

## РЕЗОНАНСЫ В ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМАХ

*К. Мёллер*

Центральный институт ядерных исследований, Дрезден

*Ю.В.Орлов*

Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Дан обзор работ по теории резонансов в трехчастичных системах. Более подробно рассмотрен метод, использующий аналитическое продолжение интегральных уравнений Фаддеева на нефизические листы римановой поверхности энергии. Особенности метода изучаются на примере потенциальной задачи двух тел. В этом случае преобразование Фурье, нормировка и расчет матричных элементов в импульсном представлении обобщены на случай гамовского состояния. Главное внимание уделено системам из нуклонов. Для этих систем дана также сводка результатов экспериментальных исследований за последние 20 лет. Кратко обсуждаются проблемы учета кулоновского взаимодействия. Отмечены применения данной теории к другим адронным системам, включающим мезоны и антинуклоны.

The study of the theory of resonances in the three-body systems are reviewed. The method using the analytical continuation of the Faddeev integral equations to the unphysical Riemann energy sheets, is considered in more details. The specific features of the method are examined, taking, on the example, the two-particle problem in the potential theory. In this case Fourier transformation, normalization and calculation of the matrix elements in the momentum representation are generalized to include Gamow states. Emphasis is given to the nucleon systems. The experimental investigations of these systems during the last two decades are also reviewed. The problem of taking into account the Coulomb interaction is discussed in brief. The application of the theory to other hadron systems including mesons and antinucleons are noted.

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы все больший интерес представляют резонансные состояния малочастичных систем. Квазистационарные уровни легчайших ядер являются важным объектом экспериментальных и теоретических исследований в связи с проблемой термоядерного синтеза, а также с поиском долгоживущих состояний вне области стабильности. Важная роль резонансов в физике ядерных реакций, включая проблемы астрофизики, хорошо известна.

Разработка методов теоретического исследования резонансов имеет давнюю историю, восходящую к работам Гамова [1] по описанию  $\alpha$ -распада ядер и Брейта — Вигнера [2, 3]. Формула Брейта — Вигнера традиционно используется при анализе максимумов в сечениях ядерных реакций. Вместе с тем за последние 15 лет получено

много важных результатов, опубликованных в большом числе журнальных публикаций. К сожалению, в известных книгах по теории рассеяния [4, 5] резонансным процессам и теории гамовских состояний уделено недостаточно места. Информация в них, естественно, неполна, поскольку они опубликованы более 15 лет назад. Это послужило одной из причин написания данного обзора.

С формальной точки зрения описания связанного и нестабильного гамовского состояния эквивалентны, поскольку радиальные волновые функции этих состояний отвечают одному и тому же условию излучения в форме расходящейся сферической волны, что соответствует нулю функции Йоста, или полюсу  $S$ -матрицы. Однако, поскольку для нестабильных состояний этих полюсы расположены на нефизических листах римановой поверхности энергии  $E$  ( $\text{Im} \sqrt{E} < < 0$ ), гамовская волновая функция испытывает осцилляции с экспоненциально растущей амплитудой. Это приводит к известным трудностям как при вычислении гамовских волновых функций, так и при их нормировке (долгое время они считались ненормируемыми либо нормировались в конечной части пространства [6]). Проблемы возникают и при вычислении матричных элементов, определяющих сечение перехода в нестабильное состояние. Реакции такого типа изучались в литературе (см., например, [7—13]). Одним из возможных путей решения задачи является метод комплексного скейлинга, основанный на так называемой  $ABC$ -теореме [14]. Довольно подробное изложение метода комплексного скейлинга содержится в [15]. Достаточные условия справедливости  $ABC$ -теоремы сформулированы с математической строгостью в [16]. Применение к ядерным резонансам рассмотрено, например, в [17]. Метод основан на решении квантовомеханической задачи не на действительной оси  $r$ , а на луче (или более сложной линии) в первом квадранте комплексной плоскости  $r$ . Спектр связанных состояний дополняется при этом спектром резонансных полюсов, расположенных между действительной осью и соответствующей линией в четвертом квадранте комплексной плоскости импульса. Важно, что преобразованные волновые функции являются квадратично интегрируемыми и, следовательно, нормируемыми, хотя их точный расчет довольно сложен. Кроме того, метод распространяется на системы с заряженными частицами, поскольку кулоновский потенциал удовлетворяет условиям  $ABC$ -теоремы. Более подробное обсуждение метода комплексного скейлинга и его применений выходит за рамки настоящего обзора. Будут приведены в основном результаты, полученные в импульсном представлении на основе аналитического продолжения интегральных уравнений теории рассеяния.

Основной прогресс в теории систем с небольшим числом частиц связан с работами Фаддеева, который сформулировал математически корректные интегральные уравнения задачи трех тел и доказал их фредгольмовость [18]. Ранее в работе [19] Г. В. Скорняков и К. А. Тер-Мартиросян получили уравнения для системы трех тел в

приближении нулевого радиуса сил между частицами. Эти уравнения, хотя и не вполне математически строгие, поскольку требуют обрезания интеграла на больших импульсах, уже содержат важные свойства трехчастичной динамики. Обобщение на систему с большим числом частиц выполнено в [20]. К сожалению, технические сложности решения интегральных уравнений сильно возрастают с увеличением числа частиц. В литературе известно лишь несколько примеров решения уравнений Фаддеева — Якубовского для четырех тел. Математические проблемы квантовой теории рассеяния и методы решения задач для малочастичных систем изложены в [21—23]. Однако теория резонансных состояний в них по существу отсутствует. При исследовании резонансов в системах с числом частиц  $\geq 4$  приходится прибегать к той или иной приближенной формулировке микроскопического описания типа, например, метода резонирующих групп [24] либо к ядерным моделям. Отметим здесь динамическую мультикластерную модель [25].

В настоящем обзоре главное внимание уделено расчетам, использующим интегральные уравнения Фаддеева для трехчастичных систем с короткодействующими силами. Практические применения относятся в основном к двух- и трехнуклонным системам. Изучаются траектории полюсов  $S$ -матрицы и их общие свойства, включая эффект Ефимова [26, 27] и теорему симметрии для связанных и виртуальных уровней [28]. Первые результаты по применению метода интегральных уравнений к нестабильным системам получены в работах [29—38]. Учет кулоновского взаимодействия требует модификации метода даже для связанных состояний. Один из возможных путей — использование экранированного кулоновского потенциала (см., например, работу [39], в которой рассматривается  $pd$ -рассеяние, и ссылки в ней). При этом удается преодолеть проблему кулоновских сингулярностей в ядре интегрального уравнения. Исследованию малочастичных систем с заряженными частицами посвящено большое число публикаций, начиная с работ Нобла [40] и Веселовой [41]. По-видимому, удобным методом таких исследований является развиваемый Меркурьевым и сотрудниками подход, основанный на решении уравнений Фаддеева в конфигурационном пространстве (см., например, [42, 43]).

Материал обзора распределен следующим образом. В разд. 1 даны определения резонансов и изложены методы анализа резонансных явлений, включая теоретические методы расчета резонансов (мы не претендуем здесь на полноту списка методов, встречающихся в литературе). Разд. 2 содержит сводку основных результатов экспериментальных исследований резонансов в трехнуклонных системах. В разд. 3 рассмотрена теория нестабильных состояний для задачи двух тел. Информация о двухчастичных подсистемах, включая их резонансные полюсы, необходима для решения трехчастичной задачи. Кроме того, на примере потенциальной задачи двух тел легче прослеживаются основные моменты метода аналитического про-

должения интегрального уравнения на нефизический лист энергии. Подробно обсуждается обобщение фурье-преобразования, расчета матричных элементов и нормировки на случай гамовских состояний. В разд. 4 излагается трехчастичная теория резонансных состояний, основанная на аналитическом продолжении интегральных уравнений Фаддеева на нефизическое листы относительно двух- и трехчастичного разрезом в комплексной плоскости энергии. Изучаются аналитические свойства решения. В разд. 5 рассмотрена реализация аналитического продолжения интегрального уравнения путем деформации контура интегрирования с целью обойти особенности его ядра. В разд. 6 приведены численные результаты для виртуальных и резонансных состояний в системах двух и трех нуклонов и их теоретическая интерпретация. Сводка приведенных результатов подводит итог исследований, позволяющий сделать вывод о том, что маловероятно обнаружить близкие к физической области резонансы в  $3N$ -системе, за исключением виртуального полюса в  $nd$ -рассеянии и соответствующего ему полюса  $pd$ -системы с квантовыми числами  ${}^3\text{H}$  и  ${}^3\text{He}$ .

В заключение обсуждается распространение изложенного метода на другие трехадронные системы и дан ряд ссылок на работы по исследованию резонансов в этих системах.

Если не оговорено, используется система единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ .

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗОНАНСОВ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Хотя общие вопросы теории нестабильных состояний как в одноканальных, так и в многоканальных задачах изложены, например, в [3—6], мы все же сочли целесообразным привести ниже для полноты несколько известных элементарных формул, поскольку они позволяют сделать вывод о предпочтительности определения резонанса как полюса  $S$ -матрицы. Множество существующих определений и подходов для анализа резонансов дает одинаковые результаты для положений и ширин резонансов, когда резонансы являются достаточно узкими, т.е. когда комплексные полюсы  $S$ -матрицы расположены близко к физической области энергии. Для широких резонансов соответствующие результаты могут отличаться существенным образом. На первый взгляд, кажется, что с практической точки зрения это неважно, поскольку с ростом ширины само понятие «резонанс» теряет конкретный смысл в связи с тем, что исчезает резонансная структура в сечении как функции энергии. Однако для более глубокого понимания динамической природы резонансных процессов важно иметь универсальное определение резонанса как полюса  $S$ -матрицы, которое обобщается и на случай релятивистской теории. Перечислим кратко наиболее распространенные способы анализа резонансов и методы их теоретического исследования.

**Сравнение функции возбуждения с фазовым объемом.** Четкие пики в зависимости функции возбуждения [сечения реакции  $\sigma(E)$ ] от энергии рассматриваются как резонансы в случае малых ширины  $\Gamma$  и слабого нерезонансного фона. В случае большой ширины любое существенное отклонение  $\sigma(E)$  от фазового объема можно интерпретировать как резонансную структуру. Характер структуры может быть различным — например, в сечении может наблюдаться не максимум, а минимум, если интерференция с фоном деструктивная [5]. В этих случаях необходимы более тщательный анализ парциальных амплитуд и привлечение теоретических соображений, поскольку вывод неоднозначен.

**Фазовый анализ.** Рассмотрим для простоты рассеяние двух бесспиновых частиц для случая, когда взаимодействие между ними описывается центральным потенциалом. Полное сечение выражается через фазы рассеяния  $\delta_l(k)$  с орбитальным моментом  $l$  известным соотношением

$$\sigma(k) = 4\pi/k^2 \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(k), \quad (1)$$

$$E = \hbar^2 k^2 / 2\mu,$$

где  $\mu$  — приведенная масса. Очевидно, что резонанс (максимум сечения) при  $k = k_R$  отвечает условию

$$\sin^2 \delta_l(k) = \max, \quad \delta_l(k_R) = \pm (2n+1) \pi/2, \quad (2)$$

где  $n$  — целое число.

Таким образом, для нахождения резонансной энергии требуется осуществить фазовый анализ и найти значение энергии  $E = E_R$ , при которой выполняется условие (2). Ширина резонанса  $\Gamma$  определяется быстротой изменения фазы при прохождении резонансной области.

**Диаграмма Арганда.** Метод, использующий диаграмму Арганда, представляет собой модификацию метода фазового анализа. Введем  $S$ - и  $T$ -матрицы соотношениями

$$S_l(k) = \exp [2i\delta_l(k)]; \quad (3)$$

$$T_l(k) = (S_l - 1)/2i, \quad (4)$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} T_l(k) &= \cos \delta_l(k) \sin \delta_l(k), \\ \operatorname{Im} T_l(k) &= \sin^2 \delta_l(k). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из (5) получаем уравнение круга в комплексной плоскости  $T_l$ :

$$(\operatorname{Re} T_l(k))^2 + (\operatorname{Im} T_l - 1/2)^2 = 1/4. \quad (6)$$

Для узкого резонанса Брейта — Вигнера вблизи резонансной энергии имеем

$$T_l(E) = \frac{-\Gamma/2}{E - (E_R - i\Gamma/2)}. \quad (7)$$

Прохождению области резонанса в интервале от  $E = E_R - \Gamma/2$  до  $E = E_R + \Gamma/2$  соответствует верхний полукруг на диаграмме Арганда (рис. 1) в направлении против часовой стрелки. Полный (унитарный) круг отвечает изменению фазы от 0 до  $\pi$  (с учетом неопределенности в фазе  $\pm \pi$ ). «Идеальная» форма диаграммы Арганда имеет место лишь в одноканальном случае. В многоканальной задаче, т.е. при наличии поглощения, когда фаза  $\delta_l$  комплексная, реальная диаграмма всегда лежит внутри унитарного круга и может иметь сильно искаженную форму. При этом вопрос о том, существует ли резонанс или нет, может и не иметь однозначного ответа.

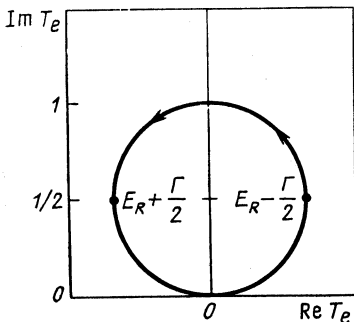


Рис. 1. Диаграмма Арганда для одноканальной задачи

$K$ -матрица имеет полюсы. Из формул (4) и (7) получаем выражение для  $S$ -матрицы

$$S_l(E) = \frac{E - E_R - i\Gamma/2}{E - E_R + i\Gamma/2}, \quad (11)$$

справедливое для узкого изолированного резонанса, когда вкладом фона можно пренебречь. Из (11) видно, что  $S$ -матрица имеет полюс в точке  $E = E_R - i\Gamma/2$ . Это — хорошо известный результат. Определение резонансов как полюсов  $S$ -матрицы наиболее удобно для теоретического анализа по следующим причинам.

1. Часто встречаются ситуации, когда «идеализированные» условия (2), (8) и (10) нигде на действительной оси не выполняются, тогда как существование полюсов  $S$ -матрицы имеет место и в реальных задачах независимо от ширины. Таким образом, отождествление резонанса с полюсом  $S$ -матрицы является реальным обобщением понятия о резонансном поведении амплитуды рассеяния.

2. Связанные, виртуальные и резонансные состояния, отвечающие одному и тому же условию излучения (расходящаяся волна на бесконечности), можно трактовать на единой основе. Общее происхождение полюсов  $S$ -матрицы можно увидеть из того факта, что для перечисленных состояний они лежат на общих полюсных траекториях,

Полюсы  $S$ -матрицы. Условие (2) с помощью (3), (4) можно переписать в альтернативной форме

$$S_l(E_R) = -1, \quad T_l(E_R) = i \quad (8)$$

или, вводя  $K$ -матрицу

$$K_l = \frac{2T_l T_l^*}{T_l + T_l^*} = \operatorname{tg} \delta_l, \quad (9)$$

в виде эквивалентного условия

$$K_l(E_R) = \infty. \quad (10)$$

Таким образом, в резонансных точках на действительной оси энергии

описывающих зависимость положения полюса на комплексной плоскости энергии от силы взаимодействия (либо другого параметра). По этой причине можно рассматривать виртуальные и резонансные состояния как «несостоявшиеся» связанные состояния. Можно установить критическую силу взаимодействия, при которой состояние перестает быть связанным, т.е. переходит в непрерывный спектр.

Появление резонансного максимума в сечении рассеяния не следует отождествлять с близостью расположения резонансного полюса к действительной оси энергии ( $E \geq 0$ ), поскольку из-за унитарности  $S$ -матрицы на том же расстоянии находится и нуль  $S$ -матрицы [см. (11)]. Правильнее говорить о быстром изменении  $S$ -матрицы и соответственно фазы рассеяния  $\delta(E)$  при изменении  $E$  вблизи полюса [при этом  $|\sin^2 \delta|$  в (1) достигает максимального значения]. Если разрешение по энергии  $\Delta E$  в эксперименте, отвечающее размеру падающего волнового пакета, достаточно для наблюдения резонанса с шириной  $\Gamma$  ( $\Delta E \ll \Gamma$ ), то можно показать [5, 6], что ширина квазистационарного состояния  $\Gamma = \hbar/\tau$  определяется временем задержки частицы в потенциальной яме

$$\tau = \frac{1}{v_0} \frac{d\delta_l}{dp} = \frac{d\delta_l}{dE}.$$

Отсюда следует, что оценку ширины квазистационарного состояния можно получить, измерив скорость изменения фазы рассеяния в резонансной области энергии.

**Теоретические методы исследования резонансов.** Кратко перечислим теоретические методы, использующие трактовку резонансов в терминах полюсов  $S$ -матрицы. Приближение эффективного радиуса [44, 45], удобное для изучения полюсов, расположенных вблизи порога (см., также [46]), было с учетом модификаций за счет кулоновского поля применено к теории ядерного сдвига уровней протон-антипротонного атома [47] и к системе  $pp$  в синглетном по спину состоянии  $^1S_0$  в работе [48]. В [48] впервые был получен неожиданный результат — смещение хорошо известного виртуального уровня  $np$ -системы с мнимой оси в четвертый квадрант комплексной плоскости импульса из-за дополнительного кулоновского отталкивания. В области параметров взаимодействия, близких к образованию связанного состояния, используется расчет траекторий Редже [49] для полюсов  $S$ -матрицы в комплексной плоскости момента количества движения.

В работах [50, 51] для расчета траекторий виртуальных и резонансных уровней было предложено аналитическое продолжение по константе связи  $\lambda(E)$ , входящей в качестве множителя в потенциал взаимодействия  $V = \lambda(E) V(r)$ . Исходными являются значения  $\lambda(E)$  в области связанных состояний. Аналитическое продолжение в область  $\text{Im} \sqrt{E} < 0$  осуществляется с помощью ашпроксиманта Паде.

В работах [52, 53] был предложен и развит метод суммирования расходящихся рядов теории возмущений для собственных значений

энергии  $E = E(\mu)$ , отвечающих виртуальным и резонансным состояниям для ряда экранированных кулоновских потенциалов. Суммирование степенного ряда по показателю экспоненты  $\mu$  потенциала  $V(r) = f(r) \exp(-\mu r)$  производилось с помощью аппроксиманта Паде. В случае резонансов более точный результат дает рассмотрение степенного ряда по переменной  $z = (1+w)/(1-w)$ , где  $w = (1 - \mu/\mu_{cr})^{1/2}$ ,  $\mu_{cr}$  — значение параметра  $\mu$ , когда энергия уровня равна нулю. Затем строится аппроксимант Паде по переменной  $z$ . Ниже мы обсудим результаты конкретных вычислений в рамках этого метода для потенциала Юкавы. Следует подчеркнуть, что в данном случае решение в нулевом приближении ( $\mu \rightarrow 0$ ) известно — кулоновский спектр. Наконец, комплексные полюсы  $S$ -матрицы изучались также с помощью  $N/D$ -метода. В этом методе в качестве исходной информации фигурирует не потенциал взаимодействия между частицами, а скачок амплитуды рассеяния на левом динамическом разрезе. Изложение основ  $N/D$ -метода содержится, например, в [54]. В рамках  $N/D$ -метода было выполнено исследование систем типа «резонанс + частица» [55], причем резонанс рассматривался как состояние в непрерывном спектре. Мы хотим подчеркнуть здесь, что изучение системы в непрерывном спектре (при действительных энергиях  $E$ ) — это совсем другая задача по сравнению с исследованием гамовских состояний, которому посвящен данный обзор.

Перечислив ряд теоретических методов, мы не претендуем на полноту списка методов, используемых при изучении резонансов (о применении  $ABC$ -теоремы упоминалось во введении). Наша основная цель — изложение метода аналитического продолжения интегральных уравнений и полученных с его помощью результатов.

Необходимо отметить, что наличие максимума или какой-либо другой структуры в сечении может быть и не связано с полюсом  $S$ -матрицы. В таких случаях говорят о псевдорезонансном поведении амплитуды (см., например, [56]). К структуре, похожей на резонансную, может приводить, например, механизм, отвечающий треугольной диаграмме Фейнмана, когда ее комплексная особенность близка к физической области.

Прежде чем перейти к последовательному изложению метода интегральных уравнений, дадим краткий обзор экспериментальных данных по резонансам в малонуклонных системах, которые интересовали нас в первую очередь.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СИТУАЦИЯ

Главные результаты экспериментальных исследований резонансов в трехнуклонных системах приводятся в табл. 1 и в обзорах [57—62]. Работы [60,62] содержат почти всю имеющуюся экспериментальную информацию о резонансах в трехнуклонных системах до 1987 г. Сложный эксперимент [63] по реакции  ${}^3\text{H}(\pi^-, \gamma){}^3\text{He}$  был выполнен в Лос-Аламосе на газовой тритиевой мишени.



Таблица 1. Обзор экспериментальных результатов по изучению резонансов в трехнуклонных системах

Ядро	Реакция	Энергия, МэВ	Квантовые числа	Резонанс, МэВ	Литература
${}^3n$	${}^3H(n, p) {}^3n$	$E_n = 14,4$ $E_n = 20,8$ $E_n = 15,2$ $E_n = 14,1; 18,0;$ $21,5$	— — — —	$E_B = 1$ (связанное) — —	[65] [66] [67] [68]
	${}^3He(\pi^-, \pi^+) {}^3n$	$E_{\pi^-} = 140$ $E_{\pi^-} = 140$ $E_{\pi^-} = 140$ $E_{\pi^-} = 140; 200$ $295$	— — $T, S, L =$ $3/2, 1/2, 1$ —	$E = 2; \Gamma = 12$ $E = 9 \pm 1;$ $\Gamma = 10,5$ $E = 12; \Gamma = 3$ «Широкий резонанс»	[69] [70] [71] [72]
	${}^3H(\pi^-, \gamma) {}^3n$	$E_{\pi^-} \approx 0$	—	—	[63, 73—76]
	${}^4He(\pi^-, p) {}^3n$	$E_{\pi^-} = 140$ $E_{\pi^-} = 140$ $E_{\pi^-} = 60; 100;$ $200$ $E_{\pi^-} = 285 \div 575$ $E_{\pi^-} = 400; 475$	— — — — —	— — — — —	[77] [70] [78] [79] [80]
	${}^7Li(\pi^-, {}^4He) {}^3n + \gamma$	$E_{\pi^-} \approx 0$	—	—	[81]
	${}^7Li({}^7Li, {}^{11}C) {}^3n$	$E_{Li} = 79,6$	—	—	[82]
	${}^{14}N(\pi^-, {}^3n) {}^8B, {}^3H$	$E_{\pi^-} \approx 0$	—	—	[83]
	${}^3H({}^3H, {}^3He) {}^3n$	$E_{3H} = 22,25$	—	$E = 1 \div 1,5$	[84]
	${}^7Li(n, {}^3n) {}^5Li$	$E_n = 19$	—	—	[85]
	${}^3H$	${}^3He(n, p) {}^3H$	$E_n = 14,4$	—	—
${}^6Li(\pi^-, {}^3H) {}^3H$		$E_{\pi^-} = 100$	—	—	[87]
${}^3He({}^3H, {}^3He) {}^3H$		$E_{3H} = 22,25$	—	—	[84]
${}^3H({}^3H, {}^3H) {}^3H$		$E_{3H} = 22,25$	—	—	[84]
${}^2H(n, n) {}^2H$		$E_n = 0 \div 800$	—	—	[62]
${}^2H(n, p) {}^2n$		$E_n = 0 \div 152$	—	—	[62]
${}^2H(p, \pi^+) {}^3H$	$E_p = 0 \div 1,5 \text{ ГэВ}$	—	—	[88]	

Ядро	Реакция	Энергия, МэВ	Квантовые числа	Резонанс, МэВ	Литература
${}^3\text{He}$	${}^3\text{H} (p, n) {}^3\text{He}$	$E_p = 30, 50$	$T = 3/2, 1/2$	$E = 16 \pm 1;$ $\Gamma = 9 \pm 1$ $E = 9,6 \pm 0,7;$ $\Gamma = 5 \pm 1$	[89]
		$E_p = 50$			[90]
${}^3\text{He}$	${}^3\text{He} (p, p') {}^3\text{He}$	$E_p = 30,2$	—	$E = 10,2; \Gamma = 0,9$ $E = 12,6$ $E = 8,2$	[91]
		$E_p = 30,9$	—		[92]
		$E_p = 30$	—		[93]
${}^2\text{H}$	${}^2\text{H} (p, p) {}^2\text{H}$	$E_p = 0 \div 2,7 \Gamma\text{эВ}$	$T, S, L =$ $1/2; 3/2; 1$	$E = 14,2 \pm 0,5;$ $\Gamma = 10$	[94]
${}^2\text{H}$	${}^2\text{H} (p, d^*) {}^1\text{H}$	$E_p = 9 \div 13$	—	$E = 12,4$	[95]
		$E_p = 7 \div 17$	—		[96]
		$E_p = 7 \div 14,5$	—		[97]
		$E_p = 3,8 \div 5$	—		[98]
${}^1\text{H}$	${}^1\text{H} (d, d^*) {}^1\text{H}$	$E_d = 19,2 \div 27$	—	—	[99]
${}^2\text{H}$	${}^2\text{H} (p, \gamma) {}^3\text{He}$	$E_p = 10 \div 17,5$	$T, S, L =$ $1/2; 1/2; 1$	$E = 14,5 \pm 0,5;$ $\Gamma = 2$	[100]
		$E_p = 14 \div 25,5$	—		[101]
${}^1\text{H}$	${}^1\text{H} (d, \gamma) {}^3\text{He}$	$E_d = 41,1$	$T, S, L =$ $1/2; 1/2; 1$	$E = 19,5 \pm 0,5;$ $\Gamma = 2$	[102]
		$E_d = 45,2$			[103]
${}^3\text{He}$	${}^3\text{He} (\gamma, d) {}^1\text{H}$	$E_\gamma = 11 \div 65$	—	—	[103]
${}^3\text{He}$	${}^3\text{He} (e, e'd) {}^1\text{H}$	$E_e = 43,07$ $E_e = 87,34$	—	—	[104]
${}^3\text{He}$	${}^3\text{He} (e, e') {}^3\text{He}$	$E_e = 21$	—	—	[105]
		$E_e = 56,6$	—	—	[106]
		$E_e = 200$	—	—	[107]
${}^3\text{He}$	${}^3\text{He} (\pi^-, \pi^-) {}^3\text{He}$	$E_\pi = 140$	$T, S, L =$ $3/2; 1/2; 1$	$E = 16;$ $\Gamma = 2$	[71]
${}^4\text{He}$	${}^4\text{He} (p, d) {}^3\text{He}$	$E_p = 65$	—	—	[108]
${}^3\text{He}$	${}^3\text{He} ({}^3\text{He}, {}^3\text{He}) {}^3\text{He}$	$E_{{}^3\text{He}} = 44$ $E_{{}^3\text{He}} = 53$	—	—	[109]

Продолжение табл. 1

Ядро	Реакция	Энергия, МэВ	Квантовые числа	Резонанс, МэВ	Литература
${}^3\text{He}$	${}^3\text{He} (\alpha, \alpha') {}^3\text{He}$	$E_\alpha = 115$ $E_\alpha = 63,7$	— —	— —	[108] [110, 111]
	${}^6\text{Li} (p, pd) {}^4\text{He}$	$E_p = 9 \div 10$	—	—	[112]
	${}^6\text{Li} (p, \alpha) {}^3\text{He}$	$E_p = 30$ $E_p = 45$ $E_p = 45$ $E_p = 20$ $E_p = 35 \div 56$	— — — — —	— — — — —	[113] [58] [114] [115] [116]
	${}^6\text{Li} (p, \alpha d) {}^1\text{H}$	$E_p = 45$	—	—	[58]
	${}^3\text{Li}$	${}^3\text{He} (p, n) 3p$	$E_p = 13,1$ $E_p = 14,1$ $E_p = 30 \div 50$	— — $T = 3/2$	— — $E = 9 \pm 1;$ $\Gamma = 10,5$
	${}^2\text{H} (p, \pi^-) 3p$	$E_p = 585$	—	—	[119]
	${}^3\text{He} ({}^3\text{He}, t) 3p$	$E_{{}^3\text{He}} = 44; 53$ $E_{{}^3\text{He}} = 53$	— —	— —	[120] [121]
	${}^6\text{Li} ({}^3\text{He}, {}^6\text{He}) 3p$	$E_{{}^3\text{He}} = 53,2$	—	—	[122]

Примечание. Приведенные значения энергии для  $nnn$ - и  $ppp$ -систем отсчитываются от порога полного развала. Для  $npn$ - и  $ppr$ -систем отсчет идет от энергий основных состояний  ${}^3\text{H}$  и  ${}^3\text{He}$  соответственно. Прочерк означает, что резонанс не обнаружен.

Наблюдался спектр масс  $3n$  для захвата остановившихся пионов с регистрацией  $\gamma$ -квантов спектрометром с высоким разрешением. Верхний предел брэнчинга для перехода в резонансные состояния с шириной  $\Gamma \leq 5$  МэВ оказался равным  $2 \cdot 10^{-2}$ .

Как следует из табл. 1\*, большое число ядерных реакций было использовано для поиска резонансов, но только в некоторых случаях были найдены (широкие) структуры, похожие на резонансы. В большинстве этих случаев любые отклонения от фазового объема были

\* В таблицах настоящей работы использованы стандартные обозначения квантовых чисел трехчастичной системы:  $T$  — изоспин,  $S$  — спин,  $L$  — орбитальный момент,  $J$  — полный момент,  $\pi$  — четность.

интерпретированы как резонансы, хотя было показано теоретически (см., например, [64]), что отклонения такого рода могут иметь другое происхождение, например двухчастичное взаимодействие в конечном состоянии (эффект Мигдала — Ватсона). Резюмируя результаты экспериментального поиска резонансов в трехнуклонных системах в течение примерно 20 лет, можно прийти к выводу, что резонансов не обнаружено и что остается мало надежды найти их в будущем.

### 3. РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМЕ ДВУХ ТЕЛ

**Интегральные уравнения для резонансных и виртуальных состояний в короткодействующем потенциале.** Рассмотрим задачу двух тел, взаимодействие между которыми описывается потенциалом  $V(r)$ , допускающим аналитическое продолжение его фурье-компоненты в область комплексных импульсов. Этому ограничению отвечает, например, «аналитический потенциал», удовлетворяющий условиям [4]:

$$1) \quad \int_0^{\infty} r^2 dr |V(r)| < \infty, \quad \int_0^{\infty} r dr |V(r)| < \infty, \quad (12)$$

$$2) \quad V(r) \text{ — регулярная функция в области} \\ \text{— } \pi/2 < \arg r < \pi/2. \quad (12a)$$

Связь парциальной  $t$ -матрицы с амплитудой рассеяния вне энергетической поверхности определим соотношением

$$t_l(q, q'; z) = -(2\pi/\mu) f_l(q, q'; z). \quad (13)$$

В физической области  $z = E + i0$ , где  $E$  — энергия относительного движения, на энергетической поверхности  $q^2 = q'^2 = p^2 = 2\mu E$  имеем

$$f_l(p) \equiv f_l(p, p; E) = p^{-1} e^{i\delta_l} \sin \delta_l. \quad (14)$$

Соотношения (13), (14) задают нормировку  $t$ -матрицы, которая на физическом листе энергии ( $\text{Im} \sqrt{z} > 0$ ) удовлетворяет уравнению Липпмана — Швингера (УЛШ):

$$t_l(q, q'; z) = V_l(q, q') + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{V_l(q, k) t_l(k, q'; z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk, \quad (15)$$

где фурье-компонента потенциала

$$V_l(q, q') = 4\pi \int_0^{\infty} j_l(qr) V(r) j_l(q'r) r^2 dr, \quad (16)$$

$j_l(x)$  — сферическая функция Бесселя [ $j_0(x) = x^{-1} \sin x$ ].

Аналитическое продолжение (15) на нефизический лист  $z$  ( $\text{Im } \sqrt{z} < 0$ ) определяется свойствами интеграла типа Коши (см., например, [123]) в правой части (15), который имеет корневой разрез вдоль действительной оси (верхний берег разреза — физическая область энергии). Получаем для второй ветви  $t_l$  ( $\text{Im } \sqrt{z} < 0$ ) уравнение [35]:

$$t_l^{(-)}(q, q'; z) = V_l(q, q') + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{V_l(q, k) t_l^{(-)}(k, q'; z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk + \\ + (i/\pi) \mu p V_l(q, p) t_l^{(-)}(p, q'; z), \quad (17)$$

откуда следует при  $q = p$ :

$$t_l^{(-)}(p, q'; z) = V_l(p, q') + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{V_l(p, k) t_l^{(-)}(k, q'; z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk + \\ + (i/\pi) \mu p V_l(p, p) t_l^{(-)}(p, q'; z). \quad (18)$$

Здесь  $p = \sqrt{2\mu z}$  — арифметическое значение корня. Вывод уравнения (17) наглядно иллюстрируется на рис. 2, на котором показана деформация контура интегрирования, обеспечивающая сходимостъ интеграла. Возврат контура на действительную ось приводит к дополнительному по сравнению с (15) слагаемому в (17). Оно связано с вычетом подынтегральной функции в точке  $k = -p$  ( $\text{Im } (-p) < 0$ ). Решая (18) относительно  $t_l^{(-)}(p, q'; z)$  и подставляя результат в (17), получаем уравнение, которое отличается от УЛШ (15) лишь заменой потенциала  $V_l$  функцией [35, 37]

$$\tilde{V}_l(q, q'; p) = V_l(q, q') + \frac{i\mu p/\pi}{1 + V_l(p, p) i\mu p/\pi} V_l(q, p) V_l(p, q'), \quad (19)$$

содержащей сепарабельную (нелокальную) добавку, зависящую от энергии. Хотя нуль знаменателя в (19) не является полюсом  $t$ -матрицы [35], вблизи соответствующих значений  $p$  удобнее использовать систему уравнений (17), (18). Наоборот, вблизи сингулярности  $V_l(p, p)$  предпочтительнее уравнение вида

$$t_l^{(-)}(q, q'; z) = \tilde{V}_l(q, q'; p) + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\tilde{V}_l(q, k; p) t_l^{(-)}(k, q'; z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk. \quad (20)$$

Из (19) видно, что связь между ветвями  $t$  и  $t^{(-)}$  осуществляется, как и положено, через пороговую точку ветвления  $z = 0$ , где  $V$  и  $\tilde{V}$  совпадают.

**Полюсы  $S$ -матрицы.** Согласно теории фредгольмовских интегральных уравнений, неоднородное интегральное уравнение не имеет решения (т.е.  $t = \infty$ ), если соответствующее однородное уравнение

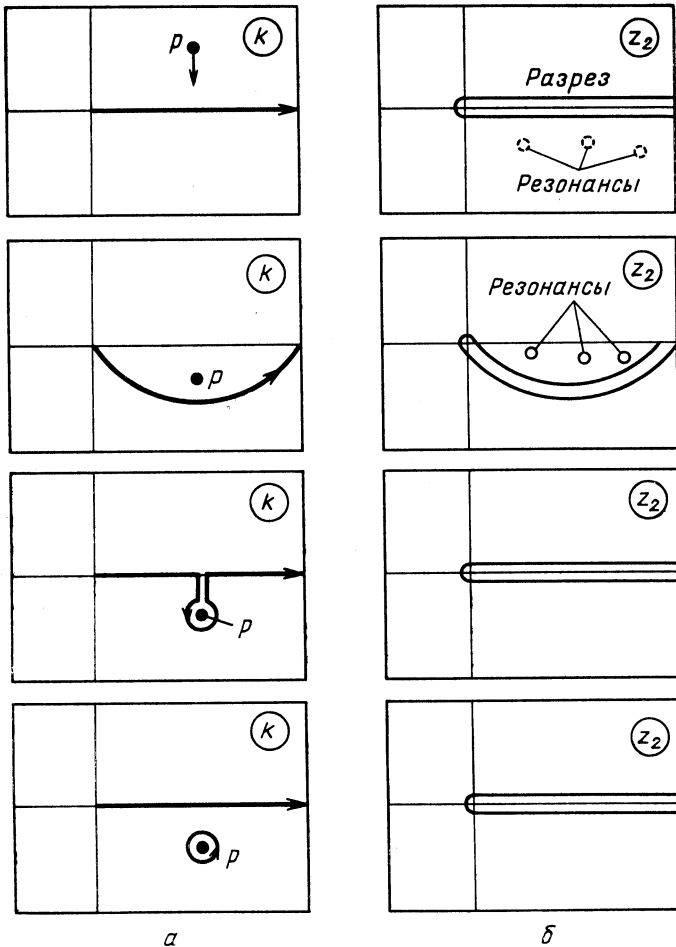


Рис. 2. Деформация контура интегрирования в уравнении Липпмана — Швингера при аналитическом продолжении на нефизический лист энергии в плоскостях комплексного импульса (*a*) и комплексной энергии (*b*)

(или система уравнений) имеют нетривиальное решение. Таким образом, задача о полюсах  $t$ -матрицы состоит в нахождении дискретного набора значений комплексной энергии  $z$  ( $z_1, z_2, \dots$ ), при ко-

торых существует решение однородного уравнения

$$F^{(-)}(q, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{V}_l(q, k; p) F^{(-)}(k, z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk. \quad (21)$$

Альтернативно эта задача формулируется как определение собственных значений  $\lambda_n(z)$  ядра интегрального уравнения

$$\lambda_n^{-1}(z) F_n^{(-)}(q, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{V}_l(q, k; p) F_n^{(-)}(k, z)}{z - k^2/2\mu} k^2 dk, \quad (22)$$

существующих при любом  $z$ . Полюсы  $t$ -матрицы находятся из условия

$$\lambda_n(z) = 1, \quad z = z_1, z_2, \dots \quad (23)$$

**Численное решение интегральных уравнений.** Приближенное решение интегрального уравнения получают с помощью квадратур (например, по Гауссу). Тогда (21) можно записать в виде алгебраической системы

$$F(k_j, z) = \sum_{i=1}^N M_{ji}(z) F(k_i, z), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

где

$$M_{ji} = (2\pi^2)^{-1} C_i k_i^2 \tilde{V}_l(k_j, k_i; p) / (z - k_i^2/2\mu).$$

Конкретные значения  $C_i$  определяются квадратурной формулой. Набор собственных значений  $z_n$  находится из условия на детерминант системы ( $I_{ij} = \delta_{ij}$ ):

$$\det(I - M) = 0. \quad (25)$$

В случае уравнения (22) ищутся собственные значения матрицы  $M$ :

$$\lambda_n^{-1}(z) F_n(k_j, z) = \sum_{i=1}^N M_{ji}(z) F_n(k_i, z), \quad (26)$$

причем условие (23) определяет положения искомым полюсов. Заметим, что из формулы (19) сразу следует известная симметрия полюсов  $S$ -матрицы относительно мнимой оси импульса. Действительно, замена  $p \rightarrow -p^*$  означает комплексное сопряжение  $V_l(q, q'; -p^*) = V_l^*(q, q'; p)$  [если учесть (16) и соотношение  $j_l(-x) = (-1)^l j_l(x)$ ]. При этом происходит комплексное сопряжение детерминанта системы, очевидно, оставляющее в силе уравнение (25).

**Регуляризация уравнений.** Если резонанс очень узкий, возникает проблема аккуратного вычисления интеграла с особенностью, близко расположенной к линии интегрирования, аналогичная проблеме решения сингулярного интегрального уравнения для  $t$ -матрицы в физической области энергии. В этом случае можно применить тот или

иной способ для вывода эквивалентной системы несингулярных уравнений типа метода Нойеса — Ковальского (см., например, [54]). Однородное уравнение, соответствующее уравнению (15), можно, например, переписать в виде

$$F_l(q, z) = \frac{\mu}{\pi^2} \int_0^\infty dk \left[ \frac{k^2 V_l(q, k) F_l(k, z) - p^2 V_l(q, p) F_l(p, z)}{p^2 - k^2} \right] + \\ + \frac{\mu}{\pi^2} p^2 V_l(q, p) F_l(p, z) \int_0^\infty \frac{dk}{p^2 - k^2}. \quad (27)$$

Теперь подынтегральная функция в первом слагаемом в правой части (27) не имеет полюса пропагатора и его можно вычислять без деформации контура, а второй интеграл вычисляется в аналитическом виде с помощью теоремы о вычетах

$$\int_0^\infty \frac{dk}{p^2 - k^2} = -\frac{i\pi}{2p}, \quad \text{Im } \sqrt{z} > 0. \quad (28)$$

Поскольку импульс  $p$  входит явно при такой регуляризации, уравнение на нефизическом листе получается простым изменением знака перед  $p$ , что соответствует теперь  $\text{Im } \sqrt{z} < 0$  [124]:

$$F_l^{(-)}(q, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \left[ \frac{k^2 V_l(q, k) F_l^{(-)}(k, z) - p^2 V_l(q, p) F_l^{(-)}(p, z)}{z - k^2/2\mu} \right] + \\ + (i/2\pi) \mu p V_l(q, p) F_l^{(-)}(p, z). \quad (29)$$

Необходимо подчеркнуть, что возможность аналитического продолжения по энергии в область  $\text{Im } \sqrt{z} < 0$  определяется аналитическими свойствами не только ядра уравнения, но и его решения, которые необходимо исследовать подробнее.

**Аналитические свойства  $t$ -матрицы и вершинной функции, унитарность  $S$ -матрицы.** После того как полюс  $S$ -матрицы найден ( $z = z_n$ ), уравнение (21) при  $z = z_n$  или (22) при  $\lambda_n(z) = 1$ , либо система однородных уравнений (17), (18) без неоднородного слагаемого  $V_l(q, q')$  дают уравнение (или систему уравнений) для вершинной функции распада нестабильного состояния  $g_l^{(n)}(q)$  (и, следовательно, волновой функции в импульсном представлении). Вблизи полюса можно записать

$$t_l^{(-)}(q, q'; z) = \frac{g_l^{(n)}(q) g_l^{(n)}(q')}{z - z_n} + \dots \quad (30)$$

Запись полюсного слагаемого  $t$ -матрицы в форме (30) (без комплексного сопряжения одного из сомножителей) связана с использованием



биортогональной системы гамовских волновых функций (см., например, формулировку расширенного условия полноты в работе [125]).

Будем считать известными аналитические свойства потенциала  $V_l(q, q')$  и  $t$ -матрицы на физическом листе. Решая уравнение (17) итерациями и суммируя возникающие ряды Неймана, находим [28, 126]

$$t_l^{(-)}(q, q'; z) = t_l(q, q'; z) + (i/\pi) \mu p t_l(q, p; z) t_l^{(-)}(p, q'; z). \quad (31)$$

Соотношение (31) является обобщением тождества Гильберта (см., например, [18, 22, 54]), связанного с унитарностью  $S$ -матрицы. На энергетической поверхности при физических значениях энергии  $z$  получаем с учетом (13) соотношение  $\text{Im } f_l(p) = p |f_l(p)|^2$ , эквивалентное оптической теореме. Таким образом, имеется тесная связь уравнения (17) с унитарностью  $S$ -матрицы. При выводе оптической теоремы предполагается эрмитовость гамильтониана [действительность  $V(r)$ ]. Использование комплексного потенциала  $V(r)$  не препятствует выводу (17). Однако оптическая модель нарушает унитарность  $S$ -матрицы и является лишь приближением к многоканальной задаче с соответствующим условием унитарности  $S$ -матрицы. При  $q = p$  из (31) находим связь  $t^{(-)}$  и  $t$ :

$$t_l^{(-)}(p, q'; z) = t_l(p, q'; z) / [1 - (i/\pi) \mu p t_l(p, p; z)]. \quad (32)$$

Формулы (31), (32) целиком определяют аналитические свойства  $t$ -матрицы на нефизическом листе через аналитические свойства  $t$ -матрицы на физическом листе. Из (32) видно, что резонансный полюс можно найти из уравнения

$$1 - (i/\pi) \mu p t_l(p, p; z) = S_l(p) = 0, \quad (33)$$

но это технически сложнее, чем искать нули детерминанта Фредгольма для уравнений на нефизическом листе.

Уравнение для вершинной функции, отвечающее (17),

$$g_l^{(n)}(q) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{V_l(q, k) g_l^{(n)}(k)}{z_n - k^2/2\mu} k^2 dk + (i/\pi) \mu p_n q_l^{(n)}(p_n) V_l(q, p_n) \quad (34)$$

также можно решать итерациями. В результате получаем

$$q_l^{(n)}(q) = (i/\pi) \mu p_n g_l^{(n)}(p_n) t_l(q, p_n; z_n). \quad (35)$$

Таким образом, все особенности вершинной функции по переменной  $q$  определяются функцией  $t_l(q, p_n; z_n)$ . С помощью (30), (32) можно найти [28, 126] формулу для вычета

$$\left. \begin{aligned} g_l^{(n)}(p_n) &= [-(2\mu^2/\pi) (d/dp_n) (p_n f_l(p_n))]^{-1/2}, \\ \text{Res } f_l^{(-)}(p) |_{p=p_n} &= [4\mu (d/dp_n) (p_n f_l(p_n))]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

**Теорема симметрии для связанных и виртуальных уровней.** Формулы (35), (36) полностью определяют аналитические свойства вершинной функции нестабильного состояния через аналитические свойства  $t$ -матрицы и амплитуды рассеяния на физическом листе. Кроме того, из (34) и (36) следует теорема симметрии, доказанная в [28] для аналитических потенциалов с асимптотикой:

$$V(r) \rightarrow \text{const } r^\beta \exp(-\alpha r), \quad \beta \geq -2, \quad \alpha > 0. \quad (37)$$

**Теорема.** Для потенциалов типа (37) точки, расположенные на пересечениях траекторий  $\lambda = -ip = \lambda(\alpha)$  связанных уровней ( $\lambda_n = \sqrt{2\mu |E_n|}$ ) и виртуальных ( $\lambda_m = -\sqrt{2\mu |E_m|}$ ) с линиями динамических сингулярностей парциальных амплитуд  $\lambda = \pm v\alpha/2$  ( $v = 1, 2, \dots$ ), являются зеркально-симметричными по отношению к точке  $p = 0$ .

Здесь  $E_k$  — собственное значение энергии для главного квантового числа  $k$ . Динамические сингулярности — левые разрезы и ложные полюсы (для экспоненциального потенциала) — обсуждаются, например, в [4, 49]. Если оборвать потенциал на конечном расстоянии, то все динамические особенности уйдут на бесконечность, и теорема симметрии не будет иметь места. Условие  $\beta \geq -2$  связано с тем, что лишь в этом случае парциальная амплитуда рассеяния (в борновском приближении) обращается в бесконечность в точке динамической сингулярности. Соответственно вычет  $t$ -матрицы в полюсе согласно (36) обращается в нуль и исчезает добавка в (34), различающая уравнения на физическом и нефизическом листах. Отсюда и следует теорема симметрии, причем обращение вычета в нуль согласуется с известной симметрией между нулями и полюсами  $S$ -функции, расположенными в точках  $p$  и  $-p$ . В справедливости теоремы симметрии можно убедиться на примерах экспоненциального и хюльтеновского потенциалов, для которых решение в  $s$ -волне известно в аналитической форме (см., например, [6, 127]). В работе [128] буквенное доказательство этой теоремы дано для потенциала Вудса — Саксона. Тем самым показано, что она распространяется и на потенциалы, нерегулярные в области  $\text{Re } r > 0$ , т. е. не относящиеся к классу аналитических (юкавских) потенциалов, для которых  $ABC$ -теорема допускает поворот на угол  $\theta < \pi/2$  из-за условия (12а) (см. введение).

**Траектории полюсов  $S$ -матрицы.** До недавнего времени резонансные полюсные траектории, т. е. движение полюсов в зависимости от силы взаимодействия (или другого параметра), были известны лишь для потенциалов, позволяющих получить аналитическое решение задачи. К ним относятся прямоугольная яма (рис. 3, 4) [124, 129] и сепарабельные потенциалы. В работе [29], по-видимому, были сделаны первые расчеты виртуального состояния  $np$ -системы в  $^1S_0$ -состоянии («синглетного дейтрона»), основанные на аналитическом продолжении  $t$ -матрицы, найденной путем сепарабелизации ряда локальных  $NV$ -потенциалов по методу Бейтмана.

Как известно, полюсы для связанных состояний всегда являются простыми (см., например, [5, с. 268]), тогда как полюсы виртуальных состояний могут быть кратными. Кратность проявляется в случае потенциалов, имеющих сингулярность при  $\text{Re } r > 0$ . Примером мо-

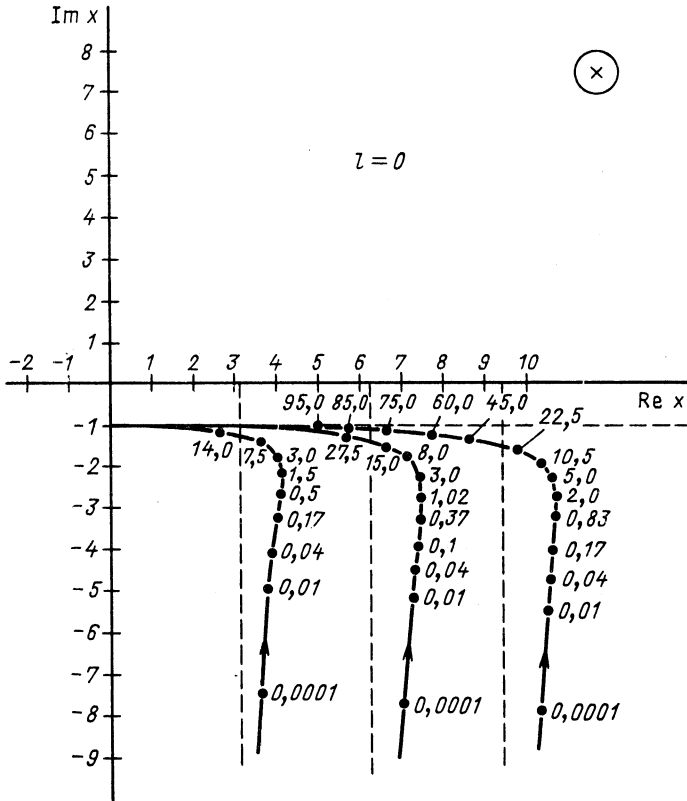


Рис. 3. Полюсные траектории для потенциала в форме прямоугольной ямы в комплексной плоскости  $x = kR = \sqrt{2\mu E/\hbar^2 R}$ . Цифры рядом с точками указывают силу взаимодействия  $W_0 = \sqrt{2\mu V_0/\hbar^2 R}$ . Случай  $s$ -волны ( $l = 0$ ). Точка кратности полюсов  $x = -i$

жет служить потенциал Вудса — Саксона [128, 130]. Для потенциалов, обрывающихся на конечном расстоянии, когда  $S(p)$  представима в виде рациональной функции (т. е. для случая потенциалов бармановского типа), существование кратных виртуальных полюсов было показано в [131]. Траектории виртуальных полюсов, являющихся «несостоявшимися» связанными состояниями для потенциала Вудса — Саксона, показаны на рис. 5. В работах [132, 133] траек-

тории резонансных и виртуальных полюсов были рассчитаны для потенциала Юкавы с помощью метода интегральных уравнений и путем суммирования расходящихся рядов теории возмущений (см. разд. 1). Было показано, что оба метода дают результаты, совпадаю-

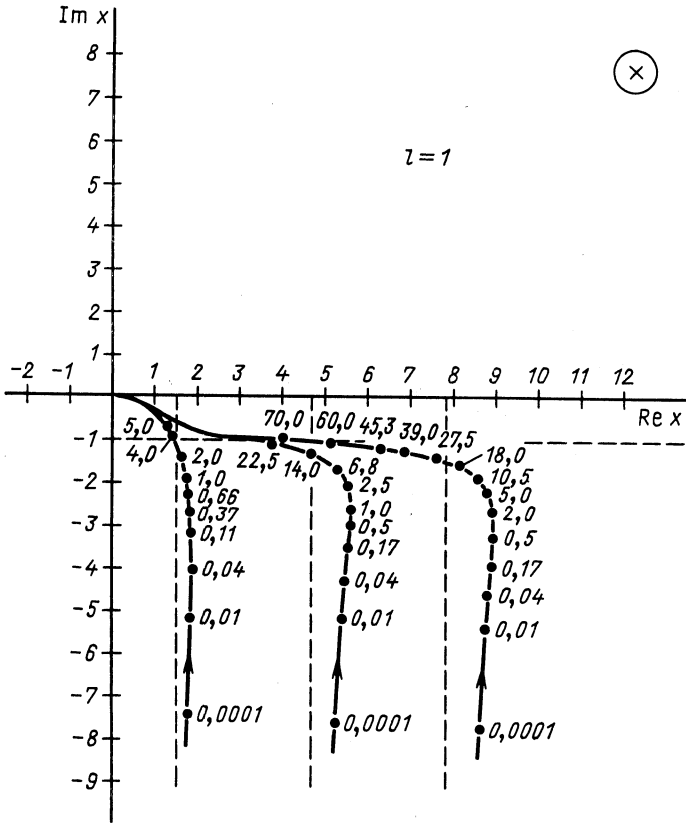


Рис. 4. То же, что на рис. 3, для  $p$ -волны ( $l = 1$ )

щие с высокой точностью в широкой области изменения параметров. Траектории виртуальных полюсов для потенциалов Хьюльтена и Юкавы приведены на рис. 6 и 7. Видно резкое различие в поведении этих траекторий ниже линии динамической сингулярности  $\lambda = -ip = -\alpha/2$ . Для потенциала типа (37) с  $\beta = 0$  траектории виртуальных полюсов пересекают линии динамических сингулярностей (ложных полюсов)  $\lambda = -n\alpha/2$  ( $n$  — целое) в точках симметрии. Для потенциала Юкавы ( $\beta = -1$ ) траектории подходят к точкам симметрии слева при увеличении  $\alpha$ . Отсюда следует, что сам характер поведения траекторий в области ниже ближайшей к физической

области линии динамической сингулярности ( $\lambda = -\alpha/2$ ) сильно зависит от типа асимптотики. Все рассмотренные траектории демонстрируют справедливость теоремы симметрии. Траектории для экспоненциального потенциала приведены в [128].

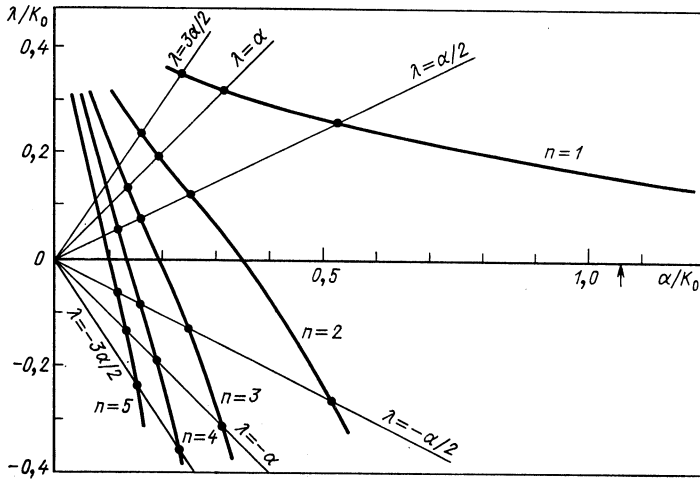


Рис. 5. Траектории  $ns$ -уровней с главными квантовыми числами  $n = 1, \dots, 5$  (толстые сплошные линии) и положения динамических сингулярностей парциальной амплитуды рассеяния (тонкие сплошные линии) (● — симметрично расположенные точки) для потенциала Вудса — Саксона  $V(r) = -V_0/[1 + \exp(\alpha(r - R))]$ ;  $K_0 = \sqrt{2\mu V_0/\hbar^2}$

**Нормировка гамовской волновой функции.** Волновая функция  $\varphi_l(q)$  связана с вершинной функцией  $g_l(q)$  известным соотношением (с нормировкой как в [134])

$$\varphi_l(q) = -g_l(q)/(q^2 - p^2), \quad p^2 = 2\mu z. \quad (38)$$

Формула (36) определяет нормировочную константу  $g_l(p)$  через парциальную амплитуду рассеяния на физическом листе. Однако можно обобщить непосредственно правило нормировки волновой функции связанного состояния на случай несостоявшегося связанного состояния. Фурье-преобразование волновой функции связанного состояния имеет вид

$$\psi_l(r) = C \int_0^{\infty} j_l(qr) \varphi_l(q) q^2 dq, \quad (39)$$

где  $C$  — константа.

Используя соотношения

$$\begin{aligned} j_l(x) &= [h_l^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)]/2, \\ h_l^{(2)}(-x) &= (-1)^l h_l^{(1)}(x), \end{aligned} \tag{40}$$

а также (34), (38), можно переписать (39) в виде

$$\psi_l(r) = (1/2)C \int_{-\infty}^{\infty} h_l^{(1)}(qr) \varphi_l(q) q^2 dq. \tag{41}$$

Полюсы  $\varphi_l(q)$  в точках  $q = \pm p$  определяют асимптотику радиальной волновой функции, если особенности  $g_l(q)$  расположены дальше от

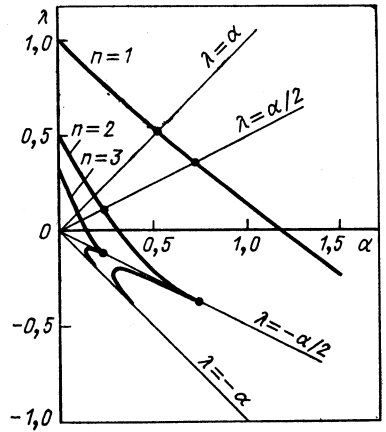
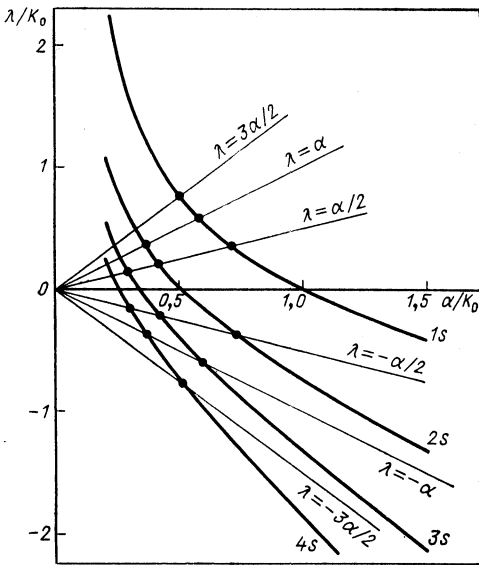


Рис. 6. Траектории  $ns$ -уровней для потенциала Хюльтена  $V(r) = -V_0/[\exp(\alpha r) - 1]$ . Обозначения те же, что на рис. 5

Рис. 7. Траектории  $ns$ -уровней для потенциала Юкавы  $V(r) = -r^{-1} \exp(-\alpha r)$ ;  $\lambda = \sqrt{-2E_{(n)}}$ . Использованы атомные единицы ( $\hbar = m_e = e = 1$ ), остальные обозначения те же, что на рис. 5

точки  $q = 0$ . Обобщение фурье-преобразования волновой функции связанного состояния на случай гамовского состояния (несостоявшегося связанного состояния) сводится к деформации контура (рис. 8 и 9), обеспечивающей сходимость интегралов (42). Различие контуров (рис. 9, а и б) для виртуальных и резонансных уровней обусловлено наличием барьера за счет центробежного потенциала

при  $l \neq 0$ . В результате получаем [37] вместо (41) контурный интеграл (опустим индекс  $l$ )

$$\psi_p(r) = (C/2) \int_{\Gamma} h_l^{(1)}(qr) \frac{g_l(q)}{q^2 - p^2} q^2 dq. \quad (42)$$

Асимптотика определяется теперь вычетом в точке  $q = -p$ , распо-

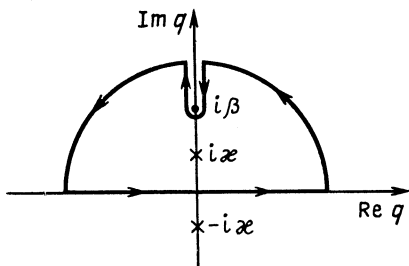


Рис. 8. Контур интегрирования для вычисления фурье-преобразования волновой функции связанного состояния

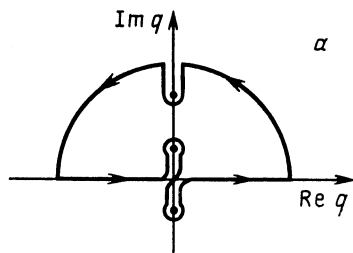
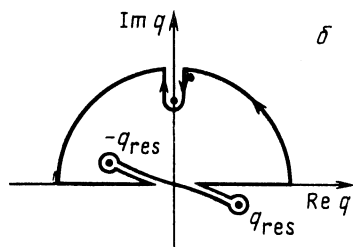


Рис. 9. Контур интегрирования для вычисления матричного элемента, содержащего гамовскую волновую функцию для виртуального (а) и резонансного (б) состояний



ложенной в нижней полуплоскости, что дает гамовский рост на бесконечности

$$|\psi_p(r)|_{r \rightarrow \infty} \simeq \text{const } r^{-1} \exp(|\text{Im } p| r). \quad (43)$$

Аналогично преобразуется любой матричный элемент, содержащий гамовскую волновую функцию. Вместо матричного элемента  $\mathcal{F} =$

$$= \int_0^{\infty} \rho(q) dq \text{ получаем}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} + i\pi [\text{Res } \rho(q) |_{q=-p} - \text{Res } \rho(q) |_{q=p}]. \quad (44)$$

Для четной функции  $\rho(q)$  получаем

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} + 2i\pi \text{Res } \rho(q) |_{q=p_{\text{res}}}. \quad (45)$$

Формула (45) имеет место и для нормировки гамовской волновой функции, когда

$$\rho(q) = q^2 g_l^2(q) / (q^2 - p^2)^2, \quad (46)$$

причем для расчета вычета следует использовать интегральное уравнение для вершинной функции типа (34). Определение нормировки гамовской волновой функции дано также в работе [135], в которой для исследования резонансов применяется техника ортогонального проектирования. Формула (45) является универсальной, тогда как способ регуляризации нормировочного интеграла в  $r$ -пространстве зависит от положения полюса. Например, регуляризационная процедура Зельдовича [136] [с использованием под интегралом множителя  $\exp(-\beta r^2)$  с переходом к пределу  $\beta \rightarrow 0$  после взятия интеграла] применима лишь при условии  $|\operatorname{Re} p_{\text{res}}| > |\operatorname{Im} p_{\text{res}}|$  [125].

**Многоканальная задача. Сильная связь каналов.** Правило аналитического продолжения УЛШ легко обобщается на систему интегральных уравнений, так называемого метода сильной связи каналов для матричных элементов  $T$ -оператора:

$$T(k_{\alpha'}, k_{\alpha}; z) = V(k_{\alpha'}, k_{\alpha}) - 4\pi \sum_{\alpha''=1}^n \int_0^{\infty} \frac{V(k_{\alpha'}, k_{\alpha''}) T(k_{\alpha''), k_{\alpha}; z)}{k_{\alpha''}^2 / 2\mu_{\alpha''} - (z - Q_{\alpha''})} k_{\alpha''}^2 dk_{\alpha''}. \quad (47)$$

Здесь  $Q_{\alpha} = m_{\alpha} - m_1$  — порог реакции (1,  $\alpha$ ),  $m_{\alpha}$  — суммарная масса в канале  $\alpha$ , канал наиболее легких частиц имеет индекс 1. В методе сильной связи каналов [4, 5, 137] рассматриваются только бинарные каналы. На энергетической поверхности

$$k_{\alpha}^2 / 2\mu_{\alpha} = z - Q_{\alpha}, \quad (48)$$

$\mu_{\alpha}$  — приведенная масса,  $z$  — энергия.

Согласно (47) у функции  $T_{\alpha'\alpha}$  по переменной  $z$  имеется  $n$  разрезов вдоль действительной оси  $z$ , начинающихся на порогах  $z = Q_{\alpha}$ , и соответственно  $2^n$  листов римановой поверхности. Индексы каналов у операторов  $V$  и  $T$  для краткости записи в (47) опущены (к ним относятся и квантовые числа угловых моментов). Аддитивность различных разрезов в (47) позволяет перейти на нефизический лист относительно любого из них. Обозначим  $\{\beta\}$  множество каналов, относительно которых систему (47) нужно аналитически продолжить на нефизические листы. С помощью матричной алгебры получаем, что результат такого продолжения эквивалентен замене потенциальной матрицы  $V_{\alpha'\alpha}$  следующим выражением [37]:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\alpha'\alpha}(k_{\alpha'}, k_{\alpha}; z) = & V_{\alpha'\alpha}(k_{\alpha'}, k_{\alpha}) + \\ & + i8\pi^2 \sum_{\beta\beta'} \mu_{\beta'} p_{\beta'} V_{\alpha'\beta'}(k_{\alpha'}, p_{\beta'}) W_{\beta'\beta}^{-1} V_{\beta\alpha}(p_{\beta}, k_{\alpha}), \end{aligned} \quad (49)$$

где  $W^{-1}$  — матрица, обратная к  $W$ :

$$\begin{aligned} W_{\beta'\beta} = & \delta_{\beta'\beta} - i8\pi^2 \mu_{\beta} p_{\beta} V(p_{\beta'}, p_{\beta}), \\ p_{\beta} = & \sqrt{2\mu_{\beta}(z - Q_{\beta})}. \end{aligned} \quad (50)$$



Как и в одноканальном случае, добавка к потенциалу в (49) нелокальна (имеет вид суммы сепарабельных слагаемых) и зависит от энергии  $z$ . Ограничение бинарными каналами не принципиально, что видно из рассмотрения уравнений Фаддеева (см. ниже). В области значений  $z$ , где матрица  $W$  является особенной (вырожденной), т. е.  $\det W = 0$ , лучше использовать систему уравнений, являющуюся обобщением на многоканальный случай системы (17), (18).

#### 4. ТРЕХЧАСТИЧНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ

**Уравнения Фаддеева. Двухчастичный разрез.** Изложенный выше метод аналитического продолжения системы интегральных уравнений для связанных бинарных каналов без особого труда распространяется на задачу трех тел [37]. Проиллюстрируем его на простом примере уравнения Фаддеева для трех тождественных бесспиновых частиц, взаимодействие между которыми описывается сепарабельным потенциалом

$$\langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p}'' \rangle = \lambda \chi(\mathbf{p}') \chi^*(\mathbf{p}''). \quad (51)$$

Задача о рассеянии частицы на связанной подсистеме сводится к решению одномерного интегрального уравнения для парциальной амплитуды  $X_L(q, q'; E + i0)$  (см., например, [23]):

$$X_L(q, q'; E + i0) = 2Z_L(q, q'; E + i0) + 8\pi \int_0^\infty q''^2 dq'' \left[ Z_L(q, q''; E + i0) \tau(E + i0 - \frac{3}{4} \frac{q''^2}{m}) X_L(q'', q'; E + i0) \right]. \quad (52)$$

Здесь и ниже использованы следующие обозначения:  $L$  — полный угловой момент системы,

$$Z_L(q, q'; E + i0) = (1/2) \int_{-1}^1 dy P_L(y) Z(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; E + i0); \quad (53)$$

$$y = \mathbf{q}\mathbf{q}'/qq'; \quad Z(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; E + i0) = \frac{\chi^*(\mathbf{q}' + \mathbf{q}/2) \chi(-\mathbf{q}'/2 - \mathbf{q})}{E + i0 - [q^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{q}')^2 + q'^2]/2m}. \quad (54)$$

Уравнение (52) имеет сходство с уравнением Липпмана — Швингера, где роль потенциала играет  $Z_L$ , а пропагатора —  $\tau(z_2)$ . Функция  $\tau(z_2)$ , аргумент которой — энергия подсистемы

$$z_2(q) = E - 3q^2/4m, \quad (55)$$

связана с  $t$ -матрицей простым соотношением

$$\langle \mathbf{p}' | t(z_2) | \mathbf{p} \rangle = \chi(\mathbf{p}') \tau(z_2) \chi^*(\mathbf{p}), \quad (56a)$$

$$\tau(z_2) = \left[ \lambda^{-1} - \int d\mathbf{p} \frac{\chi(\mathbf{p}) \chi^*(\mathbf{p})}{z_2 - p^2/m} \right]^{-1}. \quad (56b)$$

Знак комплексного сопряжения в (56) относится только к шаровой функции [см. комментарий к формуле (30)]. Пусть у подсистемы имеется одно связанное  $s$ -состояние. Тогда  $\tau(z_2)$  имеет полюс при  $z_2 = -\epsilon_b$  ( $\epsilon_b$  — энергия связи):

$$\tau(z_2) = \{(z_2 + \epsilon_b) C(z_2)\}^{-1}, \tag{57}$$

где

$$C(z_2) = - \int d\mathbf{p} \frac{\chi(\mathbf{p}) \chi^*(\mathbf{p})}{(z - p^2/m)(\epsilon_b + p^2/m)}. \tag{58}$$

Таким образом, полюс функции  $\tau(E + i0 - 3q''^2/4m)$ , входящей в ядро уравнения (52), индуцирует двухчастичный пропагатор

$$\frac{1}{z_2(q'') + \epsilon_b} = \frac{1}{E + i0 - 3q''^2/4m + \epsilon_b} = \frac{1}{E_{12,3} + i0 - 3q''^2/4m}, \tag{59}$$

где  $E_{12,3} = E + \epsilon_b$  — энергия движения частицы 3 относительно центра масс связанной пары {12} и, соответственно правый двухча-

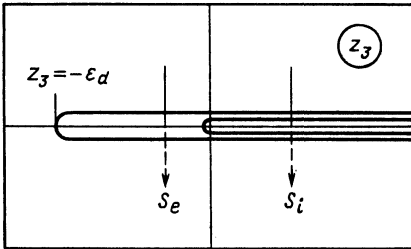


Рис. 10. Двух- и трехчастичный разрез в плоскости комплексной энергии  $z_3 \equiv E$   $nd$ -системы ( $\epsilon_b \equiv \epsilon_d$ )

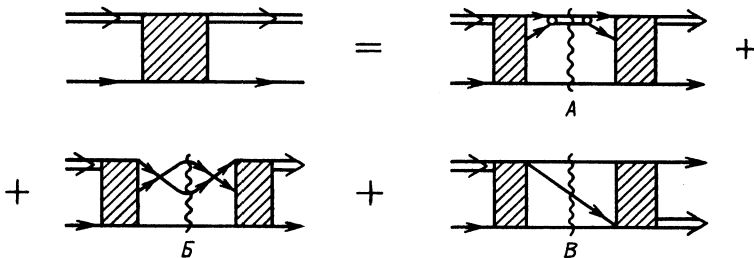


Рис. 11. Диаграммы для рассеяния частицы на связанной подсистеме из двух частиц, иллюстрирующие возникновение двухчастичного разреза (A) и трехчастичных разрезов, соответствующих прямому (B) и перекрестному (B) членам в соотношении унитарности

стичный разрез, начинающийся при  $E = -\epsilon_b$  (рис. 10). Очевидно, что из  $t$ -матрицы всегда можно выделить полюсное слагаемое (рис. 11, A). Сепарабельность потенциала использована лишь для записи  $t$ -матрицы в замкнутом виде.

Выделив двухчастичный пропагатор в уравнении (52) и введя «потенциал»

$$V_L(q, q'; E) = 2Z_L(q, q'; E) C^{-1}(z_2(q')), \quad (60)$$

получим уравнение типа УЛШ (отличие — в неоднородном члене и в явной зависимости  $V_L$  от  $E$ ) ( $\text{Im} \sqrt{E + \varepsilon_b} > 0$ ):

$$X_L(q, q'; E) = 2Z_L(q, q'; E) + 4\pi \int_0^\infty \frac{V_L(q, q''; E) X_L(q'', q'; E)}{E + \varepsilon_b - q''^2/2\mu} q''^2 dq''. \quad (61)$$

Здесь  $\mu = 2m/3$ . Аналитически продолжая (61) в область  $s_e$  (рис. 10) по переменной  $E_{12,3} = E + \varepsilon_b$  так же, как в случае УЛШ, получаем следующее уравнение на нефизическом листе  $z_3 \equiv E$ :

$$X_L^{(-)}(q, q'; E) = 2Z_L(q, q'; E) + 4\pi \int_0^\infty \frac{V_L(q, q''; E) X_L^{(-)}(q'', q'; E)}{E + \varepsilon_b - q''^2/2\mu} q''^2 dq'' + \\ + i8\pi^2 \mu p V_L(q, p) X_L^{(-)}(p, q'; E); \quad p = \sqrt{2\mu(E + \varepsilon_b)}. \quad (62)$$

Подчеркнем, что  $Z_L$  и  $V_L$  не имеют правого двухчастичного разреза. Выражая  $X_L^{(-)}(p, q'; E)$  с помощью (62), приходим к уравнению в той же форме (52), но с новыми неоднородными слагаемыми

$$\tilde{Z}_L(q, q'; E) = Z_L(q, q'; E) + F(q, p; E) Z_L(p, q'; E) \quad (63)$$

и «потенциалом»

$$\tilde{V}_L(q, q'; E) = V_L(q, q'; E) + F(q, p; E) V_L(p, q'; E), \quad (64)$$

где

$$F(q, p; E) = \frac{i8\pi^2 \mu p V_L(q, p; E)}{1 - i8\pi^2 \mu p V_L(p, p; E)}. \quad (65)$$

По тем же причинам, что и для УЛШ, знаменатель в (65) не является полюсом  $S$ -матрицы. Однако в окрестности нуля знаменателя (65) целесообразно использовать систему из уравнения (62), дополненного уравнением (62) в точке  $q = p$ . Соответствующая такой системе задача на собственные значения ядра уравнения Фаддеева для частного случая трехчастичной системы с потенциалом Ямагучи рассмотрена также в работе [33]. Функция  $V_L(p, p; E)$  имеет логарифмический разрез, соединяющий попарно точки ветвления  $p_1^{(\pm)} = \pm i(2/3)\sqrt{m\varepsilon_b}$  и  $p_2^{(\pm)} = \pm i2\sqrt{m\varepsilon_b}$  для системы частиц одинаковой массы  $m$  [см. (68)]. Вблизи особенностей  $V_L(p, p; E)$  использование уравнения с потенциалом (64) предпочтительнее, поскольку большая величина  $V_L(p, p; E)$  входит в знаменатель (65). Таким образом, применение в зависимости от  $E$  той или иной из рассмотренных формулировок интегральных уравнений Фаддеева на нефизическом листе позволяет

использовать стандартные методы решения, известные для задачи на связанное состояние. В точке соответствующего полюса  $E = E_n$  получаем однородное уравнение или систему уравнений для вершинной функции распада  $\{123\} \rightarrow \{12\} + 3$ , аналогичные случаю двухтельной задачи, и, следовательно, для волновой функции резонансного (или виртуального) состояния, которая также может быть нормирована с учетом модификации, рассмотренной выше, или с помощью  $T$ -матрицы.

Как и в задаче двух тел, аналитические свойства решения трехтельного однородного уравнения определяются свойствами ядра интегрального уравнения, т. е. «потенциала» (60). По аналогии с потенциальной задачей двух тел (см. разд. 3) решим уравнение (62) интеракциями и просуммируем получившиеся ряды. Найдем соотношение

$$X(\bar{L})(q, q'; E) = X_L(q, q'; E) + i8\pi^2 \mu p C^{-1}(z(p)) X_L(q, p; E) X(\bar{L})(p, q'; E). \quad (66)$$

Поскольку  $z_2(p) = -\varepsilon_b$  [см. (55) и (62)] и из (58)  $C(-\varepsilon_b) = 1$  в нашей нормировке, приходим к формуле, аналогичной (31), которая является обобщением известного соотношения для парциальной амплитуды рассеяния, связанного с условием унитарности  $S$ -матрицы для бинарного канала, и получаем ту же связь между амплитудами рассеяния (теперь уже в задаче трех тел) на физическом и нефизическом листах по отношению к каналу  $3 + \{12\}$ . Формулы (32), (33), (35), (36) также непосредственно обобщаются на случай бинарного канала в задаче трех тел. В отличие от двухчастичного потенциала, особенности фурье-компоненты которого зависят от конкретной модели (уходят на бесконечность при обрезании потенциала), ближайшие особенности обменного «потенциала»  $Z_L(q, q''; E)$  и парциальной амплитуды  $X(\bar{L})(q, q''; E)$  определяются реальными физическими свойствами трехтельной системы, не зависящими от специфической формы короткодействующего парного потенциала. Последний всегда задается так, чтобы, по крайней мере, обеспечивалось правильное значение энергии связи  $\varepsilon_b$  для подсистемы  $\{12\}$ . Но величина  $\varepsilon_b$  как раз и определяет положение «динамических» особенностей потенциала  $V_L(p, p; E)$  (см. выше). Поэтому теорема симметрии, которая обобщается на случай системы трех тел для бинарного канала  $\{12\} + 3$ , отражает истинные динамические свойства, не зависящие от конкретной модели парного взаимодействия [128]. Эффективное двухчастичное взаимодействие имеет асимптотику (43) с  $\beta = -2$ .

**Уравнения Фаддеева. Трехчастичный разрез.** Трехчастичный разрез (см. рис. 10) связан с трехчастичным пропагатором, входящим как в  $\tau(z_2)$ , так и в  $Z_L(q, q''; E)$ . Фигурирующий в  $\tau(z_2)$ , конкретно в  $C(z_2)$  из (58), правый разрез  $t$ -матрицы индуцирует трехчастичный разрез, соответствующий так называемому прямому члену в соотношении унитарности (рис. 11, Б). За перекрестный член в соотношении унитарности на трехчастичном разрезе (рис. 10) ответственна

функция  $Z_L(q, q''; E)$  — проекция на  $L$ -ю парциальную волну обменного потенциала взаимодействия связанной пары {12} с частицей — спектатором 3, который изображен на рис. 12. В отличие от задачи

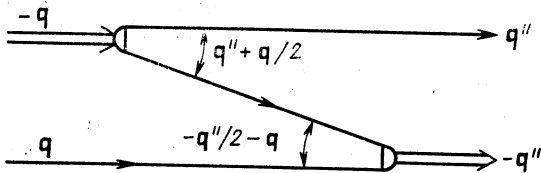


Рис. 12. График, изображающий обменный потенциал в уравнениях Фаддеева

двух тел, потенциал явно зависит от энергии. Его особенности определяются функцией Лежандра II рода  $Q_L(y)$  (если отвлечься от особенностей вершинных функций  $\chi$ , не приводящих к правому разрезу по  $E$ ), где

$$y = (mE - q^2 - q''^2)/qq'' \tag{67}$$

$Q_L(y)$  имеет логарифмический разрез вдоль действительной оси  $y$  от  $-1$  до  $+1$ , который индуцирует два разреза у  $Z_L(q, q''; E)$  на комплексной плоскости  $q''$ . Положения этих разрезов определяются из условия обращения в нуль знаменателя в (54):

$$q'' = -qy/2 \pm \sqrt{q^2y^2/4 + B^2 + i0}, \tag{68}$$

где  $B^2 = mE - q^2$ .

Разрезы соединяют попарно точки ветвления  $q_{\min}$  и  $q_{\max}$ :

$$\left. \begin{aligned} q_{\min}^{(1)} &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + B^2 + i0}; & q_{\max}^{(1)} &= \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + B^2 + i0}; \\ q_{\min}^{(2)} &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + B^2 + i0}; & q_{\max}^{(2)} &= \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + B^2 + i0} \end{aligned} \right\} \tag{69}$$

с учетом знака мнимой добавки для действительных  $E (>0)$ . Форма и положение разрезов зависят как от  $q$ , так и от  $E$ , поэтому их называют движущимися. При переходе по  $E$  на соседний нефизический лист  $s_i$  (см. рис. 10) логарифмический разрез  $Z_L$  выползает в нижнюю

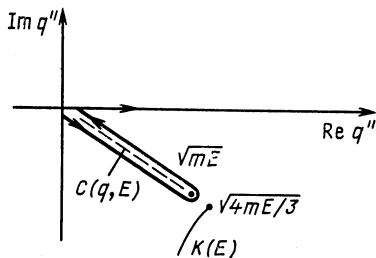


Рис. 13. Схема структуры особенностей по  $q''$  ядра уравнения Фаддеева на листе  $s_i$ .  $K(E)$  — двухчастичный разрез для подсистемы. Жирная линия со стрелками — контур интегрирования

полуплоскость, деформируя контур интегрирования в (52), как показано на рис. 13 для случая, когда точки  $q$  и  $\sqrt{mE}$  расположены на одном луче, причем  $|q|^2 < |mE|$ . В результате в однородном уравнении на собственные значения ядра уравнения Фаддеева появляется дополнительное слагаемое  $S_n(q, E)$  [37]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n^{-1}(E) X_n(q, E) &= R_n(q, E) + S_n(q, E); \\ R_n(q, E) &= 8\pi \int_0^\infty q''^2 dq'' Z_L(q, q''; E) \tau^{(-)}\left(E - \frac{3}{4} \frac{q''^2}{m}\right) X_n(q'', E); \\ S_n(q, E) &= \\ &= 8\pi \int_{C(q, E)} \tilde{q}^2 d\tilde{q} \tau^{(-)}\left(E - \frac{3}{4} \frac{\tilde{q}^2}{m}\right) X_n(\tilde{q}, E) \text{disc } Z_L(q, \tilde{q}; E). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Под интегралом следует взять  $\tau^{(-)}$  вместо  $\tau$ , если мы одновременно переходим на нефизический лист относительно корневого разреза функции  $C(z_2)$  из (58). В уравнении (70)  $X_n(q, E)$  — собственная функция ядра,  $C(q, E)$  — область, где скачок  $\text{disc } Z_L(q, \tilde{q}; E) \neq 0$ . Переменные  $\tilde{q}$  и  $q$  разделяются в  $\text{disc } Z_L$ , так что в  $S_n(q, E)$  возникает множитель, включающий  $\chi(\sqrt{mE - 3/4q^2})$ , который явно зависит от  $q$  и определяет далекие (для короткодействующих сил) потенциальные особенности. «Непотенциальные» сингулярности  $S_n(q, E)$  возникают в случае, когда у подсистемы имеется виртуальный или резонансный полюс, т. е.  $\tau^{(-)}(z_2) \sim (z_2 - \nu_b)^{-1}$ . При этом  $S_n(q, E)$  является интегралом типа Коши, логарифмические сингулярности которого отвечают совпадению полюса  $\tau^{(-)}(z_2)$  с одним из концов интегрирования. Соответствующие точки ветвления

$$\left. \begin{aligned} q_{p1,2}^{(a)} &= \sqrt{m(E - \nu_p)/3} \pm \sqrt{m\nu_p}; \\ q_{p1,2}^{(b)} &= -\sqrt{m(E - \nu_p)/3} \pm \sqrt{m\nu_p} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

также отвечают функции Лежандра  $Q_L(y_p)$ , где

$$y_p = [(4\nu_p - E)/3 - q^2/m]/2 (q/\sqrt{m}) \sqrt{(E - \nu_p)/3}, \quad (72)$$

с разрезами вдоль линий  $-1 \leq y_p \leq 1$ ,

$$q_{p1,2}(y_p) = -y_p \sqrt{m(E - \nu_p)/3} \pm [m(E - \nu_p)(y_p^2 - 1)/3 + m\nu_p]^{1/2}. \quad (73)$$

Наконец,  $S_n(q, E)$  имеет корневой разрез по  $z_2 = E - (3/4)(q^2/m)$ , так как  $\sqrt{z_2}$  входит в пределы интегрирования вдоль кривой  $C(q, E)$ . Таким образом, полученная форма уравнений для нестабильных состояний позволяет явно найти ближайшие особенности решения по переменной  $q$ . Поскольку контур интегрирования обязательно проходит точку  $q = 0$ , для которой разрез  $C(q, E)$  сжимается в точку  $\sqrt{mE}$ , волновая функция имеет особенности функции  $S_n(\sqrt{mE}, E)$ ,

т. е. сингулярности по  $E$ , связанные с особенностями по  $q$ . Подставляя  $q_{p_1}^{a,b} = \sqrt{mE}$  в (71), получаем логарифмический разрез по  $E$  у первого члена разложения  $X(q, E)$  по степеням  $q$  вдоль отрезка между точками  $E = \nu_p$  и  $E = 4\nu_p$  (рис. 14). Кроме того, имеется полюс при  $E = 4\nu_p$  у функции  $\tau^{(-)}(E/4)$ , входящей в  $S_n(\sqrt{mE}; E)$ . Следующие члены разложения в степенной ряд по  $q$  будут содержать производные в точке  $\tilde{q} = \sqrt{mE}$ , т. е. положение особенностей не изменится, а сингулярность усилится. Таким образом, отрезок в плоскости  $E$  между точками  $\nu_p$  и  $4\nu_p$  — запрещенная область для аналитического

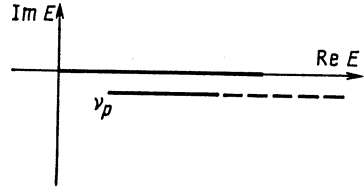
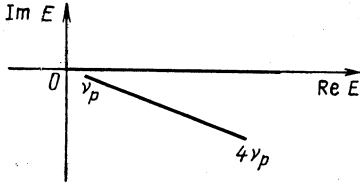


Рис. 14. Схема структуры ближайших особенностей по энергии решения задачи на собственные значения ядра уравнения Фаддеева в  $s_i$ , возникающих из-за слагаемого  $S(q, E)$  в (70), когда подсистема имеет полюс при энергии  $z_2 = \nu_p$

Рис. 15. То же, что на рис. 14, для слагаемого  $R(q, E)$  обычного типа

продолжения по  $E$ . Кроме того, решение имеет разрез, начинающийся в точке  $E = \nu_p$  и идущий параллельно действительной оси вправо, который аналогичен двухчастичному унитарному разрезу, расположенному на физическом листе. Аналитическая структура особенностей изображена на рис. 14 и 15. При фиксированном  $E$  и изменяющейся  $q$  кривая  $C(q, E)$  довольно прихотливо плавают в комплексной плоскости  $q''$ . Поэтому уравнение Фаддеева на листе  $s_i$  не удается решить обычным детерминантным методом: задача оказывается незамкнутой относительно множества квадратурных узлов на контуре интегрирования. Однако, зная ближайшие особенности решения, можно использовать аналитическое представление ( $\beta^{-1}$  — радиус двухчастичного взаимодействия)

$$X_n(q, E) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(p_1, \beta m) \left[ a_m + \sum_p b_m^{(p)} Q_L(y_p) \right], \quad (74)$$

$$p_1 = \sqrt{mE - (3/4)q^2},$$

где  $\sum_p$  — сумма по полюсам. Базис разложения построен на основе вершинной функции  $\chi(p_1, \beta)$ , причем  $\chi(p_1, \beta) \equiv \chi(p_1)$ , и вполне аналогичен базису, возникающему в задаче двух тел в методе Мартена [49]. Сумма по  $m$  в конкретных задачах должна обрываться в зависимости от требуемой точности. Подстановка (74) в уравнение

Фаддеева дает систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_m$  и  $b_m^{(p)}$ , которая может быть решена обычным способом. Поскольку положение трехчастичного полюса по  $E$  не зависит от  $q$ , наиболее простой путь — разложить левую и правую части уравнения Фаддеева по степеням  $q$  вблизи  $q = 0$ . Число членов разложения определяется числом неизвестных параметров  $a_m$  и  $b_m^{(p)}$  при фиксированном максимальном числе слагаемых в сумме по  $m$ .

Итак, мы имеем, по-видимому, практичный и достаточно строгий метод изучения трехчастичных резонансов, использующий аналитическое продолжение интегральных уравнений Фаддеева непосредственно в ту область энергии  $s_e$  и  $s_i$ , где расположены соответствующие полюсы  $S$ -матрицы. Более подробное изложение метода дано в [37, 126].

## 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА НА НЕФИЗИЧЕСКИХ ЛИСТАХ С ПОМОЩЬЮ ДЕФОРМАЦИИ КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**Нахождение резонансных полюсов.** Альтернативно к изложенной формулировке вычисление резонансных полюсов  $T$ -матрицы для трех частиц можно проводить с помощью подхода, предложенного Мёллером и Глекле [31, 33, 128]. Этот подход исходит из уравнений Фаддеева (52) на физическом листе и использует метод деформации контура интегрирования. Применение деформации контура в данном случае преследует две цели. Во-первых, контур интегрирования можно выбрать таким образом, чтобы в подынтегральной функции не было резкой структуры (т. е. как можно дальше от сингулярностей ядра уравнения). Во-вторых, деформация контура приводит к деформации расположенных в плоскости энергии разрезов для трехчастичной амплитуды, тем самым «обнажая» часть нефизического листа. Это означает, что деформация контура позволяет осуществлять переход на нефизический лист, не изменяя исходный вид уравнений, в отличие от изложенного выше подхода. Кроме того, метод деформации контура интегрирования дает значения  $T$ -матрицы на нефизическом листе не на всей римановой поверхности энергии, а только в ограниченной области, зависящей от пути интегрирования. В принципе, однако, всегда существует такой контур интегрирования, который позволяет попасть в нужную точку по энергии при условии, что в этой точке все подынтегральные функции, включая решение, аналитичны. Для изложения метода мы исходим из уравнений на собственные значения ядра интегрального уравнения Фаддеева. По сравнению с (52) обозначения немного изменены. Для сепарабельного потенциала  $V(p, p') = -\lambda g(p) g(p')$  имеем ( $m = 1$ ):

$$\lambda_{L_n}(z_3) F_{L_n}(q; z_3) = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 dk v_L(q, k; z_3) \tau\left(z_3 - \frac{3}{4} k^2\right) F_{L_n}(k; z_3), \quad (75)$$



где

$$v_L(q, k; z_3) = \int_{-1}^1 dy \frac{g(p_1) g(p_2) P_L(y)}{[z_3 - (yqk + q^2 + k^2)]}; \quad (76)$$

$$p_1^2 = ykq + q^2 + k^2/4; \quad p_2^2 = ykq + k^2 + q^2/4 \quad (77)$$

и

$$\tau(z_2) = -\lambda \left[ 1 + \lambda 4\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk g^2(k)}{(z_2 - k^2)} \right]^{-1}. \quad (78)$$

Для конкретных расчетов был использован потенциал Ямагучи с форм-фактором

$$g(p) = (p^2 + \beta^2)^{-1}. \quad (79)$$

Тогда интегралы в (76) и (78) берутся в аналитическом виде. Мы получаем

$$v_L(q, k; z_3) = \frac{1}{\pi^2 q^3 k^3} \left[ \frac{Q_L(y_3)}{(y_3 + y_1)(y_3 + y_2)} + \frac{Q_L(-y_1)}{(y_3 + y_1)(y_1 - y_2)} + \frac{Q_L(-y_2)}{(y_3 + y_2)(y_2 - y_1)} \right], \quad (80)$$

где

$$y_1 = \frac{\beta^2 + q^2 + k^2/4}{kq}; \quad y_2 = \frac{\beta^2 + k^2 + q^2/4}{kq}; \quad y_3 = \frac{z_3 - k^2 - q^2}{kq}. \quad (81)$$

Для  $\tau$  имеем

$$\tau(z_2) = -\frac{1}{\beta^2 \pi^2} \frac{(\alpha + \beta)^2}{[1 - (\alpha + \beta)^2 / (\beta - ip)^2]}, \quad (82)$$

где

$$p = \sqrt{z_2}; \quad \text{Im } p > 0; \quad \varepsilon_d = \alpha^2.$$

Как уже отмечалось выше, в соответствии с аналитической структурой собственных значений  $\lambda_{Ln}(z_3)$ , показанной на рис. 10, существуют два нефизических листа, примыкающих к физическому листу, которые мы обозначаем  $s_e$  и  $s_i$ . В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь аналитического продолжения в  $s_i$ . Продолжение в  $s_e$ , по-видимому, проще проводить, не прибегая к деформации контура. Оно уже рассматривалось в разд. 4 (см. также [138]). Как уже отмечалось, применение метода деформации контура требует тщательного анализа положения особенностей в плоскости интегрирования. В данном случае мы имеем следующие особенности ядра уравнения в комплексной плоскости  $k$  ( $-1 \leq y \leq 1$ ):

кинематические разрезы (68)

$$k_{1,2}^{(k)} = -\frac{1}{2} yq \pm \sqrt{q^2 \left( \frac{1}{4} y^2 - 1 \right) + z_3}$$

и динамические разрезы

$$k_{1,2}^{(A)} = 2(-yq \pm \sqrt{q^2(y^2 - 1) - \beta^2}); \quad (83)$$

$$k_{1,2}^{(B)} = -\frac{1}{2}yq \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}(y^2 - 1) - \beta^2}. \quad (84)$$

Происхождение особенностей (68), (83), (84), как уже отмечалось, связано с функциями  $Q_L$  в (80). Функция  $\tau$  в (75) дает следующие особенности:

кинematicкие разрезы

$$k_{1,2}^{(s)} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{z_3 - s}, \quad 0 \leq s < \infty, \quad (85)$$

и два полюса

$$k_{p1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{z_3 + \alpha^2}, \quad \alpha > 0. \quad (86)$$

Положения особенностей для одного значения  $q$  и  $z_3 = E + i0$  показаны на рис. 16. При численном решении интегрального уравне-

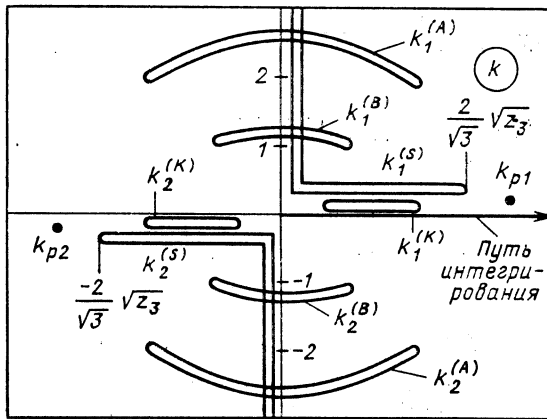


Рис. 16. Структура особенностей ядра уравнения Фаддеева на собственные значения в плоскости комплексного импульса  $k$  (переменной интегрирования) для  $z_3 = E + i\varepsilon$  ( $E, \varepsilon > 0$ ),  $0 < q < \sqrt{mE}$  для недеформированного контура интегрирования (потенциал Ямагучи)

ния (75) переменная  $q$  пробегает все значения, которые пробегает и  $k$ . Таким образом, вместо отдельных разрезов целая область особенностей мешает решению интегральных уравнений. Эта ситуация показана на рис. 17. Как видно из рисунка 17, непосредственная близость особенностей к пути интегрирования не позволяет получить надежные численные результаты, применяя обычные методы численного интегрирования. В противоположность этой ситуации деформи-

рованный контур интегрирования, показанный на рис. 18, дает результаты с большой численной точностью [31, 33, 124]. Изображенный на рис. 18 путь интегрирования пригоден для исследования положения резонансных полюсов амплитуды рассеяния только в ограниченной области нефизического листа. Для других областей приходится применять иную деформацию контура [33, 124]. Описанный метод на практике надежно работает. Надо отметить, что при подходящем выборе контура интегрирования он даже позволяет

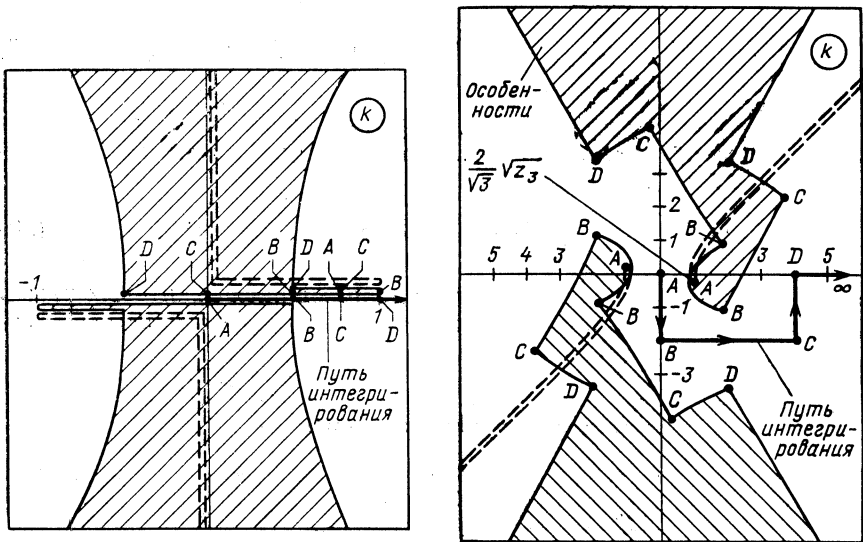


Рис. 17. Схема особенностей ядра уравнения (83) при  $z_3 = E + i\epsilon$  ( $E, \epsilon > 0$ ) для недеформированного контура интегрирования (потенциал Ямагучи)

Рис. 18. Положение особенностей для деформированного контура интегрирования, указанного на данном рисунке

осуществить аналитическое продолжение относительно разрезов, расположенных уже на нефизическом листе  $s_1$ . Это было показано на примере вычисления полюсных траекторий для  $^3n$ -системы в работе [139]. В последнем случае, как и в ряде других, аналитическое продолжение требует деформации контура не только в (75), но и в интеграле (78), т. е. для двухчастичной  $T$ -матрицы, что уже обсуждалось в разд. 4.

**Вершинные функции и константы связи** для распада гамовских состояний двух- и трехчастичных систем в методе, использующем деформацию контура, вычисляются в полной аналогии с расчетами для связанных состояний. Единственное отличие от формализма, изложенного, например, в [134], состоит в замене контура интегрирования вдоль действительной оси импульса на деформированный.

Аналогичным образом обобщаются фурье-преобразование и нормировка волновой функции в импульсном представлении.

Как уже отмечалось во введении, вершинные функции распада нестабильных систем могут быть использованы для сепарабельного представления  $t$ -матрицы, особенно полезного при энергиях вблизи соответствующего полюса  $t$ -матрицы, когда можно ограничиться одним сепарабельным слагаемым. В литературе часто используют сепарабельное разложение  $t$ -матрицы в форме Гильберта — Шмидта. Для рассеяния двух частиц имеем

$$t(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(z_2)}{1 - \lambda_n(z_2)} F_n(\mathbf{q}, z_2) F_n(\mathbf{q}', z_2), \quad (87)$$

где собственная функция  $F_n$  — нормированное решение уравнения (22). Для трехчастичной системы, например для процесса с развалом (рис. 19), имеем

$$T(\mathbf{f}, \mathbf{k}; \mathbf{k}_0; z_3) = \sum_{\alpha} [1 - \lambda_{\alpha}(z_3)]^{-1} \tilde{F}_{\alpha}(\mathbf{k}_0; z_3) F_{\alpha}(\mathbf{f}, \mathbf{k}; z_3). \quad (88)$$

Индекс  $\alpha$  обозначает совокупность сохраняющихся квантовых чисел.  $F_{\alpha}(\mathbf{f}, \mathbf{k}; z_3)$  — собственная функция ядра уравнения Фаддеева, про-

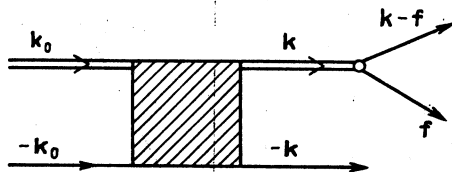


Рис. 19. Диаграмма для процесса с развалом

порциональная вершинной функции распада состояния  $|\alpha\rangle$  на три свободные частицы, а  $F_{\alpha}(\mathbf{k}_0; z_3)$  соответствует вершинной функции распада на связанную подсистему {12} и частицу 3. Учитывая определение вершинной функции (30) и тот факт, что вблизи полюса при  $z = z_n$

$$\lambda_n(z) = 1 + (z - z_n) (d\lambda_n/dz)_{z=z_n} + \dots, \quad (89)$$

получаем следующую связь для двухчастичной задачи:

$$g^{(n)}(\mathbf{q}) = C_n F_n(\mathbf{q}, z_n), \quad (90)$$

где

$$C_n = (-d\lambda_n/dz)_{z=z_n}^{1/2}.$$

Аналогичное соотношение вершинных и собственных функций получается и для трехчастичных состояний как для стабильных, так и нестабильных состояний. Процедура Гильберта — Шмидта впервые

была применена для задач рассеяния Вейнбергом [140]. Другое название метода — метод квазичастиц — связано с тем, что так Вейнберг назвал все полюсы  $S$ -матрицы, включая связанные, антисвязанные (виртуальные) и резонансные состояния. Подробности применения разложения Гильберта — Шмидта можно найти в работах [141—147]. В заключение этого раздела отметим, что некоторые работы по расчетам вершинных функций и констант связи для трехнуклонной системы не вошли в обзор [134] (многие из них были опубликованы позднее). К ним относятся работы [29, 148—157], которые включают расчеты с «реалистическими»  $NN$ -потенциалами. Напомним, что константы связи имеют статус самостоятельных физических величин, определяющих асимптотику координатной волновой функции. Они могут извлекаться из анализа экспериментов. Например, в [158] вершинная функция и константа для виртуального распада  ${}^3\text{He} \rightarrow p + d$  получены из анализа реакции  ${}^3\text{He} + p \rightarrow p + p + d$  при импульсах  ${}^3\text{He}$  2,5 и 5 ГэВ/с.

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ НУКЛОННЫХ СИСТЕМ

**Виртуальное состояние двух нуклонов.** Известно, что  $np$ -система может находиться либо в связанном  ${}^3S_1$  (дейтрон), либо в виртуальном  ${}^1S_0$  («синглетный дейтрон») состояниях. В силу тождественности соответствующие системы  $nn$  и  $pp$  могут находиться только в  ${}^1S_0$ -состоянии. В табл. 2 приведены значения энергии  $E_s$  синглетного

Таблица 2. Полосные значения энергии синглетной пары нуклонов для различных потенциалов

Потенциал	$-E_s$ , кэВ	Литература
Даревича—Грина	78	[29]
Мальфлине—Тжона	71	[29]
Бресселя—Кермана—Рубена (модифицированный)	81	[29]
Рида	122	[36]
Юкавы	69	[133]

дейтрона для различных  $NN$ -потенциалов. Отметим, что довольно большое значение  $|E_s|$  для потенциала Рида связано с принятой в [36] длиной рассеяния, которая существенно ниже, чем в остальных расчетах в табл. 2 ( $a_s \simeq -17$  фм вместо  $a_s \simeq -23$  фм). Это указывает на то, что параметры в [36] относятся к  $nn$ -, а не к  $np$ -системе, поскольку в литературе (см., например, [159]) такое значение  $a_s$  дается для  $nn$ -системы. В [160] обсуждается возможность учета различных  $a_s$  для  $nn$ - и  $np$ -взаимодействий в уравнениях Фаддеева для  ${}^3\text{H}$ .

В разд. 1 отмечалось, что учет кулоновского  $pp$ -взаимодействия сдвигает виртуальный уровень с мнимой оси вправо в комплексную плоскость импульса  $p$ , как впервые показано в работе [48]. Правда, он не становится «истинным» резонансом (квазистационарным состоянием), поскольку  $|\operatorname{Im} p/\operatorname{Re} p| > 1$ :

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{He}} &= (0,0647 - i 0,0870) \text{ фм}^{-1}, \\ E_{\text{He}} &= (-140 - i 467) \text{ кэВ}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Эти числа получены путем анализа экспериментальных данных по  $pp$ -рассеянию в рамках приближения эффективного радиуса, модифицированного с учетом кулоновского взаимодействия. Положение полюса (91) довольно близко к результату для потенциала Рида в табл. 2.

**Трехнуклонные нестабильные состояния.** Основные численные результаты, полученные в теоретических работах по исследованию резонансов в трехнуклонных системах  $^3n$  и  $^3\text{H}$  (без кулоновского взаимодействия), приведены в табл. 3 и 4 соответственно и в обзорных статьях [57, 59, 60, 62, 188]. Что касается нестабильных состояний в системах  $^3\text{He}$  и  $^3\text{Li}$ , то в настоящее время практически нет работ, которые исходили бы из интегральных уравнений Фаддеева. Во введении отмечалось, что учет кулоновского взаимодействия даже в задачах на связанное состояние требует модификации теории либо путем использования экранированного кулоновского потенциала [39] (см. также работу [162] и ссылки в ней), либо с помощью уравнений в конфигурационном пространстве [42, 43].

Модификации требует и дисперсионная теория ядерных реакций с заряженными частицами, в том числе определение вершинных функций с учетом кулоновского взаимодействия. Обзор, посвященный кулоновским эффектам в ядерных реакциях, дан в [190] (см. также [191]). В [192]  $pd$ -система была рассмотрена в рамках  $N/D$ -метода также с учетом кулоновского взаимодействия и было показано, что, как и в случае  $pp$ -взаимодействия, виртуальный полюс трития смещается в комплексную плоскость импульса. Следует отметить, однако, что на современном уровне точности расчетов резонансов и в связи с экспериментальной ситуацией вряд ли необходимо трактовать системы  $^3\text{He}$  и  $^3\text{Li}$  в рамках сложных модифицированных уравнений. Можно использовать зарядовую независимость с последующим учетом смещения уровней за счет кулоновской энергии. Поэтому вернемся к обсуждению  $^3N$ -системы без кулоновского взаимодействия. В табл. 3, 4 показано, что большинство теоретических работ дает отрицательный ответ на вопрос о существовании резонансов в системах  $^3n$  и  $^3\text{He}$ , расположенных близко к физической области. Исключением является упомянутый выше полюс для  $^3\text{He}$ , соответствующий виртуальному полюсу  $^3\text{H}$ . Связанное состояние  $^3n$ -системы, полученное Митрой [161], не было подтверждено в других работах. В [188] утверждается, что вычисления Митры содержат ошибку. Тем не менее некоторые авторы (см., например, [193]) счи-

Таблица 3. Обзор теоретических результатов по изучению резонансов в системе  ${}^3n$ 

Метод	Квантовые числа	Резонанс, МэВ	Литература
Решение УФ с СП, $\lambda < 1$ , ${}^3P$ -взаимодействие + члены, содержащие LS и $(LS)^2$	$L, S, J = 1; 3/2; 1/2$	Существует связанное состояние	[161—163]
Вариационное исчисление, ЛП, систематика для энергии отделения последнего нейтрона, $\lambda \approx 2$	$L, S, J = 1; 3/2; 1/2$	—	[164]
Решение уравнения Эйлера—Лагранжа, $\lambda \approx 5$	$L, S, J = 1; 3/2; 1/2$	—	[165]
Решение УШ с резонансными граничными условиями, метод $K$ -гармоник [167], потенциалы: прямоугольная яма, экспоненциальный, Юкавы, $\lambda = 2$	$L, S, J = 1; 3/2; 1/2$	—	[166]
Вычисление сечения для реакции ${}^3H(n, p){}^3n$		Сечение образования ${}^3n$ ниже экспериментальной чувствительности	[168, 169]
Исследование реакции ${}^3He(\pi^-, \pi^+){}^3n$ , УФ. Отклонение от фазового объема интерпретируется как $nn$ -взаимодействие в конечном состоянии	—	—	[64]
Специальная модель для вычисления резонансов, вариационное исчисление, потенциалы: Афнана—Танга [171], Эйкемейера—Гакенбройха [172]	$T, S, L = 3/2; 1/2; 1$	$E = 2,4; \Gamma = 1,6$ $E = 3,5; \Gamma = 2,7$	[170]
$K$ -матрица для трех частиц, вычисление собственных значений $K$ -матрицы	$T, S, L = 3/2; 1/2; 1$	$E = 6,1$	[173, 174]
УФ, вычисление собственных значений ядра УФ для вещественных энергий	$L = 0; 1$	—	[30]

Метод	Квантовые числа	Резонанс, МэВ	Литература
1. УШ, потенциал прямоугольной ямы, первое собственное значение [173] 2. Интегральное уравнение Скорнякова — Тер-Мартirosяна [19], потенциал с нулевым радиусом [173]	$T, S, L = 3/2; 1/2; 1$	—	[175]
УФ, потенциал Ямагучи (СП), полюсная траектория для $S$ -матрицы	$T, S, L = 3/2; 1/2; 1$	—	[31] [33]
УФ, потенциал Риды, ${}^3P_2$ - ${}^3F_2$ -взаимодействие, $\lambda = 4$	$T, J^\pi = 3/2; 3/2^-$	—	[176]
УФ и вариационное исчисление, сравнение результатов показало, что различие связано с отличием потенциалов, а не подходов	$L, S, J = 1; 1/2; 1/2$	—	[177]
УФ, координатное пространство, потенциал Риды с мягким кором [176]	$1/2 \leq J \leq 7/2$	—	[178]
Расчеты с потенциалом, который воспроизводит энергии связи ядер: ${}^3\text{H}$ , ${}^3\text{He}$ , ${}^4\text{H}$ , ${}^4\text{He}$ , ${}^4\text{Li}$ [177]	$L, S, J = 1; 1/2; 3/2$	—	[179]
Нижние оценки энергии связи ${}^3n$ -системы для различных потенциалов		Не противоречит существованию ${}^3n$ -резонанса	[180]
УФ, полюсные траектории $S$ -матрицы	$T, S, L^\pi = 3/2; 1/2; 1^-$	$E = (-88,0 \pm \pm i27,9) \text{ кэВ};$ $C_0^2 = -0,05 \pm i0,1$	[139]
Вычисление спектра $E_\nu$ из реакции $\mu^- + {}^3\text{H} \rightarrow \nu_\mu + {}^3\text{n}$	—	—	[181]



Таблица 4. Обзор теоретических результатов по изучению резонансов в системе  ${}^3\text{H}$ 

Метод	Квантовые числа	Резонанс, МэВ	Литература
См. табл. 3	$S = 1/2; L = 1$	—	[166]
Дисперсионные соотношения	$T, S, L =$ 1/2; 3/2; 1 1/2; 1/2; 1	$E = 15 - i5$ $E = 18 - i8$	[182]
См. табл. 3, потенциалы: Афана — Танга	$T, S, L =$ 3/2; 1/2; 1	$E = 10,6; \Gamma = 1,6$	[170]
Эйкемейера — Гакембройха	1/2; 3/2; 1 3/2; 1/2; 1 1/2; 3/2; 1	$E = 9,3$ $E = 12,0; \Gamma = 2,7$ $E = 9,3$	
Обобщение функции Йоста на случай задачи трех тел, аналитическое продолжение функции Йоста в комплексную плоскость энергии, отыскание нулей функции Йоста	$T, S, L =$ 1/2; 3/2; 1 1/2; 1/2; 0	$E = -(0,335 + i0,28) *$ $E = -0,49 *$ (виртуальное состояние)	[183]
Исследование реакций ${}^3\text{He}(\pi^-, \gamma){}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}(\pi^-, \pi^0){}^3\text{H}$	—	—	[184]
УФ, полюсные траектории $S$ -матрицы	$T, S, L =$ 1/2; 3/2; 1 1/2; 1/2; 0	$E = -(0,235 + i0,93)$ $E = -0,355$ (виртуальное состояние); $C_0^2 = 0,1058$	[124, 185]
Определение положения полюса и вычета для дублетного $nd$ -рассеяния: УФ; $N/D$	$T, S, L =$ 1/2; 1/2; 0	$E = -0,482 *;$ $C_0^2 = 0,0504$	[34]
Вычисление полюсов $T$ -матрицы в комплексной плоскости энергии по методу работ [36, 186]	$T, S, L =$ 1/2; 1/2; 0	$E = -0,381 *;$ $C_0^2 = 0,0589$	[36]

Метод	Квантовые числа	Резонанс, МэВ	Литература
Формулировка УФ на нефизическом листе, расчет полюсов $T$ -матрицы, ЛП Мальфлие — Тжона	$T, S, L = 1/2; 1/2; 0$	$E = -0,502^*$	[37]
УФ с трехнуклонными силами	$T, S, L = 1/2; 1/2; 0$	Трехчастичные силы несколько поднимают связанный и виртуальный уровни	[187]

Примечание (к табл. 3 и 4). Величина  $\lambda$  — фактор, на который надо умножить потенциал, чтобы получить трехчастичную систему с нулевой энергией связи, так что  $\lambda > 1$  отвечает несвязанному состоянию; \* — энергия уровня отсчитывается от двухчастичного порога. Используются обозначения: УФ — уравнения Фаддеева, УШ — уравнения Шредингера, СП — сепарабельный потенциал, ЛП — локальный потенциал,  $C_0^2$  — вычет в резонансном полсе, связанный с амплитудой рассеяния (14):  $\lim_{k \rightarrow k_{\text{res}}} [(k - k_{\text{res}})^2 f_0(k)] = 3/2 i C_0^2$ .

тают возможным существование локализованного (т. е. расположенного вблизи порога, когда все три нейтрона имеют нулевую энергию) тринейтрона. Единственным общим теоретическим результатом является виртуальный полюс для  $nd$ -системы с квантовыми числами связанного трития, расположенный недалеко ( $\sim 0,5$  МэВ) от порога  $n + d$  канала. Положение этого полюса зависит от вида  $NN$ -потенциала, но само существование виртуального трития можно считать надежно установленным. Надо отметить, что наблюдение этого состояния на опыте представляет непростую задачу, о чем свидетельствуют следующие аргументы.

1. Чтобы виртуальный полюс можно было наблюдать в физической области энергии вблизи порога  $n + d$ , соответствующий полюсный член в разложении Гильберта — Шмидта  $nd$ -амплитуды должен доминировать при малых относительных энергиях. Как показано в [194], вклад фона других членов в разложении Гильберта — Шмидта оказывается того же порядка, что и вклад полюсного члена, причем с противоположным знаком, так что происходит довольно тонкая компенсация. Этот факт связан с малым значением вычета в виртуальном полюсе. Более того, отмеченная компенсация приводит к сильной чувствительности дублетной длины  $nd$ -рассеяния к виду  $NN$ -потенциала.

2. В ряде работ (см., например, [195—197]) утверждается, что в разложении эффективного радиуса для дублетной  $S$ -фазы  $nd$ -рас-

сеяния  $(^2)\delta_0$  имеется полюс, расположенный в нефизической области около порога

$$k \operatorname{ctg} (^2)\delta_0(k) = -A + Bk^2 - C/(1 + Dk^2). \quad (92)$$

Параметры разложения ( $A = 0,3105 \text{ фм}^{-1}$ ,  $B = 0,85 \text{ фм}$ ,  $C = 3,138 \text{ фм}^{-1}$ ,  $D = 478,5 \text{ фм}^2$ ), полученные в [196] подгонкой к данным при низкой энергии, соответствуют виртуальному полюсу, расположенному при энергии  $-0,515 \text{ МэВ}$ , если отсчитывать от упругого порога. Поскольку амплитуда рассеяния при малых энергиях равна  $f(k) = [k \operatorname{ctg} (^2)\delta_0(k) - ik]^{-1}$ , полюс в формуле (92) соответствует нулю амплитуды  $f(k)$ . С другой стороны, в точке виртуального полюса  $f(k)$  обращается в бесконечность. Таким образом, вблизи порога  $f(k)$  должна сильно изменяться и, следовательно, зависеть от деталей расчета.

3. Сечение  $nd$ -рассеяния у порога дается формулой  $\sigma_0 = (4/3) \pi \times [2(^4)a^2 + (^2)a^2]$ . Для принятых экспериментальных значений квартетной и дублетной длин рассеяния  $(^4)a = 6,35 \text{ фм}$  и  $(^2)a = 0,65 \text{ фм}$  [198] первое слагаемое в  $\sigma_0$  приблизительно в 190 раз больше второго. Таким образом, трудно обнаружить виртуальный полюс при измерении этого сечения, даже если он сильно влияет на величину  $(^2)a$ . Чтобы обойти эту трудность, надо проводить измерения с поляризованными частицами. Итак, анализ теоретических расчетов, по-видимому, свидетельствует о том, что вряд ли следует ожидать наблюдения резонансов в  $3N$ -системе, поскольку расчеты траекторий путем вариации динамических параметров показывают, что полюсы  $S$ -матрицы (кроме обсуждавшегося выше виртуального полюса для  $^3\text{H}$  и соответствующего ему для  $^3\text{He}$ ) расположены далеко от физической области.

**Корреляция между энергетическими параметрами в  $nd$ -рассеянии.** Более 20 лет в литературе интенсивно обсуждается вопрос о корреляции между дублетной длиной  $(^2)a$   $nd$ -рассеяния и энергией связи тритона. Зависимость  $E_T = f(^2)a$  известна под названием линии Филлипса [199], на которую ложатся результаты расчетов с помощью уравнений Фаддеева с различными  $NN$ -потенциалами. Линия Филлипса близка к прямой вблизи экспериментальных значений  $E_T$  и  $(^2)a$ .

В работе [200] корреляция между  $E_T$  и  $(^2)a$  интерпретируется в терминах разложения эффективного радиуса. Аналогичный вопрос возникает по поводу соотношения между  $(^2)a$  и энергией виртуального уровня  $E_v$ . Наличие такой связи следует уже из формулы (92). Наконец, в недавней работе [201] корреляция между  $E_v$  и  $(^2)a$  была получена в так называемом «минимальном приближении» для трехнуклонной системы с помощью решения уравнений Скорнякова — Тер-Мартirosяна, обрезанных по импульсу на верхнем пределе (параметр обрезания  $q_c$  рассматривался как параметр). Найденная связь воспроизводит корреляцию, показанную в работе [34]. Этот результат объясняет слабую зависимость трехчастичных низкоэнер-

гетических параметров от конкретной модели  $NN$ -взаимодействия при условии, что правильно воспроизведены энергии связи и длины  $NN$ -рассеяния в дублетном и триплетном  $S$ -состояниях. Разложение эффективного радиуса для дублетного  $nd$ -рассеяния рассмотрено также в [202].

Подводя итог обсуждению свойств  $nd$ -рассеяния при низкой энергии, можно сделать вывод, что эти свойства определяются главным образом сингулярностями ядра уравнения Фаддеева, связанными с эффективным потенциалом однонуклонного обмена, которые обсуждались в разд. 4 (см. также [34]). Это обстоятельство, по-видимому, объясняет успешность применения двухтельного приближения к трехчастичной системе [203—206]. Поскольку эффективное  $nd$ -взаимодействие, отражающее динамику трехчастичной задачи, можно записать в виде [205]

$$V(r) = -V_0 \frac{\exp\left(-\frac{r_0}{|a|} \beta r\right)}{\beta^2 (Cr_0^2 + r^2)} \quad (93)$$

где  $a$ ,  $r_0$  — длина рассеяния и эффективный радиус в парной подсистеме (с наибольшей длиной рассеяния), то можно заключить, что теорема симметрии, рассмотренная в разд. 3, должна иметь место и в трехчастичной задаче, причем положение динамических сингулярностей определяется энергией связи подсистемы (см. разд. 4).

**Траектории полюсов для трехнуклонных систем.** Приведем несколько примеров таких траекторий в зависимости от параметров  $NN$ -взаимодействия. Уравнения Фаддеева с  $s$ -волновым одночленным сепарабельным потенциалом для  $3n$ -системы и для квартетного состояния  $npr$ -системы с точностью до спинового множителя  $(-1/2)$  совпадают с одномерным интегральным уравнением для трех бесспиновых бозонов. Для дублетного состояния  $npr$  имеется система из двух уравнений.

**$3n$ -система.** Полюсная траектория первого полюса (основного состояния)  $3n$ -системы с квантовыми числами  $(T, S, L^\pi) = (3/2, 1/2, 1^-)$  изображена на рис. 20—22 [32, 33], где  $\alpha = \sqrt{m\epsilon_d^*/\hbar^2}$ . Как видно из рис. 20, при  $\alpha \geq 1,1$  фм $^{-1}$  полюс  $3n$ -системы становится связанным. В интервале  $0 < \alpha < 1,1$  фм $^{-1}$  полюс расположен на нефизическом листе  $s_e$ . Для  $\alpha < 0$  полюс не переходит на нефизический лист  $s_i$ , как можно было бы ожидать, но от порога сразу попадает на лист, который мы обозначим  $s_{ie}$  (рис. 21). Лист  $s_{ie}$  связан с упругим разрезом, который при  $\alpha < 0$  расположен на листе  $s_i$ . Для реального синглетного взаимодействия  $\alpha = -0,04$  фм $^{-1}$  мы получаем положение полюса и вычет амплитуды рассеяния, приведенные в табл. 3 [139]:

$$E = (-88,0 \mp i27,9) \text{ кэВ},$$

$$C_0^2 = -0,05 \pm i0,1.$$

**Система  $npr$ .** В этой системе наряду с синглетными проявляются триплетные параметры  $NN$ -взаимодействия. Для состояния

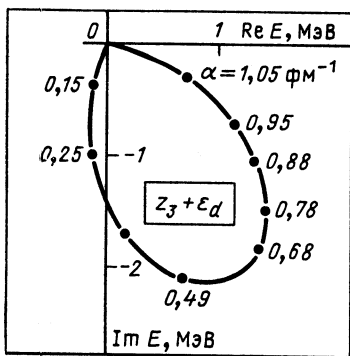


Рис. 20. Траектория первого полюса  $3n$ -системы на нефизическом листе  $s_e$

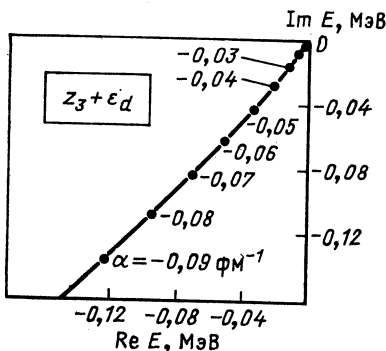
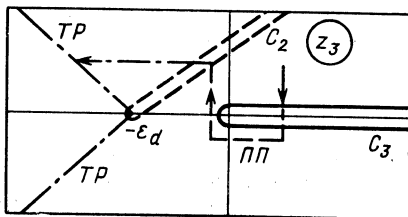


Рис. 21. Продолжение полюсной траектории, изображенной на рис. 20, на нефизический лист  $s_{1e}$

$(T, S, L^\pi) = (1/2, 3/2, 1^-)$  уравнение Фаддеева получается из уравнения для  $3n$ -системы простой заменой синглетных параметров триплетными. Таким образом, из траектории на рис. 20 сразу следует полюс при  $E = -(0,235 + i0,93)$  МэВ (см. табл. 4 [124]). Этот полюс трудно обнаружить в эксперименте, так как он расположен довольно далеко от упругого порога. Более того, поскольку это —  $P$ -состояние ( $L = 1$ ), соответствующая парциальная амплитуда  $nd$ -рассеяния у по-

Рис. 22. Схема аналитического продолжения для траектории, изображенной на рис. 20 ( $TP$  — траектория,  $ПП$  — путь аналитического продолжения)



рога обращается в нуль, и присутствие полюса не может заметно проявиться.

В интегральное уравнение Фаддеева для состояния  $(T, S, L^\pi) = (1/2, 1/2, 0^+)$ , т. е. с квантовыми числами  $^3\text{H}$ , входят и триплетное, и синглетное взаимодействия. Это означает, что полные исследования траекторий требуют вариации двух параметров. Такие расчеты, насколько нам известно, в литературе отсутствуют. В работах [186, 207] приведены траектории виртуального уровня  $^3\text{H}$  в зависимости от триплетного параметра энергии связи  $\epsilon$  «дейтрона», рассчитанные для  $NN$ -потенциалов Ямагучи [208] и локального потенциала Мальфлие — Тжона [209] (набор параметров I, III) соответственно. Использовались уравнения из работы [37] с сепарабельной потенциала Мальфлие — Тжона по Бейтмену (четыре сепарабельных сла-

гаемых). Результаты расчетов сравниваются на рис. 23. Видно, что в области физического значения триплетного параметра  $\epsilon = \epsilon_d$  оба потенциала дают близкие результаты. Однако поведение траекторий различно. В случае потенциала Мальфлие — Тжона траектория ведет себя нормальным образом (т. е. полюс движется к порогу  $n + d$  с увеличением притяжения в двухчастичной подсистеме, приближаясь к области связанного трехчастичного состояния), а в случае потенциала Ямагучи поведение аномально. Аномальность поведения траектории в области малых  $\epsilon$  обусловлена ефимовской природой уров-

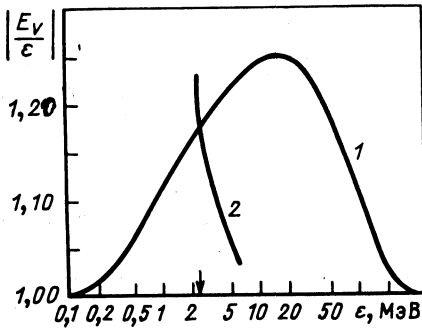


Рис. 23. Траектория виртуального полюса  $E_v$  как функция энергии связи  $\epsilon$  в  $^3S_1$ -состоянии для потенциала Ямагучи (1) и потенциала Мальфлие — Тжона (2)

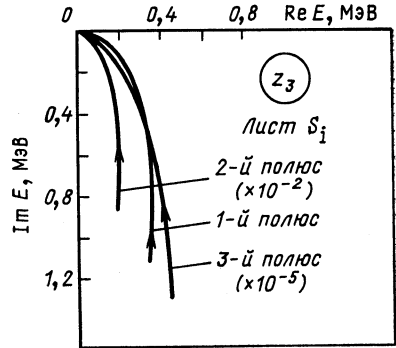


Рис. 24. Траектории первых трех полюсов на нефизическом листе  $s_i$ , характеризующие поведение полюсов Ефимова в области  $\alpha \lesssim 0$

ня. Поэтому она должна иметь место и для потенциала Мальфлие — Тжона, но при меньших значениях  $\epsilon$ . Реальное значение  $\epsilon = \epsilon_d$  приводит к значениям  $E_v$ , приведенным в табл. 4 [37, 185, 186] для потенциалов Мальфлие — Тжона и Ямагучи.

**Эффект Ефимова.** Исследование полюсных траекторий обнаруживает патологическое поведение при  $\alpha \sim \epsilon^{1/2} \rightarrow 0$ , которое связано с эффектом Ефимова. В 1970 г. В. Ефимов показал [26, 27], что в пределе  $a \rightarrow \infty$  (т. е.  $\alpha \rightarrow 0$ ), где  $a$  — длина рассеяния в парной подсистеме, число трехчастичных связанных состояний также стремится к бесконечности. Качественное объяснение состоит в том, что в случае, когда одна частица движется в поле двухчастичной подсистемы с энергией связи, близкой к нулю, на нее действует эффективный дальнедействующий (типа  $1/r^2$ ) потенциал [см. (93)] независимо от радиуса потенциала взаимодействия двух частиц. Наиболее простое объяснение эффекта дано в работах Амадо и др. [210—213], которые показали, что в ефимовском пределе ( $\epsilon_{12} \rightarrow 0, z_3 \rightarrow 0$ ) ядро интегрального уравнения Фаддеева становится нефредгольмовым,

т. е.  $\text{Sp}(K^n) \rightarrow \infty$  ( $n = 1, 2 \dots$ ). Поскольку имеет место соотношение

$$\text{Sp}(K^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n, \quad n = 2, 3 \dots, \quad (94)$$

где  $\lambda_i$  — собственное значение ядра, в предельном случае получаем, что точка сгущения собственных значений  $\lambda_i$  для  $i \rightarrow \infty$  находится не при значении нуль, как для интегральных ядер фредгольмовского типа, но при конечном значении. Для  $S$ -состояния точка сгущения больше 1, откуда и следует бесконечное число связанных состояний  $N \sim (1/\pi) \ln(|a|/r_0)$ .

Первая иллюстрация эффекта Эффимова в численных расчетах была дана в работе [214], где было показано, что при  $\alpha \rightarrow 0$  действительно возникает большое число связанных уровней. С уменьшением  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ) эти состояния приходят из континуума, становятся связанными состояниями, а при  $\alpha \leq 0$  опять уходят в континуум. Возникает вопрос, как ведут себя полюсы Эффимова в континууме. Траектории первых трех полюсов для системы трех тождественных бесспиновых бозонов при  $L = 0$  показаны на рис. 24 [215]. Видно, что с увеличением силы двухчастичного взаимодействия от нуля до бесконечности полюсы  $S$ -матрицы, расположенные на комплексной плоскости энергии, приходят из бесконечности на нефизическом листе  $s_i$ . При  $\alpha = -0,15 \text{ фм}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,011 \text{ фм}^{-1}$  и  $\alpha = -0,00055 \text{ фм}^{-1}$  первый, второй и третий полюсы соответственно становятся связанными состояниями. При дальнейшем увеличении  $\alpha$  первые два полюса остаются связанными состояниями. Третий полюс при  $\alpha = 0,0103 \text{ фм}^{-1}$  уходит на нефизический лист  $s_e$ , а при  $\alpha = 4,25 \text{ фм}^{-1}$  возвращается на физический лист и становится связанным состоянием. Исследование поведения траектории третьего полюса на листе  $s_e$  является сложной задачей, поскольку он не остается все время на листе  $s_e$ , переходя на другие листы римановой поверхности, связанные с различными разрезами. Для других полюсов Эффимова ожидается то же качественное поведение, что и для третьего полюса. Имеется одно неожиданное свойство траектории, являющееся характерным аспектом эффекта Эффимова. В некоторой области силы двухчастичного взаимодействия возникает ситуация, когда при ее увеличении данное связанное трехчастичное состояние не становится еще более связанным, как следовало ожидать, а переходит в континуум. Это обусловлено тем, что в плоскости энергии начало двухчастичного разреза сдвигается влево быстрее, чем полюс связанного состояния. Об аномальном поведении полюсной траектории, связанном с эффектом Эффимова, для виртуальных состояний уже говорилось выше (см. также [215, 216]). Поиск реальных физических систем, в которых проявляются эффимовские уровни, осуществлялся во многих других работах, использующих различные теоретические модели [34, 36, 217—222]. Как отметил В. Эффимов еще в 1975 г. [223], одним

из возможных кандидатов является система из трех  $\alpha$ -частиц, поскольку имеются квазистационарное состояние  ${}^8\text{Be}$  с малой энергией ( $-95$  кэВ) и трехчастичный уровень  ${}^{12}\text{C}$  с энергией связи  $7,65$  МэВ, расположенный довольно близко к порогу  $3\alpha$ -развала. Однако для окончательного экспериментального доказательства существования эффекта Ефимова надо найти такую систему, в которой проявлялись бы не один, а несколько уровней с ефимовской природой.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный подход к поиску и исследованию резонансов в трехчастичных системах в терминах полюсов  $T$ -матрицы может быть распространен на различные трехчастичные (или трехкластерные) физические системы. Так, метод деформации контура интегрирования для перехода на нефизический лист энергии применялся в [224, 225] для поиска дибарионных резонансов в рамках трехчастичной  $NN\pi$ -динамики. Причем в [225] был использован модифицированный более простой путь деформации контура интегрирования. Метод интегральных уравнений для резонансных состояний можно применять также к другим системам адронов, например,  $NN\bar{N}$ ,  $\pi N$ ,  $3\pi$ ,  $K\bar{K}\pi$ ,  $K\pi\pi$  и т. д. Уравнения Фаддеева для  $NN\bar{N}$ -системы были применены в [226—229]. Для полноты отметим также работы [230—236] по этой тематике, хотя в большинстве из них применялись другие подходы к исследованию резонансов.

Что касается  $3N$ -систем, которым уделено главное внимание в настоящем обзоре (см. также [237]), то можно сделать вывод об отсутствии в них резонансов, близких к физической области (за исключением виртуального уровня  ${}^3\text{H}$ ). В частности, отрицательный результат был получен также в недавней работе [238], посвященной экспериментальному поиску три- и тетранейтрона в реакциях на мишени  ${}^7\text{Li}$  под действием ионов  ${}^{11}\text{B}$  и  ${}^9\text{Be}$  (см. также теоретическую работу [239]).

Итак, в настоящее время имеется ряд достаточно точных и практических методов теоретического исследования гамовских состояний, среди которых важное место занимает метод аналитического продолжения интегральных уравнений теории рассеяния, изложению которого посвящена большая часть данного обзора. Дальнейшее развитие этого метода потребует более аккуратного учета кулоновского взаимодействия, играющего особенно важную роль вблизи порога по каналу заряженных частиц.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gamov G.//Z. Phys. 1928. Vol. 51. P. 204—212.
2. Breit G., Wigner E. P.//Phys. Rev. 1936. Vol. 49. P. 519—531; Wigner E., Breit G.//Phys. Rev. 1936. Vol. 49. P. 642.



3. Брейт Г. Теория резонансных ядерных реакций: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1969.
5. Тейлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
6. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
7. Huby R., Mines J. R.//Rev. Mod. Phys. 1965. Vol. 37. P. 406—408.
8. Bang J., Zimányi J.//Nucl. Phys. A. 1969. Vol. 139, N 3. P. 534—544.
9. Vincent C. M., Fortune H. T.//Phys. Rev. C. 1970. Vol. 2, N 3. P. 782—792.
10. Бунаков В. Е., Гриднев К. А., Краснов Л. В.//ЯФ. 1972. Т. 15. С. 906—916.
11. Dolinsky E. I., Dzhamalov P. O., Mukhamedzhanov A. M.//Nucl. Phys. A. 1973. Vol. 202. P. 97—122.
12. Baur G., Trautman L.//Phys. Rep. 1976. Vol. 25. P. 294—358.
13. Yoshida S., Adachi S.//Z. Phys. A.-Atomic Nuclei. 1986. Vol. 325. P. 441—449.
14. Aguilar J., Combes J. M.//Commun. Math. Phys. 1971. Vol. 22. P. 269—279; Baslev E., Combes J. M.//Commun. Math. Phys. 1971. Vol. 22. P. 280—294; Simon B.//Commun. Math. Phys. 1972. Vol. 27. P. 4; Simon B.//Ann. Math. 1973. Vol. 97. P. 247.
15. Engdahl E., Brändas E., Rittby M. e.a.//Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. P. 3777—3800.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной теоретической физики. 4. Анализ операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
17. Gyarmati B., Kruppa A. T.//Phys. Rev. C. 1986. Vol. 34, N 1. P. 95—102.
18. Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы из трех частиц.//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1963. Т. 69.
19. Скорняков Г. В., Тер-Мартirosян К. А.//ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 775—792.
20. Якубовский О. Я.//ЯФ. 1967. Т. 5. С. 1312—1320.
21. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
22. Беляев В. Б. Лекции по теории малочастичных систем. М.: Энергоатомиздат, 1986.
23. Шмид Э., Цигельман Х. Проблема трех тел в квантовой механике: Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
24. Филиппов Г. В., Василевский В. С., Чоповский Л. Л.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 349—406; Эфрос В. Д., Устинин М. Н.//ЯФ. 1985. Т. 42. С. 125—133; Метод кластерного базиса для реакций с легчайшими ядрами и  $N\alpha$ -рассеяние с реалистическими взаимодействиями. М., 1986. Препринт ИАЭ-4270/2.
25. Kukulin V. I., Krasnopolsky V. M., Voronchev V. T. e.a.//Nucl. Phys. A. 1986. Vol. 453. P. 365—381.
26. Efimov V.//Phys. Lett. B. 1970. Vol. 33. P. 563—564.
27. Ефимов В.//ЯФ. 1970. Т. 12. С. 1080—1091.
28. Orlov Yu. V.//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 163, N 1—4. P. 25—27.
29. Беляев В. Б., Иргазиев Б. Ф., Орлов Ю. В.//ЯФ. 1976. Т. 24. С. 44—50.
30. Belyaev V. B., Möller K.//Z. Phys. A. 1976. Vol. 279. P. 47—54.
31. Möller K. Preprint ZfK-327 (Zentral institut fur Kernforschung Rossendorf bei Dresden). Dresden, 1977.
32. Möller K.//Preprint ZfK-347. Dresden, 1977; Möller K.//Proc. of 1977 European Symp. on Few-Particles Problems in Nucl. Phys. Potsdam, 1977. P. 90—93.
33. Glöckle W.//Phys. Rev. C. 1978. Vol. 18, N 1. P. 564—572.
34. Girard B. A., Fuda M. G.//Phys. Rev. C. 1979. Vol. 19, N 3. P. 579—582.
35. Орлов Ю. В.//Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 7. С. 380—384.
36. Adhikari S. K., Fonseca A. C., Tomio L.//Phys. Rev. C. 1982. Vol. 26, N 1. P. 77—82.

37. Орлов Ю. В., Туровцев В. В.//ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 5. С. 1600—1617.
38. Emelyanov V. G., Klimov V. I., Pomerantsev V. N.//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 157, N 2—3. P. 105—107.
39. Alt E. O., Sandhas W., Ziegelmann H.//Nucl. Phys. A. 1985. Vol. 445. P. 429—461.
40. Noble J. V.//Phys. Rev. 1967. Vol. 161. P. 945—955.
41. Веселова А. М.//ТМФ. 1970. Т. 3. С. 326—331.
42. Квицинский А. А., Куперин Ю. А., Меркурьев С. П. и др.//ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. Вып. 2. С. 267—317.
43. Friar J. L., Gibson B. F., Payne G. L.//Phys. Rev. C. 1983. Vol. 28. P. 983—994.
44. Bethe H. A.//Phys. Rev. 1949. Vol. 76, N 1. P. 38—50.
45. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963.
46. Adhikari S. K., Torrealo J. R. A.//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 119, N 4—6. P. 245—248.
47. Кудрявцев А. Е., Попов В. С.//Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. Вып. 5. С. 311—316.
48. Kok L. P.//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, N 6. P. 427—430.
49. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние: Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
50. Krasnopolsky V. M., Kukulín V. I.//Phys. Lett. A. 1978. Vol. 69. P. 251—254.
51. Кукулин В. И., Краснопольский В. М., Миселки М.//ЯФ. 1979. Вып. 3. С. 818—832.
52. Popov V. S., Weinberg V. M. Preprint ИТЕР-101. Moscow, 1982.
53. Вайнберг В. М., Попов В. С.//ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 2. С. 335—340.
54. Браун Дж. Е., Джексон А. Д. Нуклон-нуклонные взаимодействия: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1979.
55. Бадалян А. М., Симонов Ю. А.//ЯФ. 1975. Т. 24. Вып. 4. С. 890—901.
56. Kloet W. M., Tjon J. A., Silbar R. R.//Phys. Lett. B. 1981. Vol. 99. P. 80—84.
57. Slans I.//Proc. of Intern. Conf. on the Three-Body Probl. Birmingham, 1969. P. 355.
58. Bray K. H., Bunker S. N., Jain Mahavir e.a.//Phys. Rev. C. 1971. Vol. 3. P. 1771—1784.
59. Paic G.//Proc. Intern. Conf. on Few-Particle Probl. in the Nucl. Interact. Los Angeles, 1972. P. 539.
60. Fiarmann S., Hanna S. S.//Nucl. Phys. A. 1975. Vol. 251. P. 1—64.
61. Phillips A. C.//Rev. Progr. Phys. 1977. Vol. 40. P. 905.
62. Tilley D. R., Weller H. R., Hanan H. H.//Nucl. Phys. A. 1987. Vol. 474. P. 1—60.
63. Miller J. P., Bistirlich J. A., Crowe K. M. e.a.//Nucl. Phys. A. 1980. Vol. 343. P. 347—355.
64. Phillips A. S.//Phys. Lett. B. 1970. Vol. 33. P. 260—262.
65. Ajdacic V., Cerineo M., Lalovic B. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. P. 442—443.
66. Thornton S. T., Bair J. K., Jones C. M.//Phys. Rev. Lett. 1966. Vol. 17. P. 701—702.
67. Fuschini E., Maroni C., Uguzzoni A. e.a.//Nuovo cimento. B. 1967. Vol. 48. P. 190—193.
68. Debertain K., Rössle E.//Nucl. Phys. A. 1968. Vol. 107. P. 693—694.
69. Sperinde J., Fredrickson D., Hinkins R. e.a.//Phys. Lett. B. 1970. Vol. 32. P. 185—186.
70. Perez-Mendez V., Sperinde J.//Proc. Intern. Seminar. on  $\pi$ -A Interaction. Strassburg, 1971.
71. Sperinde J., Fredrickson D., Perez-Mendez V. e.a.//Nucl. Phys. B. 1974. Vol. 78. P. 345—369.

72. Stez A., Swenson L. W.//Nucl. Phys. A. 1986. Vol. 457. P. 669.
73. Crowe K. M. Los Alamos Report LA-5959-PR (1975) 49.
74. Crowe K. M.//Proc. of 7th Intern. Conf. on High-Energy Phys. and Nucl. Structure. Zurich, 1977.
75. Bistirlich J. A., Cooper S., Crowe K. M. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 36. P. 942—944.
76. Bistirlich J. A., Crowe K. M., Miller J. e.a.//Helv. Phys. Act. 1979—80. Vol. 52, N 3. P. 415.
77. Kaufmann L., Perez-Mendez V., Sperinde J.//Phys. Rev. 1968. Vol. 175. P. 1358—1366.
78. Jackson H. E., Tabor S. L., Rehm K. E. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39. P. 1601—1603.
79. Raghunathan V., Perdrisat C. F., Altemus R. e.a.//Bull. Amer. Phys. Soc. 1981. Vol. 26. P. 565.
80. Källne J., Whitney R. R.//Phys. Lett. B. 1981. Vol. 107. P. 23—26.
81. Baer H. W., Crowe K. M., Truol P.//Adv. Nucl. Phys. (N.Y. — Lond.) 1977. Vol. 9. P. 177—260.
82. Cerny J., Weisenmiller R. B., Jelley N. A. e.a.//Phys. Lett. B. 1974. Vol. 53. P. 247—249.
83. Арабабян Н. М., Батусов Ю. А., Буятов С. А. и др.//ЯФ. 1972. Т. 15. С. 18—21.
84. Ohlsen G. G., Stokes R. H., Young P. G.//Phys. Rev. 1968. Vol. 176. P. 1163—1165.
85. Koral K. F., Silverstein E. A., Bevington P. R.//Nucl. Phys. A. 1971. Vol. 175. P. 156—166.
86. Antolковић B., Cerineo M., Paić G. e.a.//Phys. Lett. 1966. Vol. 23. P. 477—479.
87. Minehart R. C., Coulson L., Grubb W. F. e.a.//Phys. Rev. 1969. Vol. 177. P. 1464—1465.
88. Flasing //Progr. in Part. and Nucl. Phys. 1981. Vol. 7. P. 113.
89. Williams L. E., Batty C. J., Bonner B. E. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1969. Vol. 23. P. 1181—1184.
90. Batty C. J., Bonner B. E. e.a.//Proc. Intern. Conf. on Three-Body Problems. Birmingham, 1969.
91. Kim C. C., Bunch S. M., Devins D. W., Farski H. H.//Phys. Lett. 1966. Vol. 22. P. 314—315.
92. Mancusi M. D., Jones C. M., Ball J. B.//Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1449—1450.
93. Harbison S. A., Kingston F. G., Johnston A. R. e.a.//Nucl. Phys. A. 1968. Vol. 108. P. 478—480.
94. Arvieux J.//Nucl. Phys. A. 1974. Vol. 221. P. 253—268.
95. Niiler A., von Witsch W., Phillips G. C. e.a.//Phys. Rev. C. 1970. Vol. 1. P. 1342—1352.
96. Van der Weerd J. C., Canada T. R., Fink C. L. e.a.//Phys. Rev. C. 1971. Vol. 3. P. 66—72.
97. Braithwaite W. J., Cameron J. M., Storm D. W. e.a.//Phys. Rev. C. 1971. Vol. 4. P. 1476—1480.
98. Matsuki S. e.a.//Proc. Intern. Conf. on Few-Particle Probl. in the Nucl. Interact. Los Angeles, 1972. P. 535.
99. Burg J. P., Cabrillat J. C., Chemarin M. e.a.//Nucl. Phys. A. 1972. Vol. 179. P. 371—384.
100. Chang C. C. e. a.//Proc. Intern. Conf. on Few-Particle Probl. in the Nucl. Interact. Los Angeles, 1972. P. 527—530.
101. Halbert M. L. e.a.//Proc. Intern. Conf. on Few-Particle Probl. in the Nucl. Interact. Los Angeles, 1972. P. 531—534.
102. Van der Woude, Halbert M. L., Bingham C. R. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1971. Vol. 26. P. 909—911.

103. Ticcioni G., Gardiner S. N., Matthews J. L. e.a.//Phys. Lett. B. 1973. Vol. 46. P. 369—371.
104. Skopik D. M., Shin Y. M.//Canad. J. Phys. 1972. Vol. 50. P. 392—394.
105. Dodge W. R., Murphy J. J., Chang C. C.//Bull. Amer. Phys. Soc. 1973. Vol. 18. P. 49.
106. Chertok B. T., Jones E. C., Bendel W. L.//Phys. Rev. Lett. 1969. Vol. 23. P. 34—37.
107. Frosch R. F., Crannell H. L., McCarthy J. S. e.a.//Phys. Lett. B. 1967. Vol. 24. P. 54—56.
108. Frisbee P. E., Pugh H. G.//Nucl. Phys. A. 1972. Vol. 191. P. 658—662.
109. Slobodrian R. I., McKee J. S. C., Clark D. J. e.a.//Nucl. Phys. A. 1967. Vol. 101. P. 109—112.
110. Halbert M. L., Van der Woude A.//Phys. Rev. Lett. 1971. Vol. 26. P. 1124—1126.
111. Halbert M. L., Van der Woude A.//Phys. Rev. Lett. 1971. Vol. 26. P. 1679 (Errata).
112. Valković V., Joseph C., Emerson C. T. e.a.//Nucl. Phys. A. 1967. Vol. 106. P. 138—160.
113. Forster H. H., Hakhikian J., Kim C. C.//Intern. Nucl. Phys. Conf. Gatlinburg, 1966. P. 1025—1029.
114. Bunker S. N., Jain M., Tivin P. J. e.a.//Nucl. Phys. A. 1971. Vol. 178. P. 83—87.
115. Olsen D. K., Brown R. E.//Phys. Rev. 1968. Vol. 176. P. 1192—1198.
116. Beveridge J. L., Egger J. P., Foroughi F. e.a.//Helv. Phys. Acta. 1972. Vol. 45. P. 943—946.
117. Cookson J. A.//Phys. Lett. 1966. Vol. 22. P. 612—613.
118. Anderson J. D., Wong C., McClure J. W. e.a.//Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15. P. 66—68.
119. Crawford J. F., Daum M., Eaton G. H. e.a.//Phys. Rev. C. 1980. Vol. 22. P. 1184—1196.
120. Tombrello T. A., Slobodrian R. J.//Nucl. Phys. A. 1968. Vol. 111. P. 236—240.
121. Morton B. J., Gross E. E., Hungerford E. V. e.a.//Phys. Rev. 1968. Vol. 169. P. 825—832.
122. Bacher A. D., Mcgrath R. L., Cerny J. e.a.//Nucl. Phys. A. 1970. Vol. 153. P. 409—412.
123. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.
124. Möller K. Untersuchung von resonanzen in dreinucleonensystemen Thesis (Dr. sc. nat.) Techn. Univers. Dresden, 1979.
125. Berggren R. G.//Nucl. Phys. 1968. Vol. A109. P. 265—287.
126. Орлов Ю. В. Исследование малобарионных систем методом интегральных уравнений: Дис. д-ра физ.-мат. наук. М., 1984.
127. Ситенко А. Г. Теория рассеяния. Киев: Вища школа, 1975.
128. Орлов Ю. В., Никитина Л. И.//ЯФ. 1989. Т. 49. Вып. 3. С. 701—707.
129. Нуссенцвейг Х. Причинность и дисперсионные соотношения: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
130. Гареев Ф. А., Гончаров С. А., Кукулин В. И., Краснопольский В. М. Препринт ОИЯИ Р4-12002, Дубна, 1978.
131. Демков Ю. Н., Друкарев Г. Ф.//ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 2(8). С. 691—698.
132. Orlov Yu. V., Popov V. S., Turovtsev V. V., Weinberg V. M. Virtual and resonance levels in screened Coulomb potentials. Preprint ИТЕР-86-140. Moscow, 1986.
133. Вайнберг В. М., Орлов Ю. В., Попов В. С., Туровцев В. В.//Укр. физ. журн. 1987. Т. 32, № 8. С. 1125—1129.
134. Блохинцев Л. Д., Борбей И., Долинский Э. И.//ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. Вып. 6. С. 1189—1245.

135. Kukulín V. I., Klimov V. I., Pomerantsev V. N.//J. Phys. G.: Nucl. Phys. 1982. Vol. 8. P. 1671—1687.
136. Зельдович Я. Б.//ЖЭТФ. 1960. Т. 39. Вып. 3(9). С. 776—780.
137. Жигунов В. П., Захарев Б. Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. М.: Атомиздат, 1974.
138. Möller K. On the calculation of the eigenvalues of the Faddeev equation kernel on the nonphysical sheet of energy. Preprint ZfK-351. Dresden, 1978.
139. Möller K.//Czech. Journ. Phys. B. 1982. Vol. 32. P. 291—293.
140. Weinberg S.//Phys. Rev. 1963. Vol. 131. P. 440—460.
141. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф.//УФН. 1971. Т. 103. С. 469—527.
142. Симонов Ю. А., Бадалян А. М. Препринт ИТФФ-89. Москва, 1973.
143. Бадалян А. М., Симонов Ю. А.//ЯФ. 1973. Т. 18. С. 73—78.
144. Badalyan A. M., Simonov Yu. A.//Particles and Nuclei. 1975. Vol. 6. P. 299.
145. Simonov Yu. A.//Proc. of European Symp. on Few-Part. Probl. Potsdam, 1977. P. 81.
146. Narodetsky I. M.//La Rivista del Nuovo cimento. 1981. Vol. 4, N 7.
147. Möller K., Narodetsky I. M.//Z. Physik A. 1984. Vol. 315. P. 325—332.
148. Барышников А. Г., Блохинцев Л. Д., Народецкий И. М.//Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 608—612.
149. Baryshnikov A. G., Blokhintsev L. D., Narodetsky I. M.//Phys. Lett. B. 1974. Vol. 51. P. 432—434.
150. Kim Y. E., Muslim//Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 42. P. 1328—1331.
151. Sasakawa T., Sawada T., Kim Y. E.//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 1386—1388.
152. Friar J. L., Gibson B. E., Lehman D. R., Payne G. L.//Phys. Rev. C. 1982. Vol. 25. P. 1616—1631.
153. Borbely I., Doleschall P.//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 113. P. 443—446.
154. Gibson B. F., Lehman D. R.//Phys. Rev. C. 1984. Vol. 29. P. 1017—1032.
155. Ishikawa S., Sasakawa T.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 317—319.
156. Baldo M., Ferreira L. S., Streit L. e.a.//Phys. Rev. C. 1986. Vol. 33. P. 1587—1593.
157. Baldo M., Ferreira L. S., Streit L.//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 36. P. 1743—1746.
158. Blinov A. V., Chuvilo I. V., Drobot V. V. e.a.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1985. Vol. 11. P. 623—634.
159. Gabioud B. e.a.//Nucl. Phys. A. 1984. Vol. 420. P. 496—503.
160. Friar J. L., Gibson B. F., Payne G. L.//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 36. P. 1140—1143.
161. Mitra A. N.//Phys. Rev. 1966. Vol. 150. P. 839—846.
162. Mitra A. N., Bhasin V. S.//Phys. Rev. Lett. 1966. Vol. 16. P. 523—524.
163. Jacob H., Gupta V. K.//Phys. Rev. 1968. Vol. 174. P. 1213—1220.
164. Okamoto K., Davies B.//Phys. Lett. B. 1967. Vol. 24. P. 18—21.
165. Barbi M.//Nucl. Phys. A. 1967. Vol. 99. P. 522—528.
166. Бадалян А. М., Гальперн Е. С., Ляховицкий В. Н.//ЯФ. 1968. Т. 8. С. 313—320.
167. Симонов Ю. А., Бадалян А. М.//ЯФ. 1967. Т. 5. С. 88—100.
168. Nakamura H.//Nucl. Phys. A. 1968. Vol. 118. P. 17—24.
169. Venöhr H. C.//Phys. Lett. B. 1971. Vol. 34. P. 448—450.
170. Venöhr H. C.//Nucl. Phys. A. 1970. Vol. 149. P. 426—440.
171. Afnan I. R., Tang Y. C.//Phys. Rev. 1968. Vol. 175. P. 1337—1345.
172. Eikemeier H., Heikenbroich H. H.//Z. Phys. 1966. Vol. 195. P. 412—418.
173. Sasakawa T.//Proc. of Intern. Conf. on Few Particle Probl. in the Nucl. Interact. Los Angeles, 1972. P. 417.
174. Sasakawa T.//Nucl. Phys. A. 1972. Vol. 186. P. 417—437.
175. Бадалян А. М., Биргер Е. С., Конохова Н. Б.//ЯФ. 1974. Т. 20. С. 1147—1154.
176. Offermann R., Glöckle W.//Nucl. Phys. A. 1979. Vol. 318. P. 138—144.

177. Lim T. K., Duffy K.//Phys. Rev. C. 1979. Vol. 19. P. 2063—2064.  
 178. Sunami Y.//Progr. Theor. Phys. 1980. Vol. 63. P. 1997—2004.  
 179. Bevelacqua J. J.//Nucl. Phys. A. 1980. Vol. 341. P. 414—420.  
 180. Камунтавичюс Г.-П. П.//ЯФ. 1981. Т. 34. С. 661—670.  
 181. Джибути Р. И., Кезерашвили Р. О.//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 1109—1114.  
 182. Ebenhöh W., Rinat-Reiner A. S., Avishai Y.//Phys. Lett. B. 1969.  
 Vol. 29. P. 638—641.  
 183. Sasakawa T. Preprint. Tohoku Univ. 1974. P. 122. Sendai Univ., Japan, 1974.  
 184. Phillips A. C., Roig F.//Nucl. Phys. A. 1974. Vol. 234. P. 378—400.  
 185. Möller K. Preprint ZfK-438. Dresden, 1981.  
 186. Adhikari S. K., Fonseca A. C., Tomio L.//Phys. Rev. C. 1983. Vol. 27. P. 1826—1829.  
 187. Delfino A., Glöckle W.//Phys. Rev. C. 1985. Vol. 30. P. 376—382.  
 188. Delves L. M., Phillips A. C.//Rev. Mod. Phys. 1969. Vol. 41. P. 497—530.  
 189. Alt E. O. Coulomb corrections to three-nucleon observables.//Тр. Международного Совещания по теории малочастичных систем. Дубна, 1987. С. 25—31.  
 190. Блохинцев Л. Д., Мухамеджанов А. М., Сафронов А. Н.//ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. Вып. 6. С. 1296—1337.  
 191. Мухамеджанов А. М. Аналитические методы в теории ядерных реакций с заряженными частицами: Дис. д-ра физ.-мат. наук. М., 1984.  
 192. Сафронов А. Н.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51, № 1. С. 155—160.  
 193. Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 407—458.  
 194. Народецкий И. М., Гальперн Е. С., Ляховицкий В. Н.//ЯФ. 1972. Т. 16. С. 707—716.  
 195. Delves L. M.//Phys. Rev. 1960. Vol. 118. P. 1318—1322.  
 196. Van Oers W. T. H., Seagrave J. D.//Phys. Lett. B. 1967. Vol. 24. P. 562—565.  
 197. Whiting J. S., Fuda M. G.//Phys. Rev. C. 1976. Vol. 14. P. 18—22.  
 198. Dilg W., Koester L., Nistler W.//Phys. Lett. B. 1971. Vol. 36. P. 208—210.  
 199. Phillips A. C.//Nucl. Phys. A. 1968. Vol. 107. P. 209—216.  
 200. Efimov V., Tkachenko E. G.//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 157. P. 108—114.  
 201. Vertse T., Curutchet P., Civitarese O. e.a.//Phys. Rev. C. 1988. Vol. 37. P. 876—879.  
 202. Сименог И. В., Ситниченко А. И., Шаповал Д. В.//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 60—66.  
 203. Tomio L., Delfino A., Adhikari S. K.//Phys. Rev. C. 1987. Vol. 35. P. 441—447.  
 204. Петров Н. М. Описание корреляции между энергией связи и длиной рассеяния в трехчастичных системах в рамках потенциальной теории. Препринт ИТФ-87-106Р. Киев, 1987.  
 205. Петров Н. М.//ЯФ. 1988. Т. 48. С. 50—59.  
 206. Орлов Ю. В., Петров Н. М. Трехчастичные характеристики в двухтельной потенциальной модели//Международный семинар «Микроскопические методы в теории систем нескольких частиц». Калинин, 1988. С. 16—21.  
 207. Орлов Ю. В., Туровцев В. В.//Изв. АН СССР. 1984. Т. 48, №10. С. 2038—2039.  
 208. Yamaguchi Y.//Phys. Rev. 1954. Vol. 95, N 6. P. 1628—1634.  
 209. Malfliet R. A., Tjon J. A.//Nucl. Phys. A. 1969. Vol. 127. P. 161—168;  
 Malfliet R. A., Tjon J. A.//Ann. Phys. (N.Y.). 1970. Vol. 61. P. 425—450.  
 210. Amado R. D., Noble J. B.//Phys. Lett. B. 1971. Vol. 35. P. 25—27.  
 211. Amado R. D., Noble J. B.//Phys. Rev. D. 1972. Vol. 5. P. 1992—2001.  
 212. Adhikari S. K., Amado R. D.//Phys. Lett. B. 1972. Vol. 40. P. 11—14.  
 213. Adhikari S. K., Amado R. D.//Phys. Rev. C. 1972. Vol. 6. P. 1484—1495.  
 214. Stelbovics A. T., Dodd L. R.//Phys. Lett. B. 1972. Vol. 39. P. 450—452.  
 215. Moller K. Preprint ZfK-357. Dresden, 1978.

216. Adhikari S. K., Tomio L.//Phys. Rev. C. 1982. Vol. 26. P. 83—86.  
 217. Lim T. K., Duffy S. K.//J. Chem. Phys. 1978. Vol. 68. P. 655—659.  
 218. Huber H. S., Lim T. K.//J. Chem. Phys. 1978. Vol. 68. P. 1006—1012.  
 219. Fonseca A. S., Redish E. F., Shanley P. E.//Nucl. Phys. A. 1979.  
 Vol. 320. P. 273—288.  
 220. Позднеев С. А.//ЯФ. 1982. Т. 35. С. 511—512.  
 221. Huber St.//Phys. Rev. A. 1985. Vol. 31. P. 3981—3982.  
 222. Lim T. K.//Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34. P. 4424—4425.  
 223. Efimov V.//Proc. of VII Intern. Conf. on Few-Body Probl. Dehli, 1975/76.  
 P. 126.  
 224. Ueda T.//Phys. Lett. B. 1982. Vol. 119, N 4—6. P. 281—284.  
 225. Pearce V. C., Afnan I. R.//Phys. Rev. C. 1984. Vol. 30. P. 2022—2025.  
 226. Орлов Ю. В., Тилявов А. А.//ЯФ. 1979. Т. 29. С. 261—264; Т. 30.  
 С. 497—503.  
 227. Dalkarov O. D., Orlov Yu. V., Tiljavov A. A. Quasinuclear 2NN states.  
 Preprint N 134. Phys. Inst. AS USSR. Moscow, 1982.  
 228. Шматиков М. Ж., Грач И. Л.//ЯФ. 1981. Т. 34. С. 967—979.  
 229. Latta G. P., Tandy P. C.//Phys. Lett. B. 1988. Vol. 209. N 1. P. 14—18.  
 230. Далькаров О. Д., Кербинов Б. О., Румянцев И. А., Шапиро И. С.//ЯФ.  
 1973. Т. 17. С. 1321—1329.  
 231. Basdevant J. L., Kreps R. E.//Phys. Rev. 1966. Vol. 141. P. 1398—1403.  
 232. Belyaev V. B., Möller K., Simonov Yu. A.//J. Phys. G. 1979. Vol. 5.  
 P. 1057—1070.  
 233. Gale W. A., Duck I. M.//Nucl. Phys. B. 1968. Vol. 8. P. 109—130.  
 234. Arenhövel H.//Phys. Lett. B. 1974. Vol. 49. P. 329—331.  
 235. Kim Y. E., Tubis A.//Phys. Rev. C. 1970. Vol. 1. P. 414—422.  
 236. Brayslaw S. D.//Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 36. P. 73—75.  
 237. Friar J. L., Gibson B. F., Payne G. L. Recent progress in understanding  
 trinucleon properties.//Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. Palo Alto, California, USA.  
 1984. Vol. 34. P. 403—433.  
 238. Belozyorov A. V.//Nucl. Phys. A. 1988. Vol. 477. P. 131—142.  
 239. Горбатов А. М., Комаров П. В., Крылов Ю. Н. и др. Микроскопический  
 расчет мультинейтронной системы  $^3n$ .//Международный семинар «Микроскопи-  
 ческие методы в теории систем нескольких частиц». Калинин, 1988. С. 73—88.