

МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЙ ЯДРА

Е. Г. Наджаков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Институт ядерных исследований и ядерной энергетики
Болгарской АН, София

Цель обзора состоит в том, чтобы показать роль динамических симметрий и суперсимметрий при их удачном выборе, для выявления существенных мод и их связей в ядре. Он начинается выяснением этого понятия (разд. 1).

Представлены два типа динамических симметрий. Фермионные в пространстве модели оболочек показаны на основании фермионной модели конкуренции мод (разд. 2). Бозонные в пространстве координат показаны на основе одночастичных координат и введения обобщенных коллективных координат (разд. 3).

Развитие динамических симметрий представлено на основе бозонных (разд. 4) и бозонно-фермионных (разд. 5) моделей. Отмечены многочисленные расширения (разд. 4 и 5). Особо отмечено введение динамической суперсимметрии и ее первое обнаружение в природе, а именно в ядре, и указанное нами ее возможное обобщение (разд. 5). Также отмечена возможность создать более последовательную чисто фермионную модель (разд. 6).

Главные оригинальные вклады обзора состоят в следующем. Первое, в решении проблемы включения всех коллективных степеней свободы в бозонную модель динамической симметрии (разд. 7). Второе, во введении бозонно-фермионной динамической суперсимметрии нового типа, нацеленной на создание эффективной общей модели ядра (разд. 8). Третье, в методе для обоснования бозонных, фермионных и бозон-фермионных моделей (разд. 8).

The aim of this review is to show the role of dynamic symmetries and supersymmetries, if successfully chosen, to reveal the important modes and their coupling in nuclei. It starts with clearing up this notion (sect. 1).

Two types of dynamic symmetries are presented. The fermion ones in a shell model space are shown on the basis of a fermion modes competition model (sect. 2). The boson ones in a coordinate space are shown by single particle coordinates and by introducing generalized collective coordinates (sect. 3).

The dynamic symmetries development is presented on the basis of boson (sect. 4) and boson-fermion (sect. 5) models. Various extensions are noticed (sects. 4 and 5). The introduction of dynamic supersymmetry and the first evidence for its existence in nature, namely in nuclei, is specially noticed, together with a possible generalization pointed out by us (sect. 5). The possibility to create a more consequent purely fermion model is also noticed (sect. 6).

The main original contributions of the review consist in the following. Firstly, in solving the problem of including all collective degrees of freedom in a boson dynamic symmetry model (sect. 7). Secondly, in introducing a boson-fermion dynamic supersymmetry of a new type, aiming the creation of an efficient general nuclear model (sect. 8). Thirdly, in a method for: the foundation of boson, fermion and boson-fermion models (sect. 8).

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ

Понятие динамической симметрии модели физической системы применяется уже достаточно давно. Тем не менее в это понятие часто вкладывают, строго говоря, различный смысл. Однако, по сути дела, оно выяснено.

Имеется в виду группа преобразований состояний физической системы, представления которой осуществляются в пространстве всех состояний этой и других систем, описываемых моделью. Если это группа настоящей симметрии модели систем, то ее преобразования оставляют модель инвариантной. Однако для группы динамической симметрии это не имеет места. Применение динамических симметрий началось фактически с того, что для некоторых физических систем они играли роль приближенных симметрий. Для квантовых систем группа настоящей симметрии оставляет все энергии уровней и вероятности переходов неизменными, а группа динамической симметрии их немного меняет. Модель динамической симметрии их слегка расщепляет и меняет по отношению к некоторой нулевой модели, для которой группа модели осуществляет настоящую симметрию.

Это видно на многих примерах, например супермультиплетной модели Вигнера [1] (разд. 2) или ряда групповых моделей элементарных частиц, к примеру кварков (разд. 8).

Выяснилось, однако, что динамические симметрии можно применять и к моделям физических систем, для которых их нельзя назвать приближенными. Примеры этого можно найти, в частности, в групповых моделях структуры атома и ядра. При таких моделях можно выбрать все или существенные (например, низколежащие одночастичные и/или коллективные) состояния и выразить их через фермионы и/или бозоны (суперсимметрия/симметрия). Дальше все операторы физических величин можно выразить через операторы рождения и уничтожения фермионов и/или бозонов. И наконец, можно найти такую супергруппу или группу, для которой эти самые операторы величин можно выразить через ее генераторы, т. е. через элементы ее супералгебры или алгебры. Как будет видно из всех дальнейших разделов, методы теории групп могут значительно облегчить решение уравнений такой модели и сделать ее физическое содержание более понятным.

Вернемся теперь к определению современного понятия динамической симметрии (суперсимметрии). При формальном определении под этим термином понимают группу (супергруппу), для которой все состояния любой из систем модели дают пространство одного из ее неприводимых представлений (н. п.). Иногда ее называют верхней группой модели или динамической симметрии. Эта верхняя группа, вместе со всеми вложенными в нее подгруппами (в которые, если они сами группы ненастоящей симметрии, со своей стороны вложены все группы настоящей симметрии) вплоть до так называемых нижних групп, или групп, не имеющих собственных подгрупп, образует решетку групп модели [2]. Цепочкой групп модели называют любую линию решетки из вложенных последующей в предыдущую группу, начиная с верхней и кончая нижней. Пределами модели называют те ее частные случаи, когда ее гамильтониан зависит только от оператора Казимира групп из одной цепочки (оператор

Казимира группы — оператор, построенный из ее генераторов, инвариантный относительно ее преобразований).

Значение понятия динамической симметрии в физике можно показать лучше всего в пределах модели. Тогда гамильтониан диагонализировать алгебраически. Таким образом, можно найти энергии и состояния уровней, а вместе с этим и вероятности переходов. Каждый предел отвечает определенному физическому типу системы. В общем случае гамильтониан диагонализируется численно. Однако и в этом случае теория групп поможет в ограничении базиса состояний и в нахождении матричных элементов (м. э.) операторов физических величин. Она помогает также в понимании того, какой тип перехода осуществляется в данной физической системе. Группово-теоретические методы рассмотрены в ряде книг [3—5].

Историческим примером этого подхода может послужить модель парного и квадрупольного взаимодействий в рассмотрении Мошинского [6] (разд. 2). Каждое из этих взаимодействий отвечает одному пределу и диагонально в базисе н. п. его цепочки групп. Парное отвечает системе с близкодействующими силами, а квадрупольное — с дальнедействующими. Переход описывается наложением обеих. Другой пример дает модель взаимодействующих бозонов [7, 8] (разд. 4) [см. также симплектическую бозонную модель (разд. 3)]. В ней один из пределов отвечает вибрационным ядрам, другой — промежуточным и третий — ротационным. Переход описывается наложением взаимодействий для двух из этих пределов или всех трех. В обоих примерах теория групп дает вышеописанные преимущества. Такое рассмотрение заложено во всем дальнейшем развитии моделей динамических симметрий ядра (разд. 5—8).

В заключение этого вводного раздела хотелось бы отметить, что динамические симметрии, как любой группово-теоретический подход, дают, образно говоря, только язык, который можно использовать хорошо или плохо. Динамические симметрии, сами по себе, не приводят к удачной модели. Приведенные примеры — хорошее применение. Чтобы плохого применения не произошло, необходимо сделать удачный выбор базиса физических состояний и операторов физических величин, как и в любой модели. Однако этого недостаточно, и здесь нужно еще простое и подходящее выражение физических величин операторов через генераторы удачных для физики групп. В обратном случае теория групп может, напротив, затруднить создание и решение модели и запутать понимание ее физического содержания.

2. ФЕРМИОННЫЕ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОЛОЧЕК

Известно, что групповые подходы перенесены из теории структуры атома [9, 10] в теорию структуры ядра. Известно также, какую роль сыграли модели оболочек в обеих теориях. Поэтому нет ничего удивительного, что динамические симметрии начали свое развитие

с фермионных симметрий в пространстве оболочек. Начнем фактическую часть обзора тоже с них, но в несколько более поздних обозначениях, введенных Мошинским [6], так как он привнес многое в методику и математику проблемы. Затем мы на его языке легче поймем и исторические модели.

Введем одночастичные состояния, как в модели оболочек с квантовыми числами $h = k, i$, где h объединяет все квантовые числа, $k = nlm_l$ объединяет орбитальные квантовые числа, включая орбитальный угловой момент l и его проекцию m_l ($l = 0, 1, 2, \dots, m_l = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$), $i = sm_s tm_t$ объединяет спин-изоспиновые квантовые числа $s = sm_s$ спина s и его проекции m_s и $t = tm_t$ изоспина t и его проекции m_t ($s = 1/2, m_s = \pm 1/2, t = 1/2, m_t = \pm 1/2$). Введем также оператор рождения фермиона a_h^+ и его уничтожения a_h в состоянии h . Их антикоммутаторы $\{--, --\}$ удовлетворяют фермионным правилам:

$$\{a_{h_1}, a_{h_2}\} = 0, \quad \{a_{h_1}, a_{h_2}^+\} = \delta_{h_1, h_2}. \quad (1)$$

Теперь включим в рассмотрение r орбитальных состояний модели оболочек (например, для $2s1d$ оболочки $r = 6$, для $2p1f$ оболочки $r = 10$ и т. д.). Это отвечает тому, что мы допустим r значений индекса k . Далее вспомним, что индекс i имеет четыре значения

$$(m_s m_t = 1/2 \ 1/2, 1/2 \ -1/2, -1/2 \ 1/2, -1/2 \ -1/2).$$

Определим операторы:

$$g_{h'h''} = a_{h'}^+ a_{h''}. \quad (2)$$

Их число m^2 , где $m = r \cdot 4$. Проверим, что у них будут следующие коммутаторы $[--, --]$:

$$[g_{h'_1 h''_1}, g_{h'_2 h''_2}] = g_{h'_1 h''_2} \delta_{h'_2 h''_1} - g_{h'_2 h''_1} \delta_{h'_1 h''_2}. \quad (3)$$

Это означает [6], что $g_{h'h''}$ представляют элементами алгебры или генераторами компактной унитарной группы в m измерениях $U(m)$. Она будет верхней группой оболочечной модели с полным числом состояний m .

Дальше определим новые операторы $g_{k'h''}$, делая свертку $g_{h'h''}$ по индексам i и $g_{i'i''}$, делая свертку по индексам k :

$$g_{k'h''} = \sum_i g_{k'i, h''i}, \quad g_{i'i''} = \sum_k g_{ki, ki''}. \quad (4)$$

Тогда убедимся, что они удовлетворяют также коммутационным соотношениям (3), если для $g_{k'h''}$ заменить h на k , а для $g_{i'i''}$ заменить h на i , и коммутируют друг с другом. Таким образом, $g_{k'h''}$ — генераторы орбитальной унитарной группы в r измерениях $U^k(r)$, а $g_{i'i''}$ — генераторы спин-изоспиновой унитарной группы в четырех измерениях $U^i(4)$. Тем самым мы получим вложение

$$U(m) \supset U^k(r) \times U^i(4), \quad (5)$$

где \times представляет прямое произведение групп [5] (генераторы разных групп произведения коммутируют на 0). Можно пойти дальше еще двумя свертками в $g_{i' i''}$:

$$g_{s' s''} = \sum_t g_{s' t, s'' t}, \quad g_{t' t''} = \sum_s g_{s t', s t''} \quad (6)$$

и получить генераторы $g_{s' s''}$ спиновой унитарной группы в двух измерениях $U^s(2)$ и $g_{t' t''}$ — изоспиновой унитарной группы в двух измерениях $U^t(2)$. Таким образом,

$$U^i(4) \supset U^s(2) \times U^t(2). \quad (7)$$

Как мы увидим, в рассматриваемых моделях важную роль будет играть и компактные ортогональные группы, например, в r измерениях $O(r)$ [5] с генераторами [6]

$$\tilde{g}_{k' k''} = (g_{k' k''} - g_{\overline{k' k''}}) / \sqrt{2}. \quad (8)$$

Их число $r(r-1)/2$. Здесь

$$c_{im}^- = (-)^{(i)+m} c_{i-m}, \quad c_{im}^+ = (-)^{(i)-m} c_{i-m}^+ \quad (c = a, b);$$

$$\overline{f}_{\dots} = f_{\dots} \quad (f = g, \dots). \quad (9)$$

Например, $g_{\overline{k' k''}} = (-)^{(l') + (l'') - m'_l + m''_l} \times g_{n' l' - m'_l, n'' l'' - m''_l}$, $i = [i] + \{i\}$, $[i]$ — целая часть i , $\{i\}$ — дробная часть i ($\{i\} = 0$, если i целое, $\{i\} = 1/2$, если i полуцелое). Это означает, что существуют знакомые вложения [11, 6], например:

$$U^h(r) \supset O^h(r). \quad (10)$$

Иногда мы будем писать $O(r)$ вместо $SO(r)$, так как у обеих групп те же самые генераторы, и они различаются только отсутствием инверсии переменных у второй [5].

Дальше известно, что ортогональная группа в трех измерениях $O(3)$ [12] играет роль во всех моделях атома и ядра [11]. Ее генераторы i_m — компоненты углового момента какого-то типа. Обозначим связь через коэффициенты Клебша — Гордана, определенные, как в [12], следующим образом:

$$[f_{i' m'} f_{i'' m''}]_{i_m} = \sum_{m' m''} (i' i'' m' m'' | i_m) f_{i' m'} f_{i'' m''}. \quad (11)$$

Тогда

$$i_m = \sum_{nl} [i(i+1)(2i+1)/3]^{1/2} [g_{i' m', \overline{i'' m''}}]_{i_m}, \quad (12)$$

i_m — компоненты углового момента любого типа $i = l, s, t$, а сумма по nl существует только при условии $i = l$. Действительно, можно проверить, что у i_m коммутаторы между собой и с любым тензорным оператором в пространстве, соответствующем i такие, какие они

получены в [12]. Если положить еще $i_m = j_m = l_{m_1} + s_{m_s}$, то $i_m = j_m$ — компоненты полного углового момента, и генераторы группы $O^j(3) = O^{k_s}(3) \subset O^k(3) \times O^s(3)$, и мы получим вложение

$$U(m) \supset O^j(3). \quad (13)$$

$O^j(3)$ есть группа настоящей симметрии данной и любой модели ядра без внешнего поля. Такое нельзя сказать о группе $O^t(3)$.

Для дальнейшего приведем некоторые сведения из теории н. п. и алгебр простых групп Ли, в частности унитарных $U(r)$ и ортогональных $O(r)$ в r измерениях. Неприводимое представление $U(r)$ обозначается как $[h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_r]$, где h_k — целые неотрицательные числа. Соответствующее н. п. специальной унитарной группы $SU(r)$ обозначается как

$$[h_1 - h_r \geq h_2 - h_r \geq \dots \geq h_r - h_r = 0] = \\ = [h_1 - h_r \geq h_1 - h_{r-1} \geq \dots \geq h_1 - h_1 = 0].$$

Отметим также обозначение Эллиотта для н. п. $SU(3)$ ($\lambda = h_1 - h_2$, $\mu = h_2 - h_3$). Неприводимое представление $O(r)$ обозначается как $(\bar{h}_1 \geq \bar{h}_2 \geq \dots \geq \bar{h}_{[r/2]})$, где \bar{h}_k тоже целые неотрицательные числа, $[i]$ — целая часть i . В частности, для $O^k(3)$ н. п. $(\bar{h}_1) = (L)$, где L — квантовое число орбитального углового момента, и аналогично для $O^j(3)$ н. п. $(\bar{h}_1) = (I)$, где I квантовое число полного углового момента.

Оператор Казимира первого порядка (порядок оператора Казимира: число умноженных генераторов в каждом его члене) $U(r)$ с генераторами из первой формулы (4) определяется как

$$\hat{n}(r) = \sum_{i=1}^r g_{h_i h_i}; \quad (14)$$

$SU(r)$:

$$n_s(r) = \sum_{i=1}^r g_{h_i h_i} - \hat{n}(r) = 0, \quad (15)$$

так как алгебра $SU(r)$ отличается от $U(r)$ отсутствием одного генератора (14) [5], и $O(r)$ с генераторами из (8) после замены h на k :

$$\hat{o}(r) = \sum_{i=1}^r \tilde{g}_{h_i h_i} = 0. \quad (16)$$

Оператор Казимира второго порядка $U(r)$:

$$\hat{v}(r) = \sum_{i,j=1}^r g_{h_i h_i} g_{h_j h_j}; \quad (17)$$

$SU(r)$:

$$\hat{v}_s(r) = \hat{v}(r) - [\hat{n}(r)]^2/r; \quad (18)$$

$O(r)$:

$$\hat{\omega}(r) = \sum_{i,j=1}^r \tilde{g}_{k_i k_j} \tilde{g}_{k_j k_i}. \quad (19)$$

В частности, для $O^h(3)$ получается знакомая формула

$$\hat{\omega}(3) = \hat{L} \cdot \hat{L}, \quad (20)$$

где \hat{L} — векторный оператор орбитального углового момента, а \cdot означает скалярное произведение.

Тогда собственные значения ненулевых операторов Казимира следующие. Первого порядка $U(r)$:

$$n(r) = \sum_{k=1}^r h_k; \quad (21)$$

второго порядка $U(r)$:

$$v(r) = \sum_{k=1}^r h_k (h_k + r + 1 - 2k); \quad (22)$$

$SU(r)$:

$$v_s(r) = v(r) - [n(r)]^2/r \quad (23)$$

и $O(r)$:

$$\omega(r) = \sum_{k=1}^{[r/2]} \bar{h}_k (\bar{h}_k + r - 2k). \quad (24)$$

В частности, для $O^h(3)$ снова получается знакомая формула

$$\omega(3) = L(L + 1). \quad (25)$$

В свете изложенного общий подход к решению любой модели динамической симметрии, если известна хотя бы часть ее решетчи групп, которую мы будем называть еще групповой структурой модели, выглядит так. Первая проблема: найти квантовые числа базисных состояний в некоторой цепочке групп. Это означает найти н. п. вложенных подгрупп в данном н. п. верхней группы. Применяются результаты теории вложений н. п. групп по методу индивидуальному для каждого вложения групп. Вторая проблема: найти энергии уровней. В любом пределе модели это сводится к нахождению собственных значений операторов Казимира групп ее цепочки, например, с помощью формул (21) — (25), и решается немедленно после решения первой проблемы. При переходе между пределами необходимы м. э. недиагональных членов оператора гамильтониана, которые выражены через генераторы групп решетки, по отношению к базисным состояниям и численная диагонализация. Третья проблема: найти состояния уровней. В пределе модели в принципе возможен алгебраический подход, который индивидуален для каждой цепочки групп. При переходе: та же численная диагонализация гамильтониана. Четвертая проблема: найти вероятности переходов.

Она сводится к нахождению м.э. оператора перехода, который выражен через генераторы групп, сначала по отношению к базисным состояниям, а после решения третьей проблемы — по отношению к настоящим состояниям.

Рассмотрим теперь супермультиплетную модель Вигнера. Сначала напомним, что классическое понятие мультиплетта хорошо знакомо из теории структуры атома [9, 10]. Оно возникает в так называемой LS -связи многонуклонных состояний, если мы перенесем его в теорию структуры ядра. Пусть L — квантовое число орбитального углового момента всего ядра и M_L — его проекции; S — спинового углового момента и M_S — его проекции; T — изоспина и M_T — его проекции. Введем еще полный угловой момент всего ядра как векторную сумму [12] орбитального и спинового с его квантовым числом I и проекции M_I , где

$$I = |L - S|, |L - S| + 1, \dots, L + S - 1, L + S. \quad (26)$$

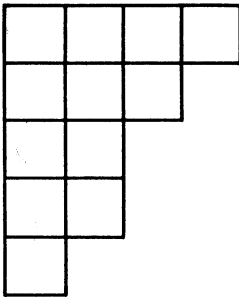


Рис. 1. Диаграмма дополнительных н. п. [4, 3, 2, 2, 1, 0, ...] $U^k(r)$ и [5, 4, 2, 1] $U^i(4)$ -групп (из [6])

Уклоняясь от понятия мультиплетта спектральных линий [9], дадим определение мультиплету состояний. Пусть он состоит из своих компонент, которыми являются все состояния ядра с разными значениями либо M_L и M_S , либо I (26) и M_I , при фиксированных прочих квантовых числах, включая L, S, T, M_T . Укажем группово-теоретическую интерпретацию этого понятия. Компоненты мультиплетта дают базис н.п. орбитальной группы $O^h(3)$ и спиновой $U^s(2) \supset O^s(3)$.

Понятие супермультиплетта состояний ядра введено обобщением Вигнера [1]. Оно возникает в LST -связи многонуклонных состояний. Определим его как состоящий из своих компонент с разными M_L и с разными S, M_S, T, M_T , дающих базис н. п. орбитальной $O^h(3)$ и спин-изоспиновой $U^i(4)$ группы. Последняя и есть группа супермультиплетной модели Вигнера. Нахождение квантовых чисел этого базиса значительно сложнее, чем базиса мультиплетта.

Отметим, что существует дополнительность между н. п. $[h_1^k h_2^k \dots h_r^k]$ орбитальной группы $U^k(r)$ и н. п. $[h_1^i h_2^i h_3^i h_4^i]$ спин-изоспиновой групп $U^i(4)$. Если их выразить в виде диаграммы Юнга [11], то h_1^k будет число квадратов в l -й строке, а h_j^i будет число квадратов в j -м столбце одной и той же диаграммы (рис. 1). Что касается самой процедуры нахождения квантовых чисел состояний данного н. п. $U^i(4)$ из вложения (7), то мы объясним это схематично. Неприводимые представления $[h_2^s h_2^s], U^s(2)$ и $[h_2^t h_2^t] U^t(2)$, вложенные в данном н. п. $[h_1^i h_2^i h_3^i h_4^i] U^i(4)$, находятся по правилам внешнего произведения н. п. [5], табулированным в [3, 4]. Из них находятся

н. п. $SU^s(2)$ и $SU^t(2)$ по указанным выше правилам. Так как у $O^s(3)$ и $O^t(3)$ те же самые генераторы, то найденные н. п. дадут S и T ; M_S и M_T находятся тривиально.

Теперь виден физический смысл динамической симметрии Вигнера, если ее трактовать в историческом смысле как приближенную симметрию. Инвариантность нулевой модели относительно $U^i(4)$ означает, что взаимодействие между нуклонами зависит только от орбитальных переменных. Уровни одного супермультиплетта совпадают. Зависимость взаимодействия от спиновых и изоспиновых переменных нарушает эту симметрию и соответственно расщепляет уровни супермультиплетта.

Перейдем к ротационной модели Эллиотта. Известно, что существует разрыв между сферической [13—16] и деформированной [17] моделями оболочек, с одной стороны, коллективной и обобщенной моделями [18—21], с другой. Вторые вводят коллективное движение искусственным путем через дополнительные переменные формы ядра, а не как аппроксимацию многочастичной проблемы с учетом взаимодействий в модели оболочек.

Эллиотт был первым, кому удалось частично преодолеть этот разрыв, показав в частном случае ротационного коллективного движения, что эту моду можно получить прямо из сферической модели оболочек. Он это сделал в своих исторических работах, создавших его ротационную модель [22, 23].

Физическое предположение независимости взаимодействия от спина и изоспина, как мы видели, ведет к тому, что $U^i(4)$ — группа настоящей симметрии. Допустим еще, что оболочечная модель построена не в реалистическом сферическом потенциале, а в осцилляторном сферическом [22, 23]. Тогда и группа $U^h(r)$ будет группой настоящей симметрии этой нулевой модели. Если в оболочечную модель включить все вырожденные уровни осцилляторной модели до некоторого с максимальным квантовым числом l , как, например, оболочки: $(1s)$ или $1p$ или $2s, 1d$ или $2p, 1f$ или $3s, 2d, 1g$ или $3p, 2f, 1h$ и т. д. с числом уровней

$$r = (l + 1)(l + 2)/2, \quad (27)$$

тогда существуют вложения

$$U^h(r) \supset U^h(3) \supset O^h(3). \quad (28)$$

Здесь мы не будем выяснять генераторы $U^h(3)$ Эллиотта, так как приведем их в более поздних обозначениях ниже (разд. 4).

Первая проблема квантовых чисел из указанных выше для первого вложения (28) решена в случаях $2s, 1d$ и $2p, 1f$ оболочек, и они табулированы [22]. Для второго вложения она также решена следующим образом [22]. Из-за того, что в одно н. п. (λ, μ) $U^h(3)$ могут быть вложены несколько н. п. ($L = \text{const}$) $O^h(3)$, то квантовых чисел $U^h(3)$ и $O^h(3)$ не хватает для характеристики уровня. Поэтому

му Эллиоттом введено дополнительное квантовое число K :

$$K = 0 (1), 2 (3), \dots, \min(\lambda, \mu) - 2, \min(\lambda, \mu). \quad (29)$$

Тогда для н. п. $(L) O^h(3)$, вложенных в н. п. $(\lambda, \mu) U^h(3)$ при данном K , получаются формулы

$$K = 0: L = 0 (1), 2 (3), \dots, \max(\lambda, \mu) - 2, \max(\lambda, \mu) \quad (30)$$

и

$$K > 0: L = K, K + 1, \dots, K + \max(\lambda, \mu) - 1, K + \max(\lambda, \mu). \quad (31)$$

Вторая проблема — энергий уровней. Если в гамильтониан добавим с отрицательным коэффициентом квадратичную комбинацию генераторов $U^h(3)$, имеющую смысл квадрупольного взаимодействия

$$V_Q = \hat{v}(3) - [\hat{n}(3)]^2/3 - \hat{\omega}(3)/2, \quad (32)$$

тогда из (21) и (22) следует, что $n(3)$ и $v(3)$ остаются постоянными в одной ротационной полосе и определяют положение нижайшего уровня полосы вместе с $\omega(3)$ для этого уровня. Из (25) следует, что $\omega(3)$ дает как раз спектры уровней, совпадающие с чисто ротационными. Это было предвидено Эллиоттом [22] и означает, что такое взаимодействие V_Q , нарушающее $U^h(3)$ -инвариантность нулевой модели, расщепляет ее вырожденные по L уровни и создает ротационные спектры. Таким образом, и на эту модель можно смотреть как на модель динамической симметрии в историческом смысле.

Третья проблема состояний уровней решена Эллиоттом [22]. Впоследствии Вергадос нашел другие базисные состояния, которые ортогональны, в отличие от первоначальных введенных Эллиотом, и создал таблицы для их получения [24]. Четвертая проблема вероятностей переходов тогда была рассмотрена частично [22].

Вернемся к первой проблеме для первого вложения (28) и укажем, что сейчас существуют более общие методы ее решения. Они связаны с так называемым внешним плетизмом н. п., введенным Литтлуудом [25]. Популярно говоря, это вроде возведения в степень по правилам внешнего произведения н. п. с соответствующей симметризацией, указанной в степени [5]. Для вложений типа $U(r) \supset U(n)$ этот метод разработан и табулирован в [4, 26]. Вложения н. п. типа $U(r) \supset O(r)$ при нечетном r табулированы [3, 4], а при четном их можно найти комбинацией методов. Вложения н. п. типа $O(r) \supset O(3)$ табулированы в [3].

Наконец укажем, что нами разработаны правила, определяющие какой плетизм надо использовать для вложений $U(r) \supset U(n)$ при разных значениях n , если r представлено (27). Они будут приведены в разд. 7. В частности, при $n = 3$, как в (28), одно из этих правил сводится к тому, что в н. п. $[h_1 h_2 \dots h_r] U(r)$ вложены н. п. $U(3)$,

получаемые из

$$[l] \otimes [h_1 h_2 \dots h_r], \tag{33}$$

где \otimes означает внешний плетизм. В еще более частных случаях: $sd, r = 6, l = 2$ и $pf, r = 10, l = 3$, эти правила получены соответственно в работах [27, 28]. Отметим, что результаты Эллиотта получаются по таблицам внешнего плетизма из общего правила (33), а именно для $2s1d$ -оболочки они взяты из табл. 1 его первой работы [22, с. 136] и получаются из (33) при $l = 2$ (табл. 1), и для $2p1f$ -оболочки они взяты из табл. 2 работы [22, с. 137] и получаются из (38) при $l = 3$ (табл. 2).

Таблица 1. Вложение н.п. $(\lambda, \mu) SU(3)$ в н.п. $[h_1, h_2, \dots, h_6] U(6)$

$[h_1, h_2, \dots, h_6]$	$(\lambda = h_1 - h_2, \mu = h_2 - h_3)$					
[0]	(00)					
[1]	(20)					
[2]	(40)	(02)				
[11]	(21)					
[3]	(60)	(22)	(00)			
[21]	(41)	(22)	(11)			
[111]	(30)	(03)				
[4]	(80)	(42)	(04)	(20)		
[31]	(61)	(42)	(23)	(31)	(12)	(20)
[22]	(42)	(31)	(04)	(20)		
[211]	(50)	(23)	(31)	(12)	(01)	
[1111]	(12)					

Таблица 2. Вложение н.п. $(\lambda, \mu) SU(3)$ в н.п. $[h_1, h_2, \dots, h_{10}] U(10)$

$[h_1, h_2, \dots, h_{10}]$	$(\lambda = h_1 - h_2, \mu = h_2 - h_3)$									
[0]	(00)									
[11]	(30)									
[21]	(60)	(22)								
[111]	(41)	(03)								
[3]	(90)	(52)	(33)	(30)	(03)					
[211]	(71)	(52)	(33)	(41)	(14)	(22)	(11)			
[1111]	(60)	(33)	(22)	(00)						
[4]	(12,0)	(82)	(63)	(44)	(60)	(33)	(41)	(06)	(22)	(00)
[31]	(10,1)	(82)	(63)×2	(71)	(44)	(52)×2	(14)	(22)×2	(30)	(25)×2
[22]	(82)	(71)	(44)×2	(52)	(60)	(33)	(41)	(06)	(14)	(22)×2
[2111]	(90)	(63)	(71)	(44)	(52)×2	(25)	(33)×2	(41)×2	(11)	(33)×2
[11111]	(52)	(33)	(06)	(22)	(30)	(30)×2	(03)	(11)	(14)×2	(22)

Наконец займемся самой фермионной моделью Мошинского [6]. Укажем что для своей модели Мошинский решил все четыре указанные выше проблемы, вплоть до нахождения м. э. генераторов $U^k(r)$. Для выяснения ее физических возможностей допустим снова, что

взаимодействие не зависит от спина-изоспина и возьмем опять оболочечную модель в осцилляторном сферическом потенциале. Однако включим два типа взаимодействий: близкодействующее парное V_P и

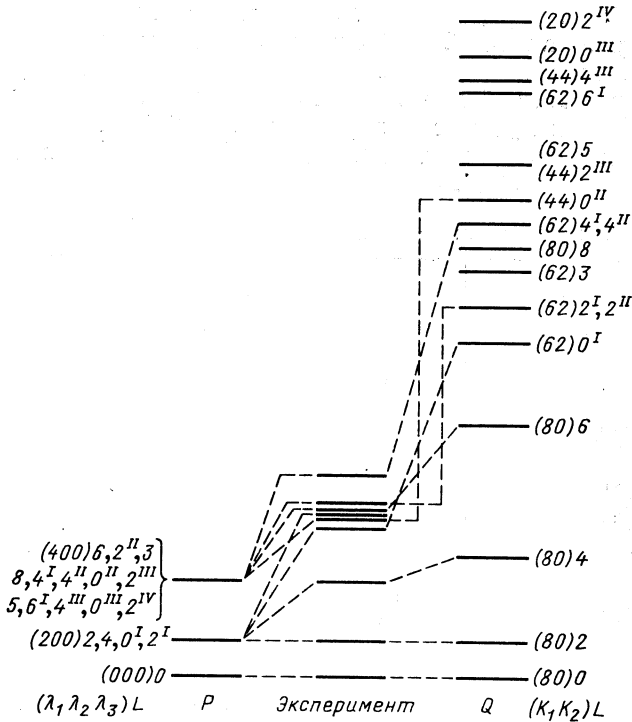


Рис. 2. Уровни $^{20}\text{Ne}_{10}$ в модели с парным (слева) и квадрупольным (справа) взаимодействием, эксперимент посередине (из [6])

дальнодействующее квадрупольное V_Q . Общее взаимодействие V — их линейная комбинация с двумя параметрами v и $0 \leq x \leq 1$:

$$V = -v [(1 - x) V_P + xV_Q]. \tag{34}$$

Мошинский показал, что парное взаимодействие можно выразить через операторы Казимира цепочки групп

$$U^h(r) \supset O^h(r) \supset O^h(3), \tag{35}$$

а именно, что

$$V_P = \hat{v}(r) - \hat{\omega}(r) - \hat{n}(r). \tag{36}$$

Также им показано, что квадрупольное взаимодействие V_Q можно выразить через операторы Казимира другой цепочки групп (28), как в (32).

Таким образом, у него — модель динамической симметрии с решеткой из двух цепочек групп. В одном пределе при $x = 0$ действует цепочка (35). Тогда $V = -vV_P$ (36) и взаимодействие диагонализруется алгебраически с помощью формул (21), (22) и (24). Этот предел отвечает системе с близкодействующими силами. В другом пределе при $x = 1$ действует цепочка (28). Тогда $V = -vV_Q$ (32) и взаимодействие диагонализруется алгебраически с помощью (21), (22) и (25). Этот предел отвечает системе с дальнедействующими силами. В общем случае следует диагонализировать (34) численно. Такая ситуация отвечает системе с переходом между этими двумя типами сил. Оба предела, вместе с экспериментом, указывающим, очевидно, на промежуточный спектр, показаны на рис. 2. Таким образом, Мошинский предложил метод учета двух конкурирующих мод в модели динамической симметрии.

3. БОЗОННЫЕ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ КООРДИНАТ

Здесь мы покажем существование динамических симметрий другого типа, отличающихся от рассмотренных в разд. 2. Вместо того, чтобы вводить одночастичные состояния модели оболочек и их фермионы, здесь мы начнем прямо с трехмерных пространственных координат x_h и импульсов p_h всех A нуклонов ядра. Для простоты не будем вводить спин-изоспиновые переменные, несмотря на то что это возможно и делалось.

Пусть $x_h, h = k, i$, в декартовом базисе $i = 1, 2, 3$ означает x, y, z -координату, а в сферическом базисе $i = -1, 0, +1$ означает компоненту координаты k -го нуклона. Пусть

$$x_{\bar{h}} = \partial / \partial x_h, \quad p_h = x_{\bar{h}} / i. \tag{37}$$

Тогда $x_{\bar{h}}, x_h$ удовлетворяют коммутационным соотношениям бозонного типа

$$\left. \begin{aligned} [x_{h_1}, x_{h_2}] &= 0; & [x_{\bar{h}_1}, x_{\bar{h}_2}] &= 0; \\ [x_{\bar{h}_1}, x_{h_2}] &= \delta_{h_1 h_2}, \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

за исключением того, что x_h и $p_h = x_{\bar{h}} / i$ — эрмитово сопряжены, вместо x_h и $x_{\bar{h}}$. Для дальнейшего отметим знакомый переход от координат x_h и квазиимпульсов $x_{\bar{h}}$ к операторам рождения b_h^+ и уничтожения b_h бозона k -го нуклона

$$b_h^+ = (x_h - x_{\bar{h}}) / \sqrt{2}, \quad b_h = (x_{\bar{h}} + x_h) / \sqrt{2}, \tag{39}$$

где \bar{h} вместо h появляется в случае сферических компонент и понимается, как определено в (9) (например, $x_h = (-)^{(1)+i} x_{h,-i}$, $\{1\} = 0$). Тогда

$$[b_{h_1}, b_{h_2}] = 0, \quad [b_{h_1}, b_{h_2}^+] = \delta_{h_1 h_2} \tag{40}$$

и b_h эрмитово сопряжено b_h^+ .

Определим операторы

$$g_{h'h''} = b_{h'}^+ b_{h''}. \quad (41)$$

Видно, что хотя они состоят из бозонов, в отличие от определенных в (2) из фермионов, эти операторы удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (3). Тогда они являются генераторами унитарной группы $U(n)$ в $n = rs$ измерениях, где $r = A$, $s = 3$. Применяя свертки (4), мы получаем вложение

$$U(n) \supset U^h(r) \times U^i(s) \quad (42)$$

в отличие от (5). Далее, вводя генераторы (8) соответствующих ортогональных групп, получаем знакомые вложения:

$$U(n) \supset O(n), \quad U^h(r) \supset O^h(r), \quad U^i(s) \supset O^i(s). \quad (43)$$

Если все нуклоны обладают одинаковой массой и движутся в одном и том же осцилляторном потенциале, это означает при перенормировке переменных, что

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r p_k \cdot p_k; \quad V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r x_k \cdot x_k; \quad H = T + V, \quad (44)$$

где $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{ks})$ и соответственно $p_k = (p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{ks})$ — векторы в $s = 3$ -мерном пространстве; \cdot — скалярное произведение. Тогда $U(n)$ была бы группой настоящей симметрии такой нулевой модели вместе со всеми ее подгруппами, например (42) и (43). Ее подгруппы

$$O(n) \supset O^h(r) \times O^i(s) \quad (45)$$

будут еще группами настоящей симметрии не только гамильтониана H , но его кинетической T и потенциальной V частей в отдельности. Если к V из (44) добавить взаимодействие, зависящее от координат x_h и/или импульсов p_h иным образом, инвариантность H по отношению к (42), (45), как и инвариантность V по отношению к (45), нарушится, но инвариантность T по отношению к (45) останется.

Отметим, что нулевая модель (44), равно как любая одночастичная нулевая модель, нарушает трансляционную инвариантность H ядра, не находящегося во внешнем поле. Это можно устранить, если ввести координаты Якоби, как это сделал Цикендрат в [29]. Он сконструировал шесть коллективных координат в этой и последующих работах [29—32], отвечающих, как показано в [27], sd -бозонным степеням свободы. Аналогичную процедуру предложили А. Я. Дзюблик и др. [33]. На основе этого были развиты подходы групп сотрудников Г. Ф. Филиппова [33—35] и В. В. Ванагаса [36—40]. Подход Ванагаса назван еще моделью с ограниченной динамикой. Правда, такое устранение координат центра масс удается за счет усложнения остальных $3A - 3$ относительных координат ценой потери

приближения оболочечной модели движения каждого нуклона в своем одночастичном потенциале. В результате мы можем повторить вышесделанные выводы насчет групп (37) — (45), если сделать нулевую модель (44) трансляционно-инвариантной, устранив движение центра масс, и если теперь $r = A - 1$. Это означает [40]:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2(r+1)} \sum_{k' > k''=1}^r (p_{k'} - p_{k''})(p_{k'} - p_{k''}); \\ V &= \frac{1}{2(r+1)} \sum_{k' > k''=1}^r (x_{k'} - x_{k''})(x_{k'} - x_{k''}); \\ H &= T + V. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Все выводы насчет инвариантности H по отношению к (42), (45), T и V по отношению к (45) останутся.

Кроме трансляционной инвариантности, в своей модели ограниченной динамики Ванагас [36—40] стремится сохранить все настоящие симметрии ядра. Это, конечно, хорошо с принципиальной точки зрения, но, может быть, не очень хорошо — с практической. На самом деле, в физике известен ряд примеров, где нарушение данной симметрии в начальном базисе, с последующим ее восстановлением в конечном результате, дает более эффективный способ определения параметра зависимости энергии от интеграла движения, который соответствует этому интегралу по известной теореме Нетер. Так, например, нарушение трансляционной инвариантности дает метод получения эффективной массы, нарушение ротационной инвариантности — момента инерции и т. д.

Дальше Ванагас пользуется н. п. группы $O^h(r)$ при $r = A - 1$ и ее подгрупп для классификации состояний любой реалистической модели ядра с гамильтонианом, получаемым из (46) добавлением взаимодействия, зависящего от относительных координат (возможна и зависимость еще от импульсов, спина и изоспина). Для этой цели можно было бы пользоваться цепочкой групп, в которую входят $O^h(r)$ и другие более высокие группы симметрии (46), например (42) $U(n)$ и (45) $O(n)$. $U(n)$ будет верхней группой динамической симметрии модели Ваганаса с модифицированным гамильтонианом, сохраняющей число частиц A и тем самым число бозонов (39) n . Однако у этой группы есть один недостаток: из ее генераторов нельзя построить модифицированный гамильтониан и операторы перехода реалистической модели. Например, добавляемое взаимодействие, зависящее от координат x_h , нельзя записать только через генераторы (41) группы $U(n)$, которые не меняют числа бозонов.

Решение последней проблемы даст более общая группа. Такой группой может оказаться некомпактная симплектическая группа в $2n$ измерениях $Sp(2n, R)$ [5], которую мы обозначаем как $Sp(2n)$

и генераторы которой меняют число бозонов на 0 и 2. В частном случае шести коллективных координат $r = 1, s = 6$ это показано в [27] и разработано в [41]. В другом частном случае трех коллективных координат $r = 1, s = 3$ это развито в [42—45]. На самом деле, как отмечено в [27], полное решение относительно верхней группы бозонной модели дает группа $H(n) \boxtimes Sp(2n)$, где $H(n)$ — группа Гейзенберга или Гейзенберга — Вейля (с $2n + 1$ генераторами $b_h, b_h^\dagger, 1$), иногда обозначаемая $N(n)$ или $W(n)$, \boxtimes — полупрямое произведение групп [генераторы обеих коммутируют на линейные комбинации (л. к.) генераторов первой] [5]. Дело в том, что генераторы этой группы обеспечивают переходы с изменением числа бозонов на 0, 1, 2, а не только на 0, 2, как $Sp(2n)$. Теоретический аппарат к бозонной симплектической группе $Sp(2n)$ в общем случае заложен еще в работе [46] (см. также [47]). Его применение к общей модели Ванагаса [36—40] и к коллективной симплектической модели Роу [42—45] $n = 3, r = 1, s = 3$ сделано в работах [48—52].

Определим операторы пар из n бозонов:

$$\left. \begin{aligned} g_{h'h''} &= (b_h^\dagger b_{h''} + b_{h''} b_h^\dagger) / 2 = b_h^\dagger b_{h''} + \delta_{h'h''} / 2; \\ f_{h'h''} &= b_h b_{h''}; \quad f_{h''h'}^+ = b_h^\dagger b_{h''}^+ \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Их число, учитывая симметрию $f_{h'h''} = f_{h''h'}$ и $f_{h''h'}^+ = f_{h'h''}^+$, равняется $n(2n + 1)$. Коммутаторы $g_{h'h''}$ те же самые, что и приведенные в (3), остальные ненулевые:

$$\left. \begin{aligned} [f_{h_1'h_1''}, g_{h_2'h_2''}] &= f_{h_1'h_2''} \delta_{h_1'h_2''} + f_{h_1''h_2''} \delta_{h_1'h_2''}; \\ [g_{h_1'h_1''}, f_{h_2'h_2''}^+] &= f_{h_1'h_2''}^+ \delta_{h_1'h_2''} + f_{h_1''h_2''}^+ \delta_{h_1'h_2''}; \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$[f_{h_1'h_1''}, f_{h_2'h_2''}^+] = g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''} + g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''} + g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''} + g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''}; \quad (49)$$

(47) являются генераторами симплектической группы $Sp(2n)$ в $2n$ измерениях. Кроме этого, любой оператор физической величины, в каждом члене которого произведение из четного числа операторов b^+ и b или из-за трансформации (39) из четного числа x и p , может быть записан через генераторы (47).

Для r объектов, каждый с s координатами, видно существование вложений

$$Sp(2n) \supset U(n) \supset U^h(r) \times U^i(s) \quad (50)$$

из (3), (48), (49) и из (42). Однако, как показано [46] и как можно увидеть из (3), (48), (49), а также с учетом метода свертки, в этом случае существует и вложение

$$Sp(2n) \supset O^h(r) \times Sp^i(2s). \quad (51)$$

Здесь в случае $s = 3$ $O^h(r)$ — группа модели Ванагаса [36—40], а $Sp^i(2s) = Sp^i(6)$ — группа модели Роу [42—45]. Отсюда видно, что $Sp^i(6)$ -модель инвариантна еще относительно $O^h(r)$. И так же как

для вложения (50), обсужденного в разд. 2, так и для вложения (51) существует дополнителность между н. п. обеих групп справа [48]. Это еще раз показывает, что в применениях надо учитывать все группы из формулы (51), например, так как из-за дополнителности некоторые н. п. $O^k(r)$ могут оказаться недопустимыми для данного н. п. $Sp^i(2s)$.

Обсудим проблему коллективных координат. Цикендрат [29] предложил для них следующие квадратичные формы ($r = A$):

$$y_{i_1 i_2} = \sum_{k=1}^r x_{k i_1} x_{k i_2}. \tag{52}$$

Они могут быть записаны таким же образом и через координаты Якоби после устранения центра массы, но в этом случае $r = A - 1$ в (52). Он дал также процедуру построения остальных внутренних координат и замены координат в гамильтониане. Отметим, что из-за симметрии координат (52) их число s равно 6. Они годятся для монопольной и квадрупольной степеней свободы [27].

Обобщение коллективных координат для любой степени свободы дано нами в [28] ($r = A$):

$$y_{i_1 i_2 \dots i_l}^{(l)} = \sum_{k=1}^r x_{k i_1} x_{k i_2} \dots x_{k i_l} / V. \tag{53}$$

Здесь V — объем ядра, определяемый соответственной нормировкой (53). Число координат (53) для данного l равно $s = (l + 1) \times (l + 2)/2$. Заметим, что (53) при $l = 0$ сводится к $y^{(0)} = A/V$,

т. е. к плотности ядра, а при $l = 1$ к $y_{i_1}^{(1)} = A/V \cdot \sum_{k=1}^A x_{k i_1} / A$, т. е.

к плотности ядра, умноженной на координаты его центра масс. Координату плотности ядра можно удалить в приближении ее постоянства. Движение центра масс можно просто устранить, приравнявая его координаты к нулю.

Теперь приведем (53) к неприводимым тензорам по отношению к обычной ротационной группе $O(3)$. Тогда получится по одному тензору $y_{jm}^{(l)}$ каждого ранга $j = 1(0), 3(2), \dots, l-2, l$, каждый с $2j + 1$ компонентами $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$. Число всех компонент то же, $s_+ = (l + 1)(l + 2)/2$. В частности, для $l = 2$ из (53) получаются $y_{00}^{(2)}(s)$ - и $y_{2m}^{(2)}(d)$ -тензоры с числом компонент $s_+ = 6$. Если в (53) заменить l на $l - 1$, тогда получится еще по одному тензору $y_{jm}^{(l-1)}$ ранга $j = 0(1), 2(3), \dots, l-3, l-1$ с числом компонент $s_- = l(l + 1)/2$. Всего из $y_{jm}^{(l)}$ и $y_{jm}^{(l-1)}$ получится по одному тензору ранга $j = 0, 1, \dots, l-1, l$ с числом компонент $s = s_+ + s_- = (l + 1)^2$. Эти тензоры из координат y_{jm} можно рассматривать как микроскопическое выражение коллективных координат формы поверхности ядра Бора — Моттельсона [19—21].

Таблица 3. Члены гамильтониана sd СБМ $H(6) \boxtimes Sp(12)$ (из [41])
 [в обозначениях обзора $N(6) \otimes Sp(12, R) \rightarrow H(6) \boxtimes Sp(12), d \rightarrow \bar{d}$]

Число бозонных операторов	Члены из генераторов		
	$U(6)$	$Sp(12, R)$	$N(6) \otimes Sp(12, R)$
2	$[d^+d]_0$ s^+s		
		$[dd]_0 + hc$ $ss + hc$	
3			$[d^+[dd]_2]_0 + hc$ $s^+[dd]_0 + hc$ $[d^+d]_0s + hc$ $s^+ss + hc$
			$[d[dd]_2]_0 + hc$ $[dd]_0s + hc$ $sss + hc$
4	$[[d^+d^+]_L [dd]_L]_0 \quad L = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 4 \end{cases}$ $[d^+d^+]_0 ss + hc$ $[[d^+d^+]d]_0 s + hc$ $[d^+d]_0 s^+s$ s^+s^+ss		
		$[d^+d]_0 [dd]_0 + hc$ $[d^+[dd]_2]_0 s + hc$ $s^+[d[dd]_2]_0 + hc$ $s^+s[dd]_0 + hc$ $[d^+d]_0 ss + hc$ $s^+sss + hc$	
		$[dd]_0 [dd]_0 + hc$ $[d[dd]_2]_0 s + hc$ $[dd]_0 ss + hc$ $ssss + hc$	

Перейдем к бозонам. Заменяем x_h на $y_{j_1 j_2 \dots j_l}^{(l)}$ и подставим в (39). Потом приведем b_h^+ к неприводимым сферическим тензорам с числом всех компонент s_+ соответственно s , как выше, и найдем их эрмитово сопряженные b_h . Получим b_{jm}^+, b_{jm} . Из (47) при $r = 1, n = s$ получим генераторы группы $Sp(2n)$ с вложением (50).

Такой путь был проделан в [27] для $l = 2, n = s = 6$. Получены $b_{00}^+ = s^+$ и $b_{2m}^+ = d_m^+$ бозоны, с помощью которых предложена кол-

лективная симплектическая бозонная модель (СБМ) $Sp(12)$ и $H(6) \boxtimes Sp(12)$. Исследована ее решетка групп. Существенная ее часть рассмотрена в [27]:

$$\left. \begin{aligned} Sp(12) \supset U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3); \\ Sp(12) \supset U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3); \\ Sp(12) \supset U(6) \supset U(3) \supset O(3). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Другие ее части см. в [27] и в разд. 6. Из (54) видно, что СБМ содержит всю групповую структуру модели взаимодействующих бозонов (разд. 4). Она найдена в [27] до того, как была получена авторами МВБ в полном виде. Из-за того, что координаты (52) инвариантны относительно $O^h(r)$, то любая модель, построенная из них, например СБМ для $s = 6$ $Sp(12)$ [27], будет $O^h(r)$ инвариантной, как отмечено, например, в [40]. Гамильтониан модели $H(6) \boxtimes Sp(12)$ найден в [41] и показан в табл. 3.

В случае $l = 3$ и $l - 1 = 2$, $s = 16$, получается $H(16) \boxtimes Sp(32)$ -модель — обобщение $U(16)$ -модели $sp\,df$ -бозонов (разд. 7). В случае любого l и $l - 1$, $s = (l + 1)^2$, получается $H(s) \boxtimes Sp(2s)$: общий случай СБМ и обобщение $U(s)$ бозонной модели [28] (разд. 7).

4. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ

Эта модель создана в своей первоначальной версии, которую мы будем называть моделью квадрупольных фононов (МКФ), в 1974 г. [53, 54]. Ее сегодняшняя версия — модель взаимодействующих бозонов (МВБ) — создана в 1975 г. [55—59] (см. также [7, 8, 60—62]).

Сначала МВБ была создана и названа МВБ-1 для четно-четных ядер, с учетом, что протоны и нейтроны — одинаковые нуклоны, оставляя из бозонов по одному тензорному монополю $b_0 = s$ ранга $j = 0$ и квадрупольному $b_2 = d$ ранга $j = 2$ и считая, что полное число $N = n_0 + n_2$ s -бозонов с числом $n_0 = n_0(1)$ и d -бозонов с числом $n_2 = n_2(5)$ сохраняется (см. ниже почему). Тогда верхней группой модели оказывается $U(6)$ с генераторами (41). Решетка групп дана формулами (54), но начиная с $U(6)$.

Рассмотрим более детально реализацию алгебры $U(6)$ МВБ, т. е. свойства s -, d -бозонов и генераторов $U(6)$, сконструированных из них, а также выявим эксплицитно подалгебры, определяющие решетку групп модели и их операторы Казимира. Отметим, что операторы рождения b_{jm}^\dagger и уничтожения b_{jm} , получаемые из b_{jm} формулой (9), в соответствии с разд. 3 являются тензорами ранга j по отношению к $O(3)$, т. е. обладают мультипольностью или спином j . Из того же раздела видно, что их компоненты обладают $(-)^j$ пространственной четностью и у их тензоров еще + временная четность. Хотя в этом разделе мы столкнемся и с другим определением бозонов, мы постараемся сохранить им эти свойства. В частности, s - и d -бозоны со спином j , равным 0 и 2, обладают + пространственной и + временной четностью.

Представим генераторы $U(6)$ в виде эрмитовых тензоров по отношению к $O(3)$ с пространственной и пока неопределенной временной четностью. Тогда они будут

$$S_j = [s^+s]_j \quad (j = 0), \quad D_j = [d^+\bar{d}]_j \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4),$$

$$O_j^{(\mu)} = [\mu d^+s + \mu^* s^+ \bar{d}]_j \quad \text{и} \quad O_j^{(i\mu)} \quad (|\mu|^2 = 1)$$

($j = 2$), или всего 36 с учетом компоненты m каждого тензора j . Скомбинируем их таким образом, чтобы выявить все группы решетки

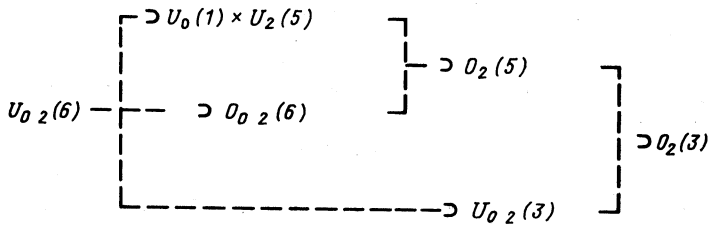


Рис. 3. Решетка групп sd МВБ $U_{02}(6)$

модели. Получим табл. 4. Использованы обозначения (9) и (11). Алгебра модели видна из коммутаторов генераторов, представленных в табл. 5. Видно, что решетка групп модели как раз та, которая

Таблица 4. Генераторы $U_{02}(6)$ -группы, определяющие ее $U(5)$ (N_0, L_1, N_2, L_3, N_4), $O(6)$ (L_1, L_2, L_3) и $U(3)$ (N_0, L_1, Q_2) подгруппы, $|\mu|^2 = |\nu|^2 = 1$ (из [28])

$$N_0 = s^+s + \sqrt{5} [d^+\bar{d}]_0$$

$$L_1 = [d^+\bar{d}]_1$$

$$N_2 = [d^+\bar{d}]_2$$

$$L_2 = [\mu d^+s + \mu^* s^+ \bar{d}]_2$$

$$Q_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} [\nu d^+s + \nu^* s^+ \bar{d}]_2 + \sqrt{\frac{7}{3}} [d^+\bar{d}]_2$$

$$L_3 = [d^+\bar{d}]_3$$

$$N_4 = [d^+\bar{d}]_4$$

следует из (54) и показана на рис. 3 (с индексами спинов бозонов из которых составлены генераторы).

Отметим, что группа $O(6)$ пока определена неоднозначно с точностью до фазового множителя $\mu = e^{i\Phi}$ в ее генераторах L_2 и группа $U(3)$ — также с точностью до фазового множителя $\nu = e^{i\Psi}$ в ее генераторах Q_2 . Можно убедиться, что углы Φ и Ψ — это углы вращения в пространстве координата — импульс для d -бозонов по отношению к s -бозонам. Попытаемся сузить неопределенность, потребовав еще чтобы генераторы из двух разных типов бозонов были с +

Т а б л и ц а 5. Коммутаторы генераторов $U_{0_2}(6)$ - и $U_{1_3}(10)$ -групп, показывающие существование их $U(5)$ -, $O(6)$ - и $U(3)$ -подгрупп (из [28])

$$\begin{aligned}
 [N_0, T_k]_j &= 0 \\
 [L_1, T_k]_j &= -\sqrt{\frac{k(k+1)}{2 \cdot 5}} T_k \delta_{jk} \\
 [Q_2, Q_2]_j &= 5L_1 \delta_{j1} \\
 [L_3, L_3]_j &= -\sqrt{\frac{2 \cdot 7}{5}} L_1 \delta_{j1} + \sqrt{\frac{3}{5}} L_3 \delta_{j3} \\
 [L_2, L_2]_j &= 2L_1 \delta_{j1} + 2L_3 \delta_{j3} \\
 [L_2, L_3]_j &= -\sqrt{\frac{7}{5}} L_2 \delta_{j2} \\
 [N_2, N_2]_j &= L_1 \delta_{j1} - \frac{2^3}{7} L_3 \delta_{j3} \\
 [N_4, N_4]_j &= \sqrt{2 \cdot 3} L_1 \delta_{j1} + \frac{3}{7} \sqrt{11} L_3 \delta_{j3} \\
 [N_2, N_4]_j &= \frac{3}{7} \sqrt{2 \cdot 5} L_3 \delta_{j3} \\
 [N_2, L_3]_j &= \frac{2^3}{\sqrt{5 \cdot 7}} N_2 \delta_{j2} - \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{7}} N_4 \delta_{j4} \\
 [N_4, L_3]_j &= -3 \sqrt{\frac{2}{7}} N_2 \delta_{j2} - \sqrt{\frac{11}{7}} N_4 \delta_{j4}
 \end{aligned}$$

или — временной четностью. Как мы увидим ниже, это связано с требованием, чтобы операторы Казимира, как и гамильтонианы, обладали + временной четностью. Тогда останутся две возможности для $O(6)$ $\mu = 1, i$ и еще две возможности для $U(3)$ $\nu = 1, -1$. Отметим, что эти группы с $\mu = 1, \nu = -1$ применялись в ряде работ [7, 8], тогда как они же с $\mu = i, \nu = 1$ — в работе [63].

Приведем операторы Казимира первого и второго порядка групп модели из рис. 3. Операторы Казимира первого порядка — тривиальные скалярные произведения соответствующих бозонов: $\hat{n}_0(1) = s^+ \cdot \bar{s} = S_0, \hat{n}_2(5) = d^+ \cdot \bar{d} = \sqrt{5} D_0 (N_0 = \hat{n}_{0_2}(6) = \hat{n}_0(1) + \hat{n}_2(5))$. Операторы Казимира второго порядка $\hat{v}_0(1), \hat{v}_2(5)$ и $\hat{v}_{0_2}(6)$ выражаются как линейные комбинации $[\hat{n}_0(1)]^2, [\hat{n}_2(5)]^2$ и $\hat{n}_0(1) \cdot \hat{n}_2(5)$. Их всего пять. Остальные четыре, определяемые с помощью табл. 4, следующие:

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{v}_{0_2}^{(\nu)}(3) &= \frac{4}{3} N_0 N_0 - 5 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 + \sqrt{5} [Q_2 Q_2]_0; \\
 \hat{\omega}_{0_2}^{(\mu)}(6) &= -2 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 + \sqrt{5} [L_2 L_2]_0 - 2 \sqrt{7} [L_3 L_3]_0; \\
 \hat{\omega}_2(5) &= -2 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 - 2 \sqrt{7} [L_3 L_3]_0; \\
 \hat{\omega}_2(3) &= -2 \cdot 5 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 = \hat{I} \cdot \hat{J},
 \end{aligned} \right\} (55)$$

где $\hat{I}_m = \sqrt{2 \cdot 5} L_{1m}$ — компоненты углового момента; $X_j \cdot Y_j = (-)^j \sqrt{2j+1} [X_j Y_j]_0$. Таким образом, всего 9 операторов Казимира.

Теперь займемся конструкцией операторов физических величин, в частности гамильтониана H , электрических $T(EL)$ - и магнитных $T(ML)$ -переходов из генераторов U_{02} (6). Ограничимся членами низжайшего порядка по генераторам, до второго для оператора гамильтониана чтобы включить и взаимодействие, до первого для операторов переходов. Потребуем их эрмитовость, инвариантность для H , тензорность ранга L для $T(EL)$ и $T(ML)$ по отношению к вращениям, пространственную четность их компонент $+$ для H , $(-)^L$ для $T(EL)$, $(-)^{L-1}$ для $T(ML)$, временную четность как тензоров: $+$ для H и $T(EL)$, $-$ для $T(ML)$, в соответствии с общепринятыми симметриями. В результате получим H с девятью независимыми членами, как видно из [56] или табл. 3:

$$\left. \begin{aligned}
 H = & \varepsilon_s s^+ \cdot \bar{s} + \varepsilon_d d^+ \cdot \bar{d} + \frac{1}{2} u_0 s^+ s^+ \bar{s} \bar{s} + u_2 [d^+ \bar{d}]_0 s^+ \bar{s} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 ([d^+ d^+]_0 \bar{s} \bar{s} + [\bar{d} \bar{d}]_0 s^+ s^+) + \\
 & + v_2 ([d^+ d^+]_2 \bar{d}]_0 \bar{s} + [[\bar{d} \bar{d}]_2 d^+]_0 s^+) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{L=0, 2, 4} c_L (2L+1)^{1/2} [[d^+ d^+]_L [\bar{d} \bar{d}]_L]_0
 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

и $T(EL)$, $T(ML)$ в табл. 6. Еще отметим, что девять членов (56) можно выразить через девять операторов Казимира (55) и выше ли-

Таблица 6. Операторы электромагнитных переходов sd МВБ (из [7])

$$\begin{aligned}
 T(E0) &= e_0^0 [s^+ \bar{s}] + e_2^0 [d^+ \bar{d}]_0 \\
 T(M1) &= m_1^1 [d^+ \bar{d}]_1 \\
 T(E2) &= e_2^2 [d^+ \bar{d}]_2 + e_{2,0}^2 [d^+ \bar{s} + s^+ \bar{d}] \\
 T(M3) &= m_3^3 [d^+ \bar{d}]_3 \\
 T(E4) &= e_2^4 [d^+ \bar{d}]_4
 \end{aligned}$$

нейными соотношениями [63]. Таким образом, получим H в виде

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{i=0, 2} \varepsilon_i (2i+1) \hat{n}_i (2i+1) + \\
 & + \sum_{i, j=0, 2 (i \geq j)} \varepsilon_{ij} (2i+1, 2j+1) \hat{n}_i (2i+1) \hat{n}_j (2j+1) + \\
 & + \alpha_{02} (3) \hat{v}_{02} (3) + \beta_{02} (6) \hat{\omega}_{02} (6) + \sum_{i=0, 2} \beta_2 (i+3) \hat{\omega}_2 (i+3). \quad (57)
 \end{aligned}$$

Обратим внимание: в этой модели отсутствуют переходы EL с L нечетным и ML с L четным из-за того, что в ней вообще отсутствуют состояния с отрицательной пространственной четностью. И еще: отсутствуют $M1 I \rightarrow I \pm 1$ -переходы из-за того, что оператор T ($M1$) этих переходов слишком простой — он пропорционален угловому моменту \hat{I} .

Теперь вернемся к отмеченной выше неоднозначности

$$O_{02}^{(\mu)}(6) \mu = 1, i \text{ и } U_{02}^{\nu}(3) \nu = 1, -1.$$

Она обсуждалась в связи с протон-нейтронной МВБ-2 [64, 65], но что у нее существует значение даже в связи с рассматриваемой здесь МВБ-1, показано в [28]. Обозначим операторы Казимира для обоих случаев через $\hat{\omega}_{02}^{(\mu)}(6)$, $\hat{\nu}_{02}^{(\nu)}(3)$ и используем обозначение

$$\hat{\nu}_{02}^{(\nu)}(3) = \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{(\nu)} + \hat{\omega}_2(3)/2 + N_0^2 \times 4/3.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{02}^{(i)}(6) + \hat{\omega}_{02}^{(i)}(6) &= 2\hat{\omega}_2(5) + 4\hat{n}_0(1) [\hat{n}_2(5) + 5/2] + 2\hat{n}_2(5); \\ \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{(i)} + \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{(i-1)} &= \{8\hat{\omega}_{02}^{(i)}(6) - 12\hat{\omega}_2(5) + \hat{\omega}_2(3)/2 + \\ &+ 4\hat{n}_2(5) [\hat{n}_2(5) + 5]\}/3. \end{aligned} \quad (58)$$

Если сравнить (58) с (57) видно, что $O_{02}^{(i)}(6)$ -предел возникает при переходе между $U_2(5)$ - и $O_{02}^{(i)}(6)$ -пределами, а $O_{02}^{(i)}(6)$ - или $O_{02}^{(i)}(6)$ -пределы — при переходе между $U_{02}^{(i)}(3)$ - и $U_{02}^{(i-1)}(3)$ -пределами. Таким образом в МВБ остаются три независимых предела из пяти возможных.

Проблема эквивалентности МВБ с первоначальной версией МКФ рассматривалась в разном свете в ряде публикаций. Приведем для этой цели гамильтониан МКФ [53]:

$$\begin{aligned} H &= dN_0 + e [q \cdot, i\bar{p}] + uq \cdot q + vp \cdot p + \frac{1}{2} wq \cdot [q, i\bar{p}]_2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{l=0(1, 2, 3, 4)} (-)^l t_l \left[q, \frac{i\bar{p}}{q} \right]_l \cdot \left[q, \frac{i\bar{p}}{q} \right]_l \dots l \text{ -- четное} \\ &\dots l \text{ -- нечетное,} \end{aligned} \quad (59)$$

дополненный нами первым членом, так как МКФ построена на основе группы $SU(6)$ вместо $U(6)$ и поэтому теряет один генератор, соответственно один оператор Казимира $N_0 = \hat{n}_{02}(6)$ по отношению к МВБ. Как отмечено ниже после (60), один из членов с t_l , $l = 1, 2, 3, 4$, можно опустить, что обозначено $l = 0(1, 2, 3, 4)$. Пар заметил [66], что МВБ основана на реализации Швингера [67] генераторов группы $U(6)$, тогда как МКФ — на реализации Холштейна — Примакова [68]. Есть еще одна реализация Дайсона

[69], использование которой обсуждается в литературе и нами (см. разд. 6). Соотношению трех реализаций посвящена работа [70].

Однако нам представляется, что полное решение проблемы эквивалентности выяснено в не очень доступной работе [41], частично приведено в [62] и поэтому приведено полностью здесь. Полная эквивалентность между (56) и (59) получается при следующих обратимых соотношениях между их параметрами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= d - 10e + 5(u + v + t_0); \\ \varepsilon_d &= d + 2e + u + v + \frac{1}{5} \sum_{l=0}^4 (2l + 1) t_l; \\ u_0 &= 10t_0; \\ u_2 &= 2\sqrt{5}(u - v - t_0); \\ v_0 &= \sqrt{10}(u - v); \\ v_2 &= \sqrt{5}w; \\ c_{L=0, 2, 4} &= 2 \sum_{l=0}^4 (-)^l (2l + 1) \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & L \\ 2 & 2 & l \end{matrix} \right\} t_l \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

с $6j$ -символом Вигнера, как в [12]. Один из параметров $t_{l=1,2,3,4} = 0$ (например, $t_3 = 0$), так как один из четырех последних членов (59) не независим. В (60) девять параметров H МВБ (56): ε_s , ε_d , u_0 , u_2 , v_0 , v_2 , c_0 , c_2 , c_4 и девять параметров дополненного H МКФ (59): d , e , u , v , w , t_0 , t_1 , t_2 , t_4 . Взаимная однозначность соотношений [60] достигается введением девятого члена (59) или оператора Казимира U (6), отсутствующего в SU (6). Отличие этой эквивалентности от других обсужденных в том, что она рассматривает полное число бозонов N как квантовое число, и поэтому соотношения (60), обеспечивающие эквивалентность, не зависят от N .

Перейдем к проблеме микроскопического обоснования МВБ на основе модели оболочек. С ней связано введенное в начале раздела ограничение МВБ — сохранение полного числа бозонов N и рассмотренное ниже правило МВБ определения этого числа для данного ядра. Проблема обоснования в принципе решается на основе того, что в модели оболочек операторы физических величин, например гамма-функции и операторы переходов, выражаются через фермионы и что пары фермионов можно выразить через бозоны, применяя разные методы бозонных разложений. Она рассмотрена в ряде публикаций, например [71—73], и обзорах [60, 74]. На практике она решается в два этапа:

1) определение коэффициентов обеих линейных комбинаций со спином/четностью 0^+ и 2^+ разных пар фермионов, представляющих аналоги соответственно s - и d -бозонов;

2) конструкция бозонных операторов гамильтониана и переходов МВБ из фермионных операторов модели оболочек с нахождением коэффициентов первых из заданных коэффициентов вторых и их сравнение с полученными феноменологической подгонкой (56) и табл. 6 к эксперименту [или, наоборот, описание эксперимента с таким образом найденными коэффициентами (56) и табл. 6]. Из этих двух этапов второй намного сложнее первого [74]. К этой проблеме мы еще вернемся в разд. 6 и 8.

Связь бозонов с парами фермионов сразу наводит на мысль потребовать сохранения полного числа бозонов, определив его как число пар валентных нуклонов. Конечно, это связано, во-первых, с опусканием переходов нуклонов из замкнутых оболочек в валентную и переходов части коллективных пар нуклонов в двухквaziчастичные, что можно учесть СБМ [27, 41] из разд. 3. Во-вторых, известно, что бозонные модели не учитывают прямо принцип Паули. Его частичный учет осуществляется следующим уточненным правилом полного числа бозонов N : оно равняется сумме числа пар валентных протонов (или их дырок, если последнее меньше) и числа пар валентных нейтронов (или их дырок, если последнее меньше).

Разумеется, правило зависит от определения магических чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (152, 184). Разные отклонения от этого правила часто объясняют возникновением новых частично-магических чисел, обычно 38, 40, 64 (14, 56, 76, 114) (см. некоторые ссылки в связи с $N_p \cdot N_n$ -систематикой ниже в этом разделе). Другие отклонения могут быть связаны с участием части нуклонов из замкнутых оболочек или дырок из открытых оболочек в образовании пар фермионов (см. СБМ в разд. 3 и ссылки в связи со смешивающей конфигурации МВБ ниже в этом разделе). Еще они могут возникнуть из-за разрушения бозонов за счет появления двухквaziчастичных состояний (СБМ в разд. 3; разд. 5 и 6). Существенные отклонения могут появиться в связи с введением бозонов другой пространственной четности (см. правило ММВБ в разд. 7).

Приступим к проблемам, связанным с любой моделью динамической симметрии, описанным в разд. 2, и дадим краткий обзор их решения в МВБ. В полном виде эти проблемы рассмотрены в [7, 8]. Первая проблема квантовых чисел для всех трех цепочек групп на рис. 3 решается так. Для первой цепочки:

$$\left. \begin{aligned} U_{02}(6) \supset U_0(1) \times U_2(5) \supset O_2(5) \supset O_2(3); \\ [N00000] = \sum [n_0] \times [n_20000] = \sum (v0) = \sum \{x\} (L). \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Здесь все неприводимые представления симметричны, что связано с тем, что операторы рождения бозонов коммутируют. N характеризует н. п. $U(6)$ и есть полное число s - и d -бозонов как определено выше,

$$\begin{aligned} n_2 &= 0, 1, \dots, N - 1, N, \\ v &= 0(1), 2(3), \dots, n_2 - 2, n_2, y = (n_2 - v)/2, \end{aligned}$$

$x = 0, 1, \dots, [v/3]$ (где $[v/3]$ — целая часть $v/3$), $w = v - 3x$, $L = w, w + 1, \dots, 2w - 3, 2w - 2, 2w$. Здесь n_0 дает н. п. группы $U(1)$ и есть число s^+ -бозонов, n_2 дает н. п. группы $U(5)$ и есть число d^+ -бозонов ($N = n_0 + n_2$), v дает н. п. группы $O(5)$, а связанное с ним y имеет смысл числа d^+ -бозонных дублетов, связанных до спина 0, в состоянии. Так как в одном н. п. группы $O(5)$ с данным v появляются несколько н. п. группы $O(3)$ с тем же самым L , вводится дополнительное квантовое число x или связанное с ним w , где x имеет смысл максимального числа d^+ -бозонных триплетов, связанных до спина 0 в состоянии [75]. L дает н. п. группы $O(3)$ и является спином состояния (обратим внимание, что спин $L = 2w - 1$ отсутствует).

Для второй цепочки:

$$\left. \begin{aligned} U_{02}(6) \supset O_{02}(6) \supset O_2(5) \supset O_2(3); \\ [N00000] = \sum (u00) = \sum (v0) = \sum \{x\} (L); \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

N — то же самое, как и ранее, $u = 0(1), 2(3), \dots, N - 2, N$, дает н. п. группы $O(6)$ и $z = (N - u)/2$ есть число s^+ - и d^+ -бозонных дублетов, связанных до спина 0 в состоянии, $v = 0, 1, \dots, u - 1, u$ и дает н. п. группы $O(5)$, $x(w)$, L — те же самые.

Для третьей цепочки:

$$\left. \begin{aligned} U_{02}(6) \supset U_{02}(3) \supset O_2(3); \\ [N00000] = \sum [h_1 h_2 h_3] = \sum \{k\} (L). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Здесь N то же самое. В согласии с (33):

$$[2] \otimes [N00000] = \sum [h_1 h_2 h_3], \quad (64)$$

откуда находим ($\lambda = h_1 - h_2$, $\mu = h_2 - h_3$); явные формулы для $(\lambda\mu)$ можно найти в [7]. Дальше K дается формулой (29) и L — формулами (30), (31). $[h_1 h_2 h_3]$ дает н. п. группы $U(3)$, а $(\lambda\mu)$ — н. п. группы $SU(3)$. Так как и здесь в одно н. п. группы $SU(3)$ с данным $(\lambda\mu)$ входит несколько н. п. группы $O(3)$ с тем же самым L , введено дополнительное квантовое число K , близкое по смыслу к обычному спину начала ротационной полосы.

Вторая проблема энергий уровней (56), (57). Для пределов они находятся стандартно из (57) и (21) — (25). При переходе делается численная диагонализация (56) или (57) в базисе [56], который не ортогонален, или в базисах, развитых позже [67, 75]. Все они решают и третью проблему состояний уровней для первой цепочки. Для третьей цепочки указано построение базиса [76]. Для второй и третьей цепочек найдены формулы для трансформационных коэффициентов по отношению к первой [63]. Для перехода между ними делается численная диагонализация. По четвертой проблеме вероятностей переходов в пределах найден ряд алгебраических формул для ряда частных случаев [7, 8]. Снова при переходе делается численная диагонализация.

Выясним физический смысл трех пределов МВБ. Для этого спектр уровней первого предела U (5) показан на рис. 4. Видно, что он отвечает ангармоническому сферическому вибратору [77], и мы будем называть его вибрационным. Спектр уровней второго предела O (6) показан на рис. 5. Он отвечает анаксиальному (γ -мягкому) деформированному ротатору [78], и мы будем называть его промежуточным. Спектр уровней третьего предела U (3) показан на рис. 6. Он отвечает аксиальному деформированному ротатору

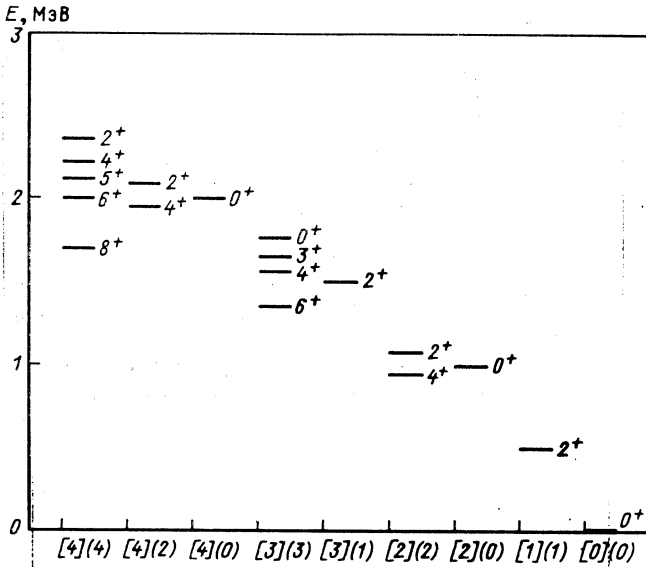


Рис. 4. Схематические уровни sd МВБ $U_{02}(6)$ н. п. $[4]$ в $U_0(1) \times U_2(5)$ -пределе; снизу н.п.: $U_2(5) [h_1], O_2(5) (\bar{h}_1)$ (три параметра)

[21], и мы будем называть его ротационным. Примеры наблюдения этих трех пределов показаны на рис. 7—9, взятых из книги [7]. На рис. 10 из той же книги показано, какие ядра близки к каждому из трех пределов.

В работе [79] поднят вопрос о том, что первые два предела (61) и (62) не очень сильно различаются из-за наличия вложения $O(5) \supset O(3)$ в обеих цепочках на хвосте. Это означает, что $O(6)$ -предел может быть имитирован также $U(5)$ -пределом с сильной ангармоничностью. Для идентификации нужно использовать ряд особенностей, и в частности различие в поведении $B(E2)$ приведенных вероятностей переходов в ирраст-полосе, как показано на рис. 11, взятом из [8]. Это применено к ядру $^{196}_{78}\text{Pt}_{118}$ в работе [80], где отвергаются попытки интерпретации его структуры $U(5)$ -пределом и подтверждается интерпретация $O(6)$ -пределом. Описание переходов между пределами см. также в [7].

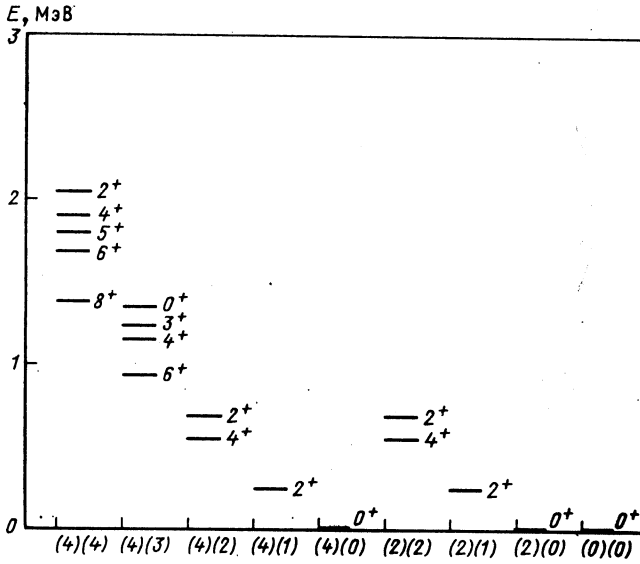


Рис. 5. Схематические уровни sd МВБ $U_{02}(6)$ н. п. [4] в $O_{02}(6)$ -пределе; снизу н. п.: $O_{02}(6) (\bar{h}_1)$, $O_2(5) (\bar{h}_1)$ (два параметра)

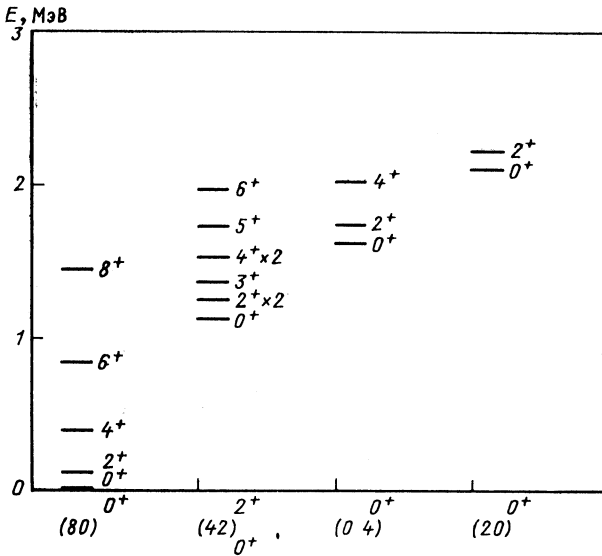


Рис. 6. Схематические уровни sd МВБ $U_{02}(6)$ н. п. [4] в $U_{02}(3)$ -пределе; снизу н. п.: $SU_{02}(3) (\lambda\mu)$, K^π (один параметр)

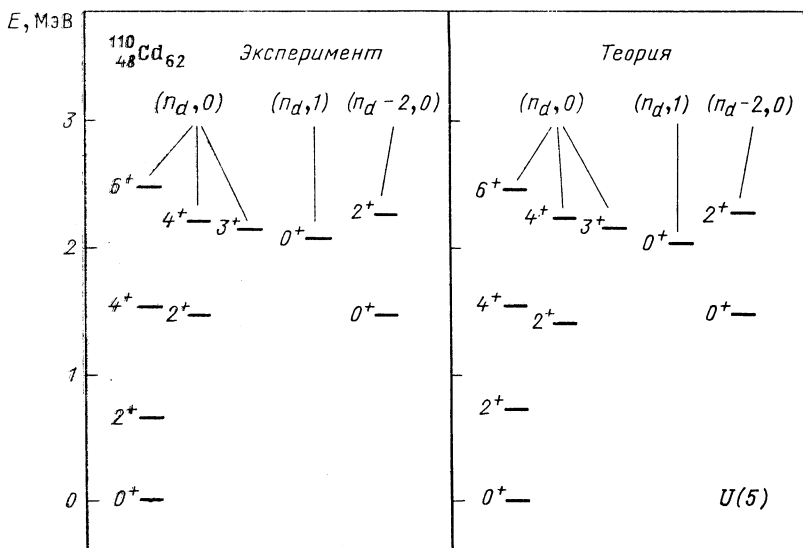


Рис. 7. Спектр sd МВБ в $U(5)$ -пределе: $^{110}_{48}\text{Cd}_{62}$, $N = 7$ (четыре параметра) (из [7])

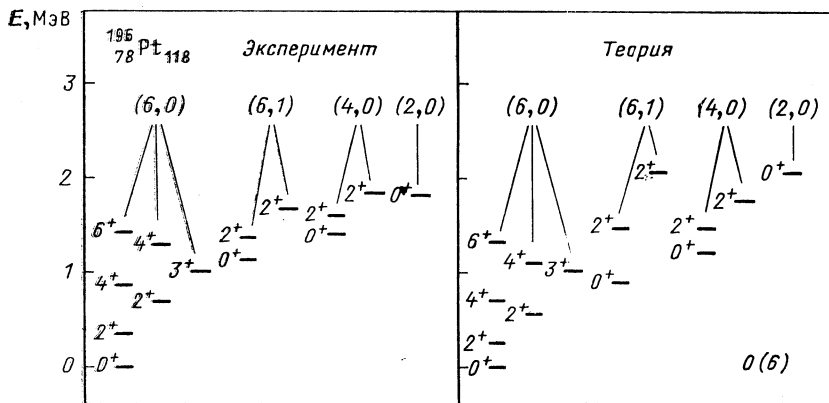


Рис. 8. Спектр sd МВБ в $O(6)$ -пределе: $^{196}_{78}\text{Pt}_{118}$, $N = 6$ (три параметра) (из [7])

Кроме описанного группово-теоретического подхода точного решения модели предложен ряд приближенных методов. Некоторые из них дают вклад в выяснение физического типа системы и в отношении МВБ к другим моделям. Первый из них — это метод когерентных состояний, приложенный к бозонным моделям (см. [81, 82])

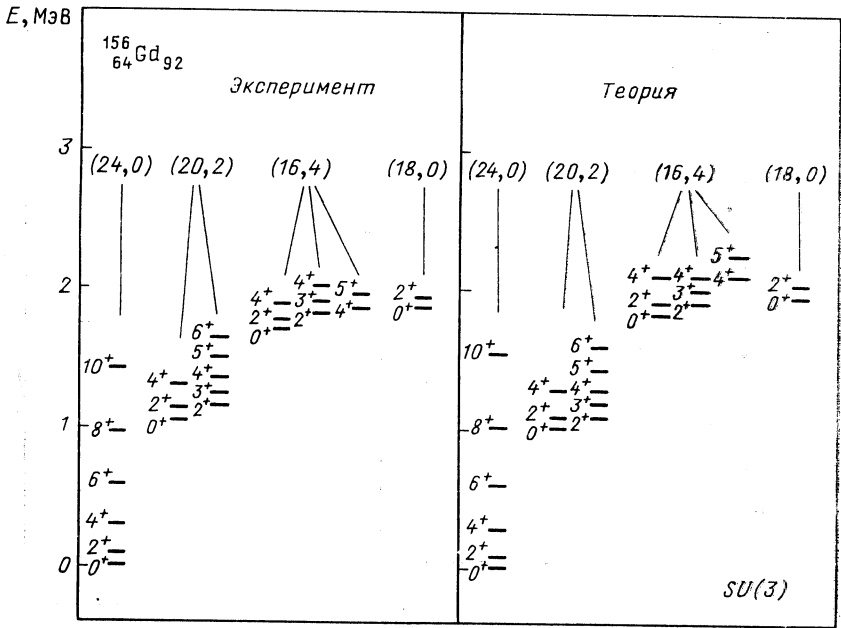


Рис. 9. Спектр *sd* МВБ в $U(3)$ -пределе: $^{156}_{84}\text{Gd}_{92}$, $N = 12$ (два параметра) (из [7])

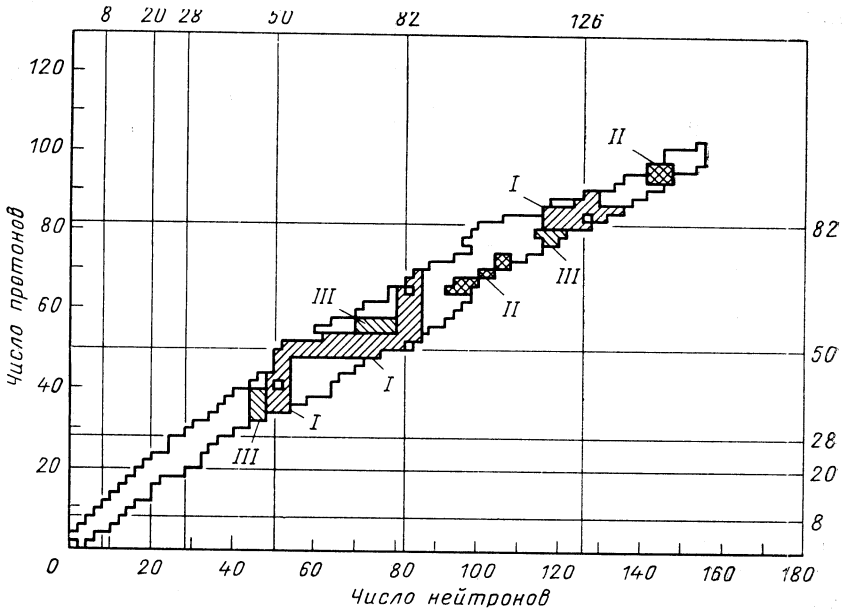
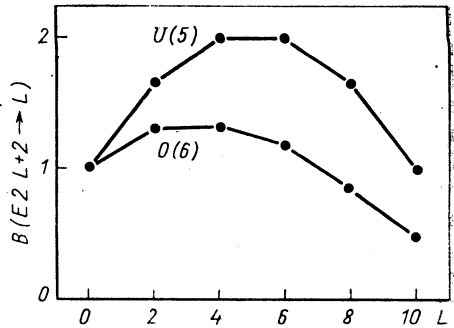


Рис. 10. Области карты ядер, описываемые *sd* МВБ в $U(5)$ (I)-; $O(6)$ (III)-, $U(3)$ (II)-пределах (из [7])

Рис. 11. Относительные праст $B(E2)$ -вероятности переходов в двух пределах sd МВБ, $N = 6$ (из [8])



и ссылки в этих работах):

$$|\alpha\rangle = e^{\sum_{jm} (\alpha_{jm} b_{jm}^{\dagger} - \alpha_{jm}^{*} b_{jm})} | \rangle, \quad (65)$$

где $| \rangle$ — вакуум.

Отметим, что такие состояния можно построить и так:

$$|\alpha\rangle = e^{\sum_{jm} (-|\alpha_{jm}|^{1/2} + \alpha_{jm} b_{jm}^{\dagger})} | \rangle. \quad (66)$$

Применительно к МВБ введены «проектированные» когерентные состояния [83—86]:

$$|\alpha\rangle = [N! (\sum_{jm} |\alpha_{jm}|^2)^N]^{-1/2} [\sum_{jm} \alpha_{jm} b_{jm}^{\dagger}]^N | \rangle. \quad (67)$$

Все состояния (65) — (67) нормированы. Состояния (65), (66) обладают свойством

$$b_{jm} |\alpha\rangle = \alpha_{jm} |\alpha\rangle, \quad (68)$$

а состояние (67) — свойством

$$b_{jm} |\alpha\rangle = N\alpha_{jm} |\alpha\rangle. \quad (69)$$

Отметим, что эти состояния не являются собственными ни углового момента $\hat{I} \cdot \hat{I}$, и поэтому они аналоги внутренних состояний, ни оператора полного числа бозонов

$$\hat{N} = \sum_{jm} b_{jm}^{\dagger} b_{jm} \quad (70)$$

и поэтому содержат компоненты с разным числом бозонов N . Среднее значение \hat{N} для (65), (66):

$$\langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = \sum_{jm} |\alpha_{jm}|^2, \quad (71)$$

а для (67):

$$\langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = N^2 \sum_{jm} |\alpha_{jm}|^2. \quad (72)$$

Таким образом, нормировав $\sum_{jm} |\alpha_{jm}|^2$ к N в случаях (65), (66), либо к $1/N$ в случае (67), можно получить нужное среднее число бозонов N . Важным обстоятельством является тот факт, что α_{jm} можно

считать аналогами коэффициентов Бора — Моттельсона формы поверхности ядра [21]. В случае МВБ при j , равном 0 и 2, их шесть. Из них один отвечает радиусу ядра, а из остальных можно извлечь известные два параметра аксиальной β и анаксиальной γ деформации и три угла ориентации ядра. Это сделано для всех трех пределов МВБ [7] и показано, что формы ядер, описываемых ими, отвечают тем, которые были найдены из примеров спектров на рис. 4—9 (см. выше).

Второй из приближенных методов — это метод, разделяющий гамильтониан на «внутреннюю» часть, определяющую основные уровни квазиротационных полос, и «коллективную» часть, смещающую, расщепляющую и смешивающую внутренние состояния [87—89]. Он связан с определением «внутренних» бозонов [75, 90], см. также [7]. И третий из приближенных методов — бозонный метод Хартри [91, 92], который показывает, что расчет бозонных систем легче, чем расчет фермионных по известному уже полвека методу Хартри.

К МВБ в ее феноменологическом применении часто предъявляют претензии, что она вводит слишком много параметров. Это, в принципе, правильно: она вводит девять параметров только в оператор гамильтониана (56), не считая тех, которые вводятся в операторы переходов (табл. 6), причем индивидуальные для каждого ядра. Однако сегодня известны три метода, которые в комбинации могут сильно изменить ситуацию на практике. Первый из них называют расширенным согласованным Q -формализмом [93]:

$$H = \varepsilon \hat{n}_2 + \beta \hat{Q} \cdot \hat{Q} + \gamma \hat{I} \cdot \hat{I}_* \quad (73)$$

где $\hat{n}_2 = \hat{n}_2$ (5) и

$$\hat{Q} = L_2 + \chi N_2, \quad \hat{I} = \sqrt{2 \cdot 5} L_1 \quad (74)$$

с обозначениями табл. 4. Название «согласованный» происходит от того, что применяется один и тот же квадрупольный оператор \hat{Q} как в гамильтониане H , так и в операторе переходов $T(E2)$. Как видно из (73, 74), метод содержит четыре параметра.

Этот метод представляет изменение других версий, предложенных раньше. Например, в [94] исследуют переход от вибрационного к ротационному пределу в изотопах ${}_{62}\text{Sm}$ с полным гамильтонианом МВБ. Однако приходят к выводу, что переход описывается только тремя параметрами, если в (73) подставить $\varepsilon = \varepsilon_2 - \phi N_0$, $\gamma = 0$ и $\hat{Q} = Q_2$ из табл. 4 вместо (74). Правда, в работе [95] авторы несколько усложняют картину. Мы отметим, что на рис. 4 в [41] показан расчет изотопов ${}_{62}\text{Sm}$ с тем же самым гамильтонианом, как и в [94], при нереалистически низком общем числе бозонов ($N = 4$). Показано, что перенормировкой коэффициентов получается почти то же самое согласие с экспериментом для тех же самых низколежащих уровней, выбранных в [94]. Исследован и переход от промежуточного к ротационному пределу на примере детального спектра [96]. В ра-

боте [97] применяется (73), (74) с $\varepsilon = 0$, и это называется согласованным Q -формализмом по причинам, указанным выше. У него три параметра. Подробно он изложен в [8].

Второй метод сокращения параметров связан с $N_p \cdot N_n$ -систематикой энергий низколежащих уровней и их $B(E2)$ -вероятностей переходов [98] (см. также [8, 99]). Идея этой систематики связана с ролью протон-нейтронного ($p - n$)-взаимодействия в определении структуры тяжелых ядер. Отсюда предложение делать систематику не по отношению к числам протонов Z и нейтронов N , а по отношению к произведению $N_p \cdot N_n$, где N_p — число валентных протонов (или дырок, если их меньше) и N_n — число валентных нейтронов (или дырок). Идея нагляднее, если применять связанный с ним параметр [100]

$$P = N_p \cdot N_n / (N_p + N_n), \quad (75)$$

имеющий смысл среднего числа взаимодействий каждого валентного p или n со всеми валентными n соответственно p нуклонами (или дырками). Показано, что разброс данных для ядер из шести областей по числу нуклонов $A \approx 100, 130, 150, 170, 190, 230$ при заданном P минимален и что деформация наступает при $P \approx 4 \div 5$. В тех же самых работах [98—100] можно найти и применение частично-магических чисел (см. выше в этом разделе). Этот метод, в комбинации с первым, приводит к возможности проводить расчеты с МВБ примерно для 100 ядер в трех областях $A \approx 100 \div 200$ всего с семью параметрами [101].

Одно из расширений МВБ — это протон-нейтронная МВБ или МВБ-2. В него вводятся отдельные бозоны для протонов s_p, d_p и для нейтронов s_n, d_n [102, 103]. Здесь мы отметим понятие F -спина, аналога изотопического спина для валентных протонов и нейтронов (или соответствующих дырок) [71]. Его компоненты:

$$\left. \begin{aligned} F_{+1} &= -[d_p^+ \cdot \bar{d}_n + s_p^+ \cdot \bar{s}_n] / \sqrt{2}; \\ F_0 &= [d_p^+ \cdot \bar{d}_p - d_n^+ \cdot \bar{d}_n + s_p^+ \cdot \bar{s}_p - s_n^+ \cdot \bar{s}_n] / 2; \\ F_{-1} &= [d_n^+ \cdot \bar{d}_p + s_n^+ \cdot \bar{s}_p] / \sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Они генераторы групп $SU^F(2)$ и $O^F(3)$. И в связи с этим — третий метод сокращения параметров, названный проектирование по F -спину на его максимальное значение $F_{\max} = N/2$. В работах [104, 105] показано, что таким образом из МВБ-2 получается МВБ-1. Это и понятно, так как $F = F_{\max}$ означает симметризацию состояний МВБ-2 по p и n , как в МВБ-1. Этот третий метод, в комбинации с первыми двумя, приводит к дальнейшей возможности делать глобальные расчеты МВБ с меньшим числом фиксированных параметров [106, 107].

Наконец, отметим коротко применявшиеся расширения МВБ (для некоторых из них см. [7, 8]). Расширения к нечетным и нечетно-не-

четным ядрам, без и с включением суперсимметрий, будут рассмотрены в разд. 5. Расширение с включением других степеней свободы, кроме монополярной и квадрупольной, т. е. других бозонов, кроме s и d , будут рассмотрены в разд. 7. Протон-нейтронная МВБ, или МВБ-2, отмечена выше [102, 103]. Отметим также, что кроме симметричных по отношению к p и n состояний с максимальным F -спином обнаружены еще коллективные состояния (0^+) , 1^+ , 2^+ , 3^+ в районе 1—3 МэВ (см., например, [108—110] и ссылки в них). Они были определены как состояния со смешанной симметрией, с меньшим F -спином [111, 112], и их можно рассматривать как общее свойство двухкомпонентных систем [113]. В рассмотрении, кроме pp - и nn -пар нуклонов в МВБ-1 и МВБ-2, включены и pn -пары, и в результате получилась МВБ-3 [114]. Полное использование изоспина привело к МВБ-4 [115]. Подробнее о введении изоспина см. в [116]. Предлагались разные версии смешивающей конфигурации МВБ [41, 117, 118] и осуществлялась в простом варианте [117]. В последней работе дан пример несохранения полного числа бозонов (см. выше в этом разделе). Предлагалась МВБ высшего порядка [119]. Это означает устранение ограничения на гамма-тонны, чтобы он не имел членов выше второго порядка по генераторам $U(6)$ — см. текст над формулой (56). Рассматривался и группово-теоретический подход к рассеянию [120—122] как возможность создания модели непрерывного спектра.

5. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОZOHOB И ФЕРМИОНОВ

Несмотря на то что систему нуклонов можно описать прямо через фермионы (разд. 6), плодотворной оказалась идея ввести коллективные возбуждения через бозоны как в разд. 3, 4, а одно-двух и т. д. нуклонные возбуждения — через фермионы как в разд. 2. Это сделано соответственно для нечетных [123] и для нечетно-нечетных ядер [124] в так называемой модели взаимодействующих бозонов и фермионов (МВБФ). Можно описывать двух- и т. д. частичные состояния, включительно выстраивание и бэкбендинг в четно-четных ядрах [125, 126]. Хотя бозоны не фундаментального происхождения, а построены из пар фермионов, как указано в разд. 4 и будет показано подробнее в разд. 6, МВБФ сыграла важную роль в понимании связи разных мод в этих ядрах.

Займемся сначала фермионной ортогональной группой $O(2m)$, аппарат которой заложен еще в работе [127] (см. также [128]), с генераторами из пар m фермионов, аналогично тому, как мы сделали с бозонной симплектической группой с генераторами из пар n бозонов в формулах (47) разд. 3:

$$\left. \begin{aligned} g_{h'h''} &= (a_{h'}^+ a_{h''} - a_{h''} a_{h'}^+) / 2 = a_{h'}^+ a_{h''} - \delta_{h'h''} / 2; \\ f_{h'h''} &= a_{h'} a_{h''}, \quad f_{h''h'}^+ = a_{h'}^+ a_{h''}^+. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Их число, учитывая антисимметрию $f_{h'h''} = -f_{h''h'}$, $f_{h'h''}^+ = -f_{h''h'}^+$, равняется $m(2m - 1)$. Коммутаторы $g_{h'h''}$ те же самые, что и приведенные в (3), остальные ненулевые:

$$\left. \begin{aligned} [f_{h_1'h_1''}, g_{h_2'h_2''}] &= f_{h_1'h_2''} \delta_{h_1'h_2''} - f_{h_1''h_2} \delta_{h_1'h_2''}; \\ [g_{h_1'h_1''}, f_{h_2'h_2''}^+] &= -f_{h_1'h_2''}^+ \delta_{h_1'h_2''} + f_{h_1'h_2''}^+ \delta_{h_1'h_2''}; \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$[f_{h_1'h_1''}, f_{h_2'h_2''}^+] = -g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''} - g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''} + g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''} + g_{h_2'h_1''} \delta_{h_2'h_1''}, \quad (79)$$

(77) являются генераторами ортогональной группы $O(2m)$ в $2m$ -измерениях.

Так же как и в разд. 3, из (3), (78), (79) следует вложение, аналогичное (50):

$$O(2m) \supset U(m). \quad (80)$$

Для нахождения верхней группы любой фермионной модели мы можем включить генераторы, меняющие число фермионов не только на 0 и 2 как $O(2m)$, но и на 0,1 и 2. Определим фермионную супергруппу (см. ниже) $K(m)$ с $2m + 1$ генераторами $a_h, a_h^+, 1$. Она — аналог бозонной группы Гейзенберга — Вейля $H(n)$ (разд. 3), но для a_h, a_h^+ между собой алгебраическая операция — антикоммутация и остается коммутацией только с 1. Тогда верхней супергруппой может быть $K(m) \boxtimes O(2m)$, где алгебраическая операция между генераторами двух групп произведения — также коммутация. Ее связь с группой $O(2m + 1)$ отмечалась в [127].

Верхняя супергруппа системы из n бозонов и m фермионов обладает супералгеброй, которая включает генераторы из пары операторов рождения и/или уничтожения бозонов и/или фермионов. Супералгебра включает операцию коммутации для некоторых пар генераторов и антикоммутации для других. Рассмотрим операторы (47) только из бозонов, снабдив их верхним индексом b : $g_{h'h''}^b, f_{h'h''}^b, f_{h'h''}^{b+}$. Дальше операторы (77) только из фермионов с верхним индексом f : $g_{h'h''}^f, f_{h'h''}^f, f_{h'h''}^{f+}$. И наконец, операторы из бозонов и фермионов:

$$\left. \begin{aligned} e_{h'h''}^{bf} &= b_h^+ a_{h''}, & e_{h'h''}^{bf+} &= a_h^+ b_{h''}; \\ d_{h'h''}^{bf} &= b_h a_{h''}, & d_{h'h''}^{bf+} &= a_h^+ b_{h''}^+. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

У операторов бозонов знакомые коммутаторы (40), у фермионов — антикоммутаторы (1), друг с другом они коммутируют на 0. Коммутаторы $g_{h'h''}^b, f_{h'h''}^b, f_{h'h''}^{b+}$ между собой найдены в (3), (48), (49). Коммутаторы $g_{h'h''}^f, f_{h'h''}^f, f_{h'h''}^{f+}$ между собой найдены в (3), (78), (79). Нетрудно найти и оставшиеся результаты операций супералгебры, а именно коммутаторы (47) с (81) и (77) с (81), сводящиеся к л. к. (81), и антикоммутаторы (81) с собой, сводящиеся к л. к. (47) и (77). Они не приведены, так как их список слишком длинный. Для большей наглядности все генераторы полученной так супергруппы вместе с операциями ее супералгебры показаны на рис. 12.

Эта супергруппа известна из физики элементарных частиц [129, 130], но пока не применялась в физике ядра. Она обозначалась $OSp(2m/2n)$, но в соответствии с принятой очередностью бозонов и фермионов в физике ядра мы будем обозначать ее $SpO(2n/2m)$. Ее генераторы меняют полное число бозонов плюс фермионов на 0 и 2. Если мы захотим, чтобы они могли менять это число на 0, 1 и 2, нам придется ввести еще супергруппу $HK(n/m)$ с генераторами b_h ,

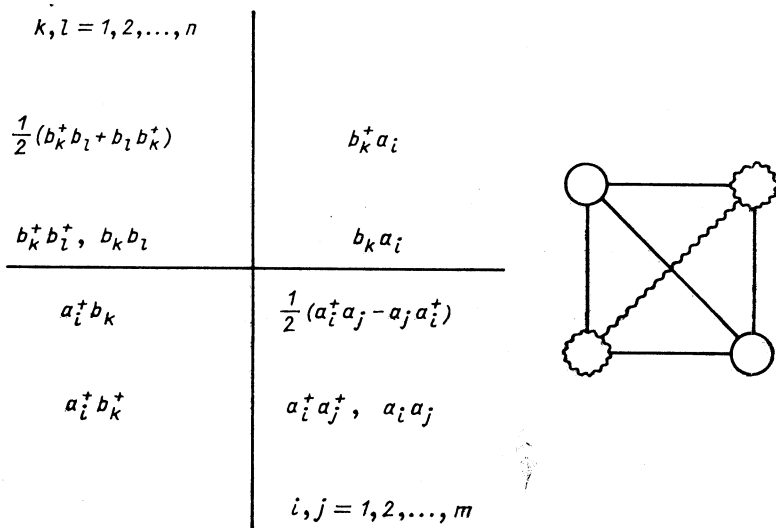


Рис. 12. Генераторы супергруппы $SpO^{bf}(2n/2m)$ слева; схема операций ее супералгебры справа, внутри — круг и между — линия любыми из четырех блоков: прямой линией — коммутация, волнистой — антикоммутация

$b_h^+, a_h, a_h^+, 1$ и соответствующими операциями коммутации или антикоммутации, как изложено выше. Тогда искомая верхняя супергруппа будет $HK(n/m) \boxtimes SpO(2n/2m)$ с операциями коммутации или антикоммутации в полупрямом произведении. Из вышеизложенной супералгебры $SpO(2n/2m)$ сразу видны следующие цепочки:

$$\left. \begin{aligned} SpO^{bf}(2n/2m) &\supset Sp^b(2n) \times O^f(2m) \supset U^b(n) \times U^f(m); \\ SpO^{bf}(2n/2m) &\supset U^{bf}(n/m) \qquad \supset U^b(n) \times U^f(m). \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Генераторы супергруппы $U(n/m)$ — в первой строке каждого из четырех квадратов рис. 12. Ниже в этом разделе мы отметим ее введение в физику ядра и применение в МВБФ. Подробнее о супергруппе $SpO(2n/2m)$, ее подгрупп из (82) и их применений в физике ядра см. в разд. 6, 7, 8.

Теперь вернемся к МВБФ. Сначала было замечено, что операторы физических величин можно строить из генераторов бозонной $U^b(n)$ и фермионной $U^f(m)$ групп одновременно, т. е. из генераторов груп-

пы $U^b(n) \times U^f(m)$. Таким образом, можно описывать спектр одного ядра [123, 131, 132]. Дальше было замечено, что, применяя супергруппу $U^{bf}(n/m)$, можно описывать соотношения спектров соседних ядер [124, 133, 134]. Это типичный пример динамических суперсимметрий в физике [135, 136].

Рассмотрим подробнее размерности n и m супергруппы $U(n/m)$. Размерность по бозонам n определяется числом их компонент, а по фермионам m — числом состояний из оболочечной модели. Если включить бозоны со спинами j^b и уровни модели оболочек со спинами j^f , то

$$n = \sum_{j^b} (2j^b + 1), \quad m = \sum_{j^f} (2j^f + 1). \quad (83)$$

Например, для s - и d -бозонов $j^b = 0$ и 2 , $n = 6$, как в разд. 4. Для p уровня $2d3/2$ $j^f = 3/2$, $m = 4$, а для n уровней $3p1/2$, $3p3/2$ и $2f5/2$ $j^f = 1/2$, $3/2$ и $5/2$, $m = 12$ [124].

Рассмотрим также полные числа бозонов N и фермионов M . Правило из разд. 4 модифицируется следующим образом. Число фермионов M равняется квазичастичности состояния ядра. Число бозонов N равняется числу остальных пар валентных нуклонов или дырок. Например, для четно-четных ядер и состояний минимальной квазичастичности (коллективных) $M = 0$. Для нечетно-четных и четно-нечетных ядер и состояний минимальной квазичастичности (одноквазичастичных) $M = 1$. Для нечетно-нечетных ядер и состояний минимальной квазичастичности (двухквазичастичных) $M = 2$. Для всех этих случаев соответственное максимальное число бозонов N определяется как указано выше. Тогда для любого ядра модель может в принципе описывать все состояния квазичастичности или числа фермионов M , $M + 2, \dots$, для которых число бозонов соответственно N , $N - 1, \dots$, т. е. для которых полное число фермионов плюс бозонов $M + N$, $M + N + 1, \dots$

Групповая структура МВБФ достаточно сложна [132, 137—141]. Однако и здесь, как для МВБ из разд. 4 (см. рис. 3), ищут пределы типа вибрационных, промежуточных и ротационных. Например, для $m = 4$, т. е. для ядер и состояний с квазичастицами на уровне $j^f = 3/2$, можно применять следующие три предела:

$$\left. \begin{aligned} U^{bf}(6/4) &\supset U^b(6) \times U^f(4) \supset U^b(5) \times SU^f(4) \supset O^b(5) \times Sp^f(4) \supset \\ &\supset SU^b(2) \times SU^f(2) \supset Spin^{bf}(3); \\ U^{bf}(6/4) &\supset U^b(6) \times U^f(4) \supset SU^b(4) \times SU^f(4) \supset Spin^{bf}(6) \supset \\ &\supset Spin^{bf}(5) \supset Spin^{bf}(3); \\ U^{bf}(6/4) &\supset U^b(6) \times U^f(4) \supset U^b(3) \times Sp^f(4) \supset SU^b(2) \times \\ &\times SU^f(2) \supset Spin^{bf}(3). \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

В случае $j^f = 1/2$ и $3/2$, $m = 6$, существует более простой ротационный предел, но это случайно [142]. Поэтому нам представляется, что

пока у МВБФ есть недостаток: ее групповая структура зависит от применяемой валентной подоболочки ядра.

В качестве группово-теоретического отступления дадим некоторые сведения о спинорной группе в n измерениях $Spin(n)$. Две

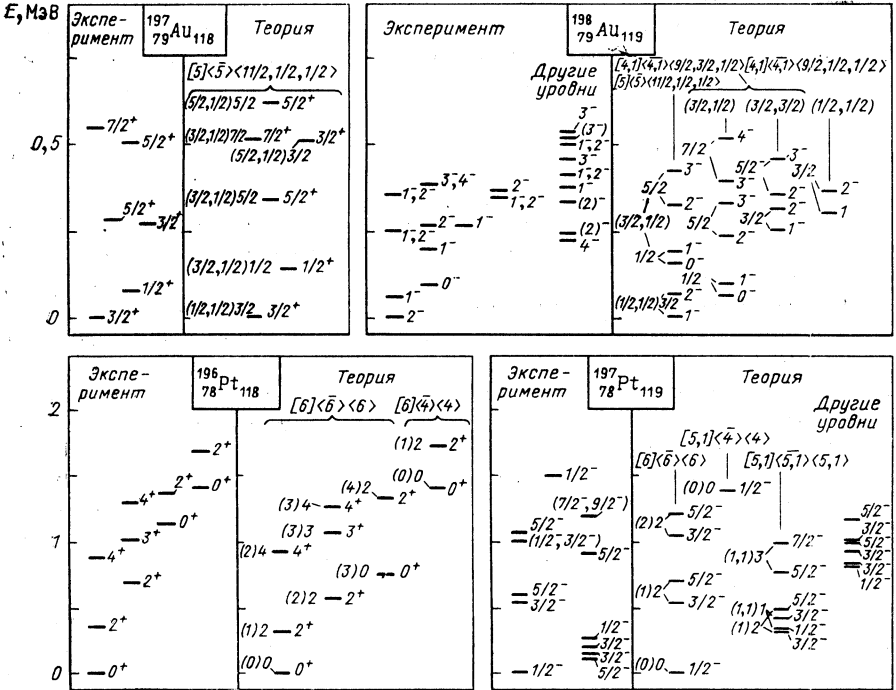


Рис. 13. Спектры соседних ядер в суперсимметричной МВБФ (из [124])

группы Ли локально-изоморфны ($G' \approx G''$), если у них те же самые алгебры [5]. Универсальной накрывающей группой \bar{G} данной группы G называют единственную локально-изоморфную ей группу $\bar{G} \approx G$, которая просто связана (см. [143, с. 108]). Тогда

$$Spin(n) = \overline{O(n)}, \tag{85}$$

т. е. группа $Spin(n)$ — универсальная накрывающая группы $O(n)$ и, следовательно, локально-изоморфна этой классической группе [143, с. 111]. Она компактна для $n > 2$ [143, с. 334]. В четырех случаях [143, с. 427] и только в них она изоморфна (=) классической

группе:

$$\left. \begin{aligned} Spin(6) &= SU(4) && \approx O(6); \\ Spin(5) &= Sp(4) && \approx O(5); \\ Spin(4) &= SU(2) \times SU(2) && \approx O(4); \\ Spin(2) &= SU(2) && \approx O(3). \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

В данном случае $Sp(4)$ означает именно компактную $Sp(4)$ -группу согласно [5], а не некомпактную $Sp(4, R)$, как у нас во многих случаях.

В качестве примера приведем одновременное описание спектров, с выявлением их сходных характеристик, четырех соседних ядер: четно-четного Z, N , четно-нечетного $Z, N + 1$, нечетно-четного $Z + 1, N$ и нечетно-нечетного $Z + 1, N + 1$ ($Z = 78, N = 118$) на рис. 13, взятом из работы [124]. В заключение раздела отметим, что такого рода примеров описания экспериментов, с хорошим или иногда не очень хорошим результатом, накопилось достаточно, чтобы подвести итог. В качестве итога считают, что ядро позволило впервые обнаружить динамическую суперсимметрию в природе [144].

§ 6. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОНОВ

Эта модель, по понятным причинам, названа ее авторами моделью фермионной динамической симметрией (МФДС). Ради единства с принятыми названиями других моделей мы позволили себе называть ее также моделью взаимодействующих фермионов (МВФ). Несмотря на то что она новая и по осуществленным применениям не идет ни в какое сравнение с МВБ, мы сочли, что ее основная идея заслуживает внимания.

Идейно она развивает ранее предложенную фермионную модель [145]. Однако та модель встретила основную трудность: она не в состоянии была воспроизвести ротационный предел в ряде случаев. Эта трудность названа авторами модели «фатальной трещиной» и обойдена ими (см. ниже). Вместе с этим модель получила существенно большую общность. Замечание авторов МВФ насчет косвенности микроскопического обоснования МВБ из модели оболочек бесспорно правильно, если сравнить с [74] разд. 4 (тем не менее см. ниже в этом разделе). Основная идея МФДС или МВФ состоит в том, что раз ядро рассматривается как система нуклонов, которые являются фермионами, следует попытаться найти ее динамические симметрии прямо из фермионных степеней свободы, без введения вторичных бозонов [146—152] (см. также [153—155] насчет изоспиново-инвариантной МФДС или МВФ).

Рассмотрим коротко модель на основе математических результатов [149] и главных физических выводов [150]. Начнем с того, что однонуклонные состояния модели оболочек, вместо $|nlm_i s m_s t m_t\rangle$ или $|nlsj m_j t m_t\rangle$, могут быть записаны еще как $|n k m_k i m_i t m_t\rangle$, если разложить полный угловой момент \hat{j} не как обычно $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ в орби-

тальную \hat{l} и спиновую \hat{s} части, а как $\hat{j} = \hat{k} + \hat{i}$ в псевдоорбитальную \hat{k} и псевдоспиновую \hat{i} части, выбрав k целое и i полуцелое. Верхняя группа пар из m фермионов, как указано в разд. 5, $O^f(2m)$. Перепишем ее генераторы (77), связывая оба псевдоугловых момента k и i двух фермионов посредством (11) до K и I :

$$\left. \begin{aligned} G_{K_g I_g} &= [g_{k_1 i_1, k_2 i_2}]_{K_g I_g}; \\ F_{K_f I_f} &= [f_{k_1 i_1, k_2 i_2}]_{K_f I_f}; \\ F_{K_f I_f}^\pm &= [f_{k_1 i_1, k_2 i_2}^\pm]_{K_f I_f}. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Для создания модели-аналога обычной МВБ с s - и d -бозонами очень удобными оказываются два выбора: k — целое, $i = 3/2$ или $k = 1$, i — полуцелое. Для получения «верхней» группы с физическим смыслом в первом случае выбирают

$$K_g = K_f = 0, \quad I_g = 0, 1, 2, 3, \quad I_f = 0, 2.$$

Тогда (87) дает $8(8-1)/2 = 28$ генераторов группы $O(8)$. Во втором случае выбирают $K_g = 0, 1, 2, K_f = 0, 2, I_g = I_f = 0$. Тогда (87) дает $6(6+1)/2 = 21$ генератор группы $Sp(6)$. Таким образом, получаются вложения:

$$\left. \begin{aligned} O(2m) &\supset O(8); \\ O(2m) &\supset Sp(6). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Дальше можно установить следующие цепочки групп:

$$\left. \begin{aligned} O(8) &\cdots \left[\begin{array}{l} \supset O(7) \supset O(5) \\ \supset O(6) \supset O(5) \\ \supset O(5) \times SU(2) \end{array} \right] \cdots \supset O(3). \\ Sp(6) &\cdots \left[\begin{array}{l} \supset O(3) \times SU(2) \\ \supset SU(3) \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Если посмотреть на энергии уровней и вероятности переходов, оказывается, что первая, третья и четвертая цепочки (89) представляют собой аналоги первой цепочки (54), т. е. вибрационного предела. Вторая цепочка (89) — аналог второй цепочки (54), т. е. промежуточного предела. Пятая цепочка (89) — аналог третьей цепочки (54), т. е. ротационного предела. Формулы для энергий уровней и вероятностей переходов [150] показывают, что аналогия даже количественная. Различия получаются в связи с действием принципа Паули в МВФ, в отличие от МВБ. Эти различия двух типов: первое, некоторые состояния запрещены этим принципом; второе, уровни и переходы описываются теми же самыми формулами, однако после переопределения некоторых квантовых чисел и после введения управляющих паули-факторов для переходов в некоторых пределах.

В частности, вибрационный предел, соответствующий первой цепочке (89), выглядит настолько отличным от остальных, что утверж-

дают его самостоятельный физический смысл [150] и его экспериментальное обнаружение в изотопах ${}_{44}\text{Ru}$ и ${}_{46}\text{Pd}$ [147]. Однако позже появилась работа [156], которая оспаривает [147] в том смысле, что и в sd -бозонной модели есть такая же цепочка групп, как первая (89), но генераторы $O(8)$ сконструированы не из фермионных пар (77), а из sd -бозонов. Бозонный гамильтониан такой цепочки совпадает с гамильтонианом МВБ для первой цепочки (54). Энергии уровней и вероятности $E2$ -переходов при обоснованном переопределении оператора этих переходов относительно МВБ совпадают с энергиями и вероятностями МВФ [147]. Хотя мы знаем, что верхняя группа sd -бозонных пар — это $Sp(12)$ СВМ, как предлагалось в [27] и обсуждалось в разд. 3, группа $O(8)$ МВФ не ее подгруппа, так как ее генераторы составлены не только из sd -бозонных пар (47), а еще из одного и трех sd -бозонных операторов. Интересно посмотреть, нельзя ли создать и группу $Sp(6)$ МВФ такими же генераторами. И нельзя ли показать в общем случае, как это сделано в [156] для первой цепочки (89), что любой оператор гамильтониана H^f соответственно переходов T^f МВФ может быть преобразован в sd -бозонный оператор гамильтониана H^b соответственно переходов T^b , отличающихся от обычных операторов МВБ простым образом:

$$H^f \rightarrow H^b, \quad T^f \rightarrow T^b. \quad (90)$$

Результаты работы [156] и их сравнение с [147] означают принципиальную возможность такого бозонного подхода к фермионным моделям. К этому мы вернемся в связи с применением трансформации Дайсона в конце раздела.

Рассмотрим «фатальную трещину» МВФ, упомянутую в начале раздела. Если у нас M пар валентных состояний и N пар валентных нуклонов или дырок ($N \leq M/2$), то для ротационного предела — пятой цепочки (89) — оказывается, что н. п. группы $SU(3)(2N, 0)$ воспрещено при $M/3 < N$, например, для ядер с примерно наполовину заполненной валентной оболочкой $N \approx M/2$. Однако из рис. 6 видно, что именно это н. п. содержит основную ротационную полосу $I^\pi = 0^+, 2^+, \dots$, которая пропала!

Посмотрим, каким образом авторы МВФ обходят эту основную трудность. Они разбивают число пар валентных состояний $M = M_n + M_a$ и нуклонов (дырок) $N = N_n + N_a$ на нормальные M_n , N_n и аномальные M_a , N_a . «Нормальные» описываются второй-третьей строкой (87) с $K_f = 0$, $I_f = 0, 2$ для $O(8)$ и с $K_f = 0, 2$, $I_f = 0$ для $Sp(6)$ (89), т. е. для нашего случая. Остальные «аномальные» дают «какогерентный вклад». Тогда запрет перестает действовать в указанной выше форме $M/3 < N$, а только для нормальных состояний и нуклонов (дырок) $M_n/3 < N_n$. Условие существования основной ротационной полосы $N_n \leq M_n/3$ уже может выполняться для любых соотношений N и M , в частности для максимального $N = M/2$, если принцип Паули разрушит значительную часть нормальных пар нуклонов (или дырок) N_n и переведет их в «болото»

аномальных N_a , уменьшая таким образом N_n до значения не больше $M_n/3$. Это обстоятельство приводит к изменению квантовых чисел и в остальных пределах, так как меняет N на N_n . Оно также позволяет включить в рассмотрение разрушенные пары, и таким образом явления типа бэкбендинга, недоступные МВБ из разд. 4, но доступные МВБ из разд. 5 и СБМ из разд. 3, допускающие аналогичный эффект разрушения бозонов и перевода их в фермионы. Оно означает и нарушение обычного правила полного числа бозонов МВБ из разд. 4.

Наконец, остановимся на проблеме обоснования МВБ путем отображения Дайсона [69] пар фермионов в бозоны, или, точнее, путем ее обобщения Ианссеном и др. [157, 158]. Предпочтение этой трансформации, отдаваемое здесь, — из-за ее конечности. Она следующая:

$$\left. \begin{aligned} a_i a_j &= A_{ij}; \\ a_i^+ a_j^+ &= A_{ij}^{(+)} - \sum_{gh} A_{i_3}^{(+)} A_{h_j}^{(+)} A_{gh}; \\ a_i^+ a_j &= \sum_h A_{ih}^{(+)} A_{hj}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Здесь i, j, g, h — индексы однонуклонных состояний с однофермионными операторами a_i, a_i^+ и объединяют все их квантовые числа. $A_{ij}, A_{ij}^{(+)}$ — операторы двухнуклонных квазибозонов. Они антисимметричны: $A_{ij} = -A_{ji}, A_{ij}^{(+)} = -A_{ji}^{(+)}$, и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [A_{i_1 j_1}, A_{i_2 j_2}] &= 0; \quad [A_{i_1 j_1}^{(+)}, A_{i_2 j_2}^{(+)}] = 0; \quad [A_{i_1 j_1}, A_{j_2 i_2}^{(+)}] = \\ &= \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_2}. \end{aligned} \quad (92)$$

Из-за этих соотношений иногда их называют «идеальными» бозонами. Наше название напоминает о том, что оператор $A_{ji}^{(+)}$ не эрмитово сопряжен оператору A_{ij} .

Из-за антисимметрии квазибозонов A_{ij} их число $m(m-1)/2$. $A_{ij}, A_{ij}^{(+)}$ и $\sum_h (A_{ih}^{(+)} A_{hj} + A_{jh} A_{hi}^{(+)})/2$ представляют $m(2m-1)$ генераторов группы $H(m(m-1)/2) \boxtimes U(m)$, т. е. столько, сколько и генераторов группы пар фермионов $O(2m)$. Из-за нелинейности (91), у обеих групп разные алгебры, т. е. они не локально-изоморфны. Однако их генераторы связаны взаимно однозначно через (91). Такие группы мы будем называть функционально изоморфными и обозначать эту связь через \sim :

$$O(2m) \sim H(m(m-1)/2) \boxtimes U(m). \quad (93)$$

Теперь сразу видно, что если у нас двухчастичный фермионный гамильтониан H и одночастичные фермионные операторы перехо-

дов T :

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{ij} \varepsilon_{ij} a_i^+ a_j + \sum_{i_1 j_1 i_2 j_2} \eta_{i_1 j_1 i_2 j_2} a_{i_1}^+ a_{j_1}^+ a_{i_2} a_{j_2}; \\
 T &= \sum_{ij} \tau_{ij} a_i^+ a_j,
 \end{aligned} \tag{94}$$

то они преобразуются посредством (91) в двухквазибозонный H и одноквазибозонные T :

$$\left. \begin{aligned}
 H &= \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \sum_h A_{ih}^{(+)} A_{hj} + \sum_{i_1 j_1 i_2 j_2} \eta_{i_1 j_1 i_2 j_2} [A_{i_1 j_1}^{(+)} A_{i_2 j_2} - \\
 &\quad - \sum_{gh} A_{i_1 g}^{(+)} A_{h j_1}^{(+)} A_{gh} A_{i_2 j_2}]; \\
 T &= \sum_{ij} \tau_{ij} \sum_h A_{ih}^{(+)} A_{hj}.
 \end{aligned} \right\} \tag{95}$$

Такая трансформация выглядит очень простой. Однако в связи с ее применениями, неоднократно рассматривавшимися в литературе, могут возникнуть подвохи, которые также рассматривались. Ее основная проблема состоит в том, что если мы хотим работать в базисах бра-состояний $\langle | A \dots AA$ и кет-состояний $A^{(+)} A^{(+)} \dots A^{(+)} | \rangle$, то сразу видно, что матрицы гамильтониана (94) не эрмитовы, хотя сам оператор гамильтониана (94), как и его прообраз (93), должен оставаться эрмитовым. Из-за этого ее собственные состояния не ортонормированы.

Тем не менее, если работать в полном бозонном базисе, это не очень существенно, так как трансформация точная [159, 160]. Можно, например, получить результаты работы [71] прямой трансформацией [161] без утомительных сопоставлений бозонных и фермионных состояний. Трудности могут возникнуть, если обрезать базис, например, до s -, d -бозонов. Их можно преодолеть, если вернуться к первоначальному бра- и кет-состояниям из пар фермионов [162] либо использовать классификацию по синьоритету [163], либо разными приближенными рассмотрениями [164—166].

Укажем на еще одну возможность, а именно получить из A и $A^{(+)}$ эрмитово-сопряженные операторы \bar{A} и $\bar{A}^{(+)}$, сохраняя их коммутаторы, неунитарной трансформацией:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A} &= ZAZ^{-1}; \quad \bar{A}^+ = ZA^{(+)}Z^{-1}; \\
 \bar{H} &= ZHZ^{-1}; \quad \bar{T} = ZTZ^{-1}.
 \end{aligned} \right\} \tag{96}$$

В частном случае операторы Z , Z^{-1} сконструированы и процедура проведена до конца [156]. Видно, что из-за нелинейности (96) трансформация будет означать снова переход к бозонным разложениям любого порядка, и, на первый взгляд, это большое усложнение. Но хотя бы на примере [156] показано, что трансформация (96) восстанавливает эрмитовость матриц гамильтониана \bar{H} и операторов пере-

ходов \bar{T} , сохраняя их порядок по бозонам. Возможно, это окажется более общим свойством. На примере [156] трансформация (96) меняет формулы для энергий, заменяя числа бозонов их простыми л. к. Проблеме эрмитовости посвящен ряд работ в новейшей литературе.

Можно рассмотреть (96) как линейную трансформацию, но тогда это будет означать, что ее коэффициенты станут зависимыми от состояния. Если эти зависимости окажутся регулярными и слабыми, мы вернемся к ситуации в МВБ. На самом деле, при обычном обосновании МВБ рассчитывают на устойчивость разложения бозонов по парам фермионов [74], как отмечено в разд. 4. С другой стороны, в некоторых случаях, как мы увидим в разд. 7 для ММВБ, зависимость может оказаться сильной. Это будет означать выход за пределы МВБ или фазовый переход от одного предела к другому в одном ядре. Например, сосуществование и переход от одной формы к другой или от коллективных к двухквaziчастичным состояниям.

7. МОДЕЛЬ МНОГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ

Эту модель (ММВБ) можно рассматривать как одно из расширений МВБ. Вопрос о включении других коллективных степеней свободы, кроме монопольной и квадрупольной, и, таким образом, других бозонов, кроме s и d , настолько очевиден, что обсуждался еще в первых работах МВБ [56—58]. Включалась вторая пара s' - и d' -бозонов [167—169], дипольные p -бозоны с разным физическим смыслом (spd -модель) [170—177], октупольные f -бозоны (sd f -модель) [178—180] (см. ссылки в последней работе), гексадекапольные g -бозоны (sdg -модель) [181, 182].

Серьезное продвижение вперед к созданию ММВБ достигнуто установлением того факта, что включение g -бозонов, т. е. создание sdg -бозонной модели, сохраняет $U(3)$ -подгруппу с генераторами из всех трех типов бозонов и, таким образом, ротационный предел [183—189]. Еще сначала было ясно, что включение p -бозонов, т. е. создание spd -бозонной модели, сделает то же самое. Однако было ясно, что н. п. $U(3)$ -подгруппы, а вместе с этим и спектр уровней, будут слишком бедными для тяжелых ядер. С другой стороны, включение только f -бозонов, т. е. создание до сих пор применяемой sd f -бозонной модели [180], не сохраняет $U(3)$ -подгруппу с генераторами из f -бозонов. Дальше было показано, что включение p - и f -бозонов, т. е. создание sd p f -бозонной модели, также сохраняет $U(3)$ -подгруппу с генераторами из всех четырех типов бозонов и, таким образом, ротационный предел [190, 191]. Предложена также обобщенная МВБ [192] с несколькими бозонами b_j данного спина j , для которой видно, что она также сохраняет $U(3)$ -подгруппу.

Включение дипольной степени свободы, что дало spd -модель (ссылки выше), трактовалось как модели альфа- или динуклонных кластеров или вибронов. Включение октупольной степени свободы независимо от МВБ дала модель [193—195], которая на языке МВБ

траговалась как *sd*-модель (ссылки выше). Сделано и независимое от МВБ одновременное включение дипольной и октупольной степеней свободы [196]. Обе трактовки были противопоставлены [190]. Это произошло в результате того, что обе пытались объяснить, в частности, низколежащие коллективные уровни (~ 300 кэВ) с отрицательной четностью ($1^-, 3^-, 5^- \dots$) в актиноидах. Были косвенные экспериментальные данные в пользу первой [197] или против второй — обнаружением октупольной степени свободы [198]. Однако уже накопилось достаточно данных в пользу второй модели о появлении октупольной степени свободы вплоть до наблюдения статической октупольной деформации в актиноидах области радия — урана [199—202] включительно лазерным оптическим методом [203] и в области бария — самария [204—206].

Обратим также внимание на микроскопическое обоснование появления указанных степеней свободы на основе модели оболочек. Что касается обычной МВБ из *s*- и *d*-бозонов, это показывалось многократно ролью *S* и *D* бозонных пар, связанных до мультипольности/четности соответственно 0^+ и 2^+ , возможностью учета высших мультипольностей ренормализацией при низком спине и невозможностью сделать это при высоком из-за разрушения пар, см. например [207]. Добавление *g*-бозонов обсуждалось в связи с *G*-парой 4^+ [208]. Возможность добавления бозонов нечетной мультипольности и отрицательной четности, например *p*- и *f*-бозонов, отмечена недавно на основе *P*- и *F*-пар 1^- и 3^- [209, 210].

Однако главная причина выделить такое направление в отдельном разделе заключается в возможности, установленной недавно [28, 211, 212], подобрать таким образом пространство бозонов, чтобы получить физически существенные динамические симметрии. Таким образом можно сохранить не только появление ротационного предела, но и простоту описания перехода от вибрационных к ротационным ядрам, существующую в МВБ. Суть этой возможности будет продемонстрирована, и результаты упомянутых работ будут обобщены ниже.

Начнем с выбора пространства бозонов ММВБ. Для этого помогут коллективные координаты (53), введенные нами в разд. 3 и в [28], независимо от того, будут ли они применяться для микроскопического обоснования модели или обоснование будет делаться на основе модели оболочек. Как уже выяснено в разд. 3, из коллективных координат (53) степени *l* получается по одному бозону b_{jm}^+ , $b_{j\bar{m}}$ мультипольности $j = 1 (0), 3 (2), \dots, l - 2, l$, пространственной четности компонент $(-)^j = (-)^l$ и временной четности тензора $+$. Число их компонент $n_+ = (l + 1)(l + 2)/2$ определяет размерность унитарной группы *U* (n_+) с генераторами (41), а $2n_+$ — размерность симплектической группы *Sp* ($2n_+$) с генераторами (47). Возьмем еще (53) степени $l - 1$ и получим по одному бозону мультипольности $j = 0 (1), 2 (3), \dots, l - 3, l - 1$, т. е. обратной спиновой четности, обратной пространственной четности компонент $(-)^j =$

$= (-)^{l-1}$ и той же самой временной четности тензора. Число их компонент $n_- = l(l+1)/2$ и их группы $U(n_-)$ и $Sp(2n_-)$. Вместе они дадут по одному бозону мультипольности $j = 0, 1, \dots, l-1$, l с числом компонент $n = (l+1)^2$ и группами $U(n)$, $Sp(2n)$. В частности, при $l = 3$ мы получим $n = 16$ и модель *spdf*-бозонов, содержащую обычную *sd* МВБ, при $l = 5$ получим $n = 36$ и модель *spdfgh*-бозонов, содержащую знакомую *sdg*-модель.

Обратим внимание на то, что если мы возьмем координаты (53) всех степеней от 0 до l вместо только $l-1$ и l , получим вообще несколько бозонов вместо одного данной мультипольности j . Однако (см. и разд. 3), как видно из (53), в координатах максимальной степени l и $l-1$, нуклоны вблизи поверхности ядра вносят преобладающий вклад, и поэтому эти координаты — микроскопические эквиваленты координат формы поверхности ядра Бора — Моттельсона [21]. При обычном для ядер приближении постоянной плотности $y^{(0)} = A/V \approx \text{const}$, координаты одинаковой мультипольности j , но разной степени l окажутся эквивалентными. Специально нужно исключить координаты центра масс $y_{1m}^{(1)}$. Для устранения духовых состояний его движения достаточно принять $y_{1m}^{(1)} = 0$. Это не означает, что дипольная степень свободы выпадает из модели, так как при $l \geq 3$ для l нечетного $y_{1m}^{(l)} \neq y_{1m}^{(1)} = 0$, а для l четного $y_{1m}^{(l-1)} \neq y_{1m}^{(1)} = 0$.

Вясним некоторые общие закономерности групповой структуры модели. Сразу видно, что

$$U(n) \supset U(n_+) \times U(n_-), \quad (97)$$

где генераторы $U(n_+)$ составлены только из бозонов спиновой и пространственной четности $(-)^l$, а $U(n_-)$ — из бозонов четности $(-)^{l-1}$. Например, для *spdf*-модели $U_{0123}(16) \supset U_{13}(10) \times U_{02}(6)$ или для *spdfgh*-модели $U_{012345}(36) \supset U_{135}(21) \times U_{024}(15)$, где генераторы $U_{13}(10)$, соответственно $U_{135}(21)$ только из *pf*-, соответственно *pfh*-бозонов, а генераторы $U_{02}(6)$, соответственно $U_{024}(15)$ только из *sd*-, соответственно *sdg*-бозонов.

Дальше можно увидеть, что существуют нетривиальные вложения (под этим мы понимаем подгруппы, которые не сводятся к тривиальным, получаемым из генераторов меньшего, чем полного, числа типов бозонов):

$$\left. \begin{aligned} U((l+1)(l+2)/2) &\supset U(l+2) \supset O(3); \\ U((l+1)(l+2)/2) &\supset U(l+1) \supset O(3); \\ U((l+1)(l+2)/2) &\supset U(3) \supset O(3) \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

для $U(n_+)$ и аналогично для $U(n_-)$, если в (98) заменить l на $l-1$. Вложения н. п. подгрупп в н. п. $[h]$ начальной группы осуществляют по правилам плетизма [4, 26], но следующих типов:

$$\begin{aligned} &[1, 1] \otimes [h]: U(l+2); \\ U((l+1)(l+2)/2): [h] &= [2] \otimes [h]: U(l+1); \\ &[l] \otimes [h]: U(3). \end{aligned} \quad (99)$$

Для *spdf*-модели это дает, в частности:

$$\begin{aligned}
 & [1, 1] \otimes [h]:U_{13} (5); \\
 U_{13} (10):[h] &= [2] \otimes [h]:U_{13} (4); \\
 & [3] \otimes [h]:U_{13} (3).
 \end{aligned}
 \tag{100}$$

Неприводимые представления $O_{13} (6)$ получаются из локального изоморфизма $SU_{13} (4) \approx O_{13} (6)$ [5, с. 175] по правилам [3, с. 63]. Для $U_{02} (6)$ (99) дает известные правила (разд. 3, 4).

Видно, что правила (98), (99) в комбинации с теми же правилами вложений при l , замененном $l - 1, l - 2, \dots, 3, 2$, расширяют значительно наши возможности выяснения групповой структуры любой ММВБ по сравнению с тем, что было известно до сих пор. Так, например, для *spdfgh*-модели из (98) получаются нетривиальные вложения: $U_{135} (21) \supset U_{135} (7), U_{135} (6), U_{135} (3)$ и $U_{024} (15) \supset U_{024} (6), U_{024} (5), U_{024} (3)$ с правилами вложения н. п. (99). Сразу видно, что в этом случае остаются вложения $U_{012345} (36) \supset U_{012345} (6) \supset O_{12345} (3)$, чего нельзя сказать о *spdf*-модели $U_{0123} (16)$. Таким образом, непредложенная еще модель *spdfgh*-бозонов $U_{012345} (36)$ может оказаться выгоднее для рассмотрения ядер с состояниями \pm четности, чем, например, уже известная модель *spdf*-бозонов $U_{0123} (16)$, из-за нетривиальной подгруппы $U_{012345} (6)$.

Рассмотрим как пример более детально групповую структуру $pfU_{13} (10)$ -подгруппы *spdf* $U_{0123} (16)$ верхней группы. Генераторы $U_{13} (10)$ будут + пространственной четности из-за совпадения четностей p - и f -бозонов, но пока неопределенной временной четности. Представим их снова в виде эрмитовых тензоров по отношению к $O (3)$. Тогда они будут: $P_j = [p^+ \bar{p}]_j$ ($j = 0, 1, 2$), $F_j = [f^+ \bar{f}]_j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$), $O_j^{(\kappa)} = [\kappa f^+ \bar{p} + \kappa^* p^+ \bar{f}]_j$ и $O_j^{(i\kappa)}$ ($j = 2, 3, 4$), или всего 100. Скомбинировав их так, чтобы выявить группы решетки модели, получим табл. 7, за исключением известной подгруппы $O_{13} (10)$, чьи генераторы P_j ($j = 1$), F_j ($j = 1, 3, 5$), $O_j^{(\kappa)}$ ($j = 2, 3, 4$), или всего 45. И за исключением тривиальных подгрупп $U_1 (3)$ с P_j ($j = 0, 1, 2$), или всего 9; $O_1 (3)$ с P_j ($j = 1$), или всего 3; $U_3 (7)$ с F_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$), или всего 49; $O_3 (7)$ с F_j ($j = 1, 3, 5$), или всего 21; $O_3 (3)$ с F_j ($j = 1$), или всего 3. Соответственная решетка групп показана на рис. 14 [28]. Нормировку мы выбрали так, чтобы получились те же самые коммутаторы одинаково обозначенных генераторов $U_{13} (10)$, как и генераторов $U_{02} (6)$ в табл. 5. Это и прямая проверка существования подгрупп (100).

Как и в разд. 4, углы фазовых множителей $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ — это углы вращения в пространстве координата — импульс для f по отношению к p -бозонам. Потребовав по тем же самым причинам, как и в разд. 4, чтобы генераторы из двух разных типов бозонов были с + или — временной четностью, убедимся, что неопределенности сузятся до $\kappa = 1, i; \lambda, \mu, \nu = 1, -1$.

Т а б л и ц а 7. Генераторы $U_{13}(10)$ -группы, определяющие ее $U(5)$ (N_0, L_1, N_2, L_3 с $\kappa \rightarrow \lambda, N_4$), $O(6)$ (L_1, L_2, L_3 с $\kappa \rightarrow \mu$) и $U(3)$ (N_0, L_1, Q_2) подгруппы $|\kappa|^2 = |\lambda|^2 = |\mu|^2 = |\nu|^2 = 1$ (из [28])

$$\begin{aligned}
 N_0 &= -\sqrt{3} [p^+ \bar{p}]_0 - \sqrt{7} [f^+ \bar{f}]_0 \\
 L_1 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} [p^+ \bar{p}]_1 - \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{5}} [f^+ \bar{f}]_1 \\
 N_2 &= \frac{1}{5} \sqrt{3 \cdot 7} [p^+ \bar{p}]_2 + \frac{2}{5} \sqrt{2 \cdot 3} [\lambda f^+ \bar{p} + \lambda^* p^+ \bar{f}]_2 - \frac{1}{5} \sqrt{2 \cdot 3} [f^+ \bar{f}]_2 \\
 L_2 &= -\frac{2}{5} \sqrt{2 \cdot 3} [p^+ \bar{p}]_2 + \frac{1}{5} \sqrt{3 \cdot 7} [\mu f^+ \bar{p} + \mu^* p^+ \bar{f}]_2 + \frac{2}{5} \sqrt{3 \cdot 7} [f^+ \bar{f}]_2 \\
 Q_2 &= \frac{3}{5} [p^+ \bar{p}]_2 + \frac{2}{5} \sqrt{3 \cdot 7} [\nu f^+ \bar{p} + \nu^* p^+ \bar{f}]_2 + \frac{3}{5} \sqrt{2 \cdot 7} [f^+ \bar{f}]_2 \\
 L_3 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5}} [\kappa f^+ \bar{p} + \kappa^* p^+ \bar{f}]_3 + \sqrt{\frac{3}{5}} [f^+ \bar{f}]_3 \\
 N_4 &= -\sqrt{\frac{2}{5}} [\lambda f^+ \bar{p} + \lambda^* p^+ \bar{f}]_4 + \sqrt{\frac{11}{5}} [f^+ \bar{f}]_4
 \end{aligned}$$

Операторы Казимира групп решетки на рис. 14 записываются следующим образом. Операторы Казимира первого порядка $\hat{n}_1(3) = p^+ \cdot \bar{p} = -\sqrt{3} P_0$, $\hat{n}_3(7) = f^+ \cdot \bar{f} = -\sqrt{7} F_0$ [$\hat{n}_{13}(10) = \hat{n}_1(3) + \hat{n}_3(7) = N_0$]. Операторы Казимира второго порядка $\hat{v}_1(3)$, $\hat{v}_3(7)$ и

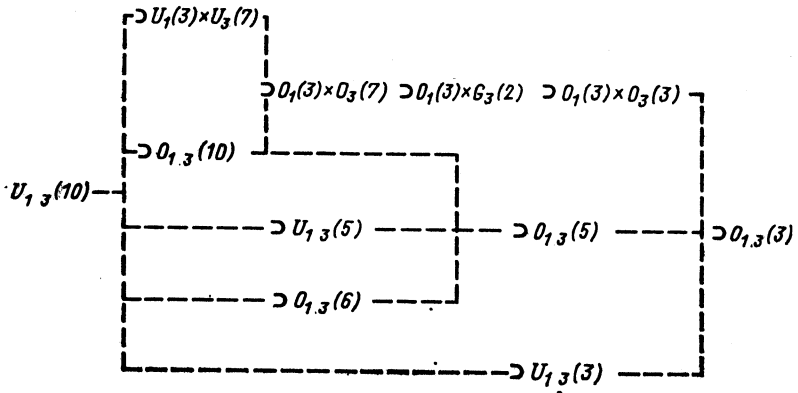


Рис. 14. Решетка групп pf части $spdf$ ММВЕ $U_{13}(10)$, $G(2)$ обозначается обычно G_2 (из [28])

$\hat{v}_{13}(10)$ — л. к. $[\hat{n}_1(3)]^2$, $[\hat{n}_3(7)]^2$ и $\hat{n}_1(3) \cdot \hat{n}_3(7)$. До сих пор — всего 5. Число операторов Казимира групп на рис. 14, если не считать груп-

ны G_3 (2), равно 14. Остальные 9 следующие:

$$\begin{aligned}
 v_{13}^{(\lambda)}(5) &= \frac{4}{5} N_0 N_0 - \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 + \sqrt{5} [N_2 N_2]_0 - \sqrt{7} [L_3 L_3]_0 + 3 [N_4 N_4]_0; \\
 v_{13}^{(v)}(3) &= 3 N_0 N_0 - 5 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 + \sqrt{5} [Q_2 Q_2]_0; \\
 \omega_{13}^{(\kappa)}(10) &= -2 \sqrt{3} [P_1 P_1]_0 - 2 \sqrt{3} [F_1 F_1]_0 - \\
 &\quad - 2 \sqrt{7} [F_3 F_3]_0 - 2 \sqrt{11} [F_5 F_5]_0 + \\
 &\quad + \sqrt{5} [O_2 O_2]_0 - \sqrt{7} [O_3 O_3]_0 + 3 [O_4 O_4]_0; \\
 \omega_{13}^{(u)}(6) &= -2 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 + \sqrt{5} [L_2 L_2]_0 - 2 \sqrt{7} [L_3 L_3]_0; \\
 \omega_{13}^{(\kappa)}(5) &= -2 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 - 2 \sqrt{7} [L_3 L_3]_0; \\
 \hat{\omega}_{13}(3) &= -2.5 \sqrt{3} [L_1 L_1]_0 = \hat{I} \cdot \hat{I}; \\
 \hat{\omega}_3(7) &= -2 \sqrt{3} [F_1 F_1]_0 - 2 \sqrt{7} [F_3 F_3]_0 - 2 \sqrt{11} [F_5 F_5]_0; \\
 \hat{\omega}_1(3) &= -2 \sqrt{3} [P_1 P_1]_0; \\
 \hat{\omega}_3(3) &= -2^2 \cdot 7 \sqrt{3} [F_1 F_1]_0,
 \end{aligned} \tag{101}$$

где генераторы в правой стороне (101) приведены выше и в табл. 7.

Операторы физических величин получаются из требований, сформулированных в разд. 4 до формулы (56) [28]. Приведем гамильтониан H для pf -бозонов из 16 членов (так как для $spdf$ -бозонов у H слишком много членов):

$$\begin{aligned}
 H &= h_1 [p^+ \bar{p}]_0 + h_2 [f^+ \bar{f}]_0 + \sum_{i=0, 2} h_{3i} [[p^+ p^+]_i [\bar{p} \bar{p}]_i]_0 + \\
 &+ \sum_{i=0, 2, 4, 6} h_{4i} [[f^+ f^+]_i [\bar{f} \bar{f}]_i]_0 + \sum_{i=2, 3, 4} h_{5i} [[f^+ p^+]_i [\bar{p} \bar{f}]_i]_0 + \\
 &\quad + \sum_{i=0, 2} h_{6i} [[f^+ f^+]_i [\bar{p} \bar{p}]_i + [p^+ p^+]_i [\bar{f} \bar{f}]_i]_0 + \\
 &\quad + \sum_{i=2, 4} h_{7i} [[f^+ f^+]_i [\bar{f} \bar{p}]_i + [p^+ p^+]_i [\bar{f} \bar{f}]_i]_0 + \\
 &\quad + h_8 [[f^+ p^+]_2 [\bar{p} \bar{p}]_2 + [p^+ p^+]_2 [\bar{p} \bar{f}]_2]_0
 \end{aligned} \tag{102}$$

и операторы электромагнитных переходов $T(EL)$, $T(ML)$ для $spdf$ -бозонов — в табл. 8. Гамильтониан можно представить снова через 16 операторов Казимира групп из рис. 14:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1, 3} \varepsilon_j (2i+1) \hat{n}_i (2i+1) + \\
 &+ \sum_{i, j=1, 3 (i \geq j)} \varepsilon_{ij} (2i+1, 2j+1) \hat{n}_i (2i+1) \hat{n}_j (2j+1) + \\
 &\quad + \sum_{i=1, 3} \sum_{\lambda=+1, -1} \alpha_{13}^{(\lambda)} (i+2) \hat{v}_{13}^{(\lambda)} (i+2) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i, j=1, 3} \beta_{13} ((i+2)(j+1)/2) \hat{\omega}_{13} ((i+2)(j+1)/2) + \\
& + \sum_{i, j=1, 3(i \geq j)} \beta_i (2j+1) \hat{\omega}_i (2j+1). \quad (103)
\end{aligned}$$

В общем *spdf*-случае, для снижения числа параметров, воспользуемся приближением типа расширенного самосогласованного *Q*-формализма из разд. 4 (73), (74):

$$H = \sum_i \varepsilon_i \hat{n}_i + \delta X_2 \cdot X_2, \quad (104)$$

где

$$X_2 = \alpha N_2 + \beta L_2 + \gamma Q_2 \quad (\alpha + \beta + \gamma = 1). \quad (105)$$

Обозначения в правой стороне (105): суммы или в более общем случае — л. к. с одним экстрапараметром *sd*-генераторов из табл. 4 и

Таблица 8. Операторы электромагнитных переходов *spdf* ММВБ (из [28])

$$\begin{aligned}
T(E0) &= \sum_{j=0}^3 e_j^0 [b_j^+ \bar{b}_j]_0 \\
T(M1) &= \sum_{j=1}^3 m_j^1 [b_j^+ \bar{b}_j]_1 \\
T(E1) &= \sum_{j=1}^3 e_j^1 [b_j^+ \bar{b}_{j-1} + b_{j-1}^+ \bar{b}_j]_1 \\
T(M2) &= \sum_{j=2}^3 m_j^2 [b_j^+ \bar{b}_{j-1} + b_{j-1}^+ \bar{b}_j]_2 \\
T(E2) &= \sum_{j=1}^3 e_j^2 [b_j^+ \bar{b}_j]_2 + \sum_{j=2}^3 e_{j, j-2}^2 [b_j^+ \bar{b}_{j-2} + b_{j-2}^+ \bar{b}_j]_2 \\
T(M3) &= \sum_{j=2}^3 m_j^3 [b_j^+ \bar{b}_j]_3 + m_{3, 1}^3 [b_3^+ \bar{b}_1 + b_1^+ \bar{b}_3]_3 \\
T(E3) &= \sum_{j=2}^3 e_{j, j-1}^3 [b_j^+ \bar{b}_{j-1} + b_{j-1}^+ \bar{b}_j]_3 + e_{3, 0}^3 [b_3^+ \bar{b}_0 + b_0^+ \bar{b}_3]_3 \\
T(M4) &= m_{3, 2}^4 [b_3^+ \bar{b}_2 + b_2^+ \bar{b}_3]_4 \\
T(E4) &= \sum_{j=2}^3 e_j^4 [b_j^+ \bar{b}_j]_4 + e_{3, 1}^4 [b_3^+ \bar{b}_1 + b_1^+ \bar{b}_3]_4
\end{aligned}$$

pf-генераторов из табл. 7. Обратим внимание, что *spdf* ММВБ снимает оба ограничения по отношению к *EL*-, *ML*-переходам *sd* МВБ из разд. 4: присутствуют *EL*- и *ML*-переходы с любым *L* и *M1* переходы с $I \rightarrow I, I \pm 1$.

Остановимся на возможной модификации правила полного числа бозонов N в ММВБ с участием бозонов разной спиновой и пространственной четности по отношению к МВБ разд. 4 [212]. Бозоны отрицательной четности можно сконструировать только из пар фермионов с разными пространственными четностями. Допустим, что к валентной подоболочке четности π_+ с M_+ парами состояний и N_+ парами нуклонов (или дырок) добавляется близко расположенная

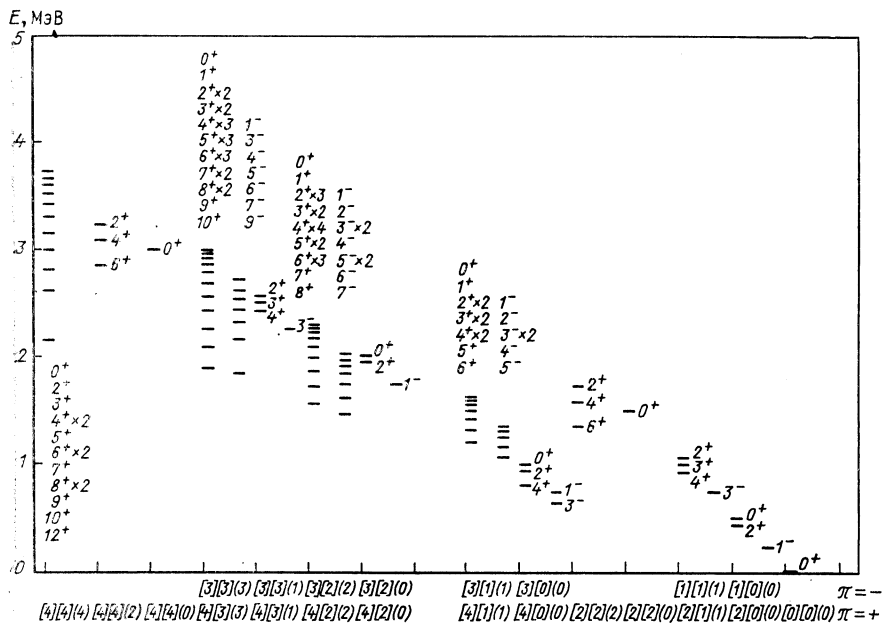


Рис. 15. Схематические уровни pf части $spdf$ ММВБ $U_{13}(10)$, в $U_1(3) \times U_3(7)$ -пределе; снизу н. п.: $U_{13}(10) [h_1]$, $U_3(7) [h_1]$, $O_3(7) (\bar{h}_1)$ (три параметра)

подоболочка обратной четности $\pi_- = -\pi_+$ с M_- парами состояний и N_- парами нуклонов (или дырок). Для N_+ и N_- принимаем, что они одинакового частичного или дырочного типа. Тогда если обычное правило полного числа бозонов МВБ ведет к $N = \bar{N}$, то модифицированное правило ММВБ ведет к $N = \bar{\bar{N}}$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \min(N_+, M_+ - N_+) + \min(N_-, M_- - N_-); \\ \bar{\bar{N}} &= \min(N_+ + N_-, M_+ + M_- - N_+ - N_-). \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Существенное увеличение $\bar{\bar{N}}$ по сравнению с \bar{N} , к которому может привести (106), будет показано ниже в этом разделе.

Ради выяснения физического смысла шести пределов pf -бозонов на рис. 14 мы приведем их спектры на рис. 15—20. Видно, что первый

предел на рис. 15 — вибрационный с гибридизированными полосами + и — четности. Второй до пятого на рис. 16—19 — промежуточного типа. При небольших коэффициентах операторов Казимира тех групп, которые следуют за верхней U_{13} (10), а именно O_{13} (10) для второго и третьего предела на рис. 16 и 17, U_{13} (5) для четвертого на рис. 18 и O_{13} (6) для пятого на рис. 19, спектр уровней второго определяется операторами Казимира O_3 (7) и O_1 (3), т. е. он ближе

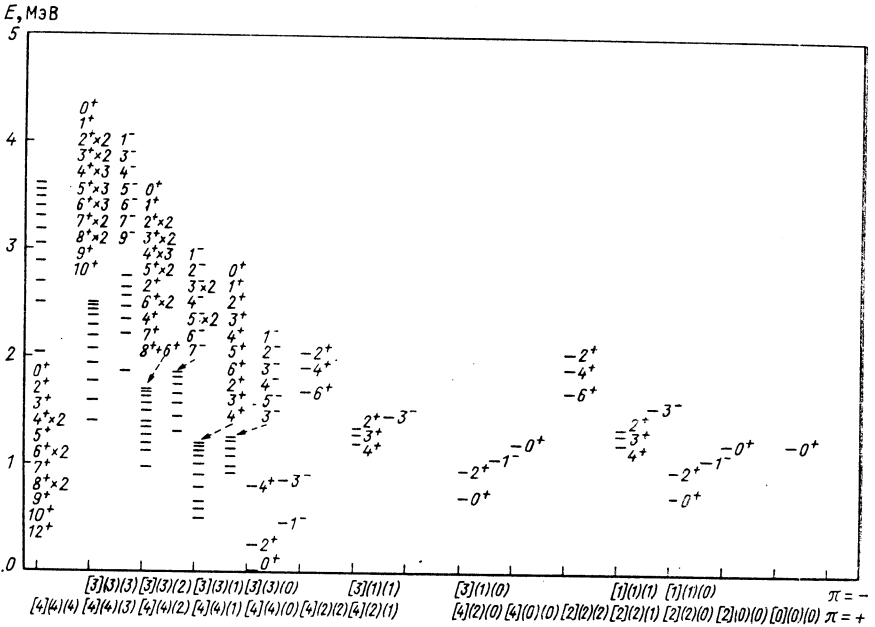


Рис. 16. Схематические уровни pf части $spdf$ ММВБ $U_{13}(10)$, в $O_{13}(10) \supset O_1(3) \times O_3(7)$ -пределе; снизу н. п.: $U_{13}(10) [h_1]$, $O_{13}(10) (\bar{h}_1)$, $O_3(7) (\bar{h}_1)$ (четыре параметра)

к вибратору с большой ангармоничностью, а третьего до пятого — O_{13} (5), т. е. он ближе к анаксиальному (γ -мягкому) ротатору, с тем отличием от sd случая, что здесь принимают участие не полностью симметричные н. п. O (5), и это немного меняет спектр. Шестой на рис. 20 — ротационного типа с полосами + и — четности, вторые немного сдвинутые по отношению к первым.

Примеры наблюдения первого вибрационного, третьего до пятого промежуточного и шестого ротационного пределов показаны на рис. 21—23, взятых из работы [211]. Неплохое согласие модели (s) pf -бозонов с экспериментом, с двумя параметрами на каждом рисунке, указывает на кажущуюся невероятной на первый взгляд гипотезу, что энергии уровней можно воспроизвести дипольными и

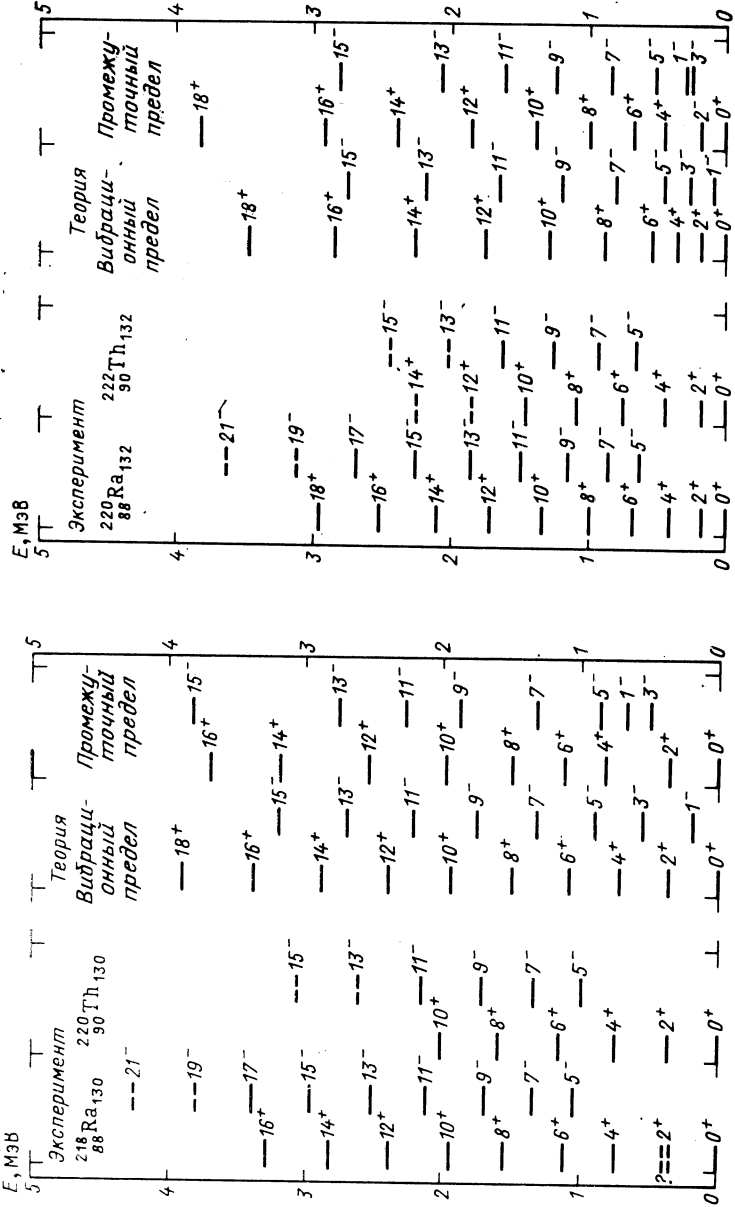


Рис. 21. Спектр ρf части ММВБ в изотопах актиноидов, $N = 6$, в вибрационном $U(3) \times U(7)$ -деле с параметрами $(103) \epsilon_3(7) = 3\epsilon_1(3) = 540$ кэВ, $\beta_3(7) = 10$ кэВ и в промежуточных $O(5)$ -пределах с $\beta_{13}(5) = 118$ кэВ, $\beta_{13}(3) = 18,5$ кэВ (из [211])

Рис. 22. Спектр ρf части ММВБ в изотопах актиноидов, $N = 6$, в вибрационном $U(3) \times U(7)$ -деле с параметрами $(103) \epsilon_3(7) = 3\epsilon_1(3) = 270$ кэВ, $\beta_3(7) = 28$ кэВ и в промежуточных $O(5)$ -пределах с $\beta_{13}(5) = 49$ кэВ, $\beta_{13}(3) = 2,6$ кэВ (из [211])

октупольными корреляциями даже без квадрупольных, в отличие от рис. 10 работы [191], где наш спектр рис. 21 воспроизведен в другом пределе *spdf*-модели, с участием всех бозонов и квадрупольных корреляций, но с восемью вместо двух параметрами гамильтониана.

Попытаемся выяснить, насколько сильно участие *pf*-бозонов и слабо участие *d*-бозонов на примере вибрационного спектра уровней

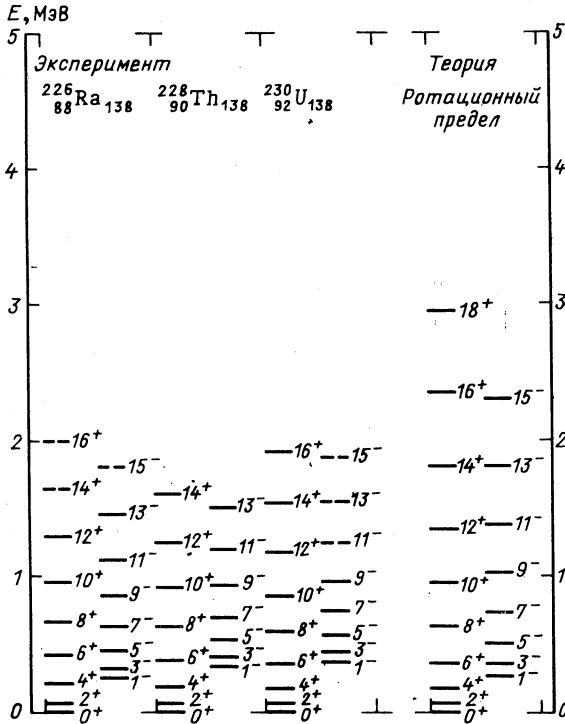


Рис. 23. Спектр *pf* части ММВБ в изотопах актиноидов, $N = 6$, в ротационном $U(3)$ -пределе [$\hat{v}_{13}(3) U(3)$ заменен на $\hat{v}_{s13}(3) SU(3)$ с параметрами (103) $\varepsilon_1(3) = \varepsilon_3(7) = 1000$ кэВ, $\alpha_{s13}(3) = -2\beta_{13}(3) = -17,2$ кэВ] (из [211])

ядра $^{218}_{88}\text{Ra}_{130}$ [212], существенно расширенного в работе [213] по сравнению со спектрами в нескольких предыдущих работах со ссылками в [212], включительно с работой [214]. Этот спектр показан на рис. 24, 25, взятых из работы [212]. Расчет сделан с двумя параметрами. Отметим, что новое правило полного числа бозонов из второй строки (106) совместно с $N = \bar{N} \approx 12$ (т. е. может воспроизвести уровни до спина 36), тогда как старое из первой строки (106) дает $N = \bar{N} = 5$ (т. е. воспроизводит уровни до спина 15).

Вибрационный предел из первой цепочки рис. 14 указывает на возникновение гибридизированных вибрационных ирра-и ираре-полос с четностями $\pi = +, -$ и со спинами $4 \leq I \leq 3N = 36$. Только уровни 1^- и 3^- ирра $\pi = -$ полосы смещены по отношению к $0^+, 2^+, 4^+$ ирра $\pi = +$ полосы из-за перехода к промежуточному пределу

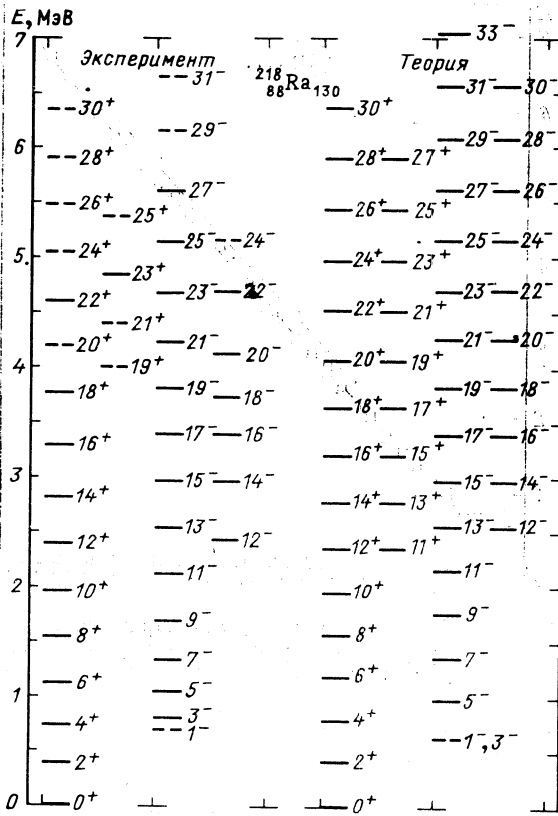


Рис. 24. Спектр *spdf* ММВБ в $^{218}\text{Ra}_{130}$; $N = 11$, в вибрационном $U(1) \times U(3) \times U(5) \times U(7)$ -пределе с параметрами (57) и (103) $\epsilon_3(7) = 2\epsilon_2(5) = 3\epsilon_1(3) = 585$ кэВ, $\beta_3(7) = 3,7$ кэВ для $I \geq 4$; переход к промежуточным $O(5)$ -пределам с заменой первого параметра на $\beta_{123}(5)$ [без новых параметров из-за сохранения 2^+ -уровня, что достигается $\beta_{123}(5) = 97,5$ кэВ] для $I < 4$ (из [212])

из третьей — пятой цепочек рис. 14 при спине $0 \leq I \leq 4$. Это говорит, во-первых, о возникновении коллективных вибрационных гибридизированных $\pi = +, -$ полос вплоть до очень высокого спина. И, во-вторых, о сосуществовании формы, близкой к сферической при $I \geq 4$ с γ -мягкой анаксиальной деформированной формой при $I \leq 4$ в этом же самом ядре.

Возникновение «странных» ираре-полос при $I \geq 12 \approx N$, с обратной спиновой и той же самой пространственной четностью, и их невозникновение при $I < 12 \approx N$ совместимо только с существенным участием как p -, так и f -бозонов (дипольно-октупольных

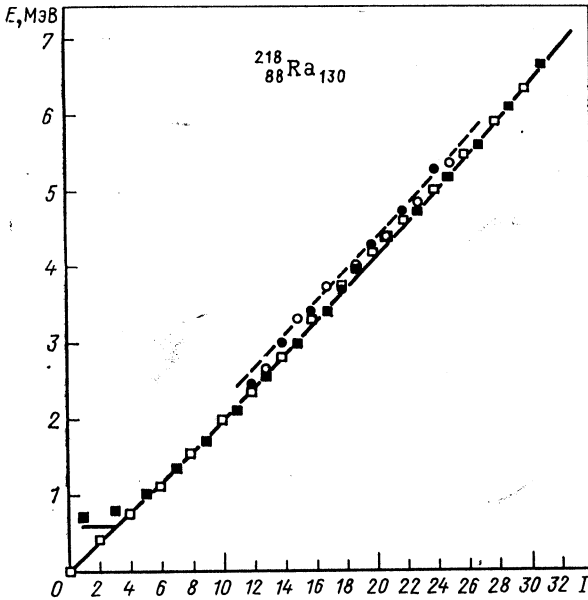


Рис. 25. $spdf$ ММВБ в $^{218}_{88}\text{Ra}_{130}$, теория с двумя параметрами, как на рис. 24 для ираст- (сплошная) и ираре- (пунктир) полос, эксперимент ирост $\pi = +$ (\square), ирост $\pi = -$ (\blacksquare), ираре $\pi = +$ (\circ), ираре $\pi = -$ (\bullet) (из [212])

корреляций) и со слабым участием d -бозонов (квадрупольных корреляций). Это дало нам основание говорить об обнаружении эффекта дипольно-октупольных корреляций в ядрах [212]. При этом $B(E1)/B(E2)$ -правило ветвления в гибридизированных $\pi = +, -$ ираст- и ираре-полосах качественно воспроизводится с операторами из табл. 8, в которых оставлены три параметра для подгонки.

8. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СПИНОРОВ

У этого раздела предварительный характер. В нем обсуждается возможность построения динамических симметрий и суперсимметрий нового типа. Они, по нашему мнению, могут привести к новым моделям как ядра, так и других физических систем, с существенными преимуществами.

Название раздела связано со следующим. Однонуклонное биспиновое состояние модели оболочек $|nkm_{\pi}im_{\pi}t_{\pi}\rangle$ или его сопряжен-

ное может быть, конечно, выражено через оператор рождения или уничтожения фермиона, как в разд. 6. Однако каждое из них может быть представлено и через два оператора рождения или уничтожения бозона и фермиона как здесь, где у первого псевдоорбитальные индексы pkt_k , которые мы коротко обозначим k , а у второго псевдоспин-изоспиновые индексы im_i, tm_i , которые кратко обозначим i . Их произведение мы будем называть в дальнейшем оператором рождения или уничтожения биспинора. Это один шаг дальше в направлении разделения псевдоорбитального и псевдоспин-изоспинового движения одного нуклона по сравнению с разд. 6. Оператор рождения одного нуклона в обозначенном состоянии запишем как $b_k^\dagger a_i^\dagger$, где b_k^\dagger — оператор рождения бозона, а a_i^\dagger — оператор рождения фермиона. Отсюда и название — модель взаимодействующих спиноров.

Посмотрим с самого начала, к каким неудобствам и к каким удобствам может привести такое разделение. Неудобства очевидны: одна частица — фермион, описывается через две тесно связанные субчастицы — бозон и фермион. На первый взгляд, нарушается как статистика Ферми — Дирака, так и связанный с ней принцип Паули для нуклонов. Однако нам известны подобные примеры из теории элементарных частиц, в частности нуклонов, а именно их сведение к почти жестко связанным субчастицам — кваркам. Значит, у нас возникнут аналогичные проблемы связи введенных нами псевдоорбитальной и псевдоспин-изоспиновой субчастиц одного нуклона. А какие могут быть удобства, если мы сможем справиться с проблемами статистики, принципа Паули нуклонов и связи субнуклонов в нуклонах? Пусть число псевдоорбитальных односубчастичных состояний n и число псевдоспин-изоспиновых односубчастичных состояний m . Тогда в стандартном фермионном представлении число операторов рождения фермионов нуклонов nm , соответственно число генераторов их унитарной $U(nm)$ -группы $(nm)^2$. В нашем нестандартном бозон-фермионном (спинорном) представлении, число операторов рождения бозонов и фермионов субнуклонов $n + m$, соответственно число генераторов их $U(n/m)$ -супергруппы $(n + m)^2$. Во всех важных случаях числа для нестандартного представления меньше, соответственно намного меньше чисел для стандартного.

Супералгебру пар бозонов, фермионов и бозон-фермионов мы рассматривали в разд. 5. Выяснили, что ее операторы — генераторы супергруппы $SpO(2n/2m)$ (рис. 12) с вложениями (82). Однако здесь физический смысл бозонов и фермионов совершенно иной. Бозон связан не с парой нуклонов, а с квазиорбитальным субнуклоном. Фермион связан не с одним нуклоном, а с квазиспин-изоспиновым субнуклоном. Остановимся на антикоммутаторах операторов рождения и уничтожения спиноров. Они следующие:

$$\left. \begin{aligned} \{b_{k_1} a_{i_1}, b_{k_2} a_{i_2}\} &= 0; \quad \{b_{k_1}^\dagger a_{i_1}^\dagger, b_{k_2}^\dagger a_{i_2}^\dagger\} = 0; \\ \{b_{k_1} a_{i_1}, b_{k_2}^\dagger a_{i_2}^\dagger\} &= \delta_{i_1 i_2} \delta_{k_1 k_2} + b_{k_2}^\dagger b_{k_1} \delta_{i_1 i_2} - a_{i_2}^\dagger a_{i_1} \delta_{k_1 k_2}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Заметим, что генераторы $b_k^+ b_l$ группы $U^b(n)$, $a_i^+ a_j$ группы $U^f(m)$ и $b_k a_i$, $b_k^+ a_i^+$ в левой стороне (107) дают $(n + m)^2$ -генераторов подсупергруппы $SpO(2n/2m)$. Она отличается от ее подсупергруппы $U(n/m)$ с генераторами $b_k^+ b_l$, $a_i^+ a_j$, $b_k^+ a_i$, $a_i^+ b_k$, введенная нами в разд. 5.

Антикоммутаторы (107) включают соотношения, похожие на (1) для фермионов, но существенно отличаются от (1) второй строкой (107). Отметим, что если мы припишем индексам бозонов и фермионов одинаковые пространства, в отличие от того, что мы сделали выше, если положим $h = k = i$ и потребуем, чтобы операторы (107) действовали в пространстве многоуклонных состояний с одинаковым числом бозонов и фермионов $k = i$ | — — — — —, то (107) совпадет с алгеброй фермионов из-за того, что

$$b_k^+ b_h | \text{---} \text{---} \text{---} \rangle = a_h^+ a_k | \text{---} \text{---} \text{---} \rangle.$$

Однако тогда мы потеряем преимущество размерности супергруппы $U(n/m)$ перед группой $U(nm)$, описанное в начале раздела.

Покажем, что существуют аналоги отображения Дайсона для пар фермионов (91) из разд. 6, пригодные для пар бозонов

$$\left. \begin{aligned} b_k b_l &= B_{kl}; \\ b_k^+ b_l^+ &= B_{kl}^{(+)} + \sum_{mn} B_{km}^{(+)} B_{nl}^{(+)} B_{mn}; \\ b_k^+ b_l &= \sum_m B_{km}^{(+)} B_{ml} \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

и для пар бозона — фермиона

$$\left. \begin{aligned} b_k a_i &= C_{ki}; \\ a_i^+ b_k^+ &= C_{ik}^{(+)} + \sum_{hm} C_{im}^{(+)} C_{hk}^{(+)} C_{mh}; \\ b_k^+ b_l &= \sum_h C_{hk}^{(+)} C_{lh}; \\ a_i^+ a_j &= \sum_m C_{im}^{(+)} C_{mj}. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Операторы двухсубнуклонных квазибозонов B_{kl} , $B_{kl}^{(+)}$ симметричны в отличие от A_{ij} , $A_{ij}^{(+)}$ (91) разд. 6 $B_{kl} = B_{lk}$, $B_{kl}^{(+)} = B_{lk}^{(+)}$, а у операторов двухсубнуклонных спиноров или квазифермионов C_{ki} , $C_{ik}^{(+)}$ нет симметрии по отношению к индексам. Первые удовлетворяют коммутационным соотношениям для «идеальных» бозонов:

$$\left. \begin{aligned} [B_{k_1 l_1}, B_{k_2 l_2}] &= 0; \quad [B_{k_1 l_1}^{(+)}, B_{k_2 l_2}^{(+)}] = 0; \\ [B_{k_1 l_1}, B_{l_2 k_2}^{(+)}] &= \delta_{k_1 k_2} \delta_{l_1 l_2} + \delta_{k_1 l_2} \delta_{l_1 k_2}, \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

а вторые — антикоммутационным соотношениям для «идеальных» фермионов:

$$\left. \begin{aligned} \{C_{k_1 i_1}, C_{k_2 i_2}\} &= 0; \quad \{C_{i_1 k_1}^{(+)}, C_{i_2 k_2}^{(+)}\} = 0; \\ \{C_{k_1 i_1}, C_{i_2 k_2}^{(+)}\} &= \delta_{i_1 i_2} \delta_{k_1 k_2}. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Из-за симметрии квазибозонов B_{kl} их число $n(n+1)/2$. B_{kl} , $B_{kl}^{(+)}$ и $\sum_m (B_{km}^{(+)}B_{ml} + B_{lm}B_{mk}^{(+)})/2 - n(2n+1)$ генераторов группы $H(n(n+1)/2) \boxtimes U(n)$, т. е. столько, сколько и генераторов группы пар бозонов $Sp(2n)$. В смысле (93) обе группы функционально изоморфны:

$$Sp(2n) \sim H(n(n+1)/2) \boxtimes U(n). \quad (112)$$

Если мы рассмотрим b , b^+ как одонуклонные бозоны, это дает нам еще один метод обоснования бозонных моделей МВБ и ММВБ, аналогичный описанному в разд. 6 через одонуклонные фермионы (94) — (96). Из-за отсутствия симметрии квазифермионов C_{ki} их число nm . C_{ki} , $C_{ik}^{(+)}$, $\sum_h (C_{hk}^{(+)}C_{lh} - C_{lh}C_{hk}^{(+)})/2$ и $\sum_m (C_{im}^{(+)}C_{mj} - C_{mj}C_{im}^{(+)})/2 - (n+m)^2$ генераторов $K^{bf}(nm) \boxtimes [U^b(n) \times U^f(m)]$ -супергруппы, которая таким образом функционально изоморфна подсупергруппе $SpO(2n/2m)$, упомянутой после формул (107).

Если захотим рассматривать пары фермионов, бозонов и бозона-фермиона совместно, тогда заменим (91), (108), (109) на (113). Отметим, что A_{ij} , $A_{ij}^{(+)}$ снова удовлетворяют (92), B_{kl} , $B_{kl}^{(+)}$ — (110), C_{ki} , $C_{ik}^{(+)}$ — (111), но операторы разного A -, B -, C -типа уже коммутируют на 0:

$$\begin{aligned} a_i a_j &= A_{ij}; \quad b_k b_l = B_{kl}; \quad b_k a_i = C_{ki}; \\ a_i^+ a_j^+ &= A_{ij}^{(+)} - \sum_{gh} A_{ig}^{(+)} A_{hj}^{(+)} A_{gh} + \sum_{mn} C_{im}^{(+)} C_{jn}^{(+)} B_{mn} - \\ &\quad - \sum_{hm} [A_{ih}^{(+)} C_{jm}^{(+)} + C_{im}^{(+)} A_{hj}^{(+)}] C_{mh}; \\ b_k^+ b_l^+ &= B_{kl}^{(+)} + \sum_{mn} B_{km}^{(+)} B_{nl}^{(+)} B_{mn} - \sum_{gh} C_{gk}^{(+)} C_{hl}^{(+)} A_{gh} + \\ &\quad + \sum_{hm} [B_{mk}^{(+)} C_{hl}^{(+)} + C_{hk}^{(+)} B_{lm}^{(+)}] C_{mh}; \\ a_i^+ b_k^+ &= C_{ik}^{(+)} - \sum_{gh} A_{ig}^{(+)} C_{hk}^{(+)} A_{gh} + \sum_{mn} C_{im}^{(+)} B_{nk}^{(+)} B_{mn} + \\ &\quad + \sum_{hm} [A_{ih}^{(+)} B_{mk}^{(+)} + C_{im}^{(+)} C_{hk}^{(+)}] C_{mh}; \\ a_i^+ a_j &= \sum_h A_{ih}^{(+)} A_{hj} + \sum_m C_{im}^{(+)} C_{mj}; \\ b_k^+ b_l &= \sum_m B_{km}^{(+)} B_{ml} + \sum_h C_{hk}^{(+)} C_{lh}; \\ a_i^+ b_k &= \sum_h A_{ih}^{(+)} C_{kh} + \sum_m C_{im}^{(+)} B_{km}; \\ b_k^+ a_i &= \sum_m B_{mk}^{(+)} C_{mi} + \sum_h C_{hk}^{(+)} A_{hi}. \end{aligned} \quad (113)$$

Число генераторов супергруппы $SpO(2n/2m)$ на рис. 12 равно $2(n+m)^2 + n - m$. Оно равно числу генераторов супергруппы в пра-

вой стороне (114) и существует функциональный изоморфизм

$$SpO^{bf}(2n/2m) \sim [H^b(n(n+1)/2) \times H^f(m(m-1)/2) \times K^{bf}(nm)] \boxtimes U^{bf}(n/m). \quad (114)$$

Здесь генераторы $H^b: B, B^{(+)}$ (1) из (113), $H^f: A, A^{(+)}$ (1) из (113), $K^{bf}: C, C^{(+)}$ (1) из (113), генераторы U^{bf} — последние четыре строки (113). Видно, что МВС дает метод обоснования бозонных моделей

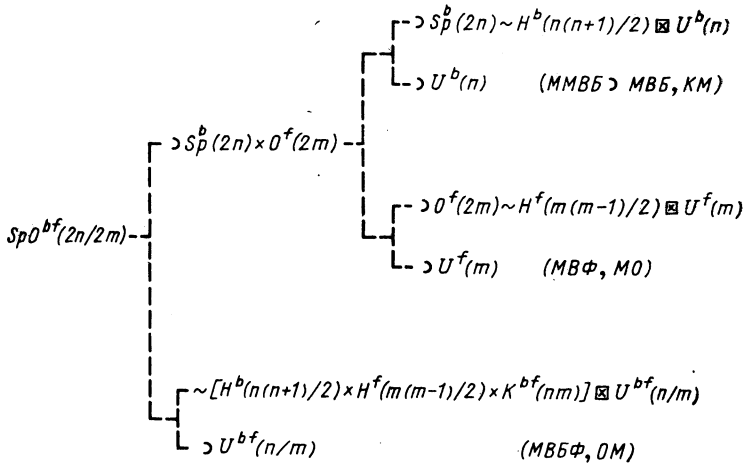


Рис. 26. Решетка супергруппы МВС $SpO^{bf}(2n/2m)$, включающая верхние группы и супергруппы известных моделей динамических симметрий ядра (см. текст в разд. 8)

из разд. 4 и 7, фермионных из разд. 6 и бозон-фермионных из разд. 5, аналогичный описанному формулами (94) — (96) в разд. 6.

Таким образом, МВС дает возможность создать эффективную общую модель ядра на основе динамической суперсимметрии с верхней супергруппой $SpO(2n/2m)$, включающей в себя известные бозонные, фермионные и бозон-фермионные модели из разд. 4—7. Это показано еще путем ее супергрупповой структуры в сокращенном виде на рис. 26. Первая цепочка отвечает бозонным моделям МВБ и ММВБ и коллективной модели (КМ). Вторая цепочка отвечает фермионным моделям МВФ и модели оболочек (МО). Третья цепочка отвечает бозон-фермионным моделям МВБФ и обобщенной модели (ОМ).

Наконец отметим, что такая общность трансформаций, аналогов трансформации Дайсона, показанная формулами (91), (109), (110),

(113) для любых пар бозонов и/или фермионов, наводит на мысль, что это свойство остается в силе для систем частиц, составленных из любого числа субчастиц бозонов и/или фермионов. Частицы будут квазибозонами, если число фермионов четное, и квазифермионами, если оно нечетное. Это дает метод обоснования любой квантовой частичной модели на уровне субчастичной модели.

Продемонстрируем это на примере, что можно создать кварковую модель [215] ядра, которая дала бы возможность обосновать нуклонные модели ядра. Это будет пример частицы-нуклона или фермиона, составленной из трех субчастиц-кварков, тоже фермионов.

Представим одночастичные состояния кварков как $|nlm sm_s tm_i c\rangle = |i\rangle = a_i^\dagger | \rangle$, где a_i^\dagger , a_i — операторы рождения и уничтожения кварка в состоянии $|i\rangle$. Как и до сих пор, nlm_l — орбитальные, sm_s — спиновые и tm_i — изоспиновые квантовые числа кварка. В дополнение к ним c — три цвета u - и d -кварков: красный (r), зеленый (g) и синий (b). Верхней группой спин-изоспинцветовой части будет

$$U^{stc} \text{ (12)} \supset U^s(2) \times U^t(2) \times U^c(3) \tag{115}$$

вместо спин-изоспиновой группы Вигнера U^{st} (4) (7).

Введем оператор кваркового триплета по аналогии с оператором спаривания [216]:

$$Q_{\tilde{i} \tilde{j} \tilde{k}} = \sum_{c_i c_j c_k} q_{c_i c_j c_k} a_i a_j a_k. \tag{116}$$

Здесь \tilde{i} означает индекс i без цвета c . Оператор $Q_{\tilde{i} \tilde{j} \tilde{k}}$ выбран так, чтобы у всех трех кварков был разный цвет, т. е. чтобы у него был белый цвет и чтобы он отвечал представлению $U^c(3)$ для нуклона. Запишем гамильтониан кварков в виде трехчастичного:

$$H = \sum_{\substack{\tilde{i}_1 \tilde{j}_1 \tilde{k}_1 \\ \tilde{i}_2 \tilde{j}_2 \tilde{k}_2}} \xi_{\tilde{i}_1 \tilde{j}_1 \tilde{k}_1, \tilde{i}_2 \tilde{j}_2 \tilde{k}_2} Q_{\tilde{i}_1 \tilde{j}_1 \tilde{k}_1}^+ Q_{\tilde{i}_2 \tilde{j}_2 \tilde{k}_2}. \tag{117}$$

К (117) можно добавить одно-и/или двухчастичные кварковые члены. Трехчастичное взаимодействие кварков (117) противоречит обычной записи взаимодействия в виде двухчастичного. Однако оно может обеспечить конденсацию кварковой системы ядра в виде кварковых триплетов белого цвета — нуклонов в пределе низкой плотности. Можно перейти и к хаотическому распределению кварков или к кварковой плазме в другом пределе высокой плотности.

Предложим аналог отображения Дайсона для кварковых фермионных триплетов в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 a_i a_j a_k &= A_{ijk}; \\
 a_i^+ a_j^+ a_k^+ &= A_{ijk}^{(+)} - \frac{1}{2} \sum_{lmn} [A_{ilm}^{(+)} A_{jkn}^{(+)} + A_{jlm}^{(+)} A_{kin}^{(+)} + A_{kilm}^{(+)} A_{ijn}^{(+)}] A_{lmn} - \\
 &\quad - \frac{1}{8} \sum_{\substack{lmn \\ opq}} A_{ilm}^{(+)} A_{jno}^{(+)} A_{kpq}^{(+)} A_{lmn} A_{opq}; \\
 a_i^+ a_j^+ a_i a_j &= \sum_n A_{i_1 j_1 n}^{(+)} A_{n i_2 j_2} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{lm \\ no}} A_{i_1 l m}^{(+)} A_{j_1 n o}^{(+)} A_{l m i_2} A_{n o j_2}; \\
 a_i^+ a_j &= \frac{1}{2} \sum_{lm} A_{ilm}^{(+)} A_{mlj}.
 \end{aligned} \right\} (118)$$

Все A_{ijk} , $A_{ijk}^{(+)}$ антисимметричны относительно любой перестановки индексов ijk . Они квазифермионы:

$$\begin{aligned}
 \{A_{i_1 j_1 k_1}, A_{i_2 j_2 k_2}\} &= 0; \{A_{i_1 j_1 k_1}^{(+)}, A_{i_2 j_2 k_2}^{(+)}\} = 0; \\
 \{A_{i_1 j_1 k_1}, A_{i_2 j_2 i_2}^{(+)}\} &= \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{k_1 k_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 k_2} \delta_{k_1 i_2} + \delta_{i_1 k_2} \delta_{j_1 i_2} \delta_{k_1 j_2} - \\
 &\quad - \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 k_2} \delta_{k_1 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{j_1 i_2} \delta_{k_1 k_2} - \delta_{i_1 k_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{k_1 i_2}.
 \end{aligned} \quad (119)$$

Трехчастичный кварковый фермионный гамильтониан (117) превратится в нуклонный квазифермионный гамильтониан:

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\substack{i_1 j_1 k_1 \\ i_2 j_2 k_2}} \zeta_{i_1 j_1 k_1} \zeta_{i_2 j_2 k_2}^* q_{c_{k_1}}^* c_{j_1} c_{i_1} q_{c_{i_2}} c_{j_2} c_{k_2} \times \\
 &\times \left\{ A_{i_1 j_1 k_1}^{(+)} A_{i_2 j_2 k_2} - \frac{1}{2} \sum_{lmn} [A_{ilm}^{(+)} A_{j_1 k_1 n}^{(+)} + A_{j_1 l m}^{(+)} A_{k_1 i_1 n}^{(+)} + \right. \\
 &\quad \left. + A_{k_1 l m}^{(+)} A_{i_1 j_1 n}^{(+)}] A_{lmn} A_{i_2 j_2 k_2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{8} \sum_{\substack{lmn \\ opq}} A_{ilm}^{(+)} A_{jno}^{(+)} A_{kpq}^{(+)} A_{lmn} A_{opq} A_{i_2 j_2 k_2} \right\}.
 \end{aligned} \quad (120)$$

Такое развитие дает принципиальную возможность из трехчастичного кваркового фермионного гамильтониана (117) кварковой модели вывести нуклонный квазифермионный гамильтониан (120). Таким образом, можно получить оболочечную модель ядра на уровне кварков. Проблемы этого раздела изложены в [217, 218].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wigner E.//Phys. Rev. 1937. Vol. 51. P. 106—119.
2. Gilmore R., Draayer J. P.//J. Math. Phys. 1985. Vol. 26. P. 3053—3067.
3. Wybourne B. G. Symmetry principles and atomic spectroscopy. N. Y.: Wiley, 1970.
4. Ванагас В. Алгебраические методы в теории ядра. Вильнюс: Минтис, 1971.
5. Wybourne B.G. Classical groups for physicists. N.Y.: Wiley, 1974.
6. Moshinsky M. Group theory and the many body problem. N.Y.: Gordon and Breach, 1968.
7. Iachello F., Arima A. The interacting boson model. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
8. Casten R.F., Warner D.D.//Rev. Mod. Phys. 1988. Vol. 60. P. 389—469.
9. Condon E.U., Shortley G.H. The theory of atomic spectra. Cambridge: Cambridge University Press, 1953.
10. Wigner E.P. Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra. N.Y.: Academic Press, 1959.
11. Hamermesh M. Group theory and its application to physical problems. Reading Massachusetts: Addison—Wesley, 1962.
12. Edmonds A.R. Angular momentum in quantum mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1957.
13. Haxel O., Jensen J.H.D., Suess H.E.//Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1766.
14. Mayer M.G.//Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1969—1970.
15. Mayer M.G.//Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 16—21.
16. Mayer M.G.//Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 22—23.
17. Nilsson S.G.//Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1955. Vol. 29, N 16.
18. Rainwater J.//Phys. Rev. 1950. Vol. 79. P. 432—434.
19. Bohr A.//Phys. Rev. 1951. Vol. 81. P. 134—138.
20. Bohr A.//Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1952. Vol. 26, N 14.
21. Bohr A., Mottelson B.R.//Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1953. Vol. 27, N 16.
22. Elliott J.P.//Proc. Roy. Soc. 1958. Vol. 245. P. 128—145; 562—581.
23. Elliott J.P., Harvey M.//Proc. Roy. Soc. 1963. Vol. 272. P. 557—577.
24. Vergados J.D.//Nucl. Phys. 1968. Vol. A111. P. 681—754.
25. Littlewood D.E. The theory of group characters and matrix representation of groups. Oxford: Clarendon Press, 1950.
26. Butler P.H., Wybourne B.G.//Atomic Data. 1971. Vol. 3. P. 133—151.
27. Vanagas V., Nadjakov E., Raichev P. Preprint IC/75/40, Trieste, 1975; Bulg. J. Phys. 1975. Vol. 2. P. 558—569.
28. Nadjakov E.G., Mikhailov I.N. Preprint JINR E4-86-510, Dubna, 1986; J. Phys. G: Nucl. Phys. 1987. Vol. 13. P. 1221—1229.
29. Zickendraht W.//J. Math. Phys. 1971. Vol. 12. P. 1663—1674.
30. Zickendraht W.//Phys. Rev. 1983. Vol. C27. P. 2363—2374.
31. Zickendraht W.//Nucl. Phys. 1983. Vol. A408. P. 1—20.
32. Zickendraht W.//Phys. Rev. 1984. Vol. C30. P. 2067—2084.
33. Дзюблик А. Я., Овчаренко В. И., Степенко А. И., Филиппов Г. Ф.//ЯФ. 1972. Т. 15. С. 869—879.
34. Филиппов Г. Ф.//ЭЧАЯ. 1973. Т. 4. С. 992—1017.
35. Филиппов Г. Ф.//ЭЧАЯ. 1978. Т. 9. С. 1241—1281.
36. Ванагас В. В.//ЭЧАЯ. 1976. Т. 7. С. 309—355.
37. Ванагас В. В.//ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. С. 454—514.
38. Vanagas V. Lecture notes in physics. Toronto: University of Toronto Press, 1977.
39. Vanagas V. Group theory and its applications in physics. N.Y.: American Institute of Physics, 1981.
40. Ванагас В. В. Алгебраические основы микроскопической теории ядра. М.: Наука, 1988.

41. Nadjakov E. Lecture notes in: 5th Intern. school on nuclear physics, Varna, 1981. Bulg. Acad. Sci., Sofia, 1982. P. 83—118.
42. Rosensteel G., Rowe D.J.//Ann. Phys. 1978. Vol. 123. P. 36—60.
43. Rosensteel G., Rowe D.J.//Ann. Phys. 1980. Vol. 126. P. 198—233; 343—370.
44. Rowe D.J.//Rep. Progr. Phys. 1985. Vol. 48. P. 1419—1480.
45. Carvalho J., Le Blanc R., Vassanji M. e.a.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A452. P. 240—262; 263—276.
46. Moshinsky M., Quesne C.//J. Math. Phys. 1971. Vol. 12. P. 1772—1780.
47. Rowe D.J., Wybourne B.G., Butler P.H.//J. Phys. A: Math. Gen. 1985. Vol. 18. P. 939—953.
48. Moshinsky M.//J. Math. Phys. 1984. Vol. 25. P. 1555—1564.
49. Chacón E., Hess P., Moshinsky M.//J. Math. Phys. 1984. Vol. 25. P. 1565—1576.
50. Castaños O., Chacón E., Moshinsky M.//J. Math. Phys. 1984. Vol. 25. P. 2815—2825.
51. Moshinsky M., Nicolescu M., Sharp R.T.//J. Math. Phys. 1985. Vol. 26. P. 2995—2998.
52. Chacón E., Hess P. O., Moshinsky M.//J. Math. Phys. 1987. Vol. 28. P. 2223—2240; 1989. Vol. 30. P. 970—980.
53. Janssen D., Jolos R.V., Dönaу F.//Nucl. Phys. 1974. Vol. A224. P. 93—115.
54. Джолос Р. В., Янсен Д.//ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 330—373.
55. Arima A., Iachello F.//Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 35. P. 1069—1072.
56. Arima A., Iachello F.//Ann. Phys. 1976. Vol. 99. P. 253—317.
57. Arima A., Iachello F.//Ann. Phys. 1978. Vol. 111. P. 201—238.
58. Scholten D., Iachello F., Arima A.//Ann. Phys. 1978. Vol. 115. P. 325—366.
59. Arima A., Iachello F.//Ann. Phys. 1979. Vol. 123. P. 468—492.
60. Arima A., Iachello F.//Adv. Nucl. Phys. 1984. Vol. 13. P. 139—200.
61. Джолос Р. В., Лемберг И. Х., Михайлов В. М.//ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 280—348.
62. Джолос Р. В., Кырчев Г., Паар В.//ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. С. 1173—1233.
63. Castaños O., Chacón E., Frank A., Moshinsky M.//J. Math. Phys. 1979. Vol. 20. P. 35—44.
64. Dieperink A.E.L., Bijker R.//Phys. Lett. 1982. Vol. B116. P. 77—81.
65. Van Isacker P., Frank A., Dukelsky L.//Phys. Rev. 1985. Vol. C31. P. 671—673.
66. Paar V.//Inst. Phys. Conf. Ser. 1980, N 49, ch. 1. P. 53.
67. Schwinger J.//Quantum theory of angular momentum. N.Y.: Academic Press, 1965.
68. Holstein T., Primakoff H.//Phys. Rev. 1940. Vol. 58. P. 1098—1113.
69. Dyson F.J.//Phys. Rev. 1956. Vol. 102. P. 1217—1230; 1230—1244.
70. Kyrchev G., Paar V.//Ann. Phys. 1986. Vol. 170. P. 257—286.
71. Otsuka T., Arima A., Iachello F.//Nucl. Phys. 1978. Vol. A309. P. 1—33.
72. Duval P.D., Barrett B.R.//Phys. Rev. 1981. Vol. C24. P. 1272—1282.
73. Van Isacker P., Pittel S., Frank A., Duval P.D.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A451. P. 202—218.
74. Iachello F., Talmi I.//Rev. Mod. Phys. 1987. Vol. 59. P. 339—361.
75. Szpikowski S., Gozdz A.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A340. P. 76—92;
- Gozdz A., Szpikowski S.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A349. P. 359—364.
76. Quesne C.//J. Math. Phys. 1981. Vol. 22. P. 1482—1496.
77. Scharff-Goldhaber G., Weneser J.//Phys. Rev. 1955. Vol. 98. P. 212—214.
78. Wilets L., Jean M.//Phys. Rev. 1956. Vol. 102. P. 788—796.
79. Leviatan A., Novoselsky A., Talmi I.//Phys. Lett. 1986. Vol. B172. P. 144—148.
80. Casten R.F., Cizewski J.A.//Phys. Lett. 1987. Vol. B185. P. 293—298.
81. Lipas P. O., Haapakoshi P., Honkaranta T.//Phys. Scr. 1976. Vol. 13. P. 339—350.

82. Raduta A.A., Ceausescu V., Gheorghe A., Dreizler R.M.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A381. P. 253—276.
83. Bohr A., Mottelson B.R.//Phys. Scr. 1980. Vol. 22. P. 468—474.
84. Ginocchio J.N., Kirson M.W.//Nucl. Phys. 1980. Vol. A350. P. 31—60.
85. Dieperink A.E.L., Scholten O., Iachello F.//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. P.1747—1750.
86. Klein A., Li C.-T., Vallieres M.//Phys. Rev. 1982. Vol. C25. P. 2733—2742.
87. Kirson M.W., Leviatan A.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 2846—2849.
88. Van Egmond A., Allaart K.//Phys. Lett. 1985. Vol. B164. P. 1—6.
89. Wu H.C., Dieperink A.E.L., Pittel S.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 703—713.
90. Leviatan A.//Ann. Phys. 1987. Vol. 179. P. 201—271.
91. Dukelsky J., Dussel G. G., Perazzo R.P.J.e.a.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A425. P. 93—119.
92. Cambiaggio M.C., Dukelsky J., Zemba G.R.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1985. Vol. 11. P. L163—L168.
93. Lipas P.O., Toivonen P., Warner D.D.//Phys. Lett. 1985. Vol. B155. P.295—298.
94. Castaños O., Frank A., Federman P.//Phys. Lett. 1979. Vol. B88. P. 203—206.
95. Castaños O., Federman P., Frank A., Pittel S.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A379. P. 61—76.
96. Warner D.D., Casten R.F., Davidson W.F.//Phys. Rev. 1981. Vol. C24. P. 1713—1733.
97. Warner D.D., Casten R.F.//Phys. Rev. 1983. Vol. C28. P. 1798—1806.
98. Casten R.F.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A443. P. 1—28.
99. Mach H.//Phys. Lett. 1987. Vol. B185. P. 20—24.
100. Casten R.F., Brenner D.S., Haustein P.E.//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 658—661.
101. Casten R.F., Frank W., von Brentano P.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A444. P. 133—153.
102. Arima A., Otsuka T., Iachello F., Talmi I.//Phys. Lett. 1977. Vol. B66. P. 205—208.
103. Otsuka T., Arima A., Iachello F., Talmi I.//Phys. Lett. 1978. Vol. B76. P. 139—143.
104. Harter H., Gelberg A., von Brentano P.//Phys. Lett. 1985. Vol. 157. P. 1—3.
105. Novoselsky A., Talmi I.//Phys. Lett. 1985. Vol. 160. P. 13—16.
106. Sala P., von Brentano P., Harter H. e.a.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A456. P. 269—278.
107. Theuerkauf J., Harter H., von Brentano P., Casten R.F.//Z.Phys. 1987. Vol. A326. P. 65—68.
108. Bohle D., Richter A., Berg U.E.P.e.a.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A458. P. 205—216.
109. Hamilton W.D., Irbäck A., Elliott J.P.//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 2469—2472.
110. Bohle D., Richter A., de Jager C.W., de Vries H.//Z. Phys. 1987. Vol. A328. P. 463—466.
111. Scholten O., Heyde K., van Isacker P.e.a.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A438. P. 41—77.
112. Scholten O., Heyde K., van Isacker P., Otsuka T.//Phys. Rev. 1985. Vol. C32. P. 1729—1734.
113. Heyde K., Sau J.//Phys. Rev. 1986. Vol. C33. P. 1050—1061.
114. Elliott J.P., White A.P.//Phys. Lett. 1980. Vol. B97. P. 169—172.
115. Elliott J.P., Evans J.A.//Phys. Lett. 1981. Vol. B101. P. 216—218.
116. Elliott J.P., Evans J.A.//Phys. Lett. 1987. Vol. B195. P. 1—6.
117. Duval P.D., Barrett B.R.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A376. P. 213—228.
118. Vorov O.K., Zelevinsky V.G.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A439. P. 207—218.

119. Vanden Berghe G., de Meyer H.E., van Isacker P.//Phys. Rev. 1985. Vol. C.32. P. 1049—1056.
120. Alhassid Y., Gürsey F., Iachello F.//Ann. Phys. 1983. Vol. 148. P. 346—380.
121. Alhassid Y., Gürsey F., Iachello F.//Ann. Phys. 1986. Vol. 167. P. 181—200.
122. Wu J., Iachello F., Alhassid Y.//Ann. Phys. 1987. Vol. 173. P. 68—87.
123. Iachello F., Scholten O.//Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43. P. 679—682.
124. Van Isacker P., Jolie J., Heyde K., Frank A.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 653—656.
125. Gelberg A., Zemel A.//Phys. Rev. 1980. Vol. C22. P. 937—940.
126. Yoshida N., Arima A., Otsuka T.//Phys. Lett. 1982. Vol. B114. P. 86—90.
127. Moshinsky M., Quesne C.//J. Math. Phys. 1970. Vol. 11. P. 1631—1639.
128. Rowe D.J., Carvalho J.//Phys. Lett. 1986. Vol. B175. P. 243—248.
129. Van Nieuwenhuizen P.//Phys. Rep. 1981. Vol. C68. P. 189—398.
130. Luehr C.P., Rosenbaum M.//J. Math. Phys. 1987. Vol. 28. P. 2053—2065.
131. Arima A., Iachello F.//Phys. Rev. 1976. Vol. C 14. P. 761—763.
132. Casten R.F., Smith G.J.//Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43. P. 337—341.
133. Iachello F.//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. P. 772—775.
134. Balantekin A.B., Bars I., Iachello F.//Nucl. Phys. 1981. Vol. A370. P. 284—316.
135. Corwin L., Ne'eman Y., Sternberg S.//Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47. P. 573—603.
136. Fayet P., Ferrara S.//Phys. Rep. 1977. Vol. C32. P. 249—334.
137. Iachello F., Kuyucak S.//Ann. Phys. 1981. Vol. 136. P. 19—61.
138. Bijker R., Kota V.K.B.//Ann. Phys. 1984. Vol. 156. P. 110—141; 1988. Vol. 187. P. 148—197.
139. Bijker R., Iachello F.//Ann. Phys. 1985. Vol. 161. P. 360—398.
140. Van Isacker P., Frank A., Sun H.-Z.//Ann. Phys. 1984. Vol. 157. P. 183—231.
141. Balantekin A.B., Paar V.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 1917—1919.
142. Balantekin A.B., Bars I., Bijker R., Iachello F.//Phys. Rev. 1983. Vol. 1. C.27. P. 1761—1764.
143. Gilmore R. Lie groups, Lie algebras, and some of their applications. N.Y.: Wiley, 1974.
144. Bars I.//Supersymmetry in physics. Amsterdam: North-Holland, 1985. P. 42.
145. Ginocchio J.N.//Ann. Phys. 1980. Vol. 126. P. 234—276.
146. Wu C.-L., Feng D.H., Chen X.-G.e.a.//Phys. Lett. 1986. Vol. B168. P. 313—317.
147. Casten R.F., Wu C.-L., Feng D.H.e.a.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2578—2581.
148. Han X.-L., Guidry M.W., Feng D.H.e.a.//Phys. Lett. 1987. Vol. B192. P. 253—258.
149. Chen J.-Q., Feng D.H., Wu C.-L.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 2269—2279.
150. Wu C.-L., Feng D.H., Chen X.-G.e.a.//Phys. Rev. 1987. Vol. C36. P. 1157—1180.
151. Wu H., Wu C.-L., Feng D.H., Guidry M.W.//Phys. Rev. 1988. Vol. C. 37. P. 1739—1750.
152. Zhang W.-M., Wu C.-L., Feng D.H.e.a.//Phys. Rev. 1988. Vol. C38. P. 1475—1487.
153. Halse P.//Phys. Lett. 1987. Vol. B186. P. 119—123.
154. Halse P., Pan Z.Y.//Phys. Rev. 1987. Vol. C35. P. 774—785; Vol. C36. P. 1212—1215.
155. Halse P.//Phys. Rev. 1987. Vol. C36. P. 372—379.
156. Geyer H.B., Hahne F.J.W., Scholtz F.G.//Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 459—462.

157. Janssen D., Dönau F., Frauendorf S., Jolos R.V.//Nucl. Phys. 1971. Vol. A172. P. 145—165.
158. Dönau F., Janssen D.//Nucl. Phys. 1973. Vol. A209. P. 109—124.
159. Ring P., Schuck P.//Phys. Rev. 1977. Vol. C16. P. 801—811.
160. Hahne F.J.W.//Phys. Rev. 1981. Vol. C23. P. 2305—2314.
161. Li C.-T.//Phys. Rev. 1984. Vol. C29. P. 2309—2318.
162. Yang T.S., Yang L.M.//Interacting Bose—Fermi systems in nuclei. N.Y.: Plenum Press, 1981. P. 229.
163. Geyer H.B.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 2373—2376.
164. Kuchta R.//Nucl. Phys. 1988. Vol. A489. P. 1—19.
165. Kuchta R.//Z. Phys. 1988. Vol. A331. P. 243—253.
166. Ivanova S.P., Jolos R.V., Pedrosa R.//J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1989. Vol. 15. P. 55—64.
167. Van Isacker P., Heyde K., Waroquier M., Wenes G.//Phys. Lett. 1981. Vol. B104. P. 5—10.
168. Van Isacker P., Heyde K., Waroquier M., Wenes G.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A380. P. 383—409.
169. Casten F., Gelberg A., von Brentano P.//Phys. Rev. 1987. Vol. C36. P. 1225—1228.
170. Morrison I., Weise J.//J. Phys. G.: Nucl. Phys. 1982. Vol. 8. P. 687—698.
171. Iachello F., Jackson A.D.//Phys. Lett. 1982. Vol. B108. P. 151—154.
172. Daley H., Iachello F.//Phys. Lett. 1983. Vol. B131. P. 281—284.
173. Daley H.J., Gai M.//Phys. Lett. 1984. Vol. B149. P. 13—17.
174. Cseh J., Suhonen J.//Phys. Rev. 1986. Vol. C33. P. 1553—1555.
175. Daley H.J., Nagarajan M.A., Rowley N.e.a.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 198—201.
176. Daley H.J., Barrett B.R.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A449. P. 256—300.
177. Daley H.J., Iachello F.//Ann. Phys. 1986. Vol. 167. P. 73—98.
178. Arima A., Iachello F.//Phys. Lett. 1975. Vol. B57. P. 39—43.
179. Barfield A.F., Wood J.L., Barrett B.R.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 2001—2004.
180. Barfield A.F., Barrett B.R., Wood J.L., Scholten O.//Ann. Phys. 1987. Vol. 182. P. 344—374.
181. Ratna Raju R.D.//Phys. Rev. 1981. Vol. C23. P. 518—520.
182. Ratna Raju R.D.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1982. Vol. 8. P. 1663—1669.
183. Wu H.-C.//Phys. Lett. 1982. Vol. B110. P. 1—6.
184. Wu H.-C., Zhou X.Q.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A417. P. 67—76.
185. Akiyama Y.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A433. P. 369—382.
186. Akiyama Y., Heyde K., Arima A., Yoshinaga N.//Phys. Lett. 1986. Vol. B173. P. 1—4.
187. Morrison I.//Phys. Lett. 1986. Vol. B175. P. 1—5.
188. Kota V.K.B., van der Jeugt J., de Meyer H., vanden Berghe G.//J. Math. Phys. 1987. Vol. 28. P. 1644—1652.
189. Akiyama Y., von Brentano P., Gelberg A.//Z. Phys. 1987. Vol. A326. P. 517—521.
190. Engel J., Iachello F.//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 1126—1128.
191. Engel J., Iachello F.//Nucl. Phys. 1987. Vol. A472. P. 61—84.
192. Daley H.J.//J. Phys. G: Nucl. Phys. 1986. Vol. 12. P. L51—L56.
193. Leander G.A., Sheline R.K., Möller P.e.a.//Nucl. Phys. 1982. Vol. A388. P. 452—476.
194. Leander G.A., Sheline R.K.//Nucl. Phys. 1984. Vol. A413. P. 375—415.
195. Nazarewicz W., Olanders P.//Nucl. Phys. 1985. Vol. A441. P. 420—444.
196. Leander G.A., Nazarewicz W., Bertsch G.F., Dudek J.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A453. P. 58—76.
197. Toth K.S., Kim H. J., Rao M.N., Mlekodaj R.L.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2360—2363.

198. White D.H., Börner H.G., Hoff R.W.e.a.//Phys. Rev. 1987. Vol. C35. P. 81—110.
199. Løvhaiden G., Thorstenstein T.F., Nybo K., Burke D.G.//Nucl. Phys. 1986. Vol. A452. P. 30—40.
200. Borge M.J.G., Burke D.G., Gietz H.e.a.//Nucl. Phys. 1987. Vol. A464. P. 189—204.
201. Robledo L.M., Egido J.L., Berger J.F., Girod M.//Phys. Lett. 1987. Vol. B187. P. 223—228.
202. Cottle P.D., Bromley D.A.//Phys. Lett. 1986. Vol. B182. P. 129—134.
203. Otten E.W. Institut für Physik, Universität, Mainz, 1987; Treatise on heavy ion physics. Vol. 8/Ed. by D.A. Bromley., N.Y.: Plenum, 1989.
204. Sheline R.K., Sood P.C.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 2362—2364.
205. Phillips W.R., Ahmad I., Emling H.e.a.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 3257—3260.
206. Urban W., Lieder R.M., Gast W.e.a.//Phys. Lett. 1987. Vol. B185. P. 331—335.
207. Otsuka T.//Nucl. Phys. 1981. Vol. A368. P. 244—284.
208. De Winter L.C., Walet N.R., Brussaard P.J.e.a.//Phys. Lett. 1986. Vol. B179. P. 322—326.
209. Catara F., Sambataro M., Insolia A., Vitturi A.//Phys. Lett. 1986. Vol. B180. P. 1—3.
210. Otsuka T.//Phys. Lett. 1986. Vol. 182. P. 256—260.
211. Nadjakov E.G., Mikhailov I.N. Preprint JINR E4-87-366, Dubna, 1987; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1988. Т. 52. С. 111—118.
212. Mikhailov I.N., Nadjakov E.G., Aiche M.e.a. Preprint JINR E4-88-543, Dubna, 1988; J. Phys. G.: Nucl. Part. Phys. 1989. Vol. 15. P. L19—L24.
213. Aiche M., Schulz N., Vanin V.e.a.//High-spin nuclear structure and novel nuclear shapes, ANL-PHY-88-2, Argonne, 1988. P. 111—115.
214. Gai M., Ennis J.F., Ruseev M.e.a.//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 646—649.
215. Johnson K.//Fundamentals of quark models. Edinburgh: Scottish Universities, 1977. P. 245.
216. Tosa S.//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 2302—2311.
217. Nadjakov E.G. Preprint JINR Dubna, 1990.
218. Nadjakov E.G.//Intern. conf. on selected topics in nuclear structure. Vol. 2. JINR D4, 6, 15-89-638. Dubna, 1989.