«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1989, ТОМ 20, ВЫП. 3

УДК 539.1.01

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Ю. В. Чугреев

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Обсуждается общий подход к расчету различных физических эффектов во вращающейся, неинерциальной системе отсчета, основанный на тетрадном формализме наблюдаемых. Показана несостоятельность метода, базирующегося на поиске «истинного» координатного преобразования из инерциальной во вращающуюся систему отсчета. Расчет большинства спецрелятивистских эффектов на центрифуге произведен без каких-либо нерелятивистских ограничений. Показано, как с помощью простейших физических экспериментов на окружности можно установить, покоится ли она в экваториальной плоскости гравитационного источника Керра — Ньюмана в релятивистской теории гравитации или же вращается вокруг оси, проходящей через ее центр.

General Vierbain — based approach for computation of different physical effects in rotating noninertial frame is discussed. It is shown, that method of searching the «truth» coordinate transformation is failed. Calculation of the majority of relativistic effects at the centrifuge has been made without any nonrelativistic restrictions. It has been analysed, how one with the help of simplest physical experiments can distinguish whether a circle being stood in equator plane of Kerr—Newman gravitational source in RTG or being rotated around an axe at its centre.

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени уже известно несколько экспериментов во вращающейся неинерциальной системе отсчета (центрифуге), которым дает объяснение специальная теория относительности (СТО) и которые тем самым подтверждают ее. К таким экспериментам относятся: эффект Саньяка [1] (обзор экспериментов по эффекту Саньяка содержится в [2]), эксперименты по измерению смещения частоты светового луча, испущенного от оси вращения центрифуги [3], эффект удлинения времени жизни элементарных частиц, движущихся по окружности в накопительных кольцах [4], униполярная индукция и др.

Вместе с тем в литературе практически утвердилось положение о том, что объяснение эффектов в неинерциальных системах отсчета (в том числе и вышеназванных) дает не специальная, а общая теория относительности [5—8]. Это утверждение основывается на известном принципе эквивалентности, говорящем о возможности локальной подмены инерции (ускорения) гравитацией (силой). Если же рассмотреть все вышеперечисленные эксперименты более внимательно, что будет сделано и в данной работе, то сразу легко видеть, что ни один из них не является локальным, а имеет конечную протяженность во времени и в пространстве. Физический же эксперимент, происходящий всего в одной мировой точке, вообще не существует как таковой. Поэтому никакой эквивалентности гравитации и инерции не существует, а именно специальная теория относительности дает объяснение этим эффектам. Это хорошо понимал В. А. Фок.

Он писал о различимости инерции и гравитации «в большом» [9]. Таким образом, вопреки широко распространенному убеждению, восходящему еще к Эйнштейну, что в эйнштейновском лифте нельзя различить инерцию и гравитацию, мы видим, что это возможно, так как все эксперименты внутри лифта будут иметь конечную протяженность во времени и в пространстве.

Цель данной работы состоит в том, чтобы строго в рамках СТО рассмотреть описание явлений в неинерциальной, равномерно вращающейся системе отсчета, не накладывая при этом никаких нерелятивистских ограничений. Все рассматриваемые физически измеримые величины (типа времен, частот, длин и т. п.) будут являться релятивистскими инвариантами, что гарантирует независимость их вычисления от произвола в выборе системы отсчета (не путать с независимостью от выбора системы отсчета наблюдателя). Этого можно добиться с помощью тетрадного формализма [10].

В разд. 1 рассматривается преобразование координат, которое обеспечивает переход во вращающуюся систему отсчета. На примерах вычисления энергии частицы, покоящейся на вращающемся диске, энергии и момента импульса самого диска (однородного) показано, что физически реализовать такую вращающуюся систему отсчета можно лишь вплоть до радиуса $r < c\Omega$, где Ω — угловая скорость вращения диска, c — скорость света. Далее показано, что геометрия трехмерного пространства более не является евклидовой (хотя четырехмерная геометрия, конечно, осталась псевдоевклидовой) и кривизна этого пространства при $r \to c/\Omega$ стремится к бесконечности.

В разд. 2 найдены компоненты тетрады, с помощью которых можно переводить координатные значения тензорных величин в их физические значения как в общем виде, так и в конкретном случае наблюдателя, покоящегося относительно центрифуги. Рассматриваются примеры физических а) промежутка времени, б) длины окружности и в) ее радиуса, г) частоты света, д) скорости света в азимутальном направлении, е) частоты вращения, ж) измерения радиуса окружности с помощью световых сигналов, распространяющихся по прямому световоду. В конце найдены компоненты тетрады, позволяющие рассчитывать в инерциальной системе отсчета физически измеримые величины с точки зрения наблюдателя, покоящегося на вращающемся диске. Отмечается, что произвол, содержащийся в преобразовании координат, из физически измеримых величин устраняется.

В разд. 3 производится расчет эффекта Саньяка во временной (задержка лучей) и фазовой (сдвиг интерференционных полос) мерах. Отмечаются причины несогласия наших результатов с аналогичными расчетами работ [2, 11].

В разд. 4 рассмотрен эффект фиолетового смещения частоты света, свободно распространяющегося от оси вращения центрифуги.

В разд. 5 показано, что трехмерной траекторией светового луча во вращающейся системе отсчета является спираль.

В разд. 6 проанализирован эффект замедления скорости хода часов на центрифуге по сравнению с неподвижным наблюдателем.

В разд. 7 указан эффект замедления времени для наблюдателя, находящегося на периферии центрифуги.

В разд. 8 рассмотрен конкретный пример различимости «в большом» гравитационного поля вращающегося заряженного источника в релятивистской теории гравитации и поля инерции вращающейся системы отсчета.

В разд. 9 в нерелятивистском приближении произведен расчет эффекта замедления хода часов, свободно движущихся вдоль радиуса центрифуги.

В разд. 10 в нерелятивистском приближении произведен расчет эффекта замедления времени равномерно движущегося вдоль радиуса центрифуги наблюдателя.

В заключение подводятся основные итоги работы.

1. КООРДИНАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Для проведения расчетов в неинерциальной вращающейся системе отсчета нужно знать соответствующую метрику пространства Минковского. Ее можно получить с помощью преобразования координат, исходя из формы интервала в инерциальной системе отсчета в цилиндрических координатах

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr^2 - r^2\, d\varphi^2 - dz^2. \qquad (1)$$

В силу симметрии задачи преобразованию нужно подвергнуть две координаты t и φ. По определению угловой скорости вращения если при $t_с = 0$ $\varphi_н = \varphi_с = 0$ (индекс «н» означает координаты во вращающейся системе отсчета, а индекс «с» — в инерциальной системе отсчета), то угол $\varphi_н$ будет равен нулю и при $t_с > 0$, если только $\varphi_с = \Omega t_с$:

$$\varphi_н = \varphi_с - \Omega t_с.$$

Время $t_н$ может быть, вообще говоря, произвольной функцией от $t_с$ и $r_с$, а зависимость от $\varphi_с$ и $z_с$ должна быть исключена, так как все углы $\varphi_с$ и все значения $z_с$ должны быть равноправными. Таким образом, наиболее общий вид преобразования координат, связывающего инерциальную и вращающуюся системы отсчета, представляется в форме

$$\left.\begin{aligned} t_c &= \Phi(t_н, r_н); \\ \varphi_c &= \varphi_н + \Omega\Phi(t_н, r_н); \\ r_c &= r_н; \\ z_c &= z_н. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Якобиан этого преобразования $\mathscr{D}(x_c^i)/\mathscr{D}(x_н^i) = \partial\Phi/c\partial t_н \equiv c^{-1} \times \times F(t_н, r_н)$. Необходимым условием взаимно однозначного соответствия $x_c^i \leftrightarrow x_н^i$ является неравенство $F \neq 0$. Вводя обозначения $G(t_н, r_н) \equiv \equiv \partial\Phi/\partial r_н$ и $\beta \equiv \Omega r/c$, а также опуская для простоты в последующих расчетах индекс «н», получаем интервал псевдоевклидова пространства во вращающейся системе отсчета в общем виде *

$$ds^2 = \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k = c^2F^2(1-\beta^2)\,dt^2 - [1 - c^2G^2(1-\beta^2)]\,dr^2 - \\ - r^2\,d\varphi^2 - dz^2 - 2\frac{F\Omega}{c}\,d\varphi c\,dt - 2\Omega G\,d\varphi r^2\,dr + 2cFG(1-\beta^2)\,c\,dt\,dr. \qquad (3)$$

Метрику с верхними индексами представим в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = \gamma^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1-G^2c^2}{F^2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1-\beta^2}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \frac{2\Omega}{Fc}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{c\,\partial t} + \frac{Gc}{F}\frac{\partial}{c\,\partial t}\frac{\partial}{\partial r}. \qquad (4)$$

В (3), (4) Ω и r означают угловую частоту и радиус, измеряемые неподвижным наблюдателем. Как будет показано в следующем разделе, наблюдатель на центрифуге измерит отличные от Ω и r значения.

Следует подчеркнуть, что координата r в выражении (3) не может превзойти значения c/Ω: $r < c/\Omega$, так как в противном случае переменная t теряет смысл времени.

Покажем, что энергия частицы, имеющей массу m_0 и покоящейся на диске, стремится к бесконечности при $r \to c/\Omega$. Расчет проведем в инерциальной системе отсчета, в которой интервал имеет форму (1). 4-Скорость частицы содержит две ненулевые компоненты u^0 и u^φ, связанные друг с другом условием нормировки $g_{ik}u^iu^k = 1$: $(u^0)^2 - - r^2(u^\varphi)^2 = 1$. Отсюда с учетом соотношения $\dot\varphi = cu^\varphi/u^0 = \Omega$ получим, что $u^0 = c(1-\beta^2)^{-1/2}$. Энергия частицы равна

$$P^0 = m_0cu^0 = m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2} \xrightarrow[\beta\to1]{} \infty.$$

Ясно, что и инертная масса M, и момент инерции I самой центрифуги при стремлении ее радиуса к предельно допустимому $r \to c/\Omega$ становятся бесконечными. Предполагая, что распределение вещества такого диска является однородным, найдем связь M и I с массой покоя диска M_0 и соответственно с нерелятивистским значением момента инерции $I_0 = I(\beta = 0)$.

* Латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие 1, 2, 3.

Строгое определение инертной массы гласит:

$$M = \frac{1}{c^2} \int dV \left(T^{00} + t^{00}\right),$$

где T^{ik} — плотность тензора энергии-импульса вещества; t^{ik} — плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля. В рассматриваемом случае гравитационным полем диска, а также внутренней энергией и давлением внутри него можно пренебречь, так как их вклад в M всегда будет подавлен фактором $1/c^2$. В качестве T^{ik} возьмем плотность тензора энергии-импульса идеальной жидкости $T^{ik} = \sqrt{-\gamma}\, \rho_0 \,(u^0)^2$, где $\gamma = \det \gamma_{ik} = -r^2$, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — инвариантная плотность однородного распределения массы. Выразим ρ_0 через M. Как следует из ковариантного уравнения неразрывности, сохраняющаяся плотность массы ρ (плотность массы покоя) связана с ρ_0 соотношением $\rho = \rho_0 u^0 \sqrt{-\gamma}/c$. Поэтому масса покоя однородного диска будет равна

$$M_0 = \int \rho_0 \, dV = 2\pi l c^2 \rho_0 \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)/\Omega^2,$$

где l — толщина диска. С помощью зависимости $\rho_0 = \rho_0\,(M_0)$ легко найти инертную массу однородного диска

$$M = M_0 \frac{\ln \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}-1} \xrightarrow[\beta \to 1]{} \infty.$$

Вычисление момента инерции дает

$$I = \int T^{00} r^2 \, dV = I_0 \frac{\ln \dfrac{1}{1-\beta^2} - \beta^2}{\beta^4} \xrightarrow[\beta \to 1]{} \infty.$$

Наконец, покажем, что при $\beta \to 1$ кривизна эффективного трехмерного пространства стремится к бесконечности. Для этого необходимо сначала получить общий вид эффективной метрики трехмерного пространства. Рассмотрим интервал псевдоевклидова пространства Минковского

$$ds^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k = \gamma_{00} c^2\, dt^2 + 2\gamma_{0\alpha} c\, dt\, dx^\alpha + \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{5}$$

где γ_{ik} — метрический тензор, для которого, по определению, тензор кривизны Римана тождественно равен нулю. Мы можем преобразовать интервал (5) к виду

$$ds^2 = \left(\sqrt{\gamma_{00}}\, c\, dt + \frac{\gamma_{0\alpha}}{\sqrt{\gamma_{00}}}\, dx^\alpha\right)^2 - \left(\frac{\gamma_{0\alpha}\gamma_{0\beta}}{\gamma_{00}} - \gamma_{\alpha\beta}\right) dx^\alpha\, dx^\beta,$$

который совпадает с видом интервала в обычной инерциальной системе отсчета

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 - dl^2.$$

Таким образом, роль физического времени играет величина $d\tau = \sqrt{\gamma_{00}}\,dt + \frac{\gamma_{0\alpha}}{c\sqrt{\gamma_{00}}}dx^{\alpha}$, равная ds/c при $dl = 0$, а роль квадрата физического расстояния — величина

$$dl^2 = \left(\frac{\gamma_{0\alpha}\gamma_{0\beta}}{\gamma_{00}} - \gamma_{\alpha\beta}\right) dx^{\alpha}\, dx^{\beta},$$

равная $-ds^2$ при $d\tau = 0$. Из этих определений ясно, что и $d\tau$, и dl можно измерить, так как они выражаются через абсолютную величину — интервал. Из этого следует также, что экспериментально измеряемой скоростью является величина $dl/d\tau$. Так как для световых сигналов в СТО $ds^2 = 0$, то для них $|\,dl/d\tau\,| = c$. Этот результат означает, что в какой бы системе отсчета — инерциальной или неинерциальной — экспериментатор не измерял скорость света, ее локальное значение везде по абсолютной величине постоянно и равно c. В случае инерциальной системы отсчета величина $d\tau$ является полным дифференциалом, и можно говорить о глобальном постоянстве физической скорости света. В то же время координатная скорость света dx^{α}/dt может иметь любое значение, за исключением нуля и бесконечности.

Вычислим теперь тензор кривизны трехмерного пространства с метрическим тензором $\varkappa_{\alpha\beta} = \gamma_{0\alpha}\gamma_{0\beta}/\gamma_{00} - \gamma_{\alpha\beta}$. Подставляя сюда $\gamma_{0\alpha}$, γ_{00} и $\gamma_{\alpha\beta}$ из (3), получаем, что $\varkappa_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left(1, \frac{r^2}{1-\beta^2}, 1\right)$. В этом случае тензор кривизны имеет всего одну независимую, отличную от нуля компоненту $R^{(3)}_{r\varphi r\varphi} = 3\beta^2/(1-\beta^2)^3$. Это, в свою очередь, приводит к расходящимся при $\beta \to 1$ значениям инварианта квадрата кривизны

$$\overset{(3)}{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{(3)}{R}{}^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{18\beta^4}{r^4(1-\beta^2)^4} \xrightarrow[\beta\to 1]{} \infty$$

и соответственно скаляра Риччи

$$\overset{(3)}{R} = \frac{3\beta^2}{r^2(1-\beta^2)^2} \xrightarrow[\beta\to 1]{} \infty.$$

Таким образом, все эти результаты означают, что вращающаяся система отсчета с $\Omega r \geqslant c$ не может быть реализована в принципе, точно так же, как нельзя заставить частицу двигаться со сверхсветовой физической скоростью.

2. ФИЗИЧЕСКИ ИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Метрика (3) содержит произвольные функции F и G. В то же время очевидно, что все физические измеримые величины не должны зависеть от этого произвола. Можно было бы думать, что все сводится к нахождению «правильных» значений $F(r, t)$ и $G(r, t)$. Такой подход содержится в работе [2], где выбрано $F = (1-\beta^2)^{-1/3}$ и $G = t\Omega r^2 c^{-2} \times \times (1-\beta^2)^{-3/2}$, на том основании, что именно таким преобразованием связаны координаты двух инерциальных систем отсчета, одна из которых мгновенно сопутствует вращающемуся диску, а другая покоится относительно его оси вращения. Другие «истинные» координатные преобразования предлагались в работах [12—15]. В этом подходе подразумевается, что соответствующие координатные значения тензорных величин и будут физически измеримыми. Как мы покажем далее, этот подход неверен и дело заключается не в выборе «правильного» значения $\Phi(r, t)$. Физически измеримые величины позволяет найти тетрадный формализм [10], к изложению которого мы и переходим.

В предыдущем разделе было установлено, что физически измеримое время $d\tau$ является линейной комбинацией координатного времени dt и координатных дифференциалов dx^α, причем коэффициенты этой линейной комбинации построены из компонент метрического тензора. Квадрат физически измеримого расстояния dl^2 является квадратичной формой координатных дифференциалов. Тогда, считая $c\,d\tau$ нулевой компонентой измеряемого дифференциала dX^i, а dl^2 — квадратичной формой из его пространственных компонент, имеем

$$dX^{\bar{i}} = \lambda_j^{\bar{i}}\, dx^j,$$

где $\lambda_j^{\bar{i}}$ — некоторые базисные векторы, зависящие от метрики. В литературе $\lambda_j^{\bar{i}}$ называют тетрадой. Для определения этой величины используется факт диагональности интервала в физически измеримых дифференциалах

$$ds^2 = \gamma_{\bar{i}\bar{k}}\, dX^{\bar{i}}\, dX^{\bar{k}} = \lambda_l^{\bar{i}}\lambda_m^{\bar{k}}\, dx^l\, dx^m = \gamma_{lm}\, dx^l\, dx^m.$$

Отсюда

$$\gamma_{lm} = \lambda_l^{\bar{i}}\lambda_m^{\bar{k}}\gamma_{\bar{i}\bar{k}}, \tag{6}$$

где $\gamma_{\bar{i}\bar{k}}$ — диагональная метрика, в частности, в цилиндрических координатах равная $\gamma_{\bar{i}\bar{k}} = \operatorname{diag}(1, -1, -r^2, -1)$. Из (6) следует, что для определения 16 компонент базисных векторов $\lambda_k^{\bar{i}}$ имеется только 10 уравнений. Как их найти? Вспоминая, что связь физического времени $d\tau$ с координатными величинами dx^i есть

$$d\tau = \sqrt{\gamma_{00}}\, dt + \frac{\gamma_{0\alpha}}{c\sqrt{\gamma_{00}}}\, dx^\alpha = \frac{1}{c}\,\lambda_i^{\bar{0}}\, dx^i,$$

получаем

$$\lambda_i^{\bar{0}} = \frac{\gamma_{0i}}{\sqrt{\gamma_{00}}}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda_0^{\bar{1}})^2 + r^2(\lambda_0^{\bar{2}})^2 + (\lambda_0^{\bar{3}})^2 = 0;\\
&\lambda_0^{\bar{1}}\lambda_\alpha^{\bar{1}} + r^2\lambda_0^{\bar{2}}\lambda_\alpha^{\bar{2}} + \lambda_0^{\bar{3}}\lambda_\alpha^{\bar{3}} = 0;\\
&-\varkappa_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha^{\bar{\mu}}\lambda_\beta^{\bar{\nu}}\gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из первого уравнения следует

$$\lambda_0^{\bar{\alpha}} = 0, \tag{9}$$

тогда второе уравнение выполняется тождественно. Поэтому для определения оставшихся девяти компонент $\lambda_\beta^{\bar{\alpha}}$ имеем шесть уравнений

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha^{\bar{\mu}} \lambda_\beta^{\bar{\nu}} \gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}. \tag{10}$$

Система (10) является квадратичной по $\lambda_\alpha^{\bar{\mu}}$, поэтому подсчет числа уравнений и числа неизвестных еще ничего не говорит о числе их решений. Для определения $\lambda_\alpha^{\bar{\mu}}$ поступим следующим образом: Рассмотрим покоящийся отрезок, ориентированный вдоль какой-либо оси, например первой. Так как в этом случае $dx^2 = d\varphi = 0$ и $dx^3 = dz = 0$, то квадрат его длины можно записать в виде

$$(dX^{\bar{1}})^2 = dl^2 = \varkappa_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta.$$

Учитывая, что $dX^{\bar{1}} = \lambda_1^{\bar{1}}\, dx^1$ при $dx^2 = dx^3 = 0$, получаем $\lambda_1^{\bar{1}} = \sqrt{\varkappa_{11}}$. Ориентируя измеряемый отрезок вдоль остальных осей, найдем, что

$$\lambda_\alpha^{\bar{\alpha}} = \sqrt{\varkappa_{\alpha\alpha}} \text{ (суммирования по } \alpha \text{ нет).} \tag{11}$$

Тогда оставшиеся 6 компонент $\lambda_\beta^{\bar{\alpha}}$ будут удовлетворять шести уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
& r^2 (\lambda_1^{\bar{2}})^2 + (\lambda_1^{\bar{3}})^2 = 0;\\
& (\lambda_2^{\bar{1}})^2 + (\lambda_2^{\bar{3}})^2 = 0;\\
& (\lambda_3^{\bar{1}})^2 + r^2 (\lambda_3^{\bar{2}})^2 = 0;\\
& \lambda_1^{\bar{1}}\lambda_2^{\bar{1}} + r^2 \lambda_1^{\bar{2}}\lambda_2^{\bar{2}} + \lambda_1^{\bar{3}}\lambda_2^{\bar{3}} = 0;\\
& \lambda_1^{\bar{1}}\lambda_3^{\bar{1}} + r^2 \lambda_1^{\bar{2}}\lambda_3^{\bar{2}} + \lambda_1^{\bar{3}}\lambda_3^{\bar{3}} = 0;\\
& \lambda_2^{\bar{1}}\lambda_3^{\bar{1}} + r^2 \lambda_2^{\bar{2}}\lambda_3^{\bar{2}} + \lambda_2^{\bar{3}}\lambda_3^{\bar{3}} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В последних трех уравнениях мы воспользовались диагональностью матрицы $\varkappa_{\alpha\beta}$ для метрики (3). Легко видеть, что единственное решение системы (12) тривиально:

$$\lambda_\beta^{\bar{\alpha}} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{13}$$

Таким образом, все компоненты $\lambda_k^{\bar{i}}$ определены. Как уже отмечалось, физические время и расстояние, являющиеся локальным 4-вектором, связаны с координатными дифференциалами dt и dx^α соотношением $dX^{\bar{i}} = \lambda_j^{\bar{i}}\, dx^j$. Из фундаментальности понятий пространства и времени следует, что эта связь имеет не частный, а общий характер, являясь законом, по которому координатному 4-вектору A^i сопоставляется физический 4-вектор $A^{\bar{j}} = \lambda_i^{\bar{j}} A^i$. Обобщение этого закона на случай тензора произвольного ранга не составляет труда: пусть тензор $Q^{lm\ldots n}$ является координатным, тогда компоненты физически измеримого тензора $Q^{\bar{l}\bar{m}\ldots\bar{n}}$ могут быть получены по закону $Q^{\bar{l}\bar{m}\ldots\bar{n}} = \lambda_i^{\bar{l}}\lambda_k^{\bar{m}} \ldots \lambda_p^{\bar{n}} Q^{ik\ldots p}$. Из этого определения видно, что все физически измеримые величины являются релятивистскими скалярами относительно преобразований координат, что гарантирует независимость результата их вычисления от произвола в выборе для расчета той или иной системы координат.

Для метрики (3) по формулам (7), (9), (11), (13) находим отличные от нуля компоненты тетрады во вращающейся системе отсчета:

$$\lambda_0^{\bar{0}} = F\sqrt{1-\beta^2}, \quad \lambda_\varphi^{\bar{0}} = -\frac{\Omega r^2}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \lambda_r^{\bar{0}} = cG\sqrt{1-\beta^2},$$
$$\lambda_\varphi^{\bar{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \lambda_r^{\bar{r}} = \lambda_z^{\bar{z}} = 1. \tag{14}$$

Рассмотрим примеры физически измеримых величин и их связи с координатными величинами. Координата z для всех процессов полагается равной нулю.

а) Физически измеримое время ΔT, соответствующее некоторому координатному промежутку Δt, измеряемое неподвижным относительно центрифуги наблюдателем:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\int \lambda_i^{\bar{0}}\,dx^i\Big|_{d\varphi=dr=0} = F\sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t. \tag{15}$$

б) Длина окружности (одновременная):

$$l = r\int \lambda_i^{\bar{\varphi}}\,dx^i\Big|_{dt=dr=0} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1-\beta^2}} > 2\pi r.$$

в) Радиус окружности (одновременной):

$$R = \int \lambda_i^{\bar{r}}\,dx^i\Big|_{dt=d\varphi=0} = r. \tag{16}$$

г) Если по кругу, концентрическому к оси вращения, распространяется монохроматическая электромагнитная волна с четырехмерным волновым вектором $k_i = (k_0, 0, k_\varphi, 0)$, то ее физически измеримой частотой в системе вращающегося диска будет величина

$$\omega = cg^{ij}\lambda_i^{\bar{0}}k_j = \frac{ck_0}{F\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{17}$$

д) Принципиально, что, несмотря на анизотропию координатной скорости света в азимутальном направлении

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\left(\frac{c}{r} \mp \Omega\right)F,$$

в чем легко убедиться, используя уравнение $ds^2 = 0$, модули физической скорости света $r\lambda_i^{\varphi}\, dx^i/\lambda_j^{\bar 0}\, dx^j$ в направлении вращения и против него совпадают и равны c, что фактически уже было показано, когда вводились понятия о физических времени и расстоянии $d\tau$ и $d\mathrm{l}$. Отметим, что, следуя идеологии работы [2], модули скорости света, измеряемой на вращающемся диске, в этих двух направлениях не совпадают друг с другом и равны $c\sqrt{1\pm\beta}/\sqrt{1\mp\beta}$. В настоящее время планируется эксперимент по проверке изотропии скорости света в восточном и западном направлениях, точность которого будет достаточна, чтобы зарегистрировать относительную анизотропию скорости света порядка $\beta_\oplus = \Omega_\oplus r_\oplus/c = 1{,}6\cdot 10^{-7}$ [16].

е) Частоту обращения Ω_0, измеряемую покоящимся на центрифуге наблюдателем, естественно определить по периоду физического времени T_1, за которое он совершает относительно инерциальной системы отсчета полный оборот $\Omega_0 = 2\pi/T_1$. Учитывая, что $F = \partial\Phi/\partial t$, а также то, что полный оборот совершается по часам наблюдателя в инерциальной системе отсчета за время $2\pi/\Omega$, находим T_1:

$$T_1 = \frac{1}{c}\int \lambda_i^{\bar 0}\, dx^i\Big|_{dr=d\varphi=0} = \sqrt{1-\beta^2}\int F\,dt =$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\int\limits_0^{2\pi/\Omega} d\Phi = \sqrt{1-\beta^2}\,2\pi/\Omega.$$

Следовательно,

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2 r^2/c^2}}\,. \tag{18}$$

ж) Рассмотрим измерение радиуса центрифуги с помощью световых сигналов, распространяющихся прямолинейно вдоль световода от наблюдателя, находящегося на периферии центрифуги, до ее оси вращения и обратно. Если физическое время такого процесса обозначить T_2, то естественно определить измеряемый таким способом радиус как $R_0 = cT_2/2$.

Рассмотрим распространение луча. Найдем сначала зависимость радиальной координаты от (координатного) времени. Так как для радиальных траекторий (луч распространяется по световоду, так как его свободная траектория во вращающейся системе отсчета не является прямой линией, см. разд. 5) $d\varphi = 0$, то

$$\frac{dr}{dt} = \pm\frac{cF\sqrt{1-\beta^2}}{1\mp cG}\,. \tag{19}$$

Нам нужно найти физическое время полного распространения луча при изменении радиальной координаты от r до нуля и обратно до r.

Поэтому

$$T_2=\frac{1}{c}\int\lambda_i^{\bar 0}\,dx^i=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{c}\int d\Phi(r,\ t(r))=$$

$$=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{c}\left(\int\limits_r^0\frac{d\Phi(r,\ t(r))}{dr}\,dr+\int\limits_0^r\frac{d\Phi(r,\ t(r))}{dr}\,dr\right)=\frac{2\sqrt{1-\beta^2}}{\Omega}\arcsin\beta.$$

Таким образом,

$$R_0=\frac{c}{\Omega}\sqrt{1-\beta^2}\arcsin\beta.$$

Отсюда и из (18) следует, что при $\beta\to 0$ величины r, Ω совпадают с R_0, Ω_0, тогда как при $\beta\to 1$ получаем

$$\frac{\Omega}{\Omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\to\infty,\quad \frac{R_0}{r}=\sqrt{1-\beta^2}\arcsin\beta\to 0,$$

$$\frac{\Omega_0R_0}{\Omega r}=\frac{\arcsin\beta}{\beta}\to\pi/2.$$

Отсюда следует, что «скорость» Ω_0R_0 ограничена сверху числом, большим, чем c: $\Omega_0R_0<\frac{\pi}{2}c$. Это не должно нас смущать, поскольку величина Ω_0R_0 не есть истинная физическая скорость какого-либо объекта. Приведем также формулы, связывающие Ω, r с Ω_0, R_0:

$$\beta=\sin\beta_0,$$
$$\Omega=\Omega_0\cos\beta_0,\quad \beta_0\equiv\Omega_0R_0/c.$$
$$r=\frac{c}{\Omega_0}\operatorname{tg}\beta_0.$$

В заключение этого раздела рассмотрим компоненты тетрады в инерциальной системе отсчета, позволяющие рассчитывать в ней физические величины, которые измеряются наблюдателем на вращающемся диске. По определению, $\lambda_j^{\bar i}$ является относительно координатных преобразований ковариантным тензором 1 ранга:

$$(\lambda_j^{\bar i})_{\text{н}}=\frac{\partial x_{\text{с}}^k}{\partial x_{\text{н}}^j}(\lambda_k^{\bar i})_{\text{с}}.$$

Для обратного к (2) преобразования имеем [теперь индекс «н» отвечает индексу «с» в (2), и наоборот]:

$$\frac{\partial x_{\text{с}}^k}{\partial x_{\text{н}}^j}=\begin{pmatrix}\frac{1}{F} & -\frac{Gc}{F} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\Omega & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Поэтому отличными от нуля компонентами $(\lambda_j^{\bar{i}})_{\text{н}}$ будут следующие:

$$\left.\begin{array}{c}(\lambda_0^{\bar{0}})_{\text{н}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\;(\lambda_0^{\bar{\varphi}})_{\text{н}}=-\dfrac{\Omega}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\;(\lambda_\varphi^{\bar{0}})_{\text{н}}=-\dfrac{\beta r}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\\ (\lambda_\varphi^{\bar{\varphi}})_{\text{н}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\;(\lambda_r^{\bar{r}})_{\text{н}}=(\lambda_z^{\bar{z}})_{\text{н}}=1.\end{array}\right\}\quad(20)$$

Характерно, что компоненты $(\lambda_j^{\bar{i}})_{\text{н}}$ (20) не зависят от G и F. Поэтому в силу того, что метрика (1) не содержит F и G, все рассчитанные с помощью (20) физические величины также не будут зависеть от G и F, поскольку, как отмечалось, при преобразованиях координат физические величины являются скалярами. Поэтому у нас есть право в последующих расчетах отказаться от использования довольно громоздкой метрики (3) и выбрать ее простейший вариант $F=1$, $G=0$. Такое преобразование рассматривалось ранее в [17, 18]. Однако в целях наглядности в дальнейшем будет, как правило, использоваться именно общая метрика (3). В заключение отметим, что предлагаемый в [2] выбор функции $\Phi = t\,(1-\beta^2)^{-1/2}$ является лишь частным и необязательным.

3. ЭФФЕКТ САНЬЯКА

Опишем опыт Саньяка. На диске по углам четырехугольника расположены зеркала. Углы их взаимного расположения таковы, что луч света от монохроматического источника, отражаясь от зеркал, совершает замкнутый цикл и возвращается к источнику. С помощью полупрозрачной пластинки луч от источника можно разделить на два луча, движущихся в противоположных направлениях этого замкнутого цикла. Саньяк обнаружил, что если привести диск во вращение, то луч, для которого направление обхода совпадает с направлением вращения, придет к источнику позднее, чем луч, для которого оно противоположно, результатом чего является сдвиг интерференционных полос на фотопластинке. При изменении вращения на обратное интерференционные полосы смещались в противоположном направлении. Задержка лучей, очевидно, должна быть пропорциональна нечетной степени угловой скорости вращения системы отсчета и тем самым позволяет установить, находится ли данная система отсчета в состоянии вращения или нет. Поэтому интерферометр Саньяка, также как маятник Фуко, униполярная индукция и др.,— это детектор абсолютного ускорения системы отсчета относительно всей совокупности инерциальных систем отсчета. При этом, находясь в лифте Эйнштейна, с помощью различных акселерометров (в том числе и интерферометра Саньяка) можно установить природу этого ускорения [2].

Для простоты рассмотрим круговую траекторию распространения лучей в опыте Саньяка, чему соответствует случай бесконечного числа зеркал или же наличие идеального кругового световода с показателем преломления $n=1$. Пометим индексом «+» луч, распространяющийся в направлении вращения, а индексом «—» — луч в противоположном направлении. Используя равенство нулю интервала (3), находим координатные скорости этих лучей

$$d\varphi_\pm/dt = -\omega F \pm cF/r.$$

С учетом начальных условий $\varphi_+(0) = 0$, $\varphi_-(2) = 2\pi$ получаем

$$\varphi_+(t) = \frac{cFt}{r}(1-\beta),$$

$$\varphi_-(t) = 2\pi - \frac{cFt}{r}(1+\beta).$$

Так как источник остается в точке $\varphi = 0$, то координатный момент встречи t_+ «+»-луча с ним находится из условия $\varphi_+(t_+) - 2\pi = 0$:

$$t_+ = 2\pi r/Fc\,(1-\beta).$$

Аналогично момент встречи «—»-луча с источником равен

$$t_- = 2\pi r/Fc\,(1+\beta).$$

По формуле (15) находим задержку «+»-луча по сравнению с «—»-лучом, измеряемую на вращающемся диске:

$$\Delta\tau = F(1-\beta^2)(t_+ - t_-) = \frac{4\pi\Omega r^2}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{21}$$

что представляет собой точное значение эффекта Саньяка во временной мере. Результат (21) не зависит от F и G, и все параметры, входящие в него, экспериментально измеримы. При $\beta \ll 1$ имеем

$$\Delta\tau \simeq \frac{4\pi\Omega r^2}{c^2} = \frac{4\Omega S}{c^2},$$

где S — площадь, охватываемая траекторией световых лучей.

Выражая Ω и r через Ω_0 и R_0, можно получить следующее соотношение для времени задержки:

$$\Delta\tau = \frac{4\pi}{\Omega_0}\operatorname{tg}^2\beta_0.$$

Этот результат может быть получен и другим путем — с помощью вычислений, основанных на интервале, записанном сразу в координатах $\{ct, R_0, \varphi, z\}$:

$$ds^2 = \cos^2\beta_0 c^2\,dt^2 - \frac{2c^2\sin^2\beta_0}{\Omega_0\cos\beta_0}\,dt\,d\varphi - \frac{c^2}{\Omega_0^2}\operatorname{tg}^2\beta_0\,d\varphi^2 - \frac{dR_0^2}{(1-\beta_0\operatorname{tg}\beta_0)^2} - dz^2.$$

На основе (21) можно перейти от эффекта Саньяка во временной мере к его значению в фазовой мере, т. е. к сдвигу интерференционных полос по сравнению со случаем $\Omega = 0$. Для этого обычно (в нерелятивистском приближении) умножают величину эффекта во временной мере на частоту света. Так как сдвиг полос является физически измеримой величиной, то он должен описываться релятивистским скаляром. Используя этот факт и результат в нерелятивистском приближении, мы заключаем, что точное значение эффекта Саньяка в фазовой мере получается умножением (21) на физическую частоту света ω. Таким образом, сдвиг полос Z должен быть равным

$$Z = \frac{4\pi\omega\Omega r^2}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \underset{\beta\ll 1}{\simeq} \frac{4\Omega S\omega}{c^2}. \tag{22}$$

В нерелятивистском приближении формула (22) подтверждена с точностью порядка 0,1 % [2]. Таким образом, мы видим, что объяснение эффекта Саньяка, вопреки утверждениям работы [16], не привело к допущению сверхсветовых скоростей. Скорость света равна точно c.

Результат [22] может быть получен и непосредственно расчетом инварианта разности фаз «+»- и «—»-лучей:

$$Z = \left(\oint k_i dx^i\right) - \left(\oint k_i dx^i\right)^*, \tag{23}$$

где $k_i^{\pm} = (k_0^{\pm}, 0, k_\varphi^{\pm}, 0)$ — их четырехмерные волновые векторы. Найдем связь $k_0^{\pm}$ с $k_\varphi^{\pm}$. На основании равенства нулю длины 4-векторов $k_i^{\pm}$: $g^{ij}k_i^{\pm}k_j^{\pm} = 0$, используя (4), получаем

$$k_\varphi^{\pm} = \pm\frac{k_0^{\pm} r}{F(1\pm\beta)}. \tag{24}$$

Так как в опыте Саньяка «+»- и «—»-лучи получаются из одного луча источника путем разделения на два, поэтому частоты этих лучей должны быть одинаковы: $k_0^+ = k_0^- = k_0$. Из (17) следует, что в этом случае равны и физические частоты $\omega^+ = \omega^-$. Таким образом, разность фаз лучей в точке расположения источника в момент времени t равна

$$Z = ck_0t + k_\varphi^-(-2\pi) - ck_0t - k_\varphi^+(2\pi) = (|k_\varphi^-| - |k_\varphi^+|)\,2\pi = \frac{4\pi k_0 r^2\Omega}{c^2F(1-\beta^2)}. \tag{25}$$

Выражая с помощью (17) k_0 через физическую частоту света, получим окончательно

$$Z = \frac{4\pi\Omega r^2\omega}{c^2\sqrt{1-\beta^2}},$$

что совпадает с (22). Отметим, что в работе [11] приведено выражение для Z, в котором степень фактора $(1-\beta^2)$ в знаменателе равна не 1/2, а единице. Ошибка авторов [11] состоит в том, что при выводе величины Z использовались координатное значение частоты ck_0 и значение $\gamma = 1$. Ясно также, что полученный в [11] результат F — зависим.

Относительно невысокая точность в экспериментах оригинального саньяковского типа практически не оставляет надежд на исследование этого эффекта в релятивистской области. Однако после создания кольцевых лазеров [19] (теория этих установок излагается, например, в [20]), луч света в которых движется по замкнутой траектории, формируемой несколькими зеркалами, между которыми располагаются элементы с активной средой, появилась возможность для проведения модифицированного эффекта Саньяка с более высокой точностью. Суть этого эксперимента состоит в том, чтобы путем электрооптического прецизионного сдвига частот «+»- и «—»-лучей в кольцевом лазере, вращающемся подобно интерферометру Саньяка, добиться выполнения условия $|k_\varphi^+| = |k_\varphi^-|$. В этом случае моды объемного резонатора лазера для «+» и «—» электромагнитных полей одинаковы. Частота биений «+»- и «—»-пучков сейчас измеряется с точностью $10^{-10}\,\Omega_\oplus$, где $\Omega_\oplus = 7{,}5\cdot 10^{-5}$ — угловая частота вращения Земли, а значение β для таких установок порядка 10^{-12}.

На основании (17) и (24) находим, что в данном случае

$$\omega_+ (1 - \beta) = \omega_- (1 + \beta).$$

Это соотношение совпадает с полученным в [11]. Следует отметить, что и в экспериментах подобного типа регистрация квадратичных по β членов проблематична.

Выше для описания процесса распространения света везде использовалось приближение геометрической (лучевой) оптики [21], которое не позволяет учесть ряд важных характеристик реального эксперимента: ширину пучка, неидеальность зеркал и световодов, дисперсию и т. д. Влияние этих факторов можно аккуратно оценить, если распространение света описывать с помощью уравнений Максвелла. Вместе с тем представляется, что релятивистская зависимость эффекта Саньяка от параметра $\Omega r/c$ может быть правильно установлена и на основе приближения геометрической оптики. Именно эта зависимость и представляет для нас интерес в данной работе.

4. ЭФФЕКТ ИЗМЕНЕНИЯ ЧАСТОТЫ СВЕТА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Другим важным типом экспериментов на вращающемся диске является измерение эффекта сдвига частоты света при его свободном распространении от оси вращения. В этом случае фотоны движутся относительно инерциальной системы отсчета прямолинейно и равномерно. В данной системе их энергия и импульс сохраняются. Обозначим эти величины как $\widetilde{k}^0$ и $\widetilde{k}^r$ соответственно ($\widetilde{k}^\varphi = \widetilde{k}^z = 0$), причем $\widetilde{k}^0 = \widetilde{k}^z$. Преобразовав 4-вектор $\widetilde{k}^i$ во вращающуюся систему отсчета, получим

$$k^0 = \frac{1 - Gc}{F}\widetilde{k}_0; \quad k^r = \widetilde{k}^0; \quad k^\varphi = -\Omega \widetilde{k}^0.$$

Таким образом, физически измеримая частота света будет равна

$$\omega = c\lambda_i^0 k^i = \tilde{k}^0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Еще проще этот результат получить, находясь непосредственно в инерциальной системе отсчета. С помощью (20) находим

$$\omega = c\,(\lambda_i^0)_{\text{н}}\, \tilde{k}^i = \tilde{k}^0/\sqrt{1-\beta^2}.$$

Следовательно, в силу постоянства $\tilde{k}^0$ относительный сдвиг частоты света, измеряемый на радиусе r, по сравнению с частотой света, испущенного на оси вращения, равен

$$\frac{\omega(r)-\omega(0)}{\omega(0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \underset{\beta \ll 1}{\simeq} \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}. \tag{26}$$

Эффект (26) был проверен экспериментально с помощью эффекта Мессбауэра с точностью 10^{-4} [3].

5. ЭФФЕКТ ОТКЛОНЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ТРАЕКТОРИИ ЛУЧА СВЕТА ОТ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Как уже отмечалось, нулевые геодезические, являющиеся мировыми линиями световых лучей, есть прямые линии в инерциальной системе отсчета. Во вращающейся системе отсчета траекторией свободного светового луча прямая уже не является. Чтобы это продемонстрировать, найдем зависимость $\varphi = \varphi(r)$, используя основное уравнение $ds^2 = 0$, где ds^2 задано в (3). Так как движение происходит в плоскости $z = 0$, из (3) получаем

$$c^2F^2(1-\beta^2)\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 - [1-c^2G^2(1-\beta^2)] - r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 -$$
$$-2\frac{F\Omega r^2}{c}\frac{d\varphi}{dr}\frac{c\,dt}{dr} - 2G\Omega r^2\frac{d\varphi}{dr} + 2GF(1-\beta^2)\,c\frac{dt}{dr} = 0. \tag{27}$$

Вспоминая, что в инерциальной системе отсчета уравнение, определяющее зависимость $r_c(t_c)$, имеет простейшую форму

$$r_c(t_c) = ct_c,$$

находим, что

$$dt/dr = (1 - Gc)/cF. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27), получаем, что траекторией свободного распространения луча во вращающейся системе отсчета является спираль

$$\varphi = -\frac{\Omega}{c}r + \varphi_0, \quad \varphi_0 = \text{const}.$$

Так как $r < c/\Omega$, то максимальный угол, на который световой луч может отклониться от прямой линии, равен одному радиану ($\sim 57°$).

6. ЭФФЕКТ ЗАМЕДЛЕНИЯ СКОРОСТИ ХОДА ЧАСОВ НА ЦЕНТРИФУГЕ ПО ОТНОШЕНИЮ К НЕПОДВИЖНОМУ НАБЛЮДАТЕЛЮ

Как следует из (17), период совершения одного оборота центрифуги, измеренный неподвижным в инерциальной системе отсчета наблюдателем, в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз больше, чем период, измеряемый сопутствующим наблюдателем. Обозначим эти периоды T_1' и T_1 соответственно.

Тогда

$$\frac{T_1'-T_1}{T_1'}=1-\sqrt{1-\beta^2}\simeq\frac{1}{2}\beta^2. \tag{29}$$

Этот эффект легко может быть реализован. При достаточно большом значении T_1 вклады в отклонение T_1 от T_1' за время достижения центрифугой заданной угловой скорости и, в конце, за время обратного процесса могут быть сделаны пренебрежимо малыми.

Существует и более изящная версия эффекта (29), где использовался ускоритель с мюонными накопительными кольцами [4]. «Удлинение» времени жизни релятивистского мюона с $1/\sqrt{1-\beta^2}=29{,}3$ было подтверждено с точностью 0,1 %. В данном случае роль центрифуги играло магнитное поле.

7. ЭФФЕКТ ЗАМЕДЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ДЛЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ПОКОЯЩЕГОСЯ НА ПЕРИФЕРИИ ЦЕНТРИФУГИ

Рассмотрим двух наблюдателей на центрифуге, находящихся на радиусах r_1 и r_2 соответственно. Их скорости относительно центрифуги равны нулю. Какие временные промежутки зарегистрируют часы этих наблюдателей за некоторое время T по часам инерциальной системы отсчета? Из (18) следует, что $T_{1,2}=\sqrt{1-\beta_{1,2}^2}\,T$, где $\beta_{1,2}=\Omega r_{1,2}/c$. Таким образом, относительное замедление хода часов наблюдателя, находящегося на периферии центрифуги, равно

$$\frac{T_1-T_2}{1/2\,(T_1+T_2)}=\frac{2\left(\sqrt{1-\beta_2^2}-\sqrt{1-\beta_2^2}\right)}{\sqrt{1-\beta_1^2}+\sqrt{1-\beta_2^2}}\simeq\frac{1}{2}\beta_2^2-\frac{1}{2}\beta_1^2.$$

8. НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ГРАВИТАЦИИ КЕРРА — НЬЮМАНА В РТГ

В этом разделе мы рассмотрим реализацию отмечавшейся во введении возможности различения [гравитационного или инерционного (кинематического)] происхождения ускорения. В обзоре [2] упоминались достаточно очевидные ситуации, когда это можно сделать внутренними средствами. Если эйнштейновский лифт покоится на поверхности (невращающейся) Земли, то внутри него силовые линии гравитационного поля направлены к центру Земли. Если же лифт равномерно ускоряется, то соответствующие силовые линии «инерции» параллельны. Они также становятся радиально сходящимися, если поместить лифт на центрифугу, но в этом случае наблюдатель сможет зарегистрировать силу Кориолиса и тем самым установить природу ускорения. Можно думать, что если теперь взять вращающийся источник гравитационного поля, то вне источника гравитационное поле успешно может быть заменено соответствующим полем инерции вращающейся системы отсчета. В частности, необходимые условия для этого выполнены — в обоих случаях силовые линии сходятся к центру, сила Кориолиса отлична от нуля, а соответствующие метрики стационарны и аксиально-симметричны. Однако выбор и в данном случае может быть сделан. Аксиальная симметрия диктует простейшую постановку задачи: как, находясь на окружности и не выходя за нее, установить, покоится ли она в экваториальной плоскости гравитационного источника типа Керра — Ньюмана или же вращается вместе с неинерциальной системой отсчета? Если инерция эквивалентна гравитации локально, в какой-либо точке окружности, то в силу аксиальной симметрии она будет эквивалентна и на всей этой окружности.

Итак, рассмотрим, как можно установить неэквивалентность метрики (3) (выберем для простоты $F = 1$, $G = 0$, а также планковскую систему единиц, где скорость света и гравитационная постоянная равны единице) и метрики, описывающей внешнее аксиально-симметричное решение для вращающегося заряженного тела в релятивистской теории гравитации [22].

Запишем внешнее аксиально-симметричное решение вращающегося заряженного тела в РТГ (электровакуумное) [23, 24]:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = {} & \left(1 - \frac{2mr^* - q^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{2a \sin^2\theta\,(2mr^* - q^2)}{\rho^2}\, dt\, d\varphi_0 - \\
& - \frac{2a^2 \sin^2\theta\,(q^2 - m^2)(2mr^* - q^2)}{\Delta\rho^2 (\Delta + m^2 - q^2)}\, dt\, dR + \frac{2a \sin^2\theta\,(q^2 - m^2)\Lambda}{\rho^2\Delta(\Delta + m^2 - q^2)}\, dR\, d\varphi_0 - \\
& - \left(\frac{\rho^2}{\Delta} + \frac{a^2}{\rho^2}\frac{\sin^2\theta\,(q^2 - m^2)\Lambda}{\Delta^2(\Delta + m^2 - q^2)^2}\right) dR^2 - \rho^2\, d\theta^2 - \frac{\Lambda \sin^2\theta}{\rho^2}\, d\varphi_0^2.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Контравариантную метрику запишем в виде

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = {} & \frac{\Lambda}{\rho^2\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \frac{2a(2mr^* - q^2)}{\rho^2\Delta}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\varphi_0} - \\
& - \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^2 + \frac{2a(m^2 - q^2)}{\rho^2(\Delta + m^2 - q^2)}\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial}{\partial\varphi_0} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - \\
& - \left(\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} - \frac{2a^2}{\rho^2(\Delta + m^2 - q^2)} + \frac{\Delta a^2}{\rho^2(\Delta + m^2 - q^2)^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\right)^2.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
\rho^2 = (r^*)^2 + a^2\cos^2\theta, \quad r^* = R + m; \\
\Delta = (r^*)^2 - 2mr^* + a^2 + q^2, \quad m^2 > a^2 + q^2; \\
\Lambda = ((r^*)^2 + a^2)^2 - a^2\,\Delta\sin^2\theta,
\end{gathered}
$$

m, a, q — масса, удельный момент инерции и заряд тела соответственно. Координаты t, R, θ, φ_0 являются сфероидальными координатами пространства Минковского с метрикой

$$\mathrm{diag}\left(1,\ -\frac{R^2+a^2\cos^2\theta}{R^2+a^2},\ -R^2-a^2\cos^2\theta,\ -(R^2+a^2)\cos^2\theta\right).$$

То, что источник заряжен, конечно, сразу можно обнаружить по его электромагнитному полю [23]

$$F_{ik}\,dx^i\wedge dx^k=-2q\rho^{-4}\left((r^*)^2-a^2\cos^2\theta\right)dR\wedge(dt-a\sin^2\theta\,d\varphi_0)-$$
$$-2ar^*\cos\theta\sin\theta\,d\theta\wedge\left(a\,dt-((r^*)^2+a^2)\,d\varphi_0-\frac{((r^*)^2+a^2)\,a\,(q^2-m^2)\,dR}{\Delta\,(\Delta+m^2-q^2)}\right), \tag{32}$$

однако в дальнейшем для большей свободы в подгонке гравитационного поля (30) под поле инерции (3) заряд будет сохранен.

Для рассматриваемой задачи $\theta=\pi/2$ (экваториальная плоскость) и, следовательно, связь сфероидальных координат пространства Минковского R, φ_0 с цилиндрическими координатами этого же пространства r, φ есть

$$R=\sqrt{r^2-a^2},\quad \varphi_0=\varphi.$$

Поэтому на окружности эффективные метрики (3), (30) можно представить в виде

$$ds_1^2=(1-\Omega^2r^2)\,dt^2-2\Omega r^2\,d\varphi\,dt-r^2\,d\varphi^2; \tag{33}$$

$$ds_2^2=\frac{R^2-m^2-q^2}{(R+m)^2}\,dt^2-\frac{2a\,(2mR+2m^2-q^2)}{(R+m)^2}\,d\varphi\,dt-$$
$$-\left[(R+m)^2+\frac{a^2\,(R^2+4mR+m^2-q^2)}{(R+m)^2}\right]d\varphi^2. \tag{34}$$

Рассмотрим вначале «наивную» эквивалентность метрик (33), (34). Попробуем для каждого данного r подобрать параметры m, a, q так, чтобы соответствующие метрические коэффициенты в (33), (34) были равны друг другу. Однако с помощью (33) невозможно смоделировать (34), так как в (33) всего один параметр (Ω), а в (34) их три (m, a, q). Оказывается, что справедливо и обратное утверждение — нельзя подобрать m, a, q так, чтобы метрика (34) перешла бы в (33). Так, приравнивая 00- и 0φ-компоненты этих метрик, получаем, что

$$a=\Omega^{-1}. \tag{35}$$

Масса m будет в этом случае удовлетворять уравнению

$$m^2+\frac{m}{\Omega}\sqrt{1-\beta^2}-q^2-r^2\sqrt{1-\beta^2}=0, \tag{36}$$

корни которого действительны. Если же приравнять $\varphi\varphi$-метрические коэффициенты (33), (34), то с помощью (35), (36) найдем

$$(m\Omega+\sqrt{1-\beta^2})^2=-1,$$

которое показывает, что наивная подгонка метрики Керра — Ньюмана в РТГ под метрику вращения, вопреки ожиданиям, невозможна.

Как подобную неэквивалентность может установить экспериментатор, проводящий на этом кольце различные опыты? Для ответа на этот вопрос проанализируем следующие эксперименты: а) измерение длины окружности; б) измерение времен распространения световых лучей вдоль окружности в двух противоположных направлениях; в) эффект Саньяка во временной мере; г) измерение разности частот этих лучей при условии совпадения их волновых чисел в кольцевом лазере. Выпишем, следуя второму и третьему разделам, окончательные формулы для перечисленных эффектов в общем виде и подставим значения метрических коэффициентов (33), (34):

а) Длина окружности

$$l = 2\pi \sqrt{-g_{\varphi\varphi} + g_{0\varphi}^2/g_{00}}. \tag{37}$$

Для метрик (33), (34) получаем

$$l = 2\pi r/\sqrt{1-\Omega^2 r^2} \text{ (ср. п. б разд. 2)}; \tag{37а}$$

$$l = 2\pi\left(\sqrt{r^2-a^2}+m\right)\sqrt{\frac{r^2-m^2+q^2}{r^2-m^2-a^2+q^2}}. \tag{37б}$$

При $r \to (m^2+a^2-q^2)^{1/2}$ (эргосфера) длина (37б) стремится к бесконечности, а при $r \to \Omega^{-1}$ к бесконечности стремится (37а). Как уже отмечалось, частица не может покоиться относительно вращающейся системы отсчета при $r > \Omega^{-1}$, поэтому поверхность $\Omega r = 1$ ($\gamma_{00} = 0$) является пределом стационарности. Аналогичной поверхностью керра-ньюмановского источника является эргосфера.

б) Время распространения лучей вдоль окружности. Следуя разд. 3, можно показать, что интервалы собственного времени $\tau_\pm$ равны

$$\tau_\pm = \frac{-2\pi g_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{0\varphi}^2/g_{00}-g_{\varphi\varphi}} \pm g_{0\varphi}/\sqrt{g_{00}}}. \tag{38}$$

в) Эффект Саньяка. Из (38) находим

$$\Delta\tau = \tau_+ - \tau_- = \frac{-4\pi g_{0\varphi}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{39}$$

Сравнивая (37) — (39), замечаем, что

$$\tau_\pm = l \pm \Delta\tau/2.$$

Таким образом, независимыми среди этих физически измеримых величин являются лишь две, например, l и $\Delta\tau$. Для метрик (33), (34) находим

$$\Delta\tau = \frac{4\pi\Omega r^2}{\sqrt{1-\Omega^2 r^2}} \text{ [ср. с (21)]}; \tag{39а}$$

$$\Delta\tau = \frac{4\pi a\left[2m\left(2m+\sqrt{r^2-a^2}\right)-q^2\right]}{\left(\sqrt{r^2-a^2}+m\right)\sqrt{r^2-m^2+q^2-a^2}}. \tag{39б}$$

При стремлении r к предельной поверхности стационарности величины эффекта Саньяка (39) стремятся к бесконечности.

г) Частота биений в кольцевом лазере (модифицированный эффект Саньяка). Обобщая формулы разд. 3, после некоторых вычислений находим отношение физических частот «+»-и «—»-лучей в этом случае ($|k_\varphi^+| = |k_\varphi^-|$):

$$\frac{\omega^+}{\omega^-} = \frac{k_0^+}{k_0^-}\,\frac{\sqrt{(g^{0\varphi})^2 - g^{00}g^{\varphi\varphi}} - g^{0\varphi} - g^{\varphi\varphi}g_{0\varphi}/g_{00}}{\sqrt{(g^{0\varphi})^2 - g^{00}g^{\varphi\varphi}} + g^{0\varphi} + g^{\varphi\varphi}g_{0\varphi}/g_{00}}, \tag{40}$$

где

$$\frac{k_0^+}{k_0^-} = \frac{\sqrt{(g^{0\varphi})^2 - g^{00}g^{\varphi\varphi}} - g^{0\varphi}}{\sqrt{(g^{0\varphi})^2 - g^{00}g^{\varphi\varphi}} + g^{0\varphi}}. \tag{41}$$

Здесь g^{ij} — обратная к g_{mn} матрица, задаваемая соотношениями (4) и (31). Из формы метрики (3), (4) (при $F = 1$, $G = 0$) следует, что

$$g^{00} : g^{0\varphi} : g^{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi} : (-g_{0\varphi}) : g_{00}. \tag{42}$$

Это важное свойство существенно упрощает соотношения (40) и (41):

$$\frac{\omega^+}{\omega^-} = \frac{k_0^+}{k_0^-} = \frac{l + \Delta\tau/2}{l - \Delta\tau/2} = \frac{\tau^+}{\tau^-}. \tag{43}$$

Таким образом, в неинерциальной системе отсчета этот эффект также не является независимым от эффектов пп. а), в). Как следует из (31), в силу компактности керра-ньюмановского источника вместо (42) выполняется лишь более слабое соотношение

$$g^{00} : g^{0\varphi} = g_{\varphi\varphi} : (-g_{0\varphi}).$$

Поэтому формула (40) уже не сводится к (43). Можно показать, что в данном случаее получается следующее отношение частот:

$$\frac{\omega^+}{\omega^-} = \frac{\sqrt{l^2+\mu^2} + \Delta\tau/2}{\sqrt{l^2+\mu^2} - \Delta\tau/2}\,\frac{\sqrt{l^2+\mu^2} - \varepsilon}{\sqrt{l^2+\mu^2} + \varepsilon}, \tag{44}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\Delta\tau}{8\pi^2}\,\frac{\mu^2(\sqrt{r^2 - a^2} + m)^2}{\Lambda}; \quad \mu^2 = \frac{4\pi^2\Lambda a^2(m^2 - q^2)^2}{r^4(\Delta - a^2)(\sqrt{(r^2 - a^2)} + m)^2}.$$

В (44) $\Delta\tau$ и l — величины эффекта Саньяка (39б) и длина окружности (37б) в гравитационном поле (34).

Таким образом, если экспериментатор измерит вначале длину окружности l и задержку лучей $\Delta\tau$, то на основании измерения отношения частот ω^+/ω^- он сможет отличить происхождение ускорения (инерция или гравитация), используя формулы (43), (44). В постньютоновском приближении ($r \gg m,\ a,\ q$) (44) переходит в (43) с поправками порядка $a^2(m^2 - q^2)^2/r^6$ и $a^3m(m^2 - q^2)/r^8$. Вторая поправка ответственна за отклонение отношения ω^+/ω^- от k_0^+/k_0^- и много меньше первой. Так как $m^2 > a^2 + q^2$, то мажоранта ведущей поправки есть m^6/r^6, имеющей, таким образом, порядок малости ε_0^{12} (ε_0^{12} — постньютоновский малый параметр). Например, вблизи поверхности Земли эта величина является крайне малой: $m_\oplus^6/r_\oplus^6 \sim 10^{-60}$. Это обстоятельство, по-видимому, не позволит реально осуществить предложенный эксперимент. Однако в принципе неэквивалентность инерции вращения и гравитации Керра — Ньюмана может быть установлена экспериментально.

9. ЭФФЕКТ ЗАМЕДЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ДЛЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, СВОБОДНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ВДОЛЬ РАДИУСА ЦЕНТРИФУГИ

В этом и в последнем разделах мы возвращаемся к расчетам различных релятивистских эффектов в неинерциальной, вращающейся системе отсчета.

Подсчитаем, насколько отстанут часы в системе отсчета, движущейся вдоль радиуса центрифуги ($\varphi = \mathrm{const}$) без трения от оси вращения с начальной скоростью v_0 до некоторого радиуса $r_{\max}$ и обратно. «Отражение» такой системы в точке $r = r_{\max}$ предполагается идеальным.

Рассмотрим закон движения $r = r(t)$. Согласно стандартным правилам для описания движения тела, на которое наложены голономные связи, необходимо модифицировать свободную функцию Лагранжа этого тела добавлением члена, имеющего форму левой части уравнения связи ($d\varphi/dt = 0$) с множителем Лагранжа λ:

$$L = -m\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}} + \lambda\, d\varphi/dt.$$

Далее дифференцирование по t будем обозначать точкой. Расписывая уравнения Лагранжа $(\partial L/\partial \dot{x}_A)^{\boldsymbol\cdot} = \partial L/\partial x_A$ при $x_A = (r, \varphi, z, \lambda)$, получаем

$$(\dot{r}/\sigma)^{\boldsymbol\cdot} = (\Omega + \dot{\varphi})^2 r/\sigma;$$

$$(\lambda + m(\Omega + \dot{\varphi}) r^2/\sigma)^{\boldsymbol\cdot} = 0;$$

$$(\dot{z}/\sigma)^{\boldsymbol\cdot} = 0;$$

$$\dot{\varphi} = 0,$$

где $\sigma = \sqrt{1 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2 - r^2(\Omega + \dot{\varphi})^2}$. Так как $z = \mathrm{const}$, то отсюда находим уравнение, определяющее закон движения $r(t)$:

$$\left(\dot{r}\Big/\sqrt{1 - \dot{r}^2 - \Omega^2 r^2}\right)^{\boldsymbol\cdot} = \Omega^2 r\Big/\sqrt{1 - \dot{r}^2 - \Omega^2 r^2}. \qquad (45)$$

Поскольку релятивистские скорости трудно реализовать в предложенной задаче, ограничимся вычислением искомой величины в первом приближении.

Для этого необходимо взять уравнение (45) в нерелятивистском приближении

$$\ddot{r} = \Omega^2 r. \tag{46}$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\dot{r}(0) = 0$ есть

$$r(t) = \frac{v_0}{\Omega} \operatorname{sh} \Omega t. \tag{47}$$

Легко доказать, что промежуток собственного времени, полученный с помощью интегрирования интервала Минковского вдоль мировой линии, по которой движутся часы, равен спроектированному на соответствующую тетраду промежутку времени в неинерциальной системе отсчета, где эти часы покоятся. Поэтому формула для собственного времени наблюдателя, выполняющего радиальное движение по отношению к центрифуге при изменении r от 0 до $r_{\max}$ и обратно до 0, имеет вид

$$T = \left(\int_0^{T_{\max}} + \int_{T_{\max}}^{2T_{\max}} \right) \sqrt{1 - \Omega^2 r^2 - \dot{r}^2}\, dt \simeq$$

$$\simeq 2 \int_0^{T_{\max}} \left(1 - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 - \frac{1}{2} \dot{r}^2 \right) dt. \tag{48}$$

Здесь $T_{\max}$ обозначает координатное время движения вдоль радиуса от 0 до $r_{\max}$: $r_{\max} = r(T_{\max})$. Как видно из (48), если в (46) удержать первую релятивистскую поправку, то в выражении для T это приведет к появлению уже постпострелятивистских членов. Из (48) также следует, что часы наблюдателя, покоящегося на оси вращения, покажут время $2T_{\max}$. Следовательно, подставляя (47) в (48) и выполняя интегрирование, получаем окончательное выражение для времени задержки в виде

$$\frac{T - 2T_{\max}}{2T_{\max}} = -\frac{v_0^2}{2} \frac{\xi \ln \sqrt{1+\xi^2}}{\ln (\xi + \sqrt{1+\xi^2})}, \tag{49}$$

где $\xi \equiv \Omega r_{\max}/v_0$.

Рассмотрим теперь предельные случаи выражения (49):

а) Если $1 \gg \Omega r_{\max} \gg v_0$ ($\xi \gg 1$), то

$$\frac{T - 2T_{\max}}{2T_{\max}} = -\frac{v_0^2 \xi^2}{\ln \xi^2} = -\Omega^2 r^2 / \ln (\Omega^2 r^2 / v_0^2).$$

б) Если $1 \gg v_0 \gg \Omega r_{\max}$ ($\xi \ll 1$), то

$$\frac{T - 2T_{\max}}{2T_{\max}} = -\frac{v_0^2}{2}. \tag{50}$$

10. ЭФФЕКТ ЗАМЕДЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ДЛЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩЕГО РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ РАДИУСА ЦЕНТРИФУГИ

Если систему отсчета, рассмотренную в предыдущем разделе, связать пружиной с осью вращения и выбрать ее коэффициент упругости равным $K = m\Omega^2$ (где m — масса этой системы отсчета), то вместо уравнения (46) мы получаем уравнение $\ddot{r} = 0$. Следовательно, эта система будет равномерно двигаться по отношению к центрифуге со скоростью, равной начальной:

$$r(t) = \begin{cases} v_0 t, & 0 < t < r_{\max}/v_0; \\ 2r_{\max} - v_0 t, & r_{\max}/v_0 < t < 2r_{\max}/v_0. \end{cases} \tag{51}$$

Подставляя (51) в интеграл (48), находим временную задержку часов движущегося наблюдателя в виде

$$\frac{T - 2T_{\max}}{2T_{\max}} = -\frac{v_0^2}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right).$$

Для $\xi \gg 1$ это дает

$$\frac{T - 2T_{\max}}{T_{\max}} = -\frac{1}{6}\Omega^2 r_{\max}^2.$$

Для $\xi \ll 1$ имеем

$$\frac{T - 2T_{\max}}{2T_{\max}} = -\frac{v_0^2}{2}. \tag{52}$$

Как и следовало ожидать, (50) совпадает с (52).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, подчеркнем еще раз, что для объяснения различных эффектов в неинерциальных системах отсчета нет необходимости использовать общую теорию относительности. Нужно лишь строго следовать идеологии специальной теории относительности, что и было сделано в настоящей работе. Автор выражает надежду, что эффекты, рассмотренные выше или им подобные, заслуживают экспериментального изучения, так как существует необходимость продемонстрировать «работоспособность» СТО в неинерциальных и, в частности, во вращающихся системах отсчета.

Автор выражает свою искреннюю благодарность А. А. Логунову, Х. Ийлмазу (H. Yilmaz), К. Элли (C. O. Alley), Н. Г. Басову, а также всем участникам руководимого им семинара за ценные критические замечания и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sagnac G.**//J. Phys. Radium. 1914. Vol. 4 P. 177—184.
2. **Post E. J.**//Rev. Mod. Phys. 1967. Vol. 39. P. 475—493.
3. **Hay H. J., Schiffer J. P., Cranshaw T. E., Egelstaff P. A.**//Phys. Rev. Lett 1960. Vol. 4. P. 165—166.

4. **Bailey J., Borer K. e. a.**//Nature. 1977. Vol. 268. P. 301—310.
5. **Эйнштейн А.** Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965.
6. **Паули В.** Теория относительности. М.: Наука, 1983.
7. **Меллер Х.** Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.
8. **Зоммерфельд А.** Оптика: Пер. с нем. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
9. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955.
10. **Логунов А. А.** Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1987.
11. **Zurairy M. S., Scully M. O., Just K.**//Optics Comm. 1981. Vol. 36. P. 175—177.
12. **Стрельцов В. Н.** Препринт ОИЯИ Р2-11385. Дубна, 1978.
13. **Strauss M.**//Intern. J. Theor. Phys. 1974. Vol. 11. P. 107—123.
14. **Browne P. F.**//J. Phys. A.: Math. Gen. 1977. Vol. 10. P. 727—744.
15. **Ashworth D. G., Davies P. A.**//J. Phys. A.: Math. Gen. 1979. Vol. 12. P. 1425—1440.
16. **Yilmaz H.**//Proc. Fourth Marsel Grossman Meeting on GR. 1986. Rome: Elsevier Science Publishers. P. 1753—1791.
17. **Логунов А. А., Чугреев Ю. В.**//УФН. 1988. Т. 156. Вып. 1. С. 137—143; Препринт ИФВЭ 87-138. Серпухов, 1987.
18. **Логунов А. А., Чугреев Ю. В.**//Вестник МГУ. Сер. 3. 1988. Т. 29. С. 3—11; **Chugreev Yu. V., Logunov A. A.** IHEP Preprint 87-164. Serpukhov, 1987.
19. **Macek W., Davies D.**//Appl. Phys. Lett. 1963. Vol. 2. P. 67—68.
20. **Sargent M., Scully M., Lamb W.** Laser physics. N. Y.: Addison-Wesley, 1974.
21. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. А.** Гравитация. В 3-х т.: Пер. с англ. М.: Мир. 1977.
22. **Логунов А. А., Мествиришвили М. А.** Основы релятивистской теории гравитации. М.: Из-во МГУ, 1986.
23. **Карабут П. В., Чугреев Ю. В.** Препринт ИФВЭ 87-142. Серпухов, 1987; ТМФ, 1989. Т. 78. С. 136—144.
24. **Карабут П. В., Чугреев Ю. В.** Препринт НИИЯФ МГУ 88-008/29. М., 1988.