,+1)\gamma}_{\beta\alpha}\tau_\beta$. Очевидно, что равенство $Q=0$ выполняется тождественно в случае абелевой J_0 (так как $c^{(0,\ 0)\eta}_{\alpha\rho}=0$), тогда как для других вложений оно не столь тривиально. Естественно также, что коэффициенты $c_{\pm\alpha}$, полностью определяя вложение, задают (с точностью до преобразований Вейля) и структурные постоянные $c^{(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)\gamma}_{\alpha\rho}$, входящие в (10).

Интегрирование суперсимметричных уравнений, связанных с конечномерными супералгебрами. Для системы (6), как и в четном случае [3], может быть получено решение задачи их интегрирования по начальным данным, т.е. решение Коши во всем 2/2-мерном пространстве восстанавливается по значениям функций и их первым производным на некотором контуре в суперпространстве. Это удается сделать в случае, когда соответствующая супералгебра Ли конечномерна, так как в противном случае элементы подпространств $J_{\pm m}$, $m\geqslant 1$, вообще говоря, нельзя экспоненциировать.

Ввиду того что функции $A_\pm=\hat g^{-1}D_\pm\hat g$, где $\hat g\ (z_\pm;\ \theta_\pm)$ — элементы грассмановой оболочки супергруппы Ли G с супералгеброй Ли J, из (4) имеем

$$\hat g_0Y_+\hat g_0^{-1}=(\hat g')^{-1}D_+\hat g'; \tag{11a}$$

$$\hat g_0^{-1}Y_-\hat g_0=\hat g^{-1}D_-\hat g, \tag{11б}$$

где $\hat g'\equiv\hat g\hat g^{-1}_0$.

Рассмотрим в пространстве представления супералгебры J вектор $|\,0\rangle$, аннигилируемый под действием всех элементов подпространств J_{+m}, $m>0$, и аналогично вектор $\langle 0\,|$, подчиняющийся условию $\langle 0\,|\,J_{-m}=0$, $m>0$. Тогда вектор $\hat g'\ (z^1_+,\ z^2_-;\ \theta^1_+,\ \theta^2_-)\,|\,0\rangle$ согласно (11а) не зависит от z^1_+, θ^1_+, в то время как благодаря (11б) вектор $\langle 0\,|\,\hat g^{-1}\,(z^2_+,\ z^1_-;\ \theta^2_+,\ \theta^1_-)$ не зависит от переменных z^1_-, θ^1_-. Поэтому матричный элемент

$$\langle 0\,|\,\hat g^{-1}(z^2_+,\ z^1_-;\ \theta^2_+,\ \theta^1_-)\,\hat g\,(z^1_+,\ z^2_-;\ \theta^1_+,\ \theta^2_-)\,\hat g^{-1}_0\,(z^1_+,\ z^2_-;\ \theta^1_+\theta^2_-,)\,|\,0\rangle$$

не зависит ни от z^1_+, θ^1_+, ни от z^1_-, θ^1_- и, следовательно, равен $\langle 0\,|\,\hat g^{-1}_0\,(z^2_+,\ z^2_-;\ \theta^2_+,\ \theta^2_-)\,|\,0\rangle$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\langle 0\,|\,\hat g_0^{-1}\,(C)\,|\,0\rangle=\langle 0\,|\,\hat g^{-1}\,(A)\,\hat g\,(B)\,\hat g_0^{-1}\,(B)\,|\,0\rangle, \tag{12}$$

связывающему матричные элементы групповых структур в трех различных «точках» A $(z_+^2, z_-^1; \theta_+^2, \theta_-^1)$, B $(z_+^1, z_-^2; \theta_+^1, \theta_-^2)$ и C $(z_+^2, z_-^2; \theta_+^2, \theta_-^2)$ суперплоскости, причем первые две расположены на пересекающихся в точке C характеристиках $(z_-, \theta_-) = \text{const}$ и $(z_+, \theta_+) = \text{const}$. Соединим точки A и B некоторым контуром в суперпространстве. Тогда в полной аналогии с двумерным (обычным) случаем [3] соотношение (12) связывает решение нашей системы (6) в произвольной точке C 2/2-мерного суперпространства с начальными данными на произвольно заданном в нем контуре.

Некоторые замечания. В этом пункте мы на нескольких моментах еще раз проследим некоторые существенные отличия суперсимметричных нелинейных систем от представлений в двумерном (четном) случае и кратко обсудим обобщение развитых выше методов для $N > 1$-суперсимметричных расширений. Еще раз подчеркнем, что до сих пор речь шла именно об $N = 1$-расширениях.

Во-первых, возможность суперсимметричного расширения двумерных нелинейных систем связана с наличием у соответствующих супералгебр суперглавных $osp\,(1/2)$ подсупералгебр. Последнее (см. разд. 1) имеет место отнюдь не для всех супералгебр Ли и при вполне определенном выборе системы простых (нечетных) корней. Поэтому, в отличие от обычного (четного) случая, когда каждая простая алгебра Ли обладает главной $sl\,(2)$ подалгеброй и соответствующей цепочкой Тода, для суперизованного расширения это не имеет место.

Напомним также, что одной и той же простой супералгебре Ли может соответствовать несколько неэквивалентных систем простых корней и соответственно матриц Картана или диаграмм Дынкина — Кокстера. В этом — кардинальное отличие от случая обычных алгебр Ли!

Второе отличие мы проиллюстрируем на примере уравнений Лиувилля ($\varepsilon = 1$) и синус-Гордона ($\varepsilon = 0$):

$$\partial^2\rho/\partial z_+\,\partial z_- = U\,(2\rho),$$
$$U\,(\rho) \equiv (\varepsilon + 1)\exp\rho + (\varepsilon - 1)\exp(-\rho),$$

и их суперсимметричных расширений

$$\partial^2\rho/\partial z_+\,\partial z_- = U\,(2\rho) + U\,(\rho)\,\psi^+\psi^-,$$
$$\partial\psi^\pm/\partial z_\mp = \psi^\mp\,\partial U/\partial\rho.$$

Первые связаны с алгебрами A_1 $(sl\,(2))$ и $\widetilde{A}_1$, причем последняя, будучи конечного роста, реализуется в вырожденном представлении на базисе $sl\,(2)$. Вместе с тем суперсимметричное расширение уравнения синус-Гордона, связанное с бесконечномерной супералгеброй $osp\,(2/2)^{(2)}$ конечного роста, реализуется в вырожденном представлении не в базисе $osp\,(1/2)$ супералгебры, которая порождает суперсимметричное уравнение Лиувилля, а в базисе $sl\,(1/2)$ с диаграммой $\otimes$———$\otimes$. Для n-компонентных уравнений (суперсимметричных цепочек Тода) имеем аналогичную картину, связанную с супералгебрами $sl\,(n/n+1)$ и $osp\,(2/2n)^{(2)}$.

Специфические особенности супералгебр Ли проявляются и в процедуре интегрирования соответствующих суперсимметричных уравнений, которая следует из развитых в [1—3] алгеброгрупповых методов. По аналогичным приведенному выше примеру причинам уже в простейшем случае суперсимметричного уравнения Лиувилля нельзя [3] в отличие от обычного (несуперизованного) уравнения восстановить решения ρ и $\psi^{\pm}$ исходя только из функции, реализующей старший вектор неприводимого представления супералгебры. Это обусловлено, в частности, тем, что пространство представления содержит наряду с четными также нечетные векторы. Более наглядно мы проследим это на примере суперсимметризованных цепочек Тода.

В заключение раздела укажем, как построить $N>1$-суперсимметричные расширения двумерных нелинейных систем в суперпространстве с двумя четными ($z_{\pm}$) и $2N$ нечетными ($\theta_{\pm\alpha}$, $1\leqslant\alpha\leqslant N$) координатами. С этой целью удобно в случае $N=2n$ перейти от $\theta_{\pm\alpha}$, $1\leqslant\alpha\leqslant 2n$, к переменным $\theta_j^{\pm}$ и $\bar\theta_j^{\pm}$, $1\leqslant j\leqslant n$, и ввести следующие ковариантные суперсимметричные производные:

$$D_{\pm j}=\partial/\partial\bar\theta_j^{\pm}+i\theta_j^{\pm}\partial/\partial z_{\pm},\quad \bar D_{\pm j}=\partial/\partial\theta_j^{\pm}+i\bar\theta_j^{\pm}\partial/\partial z_{\pm},$$

для которых $[D_{\pm j},\ \bar D_{\pm k}]_+=2\delta_{jk}\,\partial/\partial z_{\pm}$. Переход к $N=2n-1$ получается из $N=2n$ стандартной подстановкой $z_{\pm}\to z_{\pm}\mp i\,(\bar\theta^{\pm}\theta^{\pm})$.

Рассмотрим локальную часть $\hat J\equiv J_{-1}\oplus J_0\oplus J_{+1}$ супералгебры $J=\oplus J_m$, $\mathbb{Z}$-градуировка которой индуцирована вложением подсупералгебры J_0, причем J_0 является подалгеброй инвариантности вакуума, $\dim J_0=N$. Следуя общей схеме [6] уравнение (4) заменим системой

$$[D_j+\hat g_{0+}^{-1}D_j\hat g_{0+}+(\hat g_{0-}^{-1}Y_+\hat g_{0-})_j,\ \bar D_{-k}+\hat g_{0-}^{-1}\bar D_{-k}\hat g_{0-}+(\hat g_{0+}^{-1}Y_-\hat g_{0+})_k]_+=0,\qquad(13)$$

где $\hat g_{0\pm}\,(z_{\pm};\ \theta,\ \bar\theta)$ — функции на грассмановой оболочке $G_0\,(\Lambda)$. Эта форма записи симметрична по $\hat g_{0\pm}$ и может подходящим калибровочным преобразованием из $G_0\,(\Lambda)$ быть приведена, как и в случае $N=1$, к системе для одного элемента из $G_0\,(\Lambda)$. Помимо (13) в рассматриваемом случае имеются, вообще говоря, и другие дополнительные к (13) уравнения, содержащие антикоммутаторы элементов A_{+j}, $\bar A_{-j}$ и A_{-j}, $\bar A_{+j}$. Они обеспечивают с учетом калибровочных преобразований из $G_0\,(\Lambda)$ условия неприводимости для «полевых» компонент $\hat g_{0\pm}$ и носят «кинематический» характер. Вместе с тем они необходимы при обобщении на $N>1$ процедуры интегрирования п. 3, обеспечивая необходимые условия грассмановой аналитичности для киральных суперполей $\hat g'\,|\,0\rangle$ и $\langle 0\,|\,\hat g^{-1}$.

В простейших случаях суперрасширений уравнения Лиувилля с $N = 2,4$ данная конструкция воспроизводит (более подробно см. [6]) результаты работы [14], не объясняя, правда, «нефизичность» возникающих при $N > 4$ уравнений, что также содержится в [14].

3. СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДА

Конечные непериодические системы Суперсимметричное расширение двумерной обобщенной цепочки Тода с закрепленными концами связано с суперглавным вложением $osp\,(1/2)$ в классические конечномерные супералгебры Ли J из табл. 3 при приведенном в ней выборе системы простых нечетных корней J. Любой другой выбор простых корней уже не обеспечивает суперсимметрию систем даже для супералгебр, допускающих такое вложение. При этом подалгебра $J_0 = \{h_i\}$ абелева, все элементы $J_{\pm 1} = \{Y_{\pm i}\}$ нечетные, $\dim J_0 = \dim J_{\pm 1} \equiv r \equiv \operatorname{rank} J$, числовые коэффициенты $c_i^{\pm 0}$ в разложениях $h = \sum c_i^0 h_i$, $Y_\pm = \sum c_i^\pm Y_{\pm i}$ фиксированы вложением, именно $c_i^0 = \sum\limits_j (k^{-1})_{ij} = c_i^+ c_i^-$. С учетом этого, параметризуя элемент $\hat{g}_0$ в (6) формулой $\hat{g}_0 \equiv \exp F = \exp \sum\limits_i h_i\,[-\Phi_i\,(z_\pm;\ \theta_\pm) + (k^{-1} \ln c^0)_i]$ с учетом соотношений (1), приходим к искомым уравнениям суперсимметричной цепочки Тода [6, 15]

$$D_+ D_- \Phi_i = \exp\,(k\Phi)_i, \tag{14а}$$

или, эквивалентно ввиду невырожденности k, для $U_i \equiv (k\Phi)_i$,

$$D_+ D_- U_i = \sum_i k_{ij} \exp U_j. \tag{14б}$$

Здесь $\Phi_i\,(z_\pm;\ \theta_\pm)$ — мультиплет бозонных суперполей со значениями в алгебре Грассмана $\Lambda\,(\theta)$, $\Phi_i \equiv \rho_i\,(z_\pm) + i\bar{\theta}\psi_i + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \exp\,(k\rho)_i$; ρ_i — скалярные функции; ψ_i — майорановские спиноры.

При тривиализации нечетных компонент ($\psi_i = 0$) система (14) сводится к уравнениям для двумерных цепочек Тода, ассоциируемых с $J_{\bar{0}}$. Естественно возникает вопрос, неоднократно задававшийся при обсуждениях, почему нельзя считать или называть уравнения (14) суперсимметричным расширением цепочек Тода и при других матрицах Картана классических простых супералгебр Ли помимо списка из табл. 3. Ответ заключается в том, что, во-первых, при этом, ввиду алгебраической структуры соответствующих преобразований, нарушается инвариантность относительно группы суперсимметрии. Во-вторых, что не менее существенно, уравнения перестают быть интегрируемыми.

Для системы (14) может быть построен полный набор характеристических интегралов и их производящая функция [16]. Под характеристическими локальными интегралами для суперсимметричных систем имеются в виду функционально независимые решения системы уравнений

$$D_+W_k^-(\Delta_1^{(-s)}, \ \ldots, \ \Delta_r^{(-s)}) = 0, \ D_-W_k^+(\Delta_1^{(+s)}, \ \ldots, \ \Delta_r^{(+s)}) = 0, \quad (15)$$
$$\Delta_i^{(\pm s)} \equiv D_\pm^s \Phi_i,$$

наличие полного набора $(2r)$ которых обеспечивает интегрируемость соответствующей системы.

Для их нахождения с помощью калибровочного преобразования из $G_0(\Lambda)$ и несущественных переобозначений удобно переписать соотношения (11) для рассматриваемого случая в виде

$$(D_+\hat{g})\,\hat{g}^{-1} = \sum_j (-h_j D_+\Phi_j + Y_{+j}), \ (D_-\hat{g})\,\hat{g}^{-1} = \sum_j Y_{-j} \exp{(k\Phi)_j}. \quad (16)$$

В качестве базиса неприводимого представления J со старшим весом $l(h)$ и размерностью L выберем базис типа Верма. Его векторы определяются выражениями

$$| j_1 \ldots j_p \rangle = Y_{-j_p} \ldots Y_{-j_1} | 0 \rangle, \quad 1 \leqslant j \leqslant r;$$
$$0 \leqslant p \leqslant L-1; \quad | j_1 \ldots j_0 \rangle \equiv | 0 \rangle, \quad (17)$$

с ненулевой нормой. Нам также потребуются следующие очевидные в силу (1) формулы:

$$\left.\begin{aligned} Y_{+j} | j_1 \ldots j_p \rangle &= \sum_{q=1}^{p} (-1)^{p-q} \delta_{j_q j} w_j^q | j_1 \ldots j_p \rangle^{(q)}; \\ h_j | j_1 \ldots j_p \rangle &= w_j^p | j_1 \ldots j_p \rangle; \ w_j^p \equiv l_j - \sum_{q=1}^{p-1} k_{j_q j}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Здесь индекс (q) над вектором означает отсутствие элемента Y_{-j_q} в (17). Если норма $| j_1 \ldots j_p \rangle^{(q)}$ равна нулю, то соответствующий член в правой части верхней формулы (18) отсутствует. В частности, для младшего вектора $(p = L-1)$ $Y_{-j} | j_1 \ldots j_{L-1} \rangle = 0$ для всех j; действие элемента Y_{-j} на $| j_1 \ldots j_p \rangle$ дает вектор $| j_1 \ldots j_p j \rangle$ с $j = j_{p+1}$, т.е. для $| j_1 \ldots j_p j_{p+1} \rangle$, принадлежащего базису, и равно нулю для всех остальных значений j.

Определим теперь матричные элементы

$$f_{j_1 \ldots j_p} \equiv \langle j_1 \ldots j_p | \hat{g} | \rangle, \quad (19)$$

в которых $\hat{g}$ удовлетворяет (16); конкретизация «ket»-вектора $| \ \rangle$ нам не потребуется. Тогда, ковариантно дифференцируя (19) и используя формулы (1) и (18), получаем

$$D_+\left[\exp\left(\Phi-\sum_{q=1}^{p} R_{i_q}\right) f_{j_1\ldots j_p}\right]=$$

$$=(-1)^p \exp\left(\Phi-\sum_{q=1}^{p} R_{j_q}\right)\sum_j f_{j_1\ldots j_p j}; \tag{20а}$$

$$D_- f_{j_1\ldots j_p}=\sum_{q=1}^{p}(-1)^q w^q_{j_q} \exp R_{j_q} f^{(q)}_{j_1\ldots j_p}, \tag{20б}$$

где $R_j \equiv (k\Phi)_j$, $\Phi \equiv (l\Phi)$.

В дальнейшем для простоты ограничимся представлениями, для которых только одно значение j_q отвечает фиксированному q. В этом случае сумма в правой части (20а) содержит лишь один член $f_{j_1}\ldots{}_{j_p j_{p+1}}$ и соответственно в (20б) — член с $f_{j_1}\ldots{}_{j_{p-1}}$.

По аналогии с рассуждениями работы [17] для четного случая вычислим производные $D_p\ldots D_1(\exp\Phi f_0)$ с $D_p\equiv\exp(-R_{j_p})D_+$, $1\leqslant p\leqslant L$, $R_{j_L}\equiv 0$, вплоть до L-го порядка, используя формулу (20а). В силу конечномерности представления J последнее (L-е) дифференцирование обращает это выражение в нуль. Поэтому в результате имеем уравнение

$$D_L\ldots D_1(\exp\Phi f_0)=0, \tag{21}$$

которое эквивалентно переписывается в виде

$$\sum_{k=0}^{L} W^+_k D^k_+ f_0=0,\quad W^+_L\equiv 1. \tag{22}$$

При этом благодаря (20б) $D_- f_0=0$ и $D_- W^+_k=0$, так что величины W^+_k действительно являются характеристическими интегралами [см. (15)], а левая часть (21) представляет собой их производящую функцию. Она является суперсимметричным расширением соответствующей функции четного случая [17]. Аналогично дифференцирование по D_- с учетом уравнений (20б) приводит к оставшимся интегралам W^-_k, для которых $D_+W^-_k=0$.

Исходя из формулы (21) можно получить явный вид этих интегралов. С этой целью введем такие функции V^n_k, $n\geqslant k$, что

$$V^n_0\equiv D_n\ldots D_1\exp x,\quad V^n_k\equiv$$

$$\equiv\sum_{q=k+1}^{n+1} D_n\ldots D_q[\exp(-r_{q-1}-r_{q-2})V^{q-2}_{k-1}],$$

$$1\leqslant k\leqslant n-1,\quad V^n_n\equiv\exp\left(x-\sum_{q=1}^{n-1} r_q\right), \tag{23}$$

причем $D_n \ldots D_q \mid_{q=n+1} \equiv 1$. Здесь x и r_q — четные и зависят от $z_\pm$ и $\theta_\pm$; $r_0 \equiv r_n \equiv 0$. Тогда для интегралов получаем выражение

$$W_k^+ = \exp\left(-\Phi + \sum_{q=1}^{L-1} R_{j_q}\right) V_k^L \Big|_{x=\Phi,\ r_q=R_{j_q}}, \tag{24}$$

где функции V_k^L даются формулами (23). Оно может быть переписано в более наглядной форме через функции $x^{(s_k)} \equiv \Phi - \sum_{q=1}^{s_k-1} R_{j_q} \equiv \equiv \sum_{i=1}^{r} w_i^{s_k}\Phi_i$, $s_0 \equiv L$ и рекуррентные соотношения

$$I_k^{(p)} \equiv D_+ I_k^{(p-1)} + I_k^{(p-1)} D_+ x^{(s_{k-p+1})},\quad 2 \leqslant p \leqslant k,\quad I_k^{(1)} \equiv D_+ x^{(s_k)}.$$

Окончательно имеем

$$W_{L-k}^+ = \sum_{s_1=k}^{L} \sum_{s_2=k-1}^{s_1-1} \ldots \sum_{s_k=1}^{s_{k-1}-1} I_k^{(k)}\left(x^{(s_k)}, \ldots, x^{(s_0)}\right). \tag{25}$$

При этом в силу того, что $\sum_{s=1}^{L} w_i^s \equiv 0$, $W_{L-1}^+ \equiv 0$.

Отметим, что интегралы соответствующей четной задачи ($N = 0$ — обобщенная двумерная цепочка Тода) выражаются аналогичными формулами с учетом очевидной замены $D_\pm \to \partial/\partial z_\pm$.

В качестве иллюстрации приведем явный вид интегралов для суперсимметричного уравнения Лиувилля, связанного с супералгеброй osp (1/2), и цепочки, ассоциируемой с sl (1/2).

$$\underline{osp\ (1/2)}:\ W_0^+ = \overset{(3)}{R} - \overset{(1)}{R}\overset{(2)}{R},\ W_1^+ = W_2^+ = 0,\ W_3^+ = 1;$$

$$\underline{sl\,(1/2)}:\ W_0^+ = 2\left(\overset{(5)}{R}_2 - \overset{(1)}{R}_2\overset{(4)}{R}_1 + 2\overset{(2)}{R}_2\overset{(3)}{R}_2 - 3\overset{(2)}{R}_1\overset{(3)}{R}_2 - \right.$$
$$\left. - 2\overset{(1)}{R}_1\overset{(1)}{R}_2\overset{(3)}{R}_2 + 2\overset{(1)}{R}_2\overset{(2)}{R}{}_1^2 - 2\overset{(1)}{R}_2\overset{(2)}{R}_1\overset{(2)}{R}_2\right),$$
$$W_1^+ = 2\overset{(4)}{R}_2 - \overset{(4)}{R}_1 + 2\overset{(1)}{R}_2\overset{(3)}{R}_1 - \overset{(1)}{R}_1\overset{(3)}{R}_2 + 2\overset{(2)}{R}{}_2^2 + 2\overset{(2)}{R}{}_1^2 -$$
$$- 5\overset{(2)}{R}_1\overset{(2)}{R}_2 + 4\overset{(1)}{R}_1\overset{(1)}{R}_2\overset{(2)}{R}_1 - 4\overset{(1)}{R}_1\overset{(1)}{R}_2\overset{(2)}{R}_2,$$
$$W_2^+ = \overset{(3)}{R}_2 - \overset{(1)}{R}_2\overset{(2)}{R}_1,$$
$$W_3^+ = 3\left(\overset{(2)}{R}_2 - \overset{(2)}{R}_1 - \overset{(1)}{R}_1\overset{(1)}{R}_2\right),$$
$$W_4^+ = 0,\ W_5^+ = 1.$$

Здесь $\overset{(s)}{R}_k \equiv D_+^s R_k$. Напомним, что в рассматриваемом пятимерном представлении sl (1/2) с $k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ имеем $\Phi \equiv 2R_2$, $R_{j_1} \equiv R_{j_3} \equiv \equiv R_1$, $R_{j_2} \equiv R_{j_4} \equiv R_2$.

Периодические системы. Суперсимметричные расширения обобщенной периодической цепочки Тода (в простейшем однокомпонентном случае — уравнение синус-Гордона и Додда — Було) связаны [6] с суперглавными вложениями osp (1/2) в бесконечномерные простые супералгебры Ли $\tilde{J}$ конечного роста из списка в табл. 4. В соответствии с общей конструкцией они представимы в виде

$$D_+D_-V_I = \sum_M \tilde{k}_{IM} \exp V_M, \qquad 1 \leqslant I, \quad M \leqslant R, \tag{26}$$

[ср. с (14б)]. Здесь $\tilde{k}$-матрица Картана такой супералгебры (ранга R), при вычеркивании любой из вершин в диаграмме Дынкина — Коксстера которой получаем диаграмму прямой суммы конечномерных супералгебр из табл. 3, допускающих суперглавное вложение. В частности, без потери общности в качестве вычеркиваемой вершины можно взять ту, которая отвечает минимальному корню $(-m)$ соответствующей конечномерной супералгебры J ранга $r \equiv R - 1$. Рассматриваемые матрицы $\tilde{k}$ имеют одно нулевое собственное значение с левым собственным вектором, обозначаемым ниже t, т.е. $\sum\limits_I t_I\tilde{k}_{IM} = 0$. Поэтому согласно (26) суперполя V_I удовлетворяют соотношению $D_+D_-(\sum\limits_I t_IV_I) = 0$ и с точностью до несущественных переопределений можно положить $\sum\limits_I t_IV_I = 0$, т.е. $V_{r+1} = -\sum\limits_{j=1}^{r} t_jt_{r+1}^{-1}V_j \equiv -(mV)$ $(-m_i$ — коэффициенты разложения минимального корня J по простым корням). Тогда, с учетом невырожденности матрицы k для мультиплета суперполей $\varphi_i \equiv (k^{-1}V)_i$ из (26) в полной аналогии с двумерным (четным) случаем [3] получаем систему r независимых суперсимметричных уравнений

$$D_+D_-\varphi_i = \exp(k\varphi)_i - m_iv_i^{-1} \exp(-mk\varphi), \tag{27}$$

где v_i — элементы диагональной матрицы v, симметризующей k, $vk = k^T v$. Компоненты $A_\pm$ 1-формы Маурера — Картана, порождающие систему (27), могут быть записаны на локальной части супералгебры $\tilde{J}$ в вырожденном ее представлении, реализованном на элементах h_j, $Y_{\pm j}$ и $Y_{\pm m}$ супералгебры J, в виде

$$(D_+\hat{g})\,\hat{g}^{-1} = \sum_j (-h_jD_+\varphi_j + \lambda Y_{+j}) + \lambda Y_{-m}, \tag{28}$$

$$(D_-\hat{g})\,\hat{g}^{-1} = \lambda^{-1} \sum_j Y_{-j} \exp(k\varphi)_j + \lambda^{-1}Y_{+m} \exp(-mk\varphi)$$

[ср. с (16)].

Здесь λ — «спектральный» параметр, играющий, как и для бесконечномерных алгебр Ли конечного роста, роль параметра градуировки, понижающего вырожденность представления,

$$\tilde{J}_{-1}=\lambda^{-1}\{Y_{-j};\ Y_{+m}\},\quad \tilde{J}_0=\{h_j;\ H\equiv[Y_{+m},\ Y_{-m}]\},\quad \tilde{J}_{+1}=\lambda\{Y_{+j};\ Y_{-m}\},$$

которая (вырожденность) сохраняется при этом лишь для H, так как $H=\sum\limits_j h_j m_j v^{-1}_j$. В формулах (28) функция $\hat{g}$ принимает значение, как и в (16), в грассмановой оболочке $G(\Lambda)$ конечномерной супергруппы Ли G с супералгеброй Ли J.

Формулы (28) представляют собой систему уравнений для определения функции $\hat{g}$, такой, что токоподобные величины $(D_\pm\hat{g})\,\hat{g}^{-1}$ разлагаются именно по тем элементам J, которые указаны в правой части (28). Их удобно переписать в базисе (17) в виде уравнений для групповых параметров $\hat{g}$. Поэтому для построения явных выражений для солитонных решений суперсимметричных периодических цепочек Тода могут быть использованы алгебраические методы [18], которые распространяются и на другие вполне интегрируемые эволюционные и волновые уравнения. С тем же успехом они применимы для различных суперсимметричных расширений уравнений Кортевега — де Фриза, его модификаций и других уравнений, также связанных с суперглавными вложениями $osp\,(1/2)$ в супералгебры Каца — Муди из табл. 4 (см. [6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**//ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. Вып. 1. С. 40—91; 1981. Т. 12. Вып. 1. С. 125—161.

2. **Лезнов А. Н., Савельев М. В., Федосеев И. А.**//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. Вып. 1. С. 112—163.

3. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985; Итоги науки и техники. Матем. анализ. М.: ВИНИТИ, 1984. Т. 22. С. 101—136; Acta Appl. Math. 1989.Vol. 12. P. 1—74.

4. **Кас V. G.**//Communs Math. Phys. 1977. Vol. 53. P. 31—53; Adv. Math. 1977. Vol. 26. P. 8—96; 1978. Vol. 30. P. 85—134.

5. **Лейтес Д. А.** Теория супермногообразий. Петрозаводск: Карельское отд. АН СССР, 1984.

6. **Лейтес Д. А., Савельев М. В., Серганова В. В.** Препринт ИФВЭ ОТФ 85-81. Серпухов, 1985; В сб.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1986. Т. 1. С. 377—421; VNU Science Press. Utrecht, 1986. Vol. 1. P. 255—297.

7. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.** Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.

8. **Манин Ю. И.** Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984; **Весс Ю., Беггер Дж.** Суперсимметрия и супергравитация: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.

9. **Дынкин Е. Б.**//Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 1—234. Математ. сб. 1952. Т. 30. С. 349—462.

10. **Серганова В. В.** См. Приложение в [6].

11. **Verma D.-N.**//CMS Summer Seminar on Lie theory and related topics. Univ. of Windsor. Ontario, Canada, 1984.

12. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**//ТМФ. 1984. Т. 61. С. 150—154.

13. **Лезнов А. Н.** Препринт ИФВЭ 83-7. Серпухов, 1983.

14. **Ivanov E. A., Krivonos S. O.**//Lett. Math. Phys. 1983. Vol. 7. P. 523—531.

15. **Saveliev M. V.**//Communs Math. Phys. 1984. Vol. 95. P. 199—216.

16. **Rcheulishvili G. L., Saveliev M. V.**//Phys. Lett. A. 1988. Vol. 130, N 2, P. 69—72.

17. **Leznov A. N.**//Nonlinear Processes in Physics and Turbulence. N.Y.: Gordon and Breach, 1984. P. 443—457.

18. **Лезнов А. Н., Манько В. И., Чумаков С. М.**//Тр. ФИАН. 1986. Т. 167. С. 232—277; **Лезнов А. Н., Манько В. И., Савельев М. В.**//Тр. ФИАН. 1986. Т. 165. С. 65—206.