«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1989, ТОМ 20, ВЫП. 4

УДК 530.145

НЕСТАНДАРТНЫЕ АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ—УНИЧТОЖЕНИЯ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИКИ

С. А. Балашова, В. В. Курышкин
Университет дружбы народов, Москва
Э. Э. Энтральго
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются проблемы математического описания систем переменного числа физических объектов сортов k, подчиняющихся квантовым статистикам рангов s_k в том смысле, что числа n_k объектов сорта k в одном квантовом состоянии могут принимать значения лишь от 0 до s_k.

Предложен метод построения алгебры A (K) взаимно сопряженным образующим $\overset{+}{a}_k$ и a_k, $k \in K$, которой может быть приписан физический смысл операторов рождения и уничтожения объекта сорта k.

Построен ряд конкретных алгебр операторов рождения — уничтожения, проведено сравнение с уже известными алгебрами, рассмотрены некоторые приложения промежуточных $(2 \leqslant s_k < \infty)$ квантовых статистик.

The problems of mathematical description for systems of a variable number of physical objects of types k which obey to quantum statistics of ranks s_k, that is numbers n_k for objects of type k can take in the same quantum state the values only from 0 to s_k are discussed.

A method to construct the algebras A (K) with selfadjoint generators $\overset{+}{a}_k$ and a_k $k \in K$ which can be treated as the creation and annihilation operators for the object of type k is proposed.

A set of concrete algebras of the creation and annihilation operators is constructed, a comparison with the already known algebras is performed, some applications of the intermediate $(2 \leqslant s_k < \infty)$ quantum statistics are considered.

ВВЕДЕНИЕ

Математический формализм квантовой теории систем переменного числа физических объектов (частиц, квантов, систем, элементарных возбуждений и т. п.) содержит в себе понятия операторов рождения $\overset{+}{a}_k$ и уничтожения a_k для каждого сорта объектов k. Поскольку действие этих операторов предполагается определенным в пространстве L квантовых состояний $|\psi\rangle$ рассматриваемой системы, то совокупность $\overset{+}{a}_k$ и a_k, $k \in K$, можно рассматривать как образующие алгебры A (K) операторов в пространстве L, которую естественно называть алгеброй операторов рождения — уничтожения.

Алгебра $A\ (K)$ содержит в себе операторы различных физических величин, характеризующих систему переменного числа объектов, в частности самосопряженные в L операторы N_k чисел объектов с целочисленными собственными значениями n_k, определяющими возможные числа объектов сорта k в одном квантовом состоянии.

Уже на этом этапе рассмотрения может быть сформулирована задача изучения различного рода квантовых статистик для тождественных (одноуровневых) объектов, т. е. объектов фиксированного сорта k:

статистика Ферми — Дирака, $n_k \in \overline{0,1}$;

промежуточная статистика ранга s_k, $n_k \in \overline{0,\ s_k}$ при $1 \leqslant s_k < \infty$;

статистика Бозе — Эйнштейна, $n_k \in \overline{0,\ \infty}$.

В силу физического смысла операторов a_k (уменьшают число объектов сорта k на единицу), $\overset{+}{a}_k$ (увеличивают число объектов сорта k на единицу) и N_k (сохраняют числа объектов всех сортов) в пространстве Фока $L_F \subset L$, натянутом на собственные векторы операторов N_k, должны быть справедливыми тождества:

$$[N_k,\ N_{k'}]_- = 0,\ [N_k,\ a_{k'}]_- = -\delta_{kk'}a_k,\ [N_k,\ \overset{+}{a}_{k'}]_- = \delta_{kk'}\overset{+}{a}_k. \tag{1}$$

Так как $N_k^+ = N_k$, то соотношения (1) позволяют считать операторы $\overset{+}{a}_k$ и a_k взаимно сопряженными в L_F, т. е. $a_k^+ = \overset{+}{a}_k$ и $\overset{+}{a}{}_k^+ = a_k$.

Дальнейшие свойства алгебры $A\ (K)$, тип и статистика рассматриваемых объектов, явный вид операторов N_k и т. п. определяются системой тождественных соотношений для образующих $\overset{+}{a}_k$ и a_k.

В современной квантовой теории (см., например, [1—5]) в основном используются два типа тождественных соотношений для образующих алгебры операторов рождения — уничтожения, связанных с двумя типами квантовых статистик, а именно:

$$N_k = \overset{+}{a}_k a_k,\ [a_k,\ \overset{+}{a}_{k'}]_\pm = \delta_{kk'},\ [a_k,\ a_{k'}]_\pm = 0. \tag{2}$$

Здесь знак «+» соответствует ферми-алгебре $A_F\ (K)$ и статистике Ферми — Дирака ($s_k = 1$), «—» — бозе-алгебре $A_B\ (K)$ и статистике Бозе — Эйнштейна ($s_k = \infty$). В общем случае предполагается, что все объекты реальных физических систем являются либо фермионами, либо бозонами. При этом $K = K_1 + K_2$, а операторы рождения и уничтожения удовлетворяют соотношениям (2) со знаком «+» при $k,\ k' \in K_1$ и со знаком «—» при $k,\ k' \in K_2$. Это приводит к некоторому произведению $A\ (K)$ ферми-алгебры $A_F\ (K_1)$ и бозе-алгебры $A_B\ (K_2)$. Дополнительное предположение [1—5] о коммутации образующих A_F с образующими A_B конкретизирует указанное произведение и приводит к стандартной алгебре $A_{st}\ (K)$. Однако за годы развития квантовой теории неоднократно предлагались и изучались различного рода нестандартные алгебры $A_{nst}\ (K)$ операторов рождения—уничтожения. К A_{nst}, например, относятся: аномальные алгебры [6—8], алгебры парабозе-операторов [7, 9—18], алгебры параферми-операторов [10—18], алгебры «супероператоров» [19—22], μ-алгебры [23—25], μ_S-алгебры [20, 26, 27], Ф-алгебры [23, 28—31], M-алгебры [28, 32, 33]. Математические формулировки и возможности указанных нестандартных алгебр можно найти, например, в кратком обзоре, представленном в [34].

С точки зрения статистики тождественных объектов фиксированного сорта наибольший интерес представляют собой параферми-алгебры:

$$N_k = \frac{1}{2}[\overset{+}{a}_k, a_k]_- + \frac{1}{2}p; \quad a_k = \sum_{j=1}^{p} b_k^{(j)}; \tag{3а}$$

$$[b_k^{(j)}, \overset{+}{b}{}_{k'}^{(j)}]_+ = \delta_{kk'}; \quad [b_k^{(j)}, b_{k'}^{(j)}]_+ = 0; \tag{3б}$$

$$[b_k^{(j)}, \overset{+}{b}{}_{k'}^{(j')}]_- = [b_k^{(j)}, b_{k'}^{(j')}]_- = 0, \quad j \neq j', \tag{3в}$$

и алгебры супероператоров (по терминологии, принятой в [19]):

$$N_k = \overset{+}{a}_k a_k, \quad [a_k, \overset{+}{a}_k] = 1 - \frac{p+1}{p!}\overset{+}{a}{}_k^p a_k^p; \tag{4а}$$

$$[a_k, \overset{+}{a}_{k'}]_- = [a_k, a_{k'}]_- = 0, \quad k \neq k'. \tag{4б}$$

В обеих указанных алгебрах p есть целое число, $a_k^{p+1} = \overset{+}{a}{}_k^{p+1} = 0$ и $n_k \in \overline{0, p}$. Поэтому обе алгебры претендуют на описание объектов, подчиняющихся промежуточной квантовой статистике ранга p.

Сам факт существования двух различных алгебр операторов рождения — уничтожения, соответствующих одной и той же промежуточной статистике, приводит к естественной постановке задачи об отыскании всех возможных алгебр A (K), пригодных для описания физических систем с переменным числом объектов сорта k_1, k_2, . . ., $\in K$, подчиняющихся статистикам рангов s_{k_1}, s_{k_2}, . . ., $\in s$ (K) соответственно.

В приложении к тождественным (одноуровневым) объектам указанная задача частично исследована в работах [20, 27, 35—37].

Что касается нетождественных (или разноуровневых) объектов, подчиняющихся различным статистикам, то общая задача построения соответствующих нестандартных алгебр операторов рождения — уничтожения пока еще практически не рассматривалась. Некоторое исключение составляют лишь M-алгебры, Ф-алгебры и их частные случаи, связанные с так называемыми дробными статистиками [23, 28—31, 38, 39], где используется зацепление подалгебр алгебры A (K) соотношениями типа

$$a_k \overset{+}{a}_{k'} = e^{-i\theta_{kk'}} \overset{+}{a}_{k'} a_k, \quad a_k a_{k'} = e^{i\theta_{kk'}} a_{k'} a_k, \quad k \neq k' \tag{5}$$

с действительными числами $\theta_{kk'}$.

Следует отметить, что интерес к промежуточным статистикам и связанным с ними нестандартным алгебрам операторов рождения — уничтожения существенно возрос в последнее десятилетие в связи с изучением квантового эффекта Холла [38, 39], исследованиями в теории экзотических полевых квантов [28, 32, 33, 42], заряженных экситонов [29, 31] и монополей [30], а также с обсуждением вопроса о возможном (слабом) нарушении принципа Паули [43—48].

В настоящей работе в основном излагается метод построения алгебр A (K) операторов рождения $\overset{+}{a}_k$ и уничтожения a_k, формально пригодных для описания квантовых систем переменного числа объектов различных сортов $k \in K$, подчиняющихся заданным квантовым статистикам рангов $s_k \in s\,(K)$. Метод основан на использовании априорных интуитивных определений, связанных с основными понятиями искомых алгебр.

В заключительных разделах статьи проводится сравнение получаемых алгебр с уже известными в литературе и рассматриваются их некоторые конкретные приложения.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Для построения и изучения возможных математических формализмов, пригодных для квантового описания систем переменного числа объектов, будем исходить из следующих интуитивных определений.

Определение 1. *Пространством состояний* $|\psi\rangle$ *системы с переменным числом объектов сортов* $k_1, k_2, \ldots \in K$, *подчиняющихся соответственно квантовым статистикам рангов* $s_1, s_2, \ldots \in s\,(K)$, $s_k \geqslant 1$, *является комплексное векторное пространство* $L\,(s\,(K))$ *с положительной метрикой, натянутое на ортогональный базис из* $(s_1+1)(s_2+1)\ldots$ *невырожденных векторов* $|\varphi_{n_1,\, n_2,\, \ldots}\rangle$, *так что*

$$|\,\varphi_{n_1, n_2, \ldots}\rangle \in L\,(s\,(K)), \quad n_k \in \overline{0,\ s_k}; \tag{6а}$$

$$\langle\varphi_{n_1', n_2', \ldots}\,|\,\varphi_{n_1, n_2, \ldots}\rangle = |\,|\,\varphi_{n_1, n_2, \ldots}\rangle\,|^2\,\delta_{n_1' n_1}\delta_{n_1' n_2}\ldots; \tag{6б}$$

$$|\,\psi\rangle = \sum_{n_1=0}^{s_1}\sum_{n_2=0}^{s_2}\ldots\psi_{n_1, n_2, \ldots}\,|\,\varphi_{n_1, n_2, \ldots}\rangle \in L\,(s\,(K)); \tag{6в}$$

$$\langle\psi\,|\,\psi\rangle = \sum_{n_1=0}^{s_1}\sum_{n_2=0}^{s_2}\ldots|\,\psi_{n_1, n_2, \ldots}\,|^2\,|\,|\,\varphi_{n_1, n_2, \ldots}\rangle\,|^2 \geqslant 0. \tag{6г}$$

Определение 2. *Алгеброй операторов рождения — уничтожения объектов рассматриваемой системы является алгебра* A (K), *имеющая представление в* L $(s\,(K))$, *с взаимно сопряженными образующими*

a_k *и* $\overset{+}{a}_k$, *осуществляющими движение в базисе* (6*а*) *с изменением соответствующего индекса на единицу, а именно*:

$$a_k \mid \varphi_{\ldots,\, n_{k-1},\, 0,\, n_{k+1},\, \ldots} \rangle = 0; \tag{7а}$$

$$a_k \mid \varphi_{\ldots,\, n_k,\, \ldots} \rangle = \mid \varphi_{\ldots,\, n_{k-1},\, \ldots} \rangle,\ n_k \in \overline{1,\ s_k}; \tag{7б}$$

$$\overset{+}{a}_k \mid \varphi_{\ldots,\, n_k,\, \ldots} \rangle = \mid \varphi_{\ldots,\, n_{k+1},\, \ldots} \rangle,\quad n_k \in \overline{0,\ s_k - 1}, \tag{7в}$$

$$\overset{+}{a}_k \mid \varphi_{\ldots,\, n_{k-1},\, s_k,\, n_{k+1},\, \ldots} \rangle = 0,\quad \textit{если}\ s_k < \infty. \tag{7г}$$

Приведенные выше определения позволяют доказать ряд последовательных утверждений, которые ниже разбиваются на теоремы и следствия. Доказательства всех утверждений опущены ввиду их достаточной элементарности. Подробные доказательства отдельных утверждений приведены в [35—37].

Теорема 1. *В* $L\,(s\,(K))$ *существует ортонормированный базис*

$$\mid n_1,\ n_2,\ \ldots \rangle = \alpha\,(n_1,\ n_2,\ \ldots) \mid \varphi_{n_1,\, n_2,\, \ldots} \rangle,\quad n_k \in \overline{0,\ s_k}; \tag{8а}$$

$$\langle n_1',\ n_2',\ \ldots \mid n_1,\ n_2,\ \ldots \rangle = \delta_{n_1' n_1} \delta_{n_2' n_2} \ldots, \tag{8б}$$

где $\alpha\,(n_1,\ n_2,\ \ldots)$ — *некоторые комплексные числа, такие, что*

$$a_k \mid \ldots,\ n_{k+1},\ 0,\ n_{k+1},\ \ldots \rangle = 0; \tag{9а}$$

$$a_k \mid \ldots, n_k, \ldots \rangle = \sqrt{\lambda_k (\ldots, n_k, \ldots)}\ \times$$
$$\times\, e^{i\theta_k(\ldots,\, n_k,\, \ldots)} \mid \ldots, n_k - 1, \ldots \rangle,\ n_k \in \overline{1,\ s_k}; \tag{9б}$$

$$\overset{+}{a}_k \mid \ldots, n_k, \ldots \rangle = \sqrt{\lambda_k (\ldots, n_k + 1, \ldots)}\ \times$$
$$\times\, e^{-i\theta_k(\ldots,\, n_k + 1,\, \ldots)} \mid \ldots, n_k + 1, \ldots \rangle,\quad n_k \in \overline{0,\ s_k - 1}; \tag{9в}$$

$$\overset{+}{a}_k \mid \ldots,\ n_{k-1},\ s_k,\ n_{k+1},\ \ldots \rangle = 0,\ \text{если}\ s_k < \infty, \tag{9г}$$

где $\lambda_k\,(n_1,\ n_2,\ \ldots)$ — *неотрицательные и* $\theta_k\,(n_1,\ n_2,\ \ldots)$ — *действительные числа, называемые в дальнейшем параметрами алгебры (модулями и фазами).*

Следствие 1.1. Алгебра $A\,(K)$ операторов рождения — уничтожения однозначно определяется заданием рангов статистик $s_k \in s\,(K)$ и параметров алгебры — модулей $\lambda_k\,(n_1,\ n_2,\ \ldots) > 0$ и фаз $\theta_k\,(n_1,\ n_2,\ \ldots) = \theta_k^*$, где $k \in K$, $n_k \in \overline{1,\ s_k}$, $n_{k'} \in \overline{0,\ s_{k'}}$ при $k' \neq k$.

На самом деле если ранги статистик и параметры алгебры заданы, то задано однозначное представление $A\,(K)$ в $L\,(s\,(K))$, так как действие всех a_k и $\overset{+}{a}_k$, а следовательно, и любого оператора из $A\,(K)$ на любой вектор из $L\,(s\,(K))$ однозначно определено соотношениями (9).

Следствие 1.2. Фиксированной квантовой статистике [заданы все ранги $s\,(K)$] может соответствовать бесконечное множество алгебр операторов рождения — уничтожения $A\ (K)$, отличающихся друг от друга конкретными значениями параметров.

В заключение данного раздела отметим, что соотношения (6)—(9) обосновывают физическую интерпретацию используемых математических понятий и стандартную терминологию: вектор $|\,n_1, n_2, \ldots\rangle$ (или пропорциональный ему вектор $|\,\varphi_{n_1, n_2, \ldots}\rangle$) есть состояние с фиксированными числами объектов $n_1, n_2, \ldots$; a_k — оператор уничтожения объекта сорта k; $\overset{+}{a}_k$ — оператор рождения объекта сорта k; $|0, 0, \ldots\rangle$ — состояние вакуума; $|\,s_1, s_2, \ldots\rangle$ — состояние насыщения, достигаемое лишь при всех $s_k < \infty$.

2. АЛГЕБРЫ А (1), ИХ СВОЙСТВА И МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим систему переменного числа тождественных (одноуровневых) объектов, подчиняющихся квантовой статистике ранга s (в этом разделе индекс объекта для простоты записи опущен).

Согласно положениям предыдущего раздела, состояния такой системы принадлежат пространству $L\ (s)$, натянутому на ортонормированный базис из $(s+1)$ векторов, а алгебра операторов рождения — уничтожения, называемая в дальнейшем $A\ (1)$, имеет одну пару образующих: a и $\overset{+}{a}$.

Основные свойства и методы определения алгебры $A\ (1)$ отражены в следующей совокупности утверждений.

Теорема 2. *В $L\ (s)$ существует единственный базис*

$$|\,n> \in L\ (s), \quad n \in \overline{0,\ s}; \quad \langle n' \mid n\rangle = \delta_{n'n}, \tag{10}$$

в котором действие образующих a и $\overset{+}{a}$ алгебры $A\ (1)$ определяется системой равенств:

$$a\,|\,0\rangle = 0; \ a\,|\,n\rangle = \sqrt{\lambda(n)}\,|\,n-1\rangle, \qquad n \in \overline{1,\ s}; \tag{11a}$$

$$\overset{+}{a}\,|\,n\rangle = \sqrt{\lambda(n+1)}\,|\,n+1\rangle, \qquad n \in \overline{0,\ s-1}; \quad \overset{+}{a}\,|\,s\rangle = 0, \text{ если } s < \infty. \tag{11б}$$

Следствие 2.1. Для однозначного определения алгебры $A\ (1)$ необходимо и достаточно задать ранг статистики s и совокупность параметров-модулей $\lambda\,(n) > 0,\ n \in \overline{1,\ s}$.

Следствие 2.2. Квантовой статистике любого ранга соответствует бесконечное множество алгебр $A\ (1)$, отличающихся друг от друга значениями параметров-модулей $\lambda(n)$.

Теорема 3. *Образующие a и $\overset{+}{a}$ алгебры $A\ (1)$, соответствующей статистике ранга s, удовлетворяют тождественным соотношениям*

$$a^{s+1} = 0, \text{ если } s < \infty; \ a^k \overset{+}{a}{}^{k+l} = \sum_{m=0}^{s-l} \mu_m^{k,\,k+l} \overset{+}{a}{}^{m+l} a^m, \tag{12}$$

где $1 \leqslant k \leqslant k+l \leqslant s$, *и сопряженным к* (12) *соотношениям при* $l \neq 0$, *причем коэффициенты* μ *действительны и однозначно определены параметрами алгебры* $\lambda(n)$ *с помощью рекуррентных соотношений:*

$$\mu_0^{k,\,k+l} = \Gamma_{k+l}/\Gamma_l, \quad \Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda(n); \tag{13а}$$

$$\mu_n^{k,\,k+l} = \Gamma_{n+k+l}/\Gamma_n\Gamma_{n+l} - \sum_{m=0}^{n-1} \mu_m^{k,\,k+l}/\Gamma_{n-m}, \quad 1 \leqslant n < s-k-l+1; \tag{13б}$$

$$\mu_n^{k,\,k+l} = -\sum_{m=0}^{n-1} \mu_m^{k,\,k+l}/\Gamma_{n-m}, \quad s-k-l+1 \leqslant n \leqslant s-l. \tag{13в}$$

Следствие 3.1. Любой оператор алгебры A (1) может быть записан в нормальной форме, т. е. в виде выражения, где все операторы рождения записаны слева от всех операторов уничтожения.

Теорема 4. *Первые* s *коэффициентов существующего в любой* A (1) *тождественного соотношения* (13б) *с* $k=1$ *и* $l=0$,

$$\overset{+}{a}a = \sum_{m=0}^{s} \mu_m^{1,\,1} \overset{+}{a}{}^m a^m, \tag{14а}$$

связаны с параметрами алгебры $\lambda(n)$ *рекуррентными соотношениями*

$$\lambda(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \mu_m^{1,\,1} \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_{n-m-1}}, \quad n \in \overline{1,\, s}. \tag{14б}$$

Следствие 4.1. Алгебра A (1) однозначно определяется рангом статистики s и совокупностью первых s коэффициентов $\mu_m^{1,1}$, $m \in \overline{0,\, s-1}$, главного тождественного соотношения (14а), причем в том и только в том случае, если в силу (14б) обеспечена неотрицательность $\lambda(n)$.

Теорема 5. *В* A (1) *существует единственный оператор* N, *обладающий необходимыми свойствами оператора числа объектов*

$$N\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle, \quad n \in \overline{0,\, s}; \quad [N,\, a]_- = -a, \tag{15}$$

нормальная форма этого оператора записывается в виде

$$N = N^+ = \sum_{k=1}^{s} \nu_k \overset{+}{a}{}^k a^k; \tag{16а}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda(1)}, \quad \nu_n = \frac{n}{\Gamma_n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\nu_k}{\Gamma_{n-k}}, \quad 2 \leqslant n \leqslant s. \tag{16б}$$

Следствие 5.1. Параметры $\lambda(n)$ алгебры A (1) связаны с коэффициентом ν_k нормальной формы оператора N рекуррентными соотношениями

$$\lambda(n)=n\left(\sum_{k=1}^{n}\nu_k\frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_{n-k}}\right)^{-1},\quad n\in\overline{1, s}. \tag{17}$$

Следствие 5.2. Алгебра A (1) однозначно определяется рангом статистики s и совокупностью коэффициентов ν_k, $k\in\overline{1, s}$, нормальной формы оператора числа объектов, причем в том и только в том случае, если в силу (17) обеспечиваются конечность и неотрицательность $\lambda(n)$.

Следствие 5.3. Алгебра A (1) имеет неприводимое матричное представление (собственное N-представление) в виде

$$(a)_{kl}=\delta_{k,l-1}\sqrt{\lambda(k)},\quad (\overset{+}{a})_{kl}=\delta_{k,l+1}\sqrt{\lambda(l)},\quad (N)_{kl}=\delta_{kl}(k-1), \tag{18}$$

где $k, l\in\overline{1, s+1}$; s — ранг статистики; $\lambda(k)$ — параметры алгебры.

Теорема 6. *Оператор числа объектов может быть записан в билинейной форме*

$$N=C_0+\sum_{k=1}^{s}C_{1,k}a^k\overset{+}{a}{}^k+\sum_{k=1}^{s}C_{2,k}\overset{+}{a}{}^ka^k, \tag{19}$$

где $(2s+1)$ *действительных коэффициентов связаны с параметрами алгебры системой* $(s+1)$ *алгебраических уравнений*:

$$C_0=-\sum_{k=1}^{s}C_{1,k}\Gamma_k;\quad s-C_0=\sum_{k=1}^{s}C_{2,k}\frac{\Gamma_s}{\Gamma_{s-k}},\quad \textit{если } s<\infty; \tag{20а}$$

$$n-C_0=\sum_{k=1}^{s-n}C_{1,k}\frac{\Gamma_{n+k}}{\Gamma_n}+\sum_{k=1}^{n}C_{2,k}\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n-k}},\quad 1\leqslant n<s. \tag{20б}$$

Следствие 6.1. Форма (19) оператора N неоднозначна.

Следствие 6.2. Задание ранга статистики s и оператора числа объектов N в билинейной форме (19) определяет множество (допустимых) алгебр A (1), каждая из которых соответствует решению системы (20) относительно параметров $\lambda(n)>0$.

Теорема 7. *Если состояния* $|n\rangle$ *являются собственными векторами самосопряженного в* $L(s)$ *оператора* $M\in A$ (1), *так что*

$$M=\sum_{k=0}^{s}\xi_k\overset{+}{a}{}^ka^k;\quad M|n\rangle=m_n|n\rangle,\quad n\in\overline{0, s}, \tag{21}$$

то собственные значения m_n *и коэффициенты* ξ_k *его нормальной формы связаны с параметрами алгебры системой равенств*:

$$m_0 = \xi_0; \ \lambda(n) = (m_n - m_0)\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_{n-k}}\right)^{-1}, \qquad n \in \overline{1, s}. \tag{22}$$

Следствие 7.1. Алгебра A (1) однозначно определяется рангом статистики s, совокупностью собственных значений m_n, $n \in \overline{0, s}$ и коэффициентов ξ_k, $k \in \overline{1, s}$, нормальной формы любого коммутирующего с N оператора $M \in A$ (1), причем в том и только в том случае, если в силу (22) обеспечиваются конечность и неотрицательность $\lambda(n)$.

Подводя итоги вышеизложенному, еще раз подчеркнем, что квантовой статистике тождественных (одноуровневых) объектов ранга s соответствует бесконечное множество алгебр A (1) операторов рождения—уничтожения (следствие 2.2), а каждая конкретная алгебра может быть однозначно определена по крайней мере четырьмя различными способами (следствия 2.1, 4.1, 5.2 и 7.1).

3. АЛГЕБРЫ А (2) И ПРОИЗВЕДЕНИЯ A (1) НА A (1)

Рассмотрим систему с двумя сортами объектов, например α и β, подчиняющихся квантовым статистикам рангов s_α и s_β соответственно.

Согласно исходным постулатам, математическое описание такой системы требует алгебры A (α, β), называемой в дальнейшем алгеброй A (2), с двумя парами образующих a_α, $\overset{+}{a}_\alpha$ и a_β, $\overset{+}{a}_\beta$, действующими в пространстве состояний L (s_α, s_β).

Согласно теореме 1 и следствию 1.1, алгебра A (2) однозначно определяется значениями $4s_\alpha s_\beta + 2(s_\alpha + s_\beta)$ параметров — неотрицательных модулей $\lambda_\alpha(k, n)$, $\lambda_\beta(k, n)$ и действительных фаз $\theta_\alpha(k, n)$, $\theta_\beta(k, n)$, а действие ее в пространстве L (s_α, s_β) дается соотношениями:

$$a_\alpha \mid 0, k\rangle = 0; \ \overset{+}{a}_\alpha \mid s_\alpha, k > = 0, \text{ если } s_\alpha < \infty; \tag{23а}$$

$$a_\alpha \mid n, k\rangle = \sqrt{\lambda_\alpha(n, k)}\, e^{i\theta_\alpha(n, k)} \mid n-1, k\rangle, \quad n \in \overline{1, s_\alpha}; \tag{23б}$$

$$\overset{+}{a}_\alpha \mid n, k\rangle = \sqrt{\lambda_\alpha(n+1, k)}\, e^{-i\theta_\alpha(n+1, k)} \mid n+1, k\rangle, \quad n \in \overline{0, s_\alpha - 1}; \tag{23в}$$

$$a_\beta \mid n, 0\rangle = 0; \ \overset{+}{a}_\beta \mid n, s_\beta\rangle = 0, \text{ если } s_\beta < \infty; \tag{23г}$$

$$a_\beta \mid n, k\rangle = \sqrt{\lambda_\beta(n, k)}\, e^{i\theta_\beta(n, k)} \mid n, k-1\rangle, \quad k \in \overline{1, s_\beta}; \tag{23д}$$

$$\overset{+}{a}_\beta \mid n, k\rangle = \sqrt{\lambda_\beta(n, k+1)}\, e^{-i\theta_\beta(n, k+1)} \mid n, k+1\rangle, \quad k \in \overline{0, s_\beta - 1}. \tag{23е}$$

Общее исследование алгебр A (2) является достаточно сложной проблемой. Поэтому в данной работе мы ограничимся лишь тремя теоремами и одним конкретным примером.

Теорема 8. *Алгебра A (2) содержит в себе $(s_\alpha + 1)$ алгебр A (1) с рангом статистики s_β и параметрами $\lambda(n) = \lambda_\beta(k, n)$ при фиксированных $k \in \overline{0, s_\alpha}$ и $(s_\beta + 1)$ алгебр A (1) с рангом статистики s_α и параметрами $\lambda(k) = \lambda_\alpha(k, n)$ при фиксированных $n \in \overline{0, s_\beta}$.*

Справедливость этого утверждения очевидна. Так, например, соотношения (23а)—(23в) при каждом фиксированном k определяют алгебру A (1) с образующими $\overset{+}{a}_\alpha$ и a_α, действующими в пространстве $L_k(s_\alpha) \subset L(s_\alpha, s_\beta)$, натянутом на базис из $(s_\alpha + 1)$ ортонормированных векторов $|n\rangle = |n, k\rangle$, $n \in \overline{0, s_\alpha}$. Согласно теореме 2, такая алгебра однозначно определяется s_α параметрами $\lambda(n)$, $n \in \overline{1, s_\alpha}$, причем из соотношений (23а)—(23в) следует: $\lambda(n) = \lambda_\alpha(n, k)$.

Следствие 8.1. Алгебра A (2) в общем случае может содержать в себе $(s_\alpha + s_\beta + 2)$ различных алгебр A (1), каждая из которых является алгеброй операторов рождения — уничтожения объектов одного сорта при фиксированном числе объектов другого сорта.

Следствие 8.2. Алгебра A (2) в общем случае не может быть представлена как произведение A (1) на A (1).

Следствие 8.3. В алгебре A (2) в общем случае не существует однородных (содержащих операторы рождения и уничтожения лишь одного сорта) тождественных соотношений.

Теорема 9. *Образующие алгебры A (2) удовлетворяют системе неоднородных тождественных соотношений:*

$$a_\alpha^{s_\alpha+1} = 0, \text{ если } s_\alpha < \infty; \quad a_\beta^{s_\beta+1} = 0, \text{ если } s_\beta < \infty, \tag{24а}$$

$$a_\alpha^k \overset{+}{a}{}_\alpha^{k+l} = \sum_{m=0}^{s_\alpha - l} \sum_{n=0}^{s_\beta} \tilde{\mu}_{\alpha,\, mn}^{k,\, k+l} \overset{+}{a}{}_\alpha^{m+l} \overset{+}{a}{}_\beta^{n} a_\alpha^m a_\beta^n + (a_\alpha \leftrightarrow a_\beta,\ \overset{+}{a}_\alpha \leftrightarrow \overset{+}{a}_\beta); \tag{24б}$$

$$a_\beta^{k'} \overset{+}{a}{}_\beta^{k'+l'} = \sum_{m=0}^{s_\beta - l'} \sum_{n=0}^{s_\alpha} \tilde{\mu}_{\beta,\, mn}^{k',\, k'+l'} \overset{+}{a}{}_\beta^{m+l} \overset{+}{a}{}_\alpha^{n} a_\beta^m a_\alpha^n + (a_\alpha \leftrightarrow a_\beta,\ \overset{+}{a}_\alpha \leftrightarrow \overset{+}{a}_\beta); \tag{24в}$$

$$a_\alpha^\rho a_\beta^\sigma = \sum_{m=0}^{s_\alpha - \rho} \sum_{n=0}^{s_\beta - \sigma} \mathfrak{L}_{\alpha\beta,mn}^{\rho\sigma} \overset{+}{a}{}_\alpha^{m} \overset{+}{a}{}_\beta^{n} a_\alpha^{m+\rho} a_\beta^{n+\sigma} + (a_\alpha \leftrightarrow a_\beta,\ \overset{+}{a}_\alpha \leftrightarrow \overset{+}{a}_\beta); \tag{24г}$$

$$a_\beta^\sigma a_\alpha^\rho = \sum_{m=0}^{s_\beta - \sigma} \sum_{n=0}^{s_\alpha - \rho} \mathfrak{L}_{\alpha\beta,\, nm}^{\rho\sigma} \overset{+}{a}{}_\alpha^{n} \overset{+}{a}{}_\beta^{m} a_\alpha^{n+\rho} a_\beta^{m+\sigma} + (a_\alpha \leftrightarrow a_\beta,\ \overset{+}{a}_\alpha \leftrightarrow \overset{+}{a}_\beta); \tag{24д}$$

$$a_\alpha^\rho \overset{+}{a}{}_\beta^\sigma = \sum_{m=0}^{s_\alpha - \rho} \sum_{n=0}^{s_\beta - \sigma} \mathfrak{M}_{\alpha\beta,\, mn}^{\rho\sigma} \overset{+}{a}{}_\alpha^{m} \overset{+}{a}{}_\beta^{n+\sigma} a_\alpha^{m+\rho} a_\beta^{n} + (a_\alpha \leftrightarrow a_\beta,\ \overset{+}{a}_\alpha \leftrightarrow \overset{+}{a}_\beta), \tag{24е}$$

где $1 \leqslant k \leqslant k + l \leqslant s_\alpha$; $1 \leqslant k' \leqslant k' + l' \leqslant s_\beta$; $1 \leqslant \rho \leqslant s_\beta$; $1 \leqslant \sigma \leqslant s_\beta$; $\tilde{\mu}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ — *числовые, в общем случае комплексные коэффициенты.*

Взаимосвязь коэффициентов из (24) с параметрами алгебры нетрудно получить, действуя последовательно тождествами (24) на базисные векторы пространства L $(s_\alpha,\ s_\beta)$ с помощью равенств (23).

Следствие 9.1. Любой оператор алгебры A (2) может быть записан в нормальной форме.

Теорема 10. *Алгебра A (2) с рангами статистик s_α и s_β представляет собой произведение алгебры A (1) ранга s_α на алгебру A (1) ранга s_β в том и только в том случае, если*

$$\lambda_\alpha(n,\ k) = \lambda_\alpha(n), \quad \lambda_\beta(n,\ k) = \lambda_\beta(k), \tag{25}$$

где $\lambda_\alpha(n)$, $n \in \overline{1,\ s_\alpha}$ и $\lambda_\beta(n)$, $n \in \overline{1,\ s_\beta}$ есть параметры алгебры A (1). При этом образующие a_α, $\overset{+}{a}_\alpha$ (образующие a_β, $\overset{+}{a}_\beta$) удовлетворяют системе тождественных соотношений (12) с соответствующими параметрами во всем пространстве L $(s_\alpha,\ s_\beta)$, а взаимные (неоднородные и нелинейные) тождественные соотношения могут быть записаны в виде:

$$a_\alpha^\rho a_\beta^\sigma = \sum_{m=0}^{s_\alpha-\rho} \sum_{n=0}^{s_\beta-\sigma} \mathfrak{L}_{\beta\alpha,\ nm}^{\sigma\rho} \overset{+}{a}{}_\beta^{n} \overset{+}{a}{}_\alpha^{m} a_\beta^{n+\sigma} a_\alpha^{m+\rho}; \tag{26а}$$

$$a_\beta^\sigma a_\alpha^\rho = \sum_{m=0}^{s_\alpha-\rho} \sum_{n=0}^{s_\beta-\sigma} \mathfrak{L}_{\alpha\beta,\ mn}^{\rho\sigma} \overset{+}{a}{}_\alpha^{m} \overset{+}{a}{}_\beta^{n} a_\alpha^{m+\rho} a_\beta^{n+\sigma}; \tag{26б}$$

$$a_\alpha^\rho \overset{+}{a}{}_\beta^\sigma = \sum_{m=0}^{s_\alpha-\rho} \sum_{n=0}^{s_\beta-\sigma} \mathfrak{M}_{\beta\alpha,\ nm}^{\sigma\rho} \overset{+}{a}{}_\beta^{n+\sigma} \overset{+}{a}{}_\alpha^{m} a_\beta^\sigma a_\alpha^{m+\rho}; \tag{26в}$$

$$a_\beta^\sigma \overset{+}{a}{}_\alpha^\rho = \sum_{m=0}^{s_\alpha-\rho} \sum_{n=0}^{s_\beta-\sigma} \mathfrak{M}_{\alpha\beta,\ mn}^{\rho\sigma} \overset{+}{a}{}_\alpha^{\rho+m} \overset{+}{a}{}_\beta^{n} a_\alpha^m a_\beta^{\sigma+n}, \tag{26г}$$

где коэффициенты $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ однозначно определяются параметрами алгебры A (2), $1 \leqslant \rho \leqslant s_\alpha$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s_\beta$.

Тождественные соотношения (26) конкретизируют понятие произведения алгебр A (1), обеспечивая их специфическое зацепление в пространстве состояний L $(s_\alpha,\ s_\beta)$.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай системы с объектами сорта α и β, подчиняющихся статистике 1-го ранга, т. е. $s_\alpha = s_\beta = 1$. Тогда пространство состояний L (1, 1) натянуто на базис из четырех ортонормированных векторов ($|\,0{,}0\rangle$, $|\,0,1\rangle$, $|\,1{,}0\rangle$ и $|\,1,1\rangle$), а соответствующая алгебра A (2), являющаяся произведением двух алгебр A (1), определяется шестью параметрами [λ_α, λ_β, θ_α (1, 0), θ_β (0, 1), θ_α (1, 1) и θ_β (1, 1)] и имеет систему тождественных соотношений:

$$a_\alpha \overset{+}{a}_\alpha = \lambda_\alpha - \overset{+}{a}_\alpha a_\alpha, \quad a_\beta \overset{+}{a}_\beta = \lambda_\beta - \overset{+}{a}_\beta a_\beta; \tag{27а}$$

$$a_\alpha a_\beta = e^{i\Phi_{\alpha\beta}} a_\beta a_\alpha, \quad a_\alpha \overset{+}{a}_\beta = e^{-i\Phi_{\alpha\beta}} \overset{+}{a}_\beta a_\alpha. \tag{27б}$$

Зацепление (27б) алгебр A (1) здесь определяется действительным числом $\Phi_{\alpha\beta}$, связанным с параметрами-фазами алгебры A (2) равенством

$$\Phi_{\alpha\beta}=\theta_\beta(1,1)-\theta_\beta(0,1)+\theta_\alpha(1,0)-\theta_\alpha(1,1).$$

Фактически мы получили Ф-алгебру для фермионов, интуитивно введенную и использованную в [23, 28—31, 38, 39]. В частном случае $\lambda_\alpha=\lambda_\beta=1$ и $\Phi_{\alpha\beta}=\pi$ алгебра (27) есть стандартное произведение двух ферми-алгебр.

4. ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ АЛГЕБР A (K)

Совокупность изложенных в предыдущих разделах утверждений, касающихся алгебр A (1) и A (2), показывает, что алгебра A (K) в общем случае представляет собой достаточно сложный математический объект и использование ее в физических теориях требует предварительного решения ряда проблем.

Во-первых, теорема 1 и следствие 1.1 имеют смысл достаточности, но не необходимости. Иначе говоря, значения параметров λ_k $(\ldots, n_k, \ldots)$ и θ_k $(\ldots, n_k, \ldots)$ однозначно определяют алгебру A (K), но не наоборот. Различным значениям параметров-фаз поэтому может соответствовать одна и та же алгебра [см., например, теорему 2 и следствие 2.1 об алгебрах A (1), а также пример 1 алгебры A (2)], что требует решения вопроса о выделении независимых параметров.

Во-вторых, алгебра A (K) содержит в себе: множество различных в общем случае алгебр A (1), являющихся алгебрами операторов рождения — уничтожения объектов одного сорта при фиксированных числах объектов остальных сортов, действующих в соответствующих подпространствах $L(s)\subset L(s(K))$; множество различных в общем случае алгебр A (2) операторов рождения — уничтожения объектов двух сортов при фиксированных числах объектов остальных сортов и т. п. Поэтому одной из основных проблем алгебры A (K) является проблема ее «приводимости», т. е. вопрос о возможности сведения A (K) к произведению двух или более алгебр A (K') с $K'\subset K$.

В-третьих, даже в случае «приводимости» A (K) требуется исследование вопроса о возможных зацеплениях алгебр-сомножителей. Так, билинейное зацепление (27) и нелинейное зацепление (26) двух алгебр A (1) как сомножителей алгебры A (2) являются бинарными (в тождественные соотношения зацепления входят лишь две пары образующих). Однако возможны и небинарные зацепления сомножителей, как, например, это имеет место в M-алгебрах [28, 32, 33, 42], где каждое соотношение зацепления билинейным образом содержит ограниченное множество пар операторов рождения и уничтожения.

Указанные выше проблемы являются чисто математическими и относятся прежде всего к классификации алгебр A (K).

При использовании алгебр операторов рождения — уничтожения в конкретных физических теориях возникает еще и проблема допустимости, заключающаяся в установлении алгебр A (K), совместных с исходными (устанавливаемыми априорно либо постулируемыми) положениями теории. Проблема допустимости в приложении к алгебрам A (1) рассматривается в следующем разделе.

5. АЛГЕБРЫ A (1) ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

При построении конкретной физической теории систем переменного числа объектов обычно оказываются известными лишь операторы физических величин B, которые в случае «свободных» систем (см., например, [1—5]) имеют вид

$$B=\sum_{\alpha}\int dkB_{k\alpha},\quad B_{k\alpha}=b_{k\alpha}N_{k\alpha}. \tag{28}$$

Здесь $b_{k\alpha}$ — вклад объекта сорта $k\alpha$ в значение B, $N_{k\alpha}$ оператор числа тождественных (одноуровневых) объектов сорта $k\alpha$, выражающийся через операторы рождения $\overset{+}{a}_{k\alpha}$ и уничтожения $a_{k\alpha}$ билинейной формой:

$$N = C_0 + C_1 a\overset{+}{a} + C_2 \overset{+}{a}a. \tag{29}$$

В (29) и далее индексы опущены, так как речь пойдет об алгебрах A (1) операторов рождения — уничтожения объектов фиксированного сорта.

Отметим, что оператор физических объектов (29) дан в билинейной форме (19) и, согласно теореме 6, ее следствиям, определяет множество допустимых алгебр A (1) с параметрами, удовлетворяющими системе уравнений (20), которая в случае оператора (29) имеет вид:

$$C_0 + C_1\lambda\,(1) = 0;\quad C_0 + C_2\,\lambda\,(s) = s,\quad \text{если}\quad s < \infty; \tag{30а}$$

$$C_0 + C_1\lambda\,(n+1) + C_2\lambda\,(n) = n,\quad n \in \overline{1,\ s}. \tag{30б}$$

Если C_1 и C_2 заданы, то при конечном s система $(s+1)$ неоднородных линейных уравнений (30) с условиями $\lambda\,(n) > 0$ либо однозначно определяет все $(s+1)$ неизвестных C_0, $\lambda\,(1)$, . . ., $\lambda\,(s)$, либо не имеет решений. В первом случае подстановка $\lambda\,(n)$ в тождественные соотношения (12) определит допустимую алгебру A (1), во втором — искомой алгебры не существует.

Рассмотрим теперь четыре различных типа тождественных (одноуровневых) физических объектов (см. [1—5]).

1. Квантовые системы (или возбуждения) во вторично-квантованной нерелятивистской квантовой механике: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

2. Кванты релятивистских тензорных полей: $C_1 = 1/2$, $C_2 = 1/2$.

3. Кванты релятивистских спинорных полей: $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/2$.

4. Возбуждения в спиновых системах: $C_1 = -1$, $C_2 = 0$.

Результаты исследований системы (30) в указанных выше случаях в основном заключаются в нижеследующих теоремах.

Теорема 11. *Для квантовых систем (или возбуждений) во вторично-квантованной нерелятивистской квантовой механике допустимы статистики любого ранга с единственной при каждом s алгеброй A (1):*

$$\lambda(n) = n, \quad n \in \overline{1,\ s}; \quad N = \overset{+}{a}a; \tag{31а}$$

$$a\overset{+}{a} = 1 + \overset{+}{a}a - \frac{s+1}{s!}\overset{+}{a}{}^s a^s, \quad \textit{если } s < \infty; \tag{31б}$$

$$a\overset{+}{a} = 1 + \overset{+}{a}a, \quad \textit{если } s = \infty. \tag{31в}$$

Множество (31) содержит только известные алгебры: ферми-алгебру при $s = 1$, суперкалгебру (4) при $1 < s < \infty$ и бозе-алгебру при $s = \infty$.

Теорема 12. *Для квантов релятивистских тензорных полей статистики конечного ранга недопустимы, статистика бесконечного ранга допустима со множеством алгебр $A_\varkappa$ (1), параметризующихся неотрицательным параметром $\varkappa$:*

$$\lambda(2k+1) = 2k + \varkappa, \quad \lambda(2k) = 2k, \quad \varkappa > 0, \quad k \in \overline{0,\ \infty}; \tag{32а}$$

$$N = \frac{1}{2}\left[\overset{+}{a},\ a\right]_+ - \frac{1}{2}\varkappa, \quad a\overset{+}{a} = \varkappa + \frac{2-\varkappa}{\varkappa}\overset{+}{a}a + \ldots \tag{32б}$$

Тождественное соотношение (32б) в обшем случае содержит в себе все операторы $\overset{+}{a}{}^k a^k$, $k \in \overline{0,\ \infty}$ с коэффициентами, определяемыми выражениями (13) при параметрах (32а).

Прм $\varkappa = 1$ (32) есть бозе-алгебра.

Теорема 13. *Для квантов релятивистских спинорных полей статистика бесконечного ранга недопустима, статистики любых конечных рангов допустимы с единственной при каждом s алгеброй A* (1):

$$\lambda(n) = n(s - n + 1), \quad n \in \overline{1,\ s}, \quad 1 \leqslant s < \infty; \tag{33а}$$

$$N = \frac{1}{2}\left[\overset{+}{a},\ a\right]_- + \frac{1}{2}s, \quad a\overset{+}{a} = s + \frac{s-2}{s}\overset{+}{a}a + \ldots \tag{33б}$$

Тождественное соотношение (33б) в общем случае содержит все операторы $\overset{+}{a}{}^k a^k$, $k \in \overline{0,\ s}$ с коэффициентами (13) при параметрах (33а).

При $s = 1$ (33) есть ферми-алгебра.

Теорема 14. *Для возбуждений в спиновых системах статистика бесконечного ранга недопустима, статистики любых конечных рангов допустимы с единственной при каждом s алгеброй A (1):*

$$\lambda(n) = s - n + 1, \quad n \in \overline{1,\ s}, \quad 1 \leqslant s < \infty; \tag{34а}$$

$$N = s - \overset{+}{a}a, \quad a\overset{+}{a} = s - \frac{1}{s}\overset{+}{a}a + \ldots \tag{34б}$$

Соотношение (34б) в общем случае содержит все операторы $\overset{+}{a}{}^k a^k$, $k \in \overline{0,\ s}$ с коэффициентами (13) при параметрах (34а).

При $s = 1$ (34) есть ферми-алгебра.

Теорема 15. *Тождественные кванты релятивистских тензорных полей (целый спин) могут подчиняться только статистике бесконечного ранга с алгеброй операторов рождения — уничтожения (32), частным случаем которой является бозе-алгебра, тождественные кванты релятивистских спинорных полей (полуцелый спин) могут подчиняться только статистике конечного ранга с алгеброй операторов рождения — уничтожения (33), частным случаем которой является ферми-алгебра.*

Последнее утверждение, справедливость которого следует непосредственно из теорем 12 и 13, можно рассматривать как обобщение известной теоремы Паули о связи спина со статистикой при априорном предположении о возможности промежуточных статистик.

6. АЛГЕБРЫ A (1) И АЛГЕБРЫ ПАРАФЕРМИ-ОПЕРАТОРОВ

В разд. 5 мы уже отметили появление известных алгебр операторов рождения — уничтожения во множествах алгебр (31)—(34) для конкретных тождественных (одноуровневых) объектов: алгебру бозе-операторов [частный случай (31) и (32)], алгебру ферми-операторов [частный случай (31), (33) и (34)], алгебру супероператоров (4) фиксированного ранга [частный случай (31)].

Что касается алгебры параферми-операторов (3) фиксированного ранга, то согласно форме (3а) оператора числа объектов в случае тождественных (одноуровневых) объектов эта алгебра должна совпасть с алгеброй A (1) соответствующего ранга из множества (33). Однако указанные алгебры не совпадают при любых рангах, за исключением первого.

Продемонстрируем это утверждение на примере статистики второго ранга. При $s = 2$ из соотношений (33), (12) и (13) для соответствующей алгебры A (1) имеем:

$$N = \frac{1}{2}\left[\overset{+}{a},\ a\right]_{-} + 1, \quad a^3 = 0, \quad a\overset{+}{a}{}^2 = 2\overset{+}{a} - \overset{+}{a}{}^2 a; \tag{35а}$$

$$a\overset{+}{a} = 2 - \frac{1}{2}\overset{+}{a}{}^2 a^2, \quad a^2\overset{+}{a}{}^2 = 4 - 2\overset{+}{a}a. \tag{35б}$$

Непосредственно из (35) следует: $N^3 = 3N^2 - 2N$, т. е. $n \in \overline{0,\ 2}$.

Предположим теперь, что операторы a и $\overset{+}{a}$ из (35) принадлежат алгебре параферми-операторов второго ранга. Тогда справедлив анзац Грина (3а), т. е.:

$$a=b+c,\ \left[b,\ \overset{+}{b}\right]_+=\left[c,\ \overset{+}{c}\right]_+=1,\ [b,c]_-=\left[b,\ \overset{+}{c}\right]_-=0. \tag{36}$$

Подставляя представление (36) в соотношения (35), нетрудно убедиться, что равенства (35а) выполняются, причем

$$N=\overset{+}{b}b+\overset{+}{c}c,\ N^2=N+2\overset{+}{b}\overset{+}{c}bc, \tag{37а}$$

а для выполнения (35б) в дополнение к (36) требуется тождество

$$(\overset{+}{b}-\overset{+}{c})(b-c)-2\overset{+}{b}\overset{+}{c}bc=0. \tag{37б}$$

Домножая его слева на $\overset{+}{b}$ и справа на c в силу соотношений (36), получаем $\overset{+}{b}\overset{+}{c}bc=0$. При этом из (37а) следует противоречие: $N^2 = N$, т. е. $n \in \overline{0,\ 1}$.

Подобного рода алгебраические противоречия возникают при любом ранге $s \geqslant 2$, если операторы $\overset{+}{a}$ и a из алгебры (33) формально записываются в виде соответствующего ранга анзацев Грина из алгебры (3).

Таким образом, алгебра (33) ранга $s \geqslant 2$ формально не совпадает с соответствующего ранга алгеброй (3) для одноуровневых объектов, несмотря на совпадение выражений (33б) и (3а) для оператора N. В то же время, согласно теореме 13, множество алгебр (33) содержит в себе все, допустимые при операторе N в форме (3а) и удовлетворяющие интуитивным определениям 1 и 2, алгебры операторов рождения — уничтожения для тождественных (одноуровневых) объектов.

По-видимому, дело заключается в том, что алгебры (3) даже для одноуровневых объектов имеют различные неприводимые фоковские представления (см. например, [12, 18]). Для алгебр же операторов рождения — уничтожения, обсуждаемых в настоящей работе, единственность и неприводимость представления в пространстве Фока фактически заложены в исходных определениях. Это приводит к появлению тождеств типа (35б), дополняющих соотношения (35а), являющихся фактически определением [18] алгебры параферми-операторов второго ранга для одноуровневых объектов.

Скорее всего соответствие между обсуждаемыми алгебрами в основном заключено в том, что неприводимое представление алгебры (33) эквивалентно максимальному неприводимому представлению соответствующего ранга алгебры (3) для одноуровневых объектов, в котором соотношения типа (35б) и (37б) превращаются в тождества. Существование подобных неприводимых представлений алгебры (3) продемонстрировано, например, в работе [18].

7. СРЕДНИЕ ЧИСЛА ЗАПОЛНЕНИЯ ПРИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СТАТИСТИКАХ

Рассмотрим систему физических объектов, распределенных по энергетическим уровням $\varepsilon_k > 0$ и подчиняющихся квантовым статистикам рангов s_k на уровнях k соответственно.

Пусть объекты не взаимодействуют, а система находится в термостате с температурой $\Theta = kT$.

Если число объектов в системе не фиксировано, то согласно общим положениям статистической физики (см., например, [40, 41]) вероятность $W(n)$ состояния $|(n)\rangle = |\ldots, n_k, \ldots\rangle$ запишется в виде

$$W(n) = \exp\left\{\frac{1}{\Theta}\left(\Omega + \sum_k (\mu - \varepsilon_k) n_k\right)\right\}, \quad \sum_{(n)} W_{(n)} = 1, \tag{38}$$

где μ — химический потенциал; Ω — «большой» термодинамический потенциал; n_k — число объектов на уровне ε_k, $n_k \in \overline{0, s_k}$. При этом большая статистическая сумма

$$Z = \sum_{(n)} \prod_k \xi_k^{-n_k} = Z(\ldots, \xi_k, s_k, \ldots), \quad \text{где } \xi_k = e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{\Theta}}, \tag{39}$$

позволяет вычислить все физические характеристики системы, в том числе и средние числа заполнения уровней:

$$\overline{n}_k = \sum_{(n)} n_k W_{(n)} = \partial_{\xi_k} \ln Z. \tag{40}$$

Вычисление по формулам (38)—(40) дает:

$$Z = \prod_k Z(\xi_k, s_k), \quad \overline{n}_k = \overline{n}(\xi_k, s_k), \tag{41}$$

где введены обозначения

$$Z(\xi, s) = \frac{\xi^{s+1} - 1}{\xi^s(\xi - 1)}, \quad \overline{n}(\xi, s) = \frac{\xi(\xi^s - 1) - s(\xi - 1)}{(\xi - 1)(\xi^{s+1} - 1)}. \tag{42}$$

Из (42), в частности, следует:

$$\overline{n}(\xi, 1) = \frac{1}{\xi + 1}; \quad \overline{n}(\xi, 2) = \frac{2 + \xi}{1 + \xi + \xi^2}; \quad \overline{n}(\xi, \infty) = \frac{1}{\xi - 1}, \tag{43}$$

т. е. при $s = 1$ и $s = \infty$ результаты (42), как и следовало ожидать, переходят в известные выражения для статистик Ферми — Дирака Бозе — Эйнштейна соответственно.

Отметим, что при $1 < s < \infty$ результаты (42) полностью совпадают с соответствующими выражениями, полученными для парастатистик (см., например, [41]). Однако такое совпадение существует лишь до тех пор, пока объекты системы не взаимодействуют и сохраняется аддиативность энергии, т. е. в рассмотрении участвуют фактически лишь невырожденные собственные значения $n_k \in \overline{0,\ s_k}$ операторов чисел объектов N_k.

При существенно квантовом рассмотрении с включением взаимодействия в статистический оператор Z наряду с операторами N_k чисел объектов войдут операторы рождения $\overset{+}{a}_k$ и уничтожения a_k алгебры $A\ (K)$, $k \in K$, соответствующей рассматриваемой (фиксированной) квантовой статистике $\ldots, s_k, \ldots \in s\ (K)$. При этом результаты конкретных расчетов будут зависеть не только от рангов s_k, как это имеет место для формул (41), но и от параметров выбранной для описания системы алгебры $A\ (K)$ [напомним, что, согласно следствию 1.2, квантовой статистике $s\ (K)$ соответствует множество алгебр $A\ (K)$].

8. КВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ТЕОРИИ С ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СТАТИСТИКОЙ

Пусть квантовая система состоит из тождественных (одноуровневых) объектов, подчиняющихся статистике ранга s.

Эволюция состояния $|\,\psi\rangle$ такой системы согласно основным положениям квантовой теории определяется соотношениями:

$$\mathrm{i}\,\partial_t\,|\,\psi\rangle = H\,|\,\psi\rangle,\quad H = EN + V,\quad |\,\psi\rangle = \sum_{n=0}^{s} \psi_n\,(t)\,|\,n\rangle, \tag{44}$$

где EN — оператор энергии свободной системы; N — оператор числа объектов и V — оператор энергии взаимодействия (самодействия, или взаимодействия с другими системами), принадлежащие алгебре A (1) операторов рождения — уничтожения, однозначно определяемой (см. следствие 2.1) рангом статистики s и параметрами $\lambda\,(n) > 0$, $n \in \overline{1,\ s}$.

Операторы алгебры A (1) можно всегда записать в нормальной форме (см. следствие 3.1). При этом оператор N имеет вид (16), а наиболее общий вид оператора взаимодействия V при естественных физических условиях $H^+ = H$ и $\langle 0\,|\,H\,|\,0\rangle = 0$ есть

$$V = \sum_{k=1}^{s} f_k \overset{+}{a}{}^k a^k + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{n=1}^{s-k} g_{kn} \overset{+}{a}{}^k a^{k+n} + \text{э.с.} \tag{45}$$

Здесь f_k — действительные; g_{kn} — комплексные константы взаимодействия размерности энергии.

Исследуем вопрос о квантовых переходах $|\,n\rangle \to |\,n'\rangle$.

Вероятность $W_{nn'}$ состояния $|n'\rangle$ в момент времени $t \geqslant 0$ при условии, что в момент $t=0$ было состояние $|n\rangle$, согласно (44) определится как

$$W_{nn'}(t) = |\langle n' | \psi(t)\rangle|^2 = |\psi_{n'}(t)^2| \text{ при } |\psi(0)\rangle = |n\rangle. \quad (46)$$

При $s=2$ и дополнительном условии $H|0\rangle = 0$ на гамильтониан системы задача (44)—(46) решается точно (соответствующие аналитические выражения получены в [48]).

При стандартном предположении о малости констант g_{kn} некоммутирующих с N взаимодействий из (45) в низшем порядке теории возмущений вероятность (46) перепишется в виде

$$W_{nn'}(t) = \left|\delta_{nn'} - \mathrm{i}\int_0^t \langle n | v(\tau) | n'\rangle\, d\tau\right|^2, \quad (47\text{а})$$

где $v(t)$ — оператор возмущения в представлении взаимодействия:

$$v(t) = e^{\mathrm{i}H_0 t}(H - H_0)\, e^{-\mathrm{i}H_0 t}, \quad H_0 = EN + 2\sum_{k=1}^{s} f_k \overset{+}{a}{}^k a^k. \quad (47\text{б})$$

При решении задачи (47) удобно использовать матричное представление (18) для образующих алгебры A (1). Вычислив матрицы операторов (47б) для вероятностей (47а), окончательно получим:

$$W_{k,\,k+l}(t) = 4\frac{\Gamma_{k+l}}{\Gamma_k}\left|\sum_{m=0}^{k} g_{ml}\frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-m}}\right|^2 \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{k+l} - \varepsilon_k)\,t\right]}{(\varepsilon_{k+l} - \varepsilon_k)^2}, \quad (48\text{а})$$

где $0 \leqslant k < k+l \leqslant s$ и введены обозначения

$$\varepsilon_n = nE + 2\sum_{m=1}^{n} f_m \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n-m}}, \quad \Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_k = \prod_{n=1}^{k}\lambda(n) > 0. \quad (48\text{б})$$

Формулы (48) показывают, что в системе тождественных (одноуровневых) объектов, подчиняющихся квантовой статистике любого ранга, под действием возмущения (самодействия или взаимодействия) возможны осцилляции между состояниями с заданными числами объектов.

Амплитуда и период указанных осцилляций определяются не только рангом статистики и параметрами взаимодействия, но и, в соответствии с выводом разд. 7, существенно зависят от параметров алгебры операторов рождения — уничтожения.

9. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ СТАТИСТИКИ И ПРИНЦИП ПАУЛИ

Вопрос о теоретическом описании возможного (слабого) нарушения принципа Паули обсуждался в [43—48]. Подобные исследования базируются на предположении о том, что система с тождественными (одноуровневыми) объектами, которые на данном этапе развития физики считаются фермионами, на самом деле может находиться не только в состоянии вакуума $|0\rangle$ и в одночастичном состоянии $|1\rangle$, но и (хотя бы с малой вероятностью) в двухчастичном состоянии $|2\rangle$.

Для математической реализации указанной идеи предлагается постулировать [44—48], что в пространстве состояний рассматриваемой системы, натянутом на ортонормированный базис $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, действуют операторы a и $\overset{+}{a}$, связанные со статистикой второго ранга.

В работах [45, 47] рассматривается алгебра параоператоров с малым параметром, являющаяся частным случаем алгебр «пара-ε-операторов», введенных и достаточно хорошо изученных в [17, 18]. По мнению авторов статьи [45], такая алгебра обеспечивает непротиворечивое математическое описание слабого нарушения принципа Паули в рамках локальной квантовой теории поля. Однако в [47] показано, что малый параметр в алгебре параоператоров ведет к нарушению требования положительности метрики пространства состояний.

В работах [44, 46, 48] для теоретического описания нарушения принципа Паули используются фактически частные случаи алгебр A (1) или их произведения, причем рассматриваются лишь конкретные частные взаимодействия. Рассмотрим эту задачу в более общем виде.

Как показано в предыдущих разделах, любая A (1) с $s=2$ задается двумя параметрами, $\lambda(1)>0$ и $\lambda(2)>0$, и содержит систему тождеств:

$$\overset{+}{a}a^2=\lambda(2)\,\overset{+}{a}-\frac{\lambda(2)}{\lambda(1)}\,\overset{+}{a}{}^2a,\quad a^3=0; \tag{49а}$$

$$\overset{+}{a}a=\lambda(1)+\frac{\lambda(2)-\lambda(1)}{\lambda(1)}\,a\overset{+}{a}-\frac{\lambda^2(1)+\lambda^2(2)-\lambda(1)\lambda(2)}{\lambda^2(1)\lambda(2)}\,\overset{+}{a}{}^2a^2; \tag{49б}$$

$$a^2\overset{+}{a}{}^2=\lambda(1)\lambda(2)-\lambda(2)\,\overset{+}{a}a+\frac{\lambda(2)-\lambda(1)}{\lambda(1)}\,\overset{+}{a}{}^2a^2. \tag{49в}$$

Оператор числа объектов и наиболее общий вид оператора энергии взаимодействия в нормальной форме запишутся с использованием параметров алгебры и «эффективных» констант g_{01} — линейного, g_{02} и $f_1=f_1^*$ — билинейного, g_{11} — трехлинейного и $f_2=f_2^*$ — четырехлинейного взаимодействий в виде

$$N=\frac{1}{\lambda(1)}\,\overset{+}{a}a+\frac{2\lambda(1)-\lambda(2)}{\lambda^2(1)\lambda(2)}\,\overset{+}{a}{}^2a^2; \tag{50}$$

$$V=g_{01}a+g_{02}a^2+f_1\overset{+}{a}a+g_{11}\overset{+}{a}a^2+f_2\overset{+}{a}{}^2a^2+\text{э.с.} \tag{51}$$

Согласно результатам (48) для вероятностей осцилляций между состояниями с заданными числами объектов при взаимодействии (51) имеем:

$$W_{01}=\frac{4\lambda(1)|g_{01}|^2}{E_1^2}\sin^2\frac{E_1t}{2},\quad E_1=E+2\lambda(1)f_1; \tag{52а}$$

$$W_{02}=\frac{4\lambda(1)\lambda(2)|g_{02}|^2}{E_2^2}\sin^2\frac{E_2t}{2};\quad E_2=2E+2\lambda(2)f_1+2\lambda(1)\lambda(2)f_2; \tag{52б}$$

$$W_{12}=\frac{4\lambda(2)|g_{01}+\lambda(1)g_{11}|^2}{E_3^2}\sin^2\frac{E_3t}{2};\ E_3=E_2-E_1. \tag{52в}$$

Отметим, что малость вероятностей (52б), (52в) осцилляций с участием состояния $|2\rangle$, требуемая для слабого нарушения принципа Паули, может обеспечиваться либо малостью параметра $\lambda(2)$, либо малостью величин g_{02} и $g_{01}+\lambda(1)g_{11}$, характеризующих взаимодействие и алгебру.

Первый случай фактически реализован в [44, 46], где выбраны алгебры (49) с $\lambda(1)=1$ и $\lambda(2)\approx 0$. Однако такой выбор параметров приводит к серьезным трудностям при обобщениях на случай релятивистской квантовой теории поля, что было так или иначе отмечено самими авторами (см. также [47]).

Второй случай реализуется при конечных параметрах алгебры $\lambda(1)=\lambda(2)=2$ и специфических ограничениях на константы взаимодействия (51), а именно: $g_{02}\approx 0$ и $g_{01}\approx -2g_{11}$. При этом соотношения (49) определяют алгебру (35), и обобщение на теорию поля затруднений не вызывает. Однако теперь слабое нарушение принципа Паули имеет динамический, а не алгебраический характер.

В целях последующего сравнения результатов рассмотрим еще задачу об осцилляциях в случае, когда a и $\overset{+}{a}$ принадлежат ферми-алгебре,

$$N=\overset{+}{a}a=\frac{1}{2}\left[\overset{+}{a},a\right]_-+\frac{1}{2},\quad a\overset{+}{a}=1-\overset{+}{a}a,\quad a^2=0, \tag{53}$$

и состояния $|2\rangle$ не существует. Здесь $s=1$ и $\lambda(1)=1$, поэтому из результата (48) при взаимодействии (51) имеем

$$W_{01}^{(F)}=\frac{4|g_{01}|^2}{E'^2}\sin^2\frac{E't}{2},\quad E'=E+2f_1. \tag{54}$$

Существенно отметить, что результаты (52а) и (54) совпадают при $\lambda(1)=1$ и различаются (по амплитуде и периоду) при $\lambda(1)=2$.

Поскольку при динамическом характере слабого нарушения принципа Паули $\lambda(1)=2$, то формулы (52а) и (54) для W_{01} не совпадают даже в случае исчезновения (теперь лишь по причине специфических констант g_{01} и g_{02} взаимодействия) вероятностей W_{02} и W_{12}.

Таким образом, процесс перехода $|0\rangle \rightleftarrows |1\rangle$ «чувствует» существование состояния $|2\rangle$ даже в том случае, когда оно в переходах не участвует. По-видимому, этот эффект мог бы быть использован для экспериментального поиска объектов, подчиняющихся промежуточным статистикам (в дополнение к явлениям, поиск которых предлагается в работах [43, 46]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
2. **Бьеркен Д. Д., Дрелл С. Д.** Релятивистская квантовая теория: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
3. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.** Общие принципы квантовой теории поля. М: Наука, 1987.
4. **Давыдов А. С.** Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
5. **Березин Ф. А.** Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
6. **Klein O.**//J. Phys. Rad. 1938. Vol. 9. P. 1—5.
7. **Wigner E.**//Phys. Rev. 1950. Vol. 71. P. 711—712.
8. **Стритер Р., Вайтман А.** PCT, спин и статистика и все такое: Пер. с англ. М.: Наука, 1966.
9. **Yang L. M.**//Phys. Rev. 1951. Vol. 84, P. 788—790.
10. **Green H. S.**//Phys. Rev. 1953. Vol. 90. P. 270—273.
11. **Волков Д. В.**//ЖЭТФ. 1959. Т. 36, С. 1560—1566.
12. **Chernikov N. A.**//Acta Phys. Polon. 1962. Vol. XXI. P. 51—60.
13. **Greenberg O. W., Messiah A. M.**//Phys. Rev. 1965. Vol. B138. P. 1155—1167.
14. **Gallindo A., Indurian F.**//Nuovo cimento. 1963. Vol. 30. P. 140—152.
15. **Yamada M.**//Nucl. Phys. 1968. Vol. 86. P. 596—606.
16. **Govorkov A. B.**//Intern. J. Theor. Phys. 1973. Vol. 7. P. 49—66.
17. **Говорков А. Б.**//ТМФ. 1983. Т. 54. С. 361—371.
18. **Говорков А. Б.**//ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 1229—1272.
19. **Roman P., Aghassi J.** Preprint Boston Univ. BU-EP-5-66, 1966.
20. **Kuryshkin V.V.**//Ann. Fond. L. de Broglie. 1980. Vol. 5. P. 111—126.
21. **Santhanam T. S.**//Phys. Lett. 1976. Vol. A56. P. 345—352.
22. **Madivanane S., Satyanarayana M. V.**//Lett. Nuovo cimento. 1984. Vol. 40. P. 19—22.
23. **Курышкин В. В.** Депонент ВИНИТИ № 3936—76, 1976.
24. **Aric M., Coon D.**//J. Math. Phys. 1976. Vol. 17. P. 524—528.
25. **Siafricas P., Janussis A., Brodimas G., Papaloucas L.**//Lett. Nuovo cimento. 1983. Vol. 37. P. 119—123.
26. **Jannussis A., Vavougios D.**//Hard. J. 1987. Vol. 10. P. 75—78.
27. **Балашова С. А.**//Актуальные проблемы квантовой механики и статистической физики. М.: Изд-во УДН, 1988. С. 37—42.
28. **Грачев Д. Д., Дубков С. Л., Курышкин В. В.**//Проблемы статистической физики и теории поля. М.: Изд-во УДН, 1982. С. 157—168.
29. **Wu Y. S.**//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 2103—2106.
30. **Ringwood G. A., Woodward L. M.**//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1980—1983.
31. **Su W. P.**//Phys. Rev. 1986. Vol. B34. P. 1031—1033.
32. **Грачев Д. Д.**//Изв. вузов. Физика. 1981. № 12. С. 56—59.
33. **Grachev D. D., Kundu A.**//Ind. J. Pure and Appl. Phys. 1982. Vol. 20. P. 393—394.
34. **Курышкин В. В., Энтральго Э. Э.**//Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. Дубна: ОИЯИ, 1984. Д17-84-850. Т. 1. С. 431—437.

35. **Курышкин В. В.** Депонент ВИНИТИ № 8456-В87, 1987.
36. **Курышкин В. В., Энтральго Э. Э.**//Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. Дубна: ОИЯИ, 1987. Д17-88-95. С. 241—245.
37. **Kuryshkin V. V.**//Intern. J. Theor. Phys. 1988. Vol. 27. P. 1383—1393.
38. **Halperin B. J.**//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 52. P. 1583—1586.
39. **Tao R., Wu Y. S.**//Phys. Rev. 1985. Vol. B31. P. 6859—6860.
40. **Терлецкий Я. П.** Статистическая физика. М.: Высшая школа, 1966.
41. **Исихара А.** Статистическая физика: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
42. **Курышкин В. В., Энтральго Э. Э.**//Проблемы квантовой теории поля. Дубна: ОИЯИ, 1987. Д2-87-798. С. 35—41.
43. **Kusmin V. A.**//Third Seminar Quant. Grav., World Sci. 1984. P. 270—273 .
44. **Игнатьев А. Ю., Кузьмин В. А.**//ЯФ. 1987. Т. 46. С. 786—790.
45. **Greenberg O. W., Mohapatra R. N.**//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 2507—2510.
46. **Окунь Л. Б.**//Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. С. 420—423.
47. **Govorkov A. B.** Preprint JINR E2-88-136. Dubna, 1988.
48. **Балашова С. А., Курышкин В. В.** Депонент ВИНИТИ № 2749-В88, 1988.