

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ОДНО- И МНОГОКАНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ (уроки квантовой интуиции)

Б. Н. Захарьев, Н. А. Костов, Е. Б. Плеханов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Лишь в самые последние годы после более чем полувекового развития квантовой механики стали появляться «картинки», демонстрирующие отклик потенциалов на вариации отдельных спектральных параметров (энергетических уровней, приведенных ширин состояний и т. п.) для одно- и многоканальных точно решаемых моделей. В обзоре собраны наиболее поучительные иллюстрации.

Рассматриваются также: 1) неожиданное и интригующее поведение волновых пакетов в подбарьерной области, что может углубить понимание временной эволюции туннелирования, 2) выделение движения волн из канала в канал или по периодам внешнего поля (по дискретной переменной, нумерующей каналы или периоды), позволяющее по-новому взглянуть на многоканальные процессы и понятия квазиимпульса и квазиэнергии для частицы в периодическом поле.

Only in the recent years after more than a half-century development of the quantum mechanics there began to appear the «pictures» demonstrating the potential response to the variation of separate spectral parameters (energy levels, reduced widths) for one- and multi-channel exactly solvable models. In this review such most instructive illustrations are collected. Also we consider: (1) unexpected and intriguing behaviour of wave packets in subbarrier motion, what can deepen the understanding of the time evolution of the tunneling: (2) the separation of the motion of waves from channel to channel or over the periods of the external field (along the discrete variable numbering the channels of periods), which allows the new sight on the multichannel processes and the notions of quasimomentum and quasienergy for a particle in the periodic potential.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика уже справилась своей полувековой юбилей, но интенсивность ее развития не убывает. Если ограничиться нуклонным уровнем структуры материи (не углубляться в кварковые ее детали), то большая часть явлений вокруг нас поддается нерелятивистскому описанию. Так что перспективы развития квантовомеханического подхода практически неограниченные. В особенности это касается многочастичных и связанных с ними многоканальных аспектов теории. То, что уже выяснено, представляет собой каплю в океане еще не освоенного, хотя уже раскрытые закономерности привели к фантастическим прикладным результатам.

Лавинообразное накопление информации в области квантовой

физики требует новых форм ее усвоения. Примером отклика на такое требование может служить «Книга картинок из квантовой механики» Бранда и Дамена [54]. Можно предложить много других поучительных иллюстраций квантовых закономерностей (один из авторов данной работы сам еще раньше намеревался написать подобную книгу, правда, с иными картинками). Знакомство с новыми такими примерами — эффективная форма развития нашей физической интуиции.

В последние годы появился ряд работ с явными решениями квантовых задач, позволяющими прояснить связи параметров взаимодействия частиц со спектральными характеристиками и волновыми функциями соответствующих систем (в частности, данными рассеяния).

Мы собрали в обзоре наиболее яркие результаты из указанных публикаций, снабдив их наглядными иллюстрациями и новыми поясняющими комментариями. Максимальная доступность подачи должна способствовать их использованию в научных и прикладных целях. Это удивительно, что только сейчас (через 50 лет после создания квантовой механики) была использована замечательная возможность подхода обратной задачи непосредственно показать, как перестраиваются потенциалы при сдвиге, например положения отдельных уровней или вариации значений их приведенных ширин. Мы стали обладателями простых алгоритмов составления квантовых систем с желаемыми спектральными свойствами (напрашивается аналогия с детским конструктором). Педагогическая ценность этой информации требует скорейшего ее внедрения в курсы по квантовой механике.

В разд. 1 рассматриваются одномерные, одноканальные задачи, в частности новые аспекты «старого», но важнейшего квантового эффекта подбарьерного туннелирования (резонансная прозрачность системы барьеров и временная эволюция подбарьерного движения). Раздел 2 посвящен многоканальным системам, к которым сводится решение многомерных и многочастичных задач. Здесь обсуждаются некоторые, недостаточно еще понятые механизмы возникновения резонансов рассеяния (стоячие волны по дискретной переменной, нумерующей каналы, и связанные состояния в непрерывном спектре — надбарьерное запираение волн). Излагается также новый взгляд на движение волн в периодическом поле, поясняющий смысл понятий квазиимпульса и квазиэнергии: они оказываются обычными импульсом и энергией свободного движения по дискретной переменной, нумерующей периоды (картина движения в периодическом поле становится проще, если отделить колебания внутри одного периода — обычные стоячие волны — от волны, бегущей по решетке периодов). Раздел 3 содержит комментарии по литературе, в частности, мы кратко касаемся направления интенсивных исследований, ведущих, по нашему мнению, к созданию единой теории точно решаемых моделей (см. [10, 24, 38, 42]).

1. ОДНОМЕРНЫЕ И ОДНОКАНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Деформации потенциала при вариации спектральных параметров. В этом разделе предлагаются графики, иллюстрирующие влияние отдельных спектральных параметров (положений уровней или R -матричных резонансов плюс нормировочных констант или приведенных ширин) на форму потенциала. Многие из приведенных графиков получены нами специально для данного обзора. Мы не приводим здесь формул обратной задачи для потенциалов и волновых функций (см. более общий случай в разд. 2), чтобы сосредоточить внимание на качественных аспектах связи $V(x) \leftrightarrow$ спектр.

Подход обратной задачи замечателен тем, что позволяет посмотреть с другой стороны на связь сил с физическими характеристиками систем, в которых они действуют. Появляется возможность конструировать системы с требуемыми свойствами, если только не выходить за рамки допустимых спектральных параметров и данных рассеяния.

Возьмем бесконечную прямоугольную потенциальную яму с шириной a и посмотрим, как она будет деформироваться при изменениях ее спектральных характеристик: уровней энергии E_λ и нормировочных констант. В качестве последних можно выбрать числа γ_λ , представляющие собой значения производных нормированных волновых функций у правой стенки ($x = a$) потенциальной ямы:

$$\gamma_\lambda \equiv \Psi'_\lambda(x=a); \quad \int_0^a |\Psi_\lambda(x)|^2 dx = 1. \quad (4)$$

Величины γ_λ являются амплитудами приведенных ширин состояний с энергией E_λ и представляют собой важные спектральные характеристики. Могут быть, правда, и другие способы определения приведенных ширин (см., например, [20, с. 14]).

Набор $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ полностью задает форму потенциала. В нашем случае в качестве исходного потенциала служит: $V(0 \leq x \leq a) = \text{const} = 0$. Следующая серия рисунков (многие из них мы взяли из [83]) демонстрирует отклик формы потенциала на вариацию некоторых из этих параметров (рис. 1 [83, 88]).

Будем сначала в бесконечном наборе $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ менять только одну нормировку γ_1 основного состояния: потребуем, чтобы $\Psi_1(x)$ круче спадала по модулю у стенки $x = a$. Ряд таких собственных функций изображен на рис. 1, б. Соответствующие потенциалы см. на рис. 1, а. Качественно понятно, почему именно таким образом отреагировала форма потенциала на увеличение крутизны функции $\Psi_1(x)$ при $x = a$. Если бы потенциал не изменялся, увеличение $\Psi_1(x)$ свелось бы к умножению функции на число, что нарушило бы нормировку

$$\int_0^a |\Psi_\lambda(x)|^2 dx = 1. \quad \text{Это ускорение роста } \Psi_1 \text{ при удалении от } x = a$$

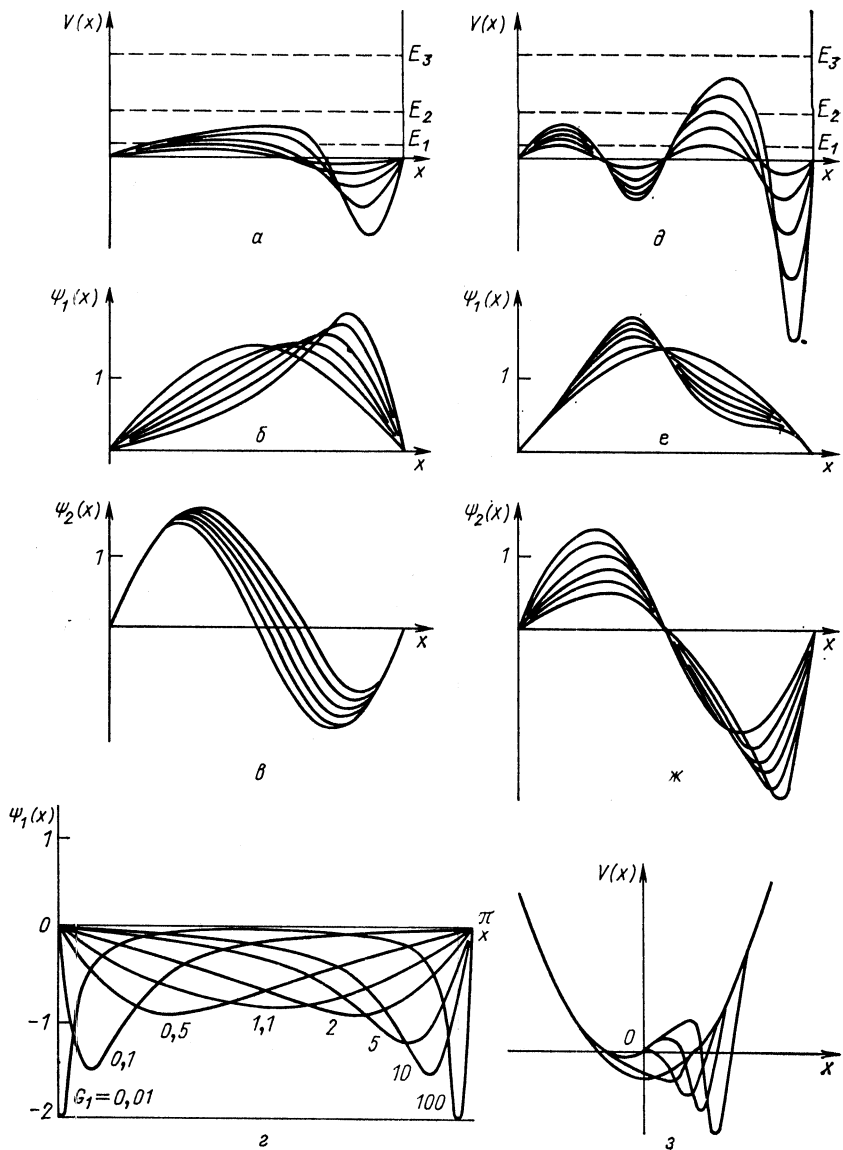


Рис. 1. Изменение формы потенциала (*a*, *д*, *з*) и собственных волновых функций $\Psi_\lambda(x)$ (*б*, *в*, *е*, *г*, *ж*) при вариации γ_λ -значений производных Ψ'_λ у стенки бесконечной ямы (*a* — *д*) или в ее центре (*з*) [83, 88]:

a — деформация дна бесконечной прямоугольной ямы при увеличении наклона $|\gamma_1|$; функции Ψ_1 основного состояния у правой стенки. Все уровни E_λ и производные $\gamma_{\lambda \neq 1}$ остаются неизменными; *б* — волновые функции Ψ_1 основных состояний, отвечающих потенциалам на рис. *a*; *в* — волновые функции $\Psi_2(x)$ первых возбужденных состояний в потенциалах, изображенных на рис. *a*; *г* — изменение Ψ_1 при уменьшении и увеличении приведенной ширины, изображенных на рис. *a*; *д* — деформация потенциала при изменении производной γ_2 собственной функции Ψ_2 у правого края ямы (уровни энергии E_λ и $\gamma_{\lambda \neq 2}$ не меняются); *е* — волновые функции Ψ_1 основных состояний, отвечающих потенциалам на рис. *д*; *ж* — волновые функции Ψ_2 первых возбужденных состояний, отвечающих потенциалам на рис. *д*; *з* — деформация осцилляторной ямы при изменении производной функции основного состояния в точке $x = 0$

должно быть скомпенсировано более быстрым переходом к спадаанию, чтобы интеграл от квадрата волновой функции основного состояния остался нормированным на единицу. Как раз углубление потенциала вблизи $x = a$ и обеспечивает такое поведение $\Psi_1(x)$ (чем глубже дно потенциала под данным уровнем, тем выше локальная частота осцилляций соответствующей собственной функции). Но дальше нужно заставить функцию, не меняя знака, — узлы у основного состояния запрещены, — спуститься к нулю в точке $x = a$. Это достигается отталкивающей частью добавки к исходному потенциалу в левой части ямы: под барьером функция существенно меньше невозмущенной. В то же время отталкивающая и притягивающая части возмущения потенциала взаимно компенсируют свое влияние на уровни энергии: в яме с искаженным дном все они остаются такими же, как и в бесконечной прямоугольной яме. Волновые функции возбужденных состояний подстраиваются под новую форму потенциала, но так, чтобы $\Psi'_\lambda(a)$ оставались неизменными, — см. рис. 1, *в*, где изображена вторая собственная функция при разных значениях параметра γ_1 (функции у правого края сливаются в одну линию). Если вместо увеличения по модулю γ_1 уменьшать ее, следует ожидать противоположной реакции возмущающего потенциала: вместо притяжения вблизи a будет отталкивание, а в левой части ямы — наоборот. В волновой же функции максимум (по модулю) будет смещаться не вправо, а влево. На рис. 1, *г* (наш расчет) показано симметричное относительно центра ямы постепенное изменение $\Psi_1(x)$ при уменьшении и увеличении γ_1 .

Посмотрим теперь, как реагируют потенциал и функции на вариации нормировочной константы γ_2 второго состояния (см. рис. 1, *д—ж* [83]). Как и в случае вариации γ_1 , потенциал углубляется у правого края ямы с ростом γ_2 (рис. 1, *д*), но сильнее, чем на рис. 1, *а*. Последнее объясняется тем, что требуется более мощное возмущение потенциала, чтобы деформировать функцию состояния с большей энергией. Для компенсации этого сильного притяжения необходим и более высокий отталкивающий барьер, возникающий слева от углубления. Небольшое углубление и барьер в левой половине ямы нужны для того, чтобы функция $\Psi_1(x)$ (рис. 1, *е*), ставшая меньше в правой половине ямы, успела увеличиться в левой ее части для сохранения нормировки и закончить колебание у левой стенки с нулевым значением [и почему-то с неизменным наклоном; не ясно также, почему функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ при всех значениях проходят через одну точку в центре ямы].

Интересно сопоставить серию спектрально-эквивалентных потенциалов для бесконечной прямоугольной ямы (на рис. 1, *а*) с такой же серией для осциллятора (рис. 1, *з* [88]). Только в последнем случае меняется производная собственной функции не на краю ямы, а в ее центре (она также может рассматриваться как нормировочная константа). В [62] приведены рисунки для деформаций кулоновского взаимодействия, не дающих искажения спектра.

Возьмем теперь для γ_1 значение, отвечающее наиболее возмущенному потенциалу на рис. 1, *а*, зафиксируем его и будем увеличивать γ_2 . Возмущение прямоугольной потенциальной ямы получается (см. рис. 2, *а* [83]) как «сложение» возмущений потенциала, изображенных на рис. 1, *а* и *д*. Если же менять не γ_2 , а γ_3 , то получим

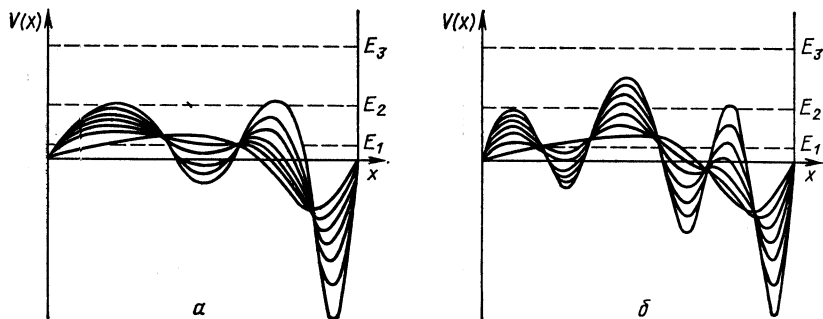


Рис. 2. Деформация бесконечной прямоугольной потенциальной ямы при одновременном изменении нескольких параметров γ_λ (γ_1 ; γ_2 на рис. *а* и γ_1 ; γ_3 на рис. *б*) [83]:

а — γ_1 равно тому значению, которое отвечает максимальной деформации ямы на рис. 1, *а*, а γ_2 увеличивается; *б* — фиксировано γ_1 как у потенциала с максимальной деформацией на рис. 1, *а*, а γ_3 увеличивается

потенциалы на рис. 2, *б* [83]: на максимальное возмущение на рис. 1, *а* накладываются колебания большей частоты (из-за вариации спектрального параметра более высокого уровня).

Покажем теперь, как меняется потенциал при сдвигах положений уровней. Будем опускать основной уровень, приближая его к дну исходной прямоугольной ямы, уменьшая с энергией модуль производной от $\Psi_1(x)$ у правого края ямы по тому же закону, как и для невозмущенных собственных функций: $\gamma_1 = (2/\pi)^{1/2}k$. Сначала в центральной части ямы возникает углубление, особенно сильно воздействующее на основное состояние, волновая функция которого имеет здесь максимум модуля (см. рис. 3). Отталкивающие же барьеры по краям ямы слабее влияют на E_1 , так как там мала $\Psi_1(x)$. При дальнейшем снижении E_1 углубление возрастает, а уменьшение γ_1 увеличивает правый барьер, смещая влево углубление, увлекающее за собой максимум $|\Psi_1(x)|$. Возбужденные уровни остаются на прежних местах, потому что на них отталкивание возмущения компенсирует действие притяжения. Аналогичные рассуждения объясняют и деформацию линейной бесконечной ямы (рис. 4 [67]) при опускании одного и двух уровней. Судя по рис. 4, сдвиг все более высоких уровней E_λ в ямах с неvertикальными стенками, происходит благодаря локализованным деформациям стенки — «сосулькам», уходящим все выше по энергии и дальше от начала координат с ростом λ (затухание с λ возмущения в области, где сосредоточены нижние состояния).

При подъеме первого уровня ко второму с $\gamma_1 = (2/\pi)^{1/2}k_1 \rightarrow \gamma_2$ функция основного состояния становится все более похожей в правой части ямы на функцию $\Psi_2(x)$ (рис. 5, а). Действительно, при $E_1 \rightarrow E_2$ обе функции являются решениями одного и того же уравнения с почти одинаковыми граничными условиями и почти равными энергиями.

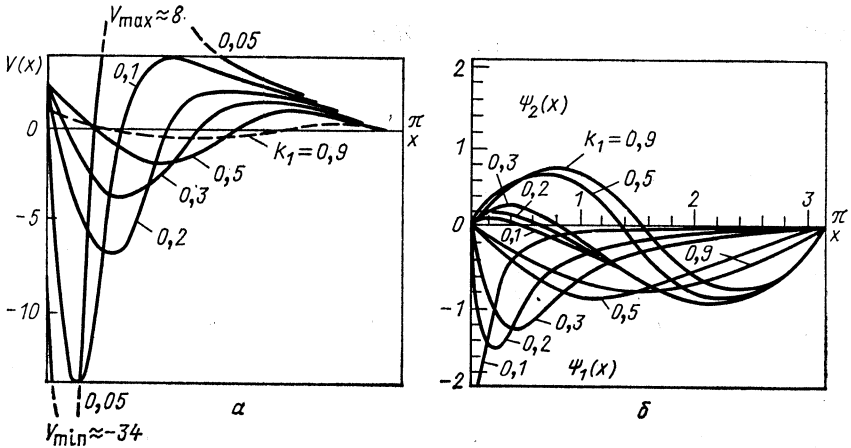


Рис. 3. Возмущения, вызываемые опусканием уровня основного состояния: а — деформация дна потенциальной ямы при смещении $E_1 \rightarrow 0$. Углубление ямы тянет E_1 вниз; барьер справа уменьшает γ_1 и одновременно вместе с барьером слева удерживает все возбужденные уровни на прежнем месте, б — изменения функций $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ при $E_1 \rightarrow 0$

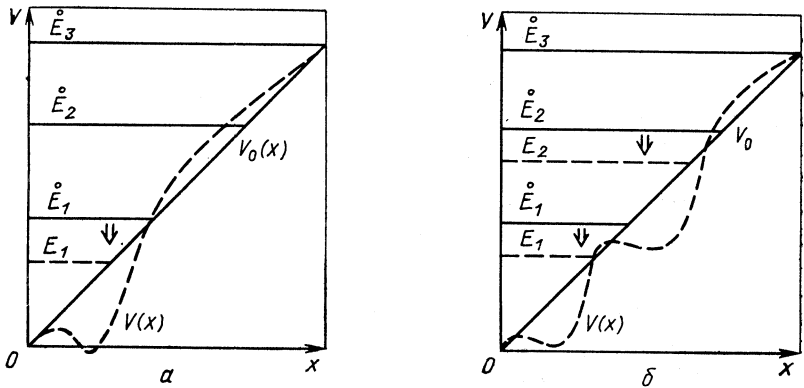


Рис. 4. Сдвиг уровней в линейной потенциальной яме: а — одного E_1 ; б — двух E_1 и E_2 . Пунктир — необходимое для этого искажение потенциала

В области узла функции $\Psi_2(x)$ барьер возмущающего потенциала (рис. 5, б) делает малой и $\Psi_1(x)$, а слева от этого узла обе функции отличаются приблизительно только знаком. Из рис. 3, а и 5, б видно, что небольшие сдвиги E_1 вниз и вверх соответствуют возмущениям $V(x)$, отличающимся в основном знаком.

Подобная же картина наблюдается и при опускании $E_2 \rightarrow E_1$; $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$ (рис. 6) и при сближении $E_2 \rightarrow E_3$; $\gamma_2 \rightarrow \gamma_3$ (рис. 7) или $E_3 \rightarrow E_2$; $\gamma_3 \rightarrow \gamma_2$ (рис. 8).

Если задать производную γ_v одного из сближаемых состояний сильно отличающейся от производной $\gamma_{v\pm 1}$ другого, функции обоих

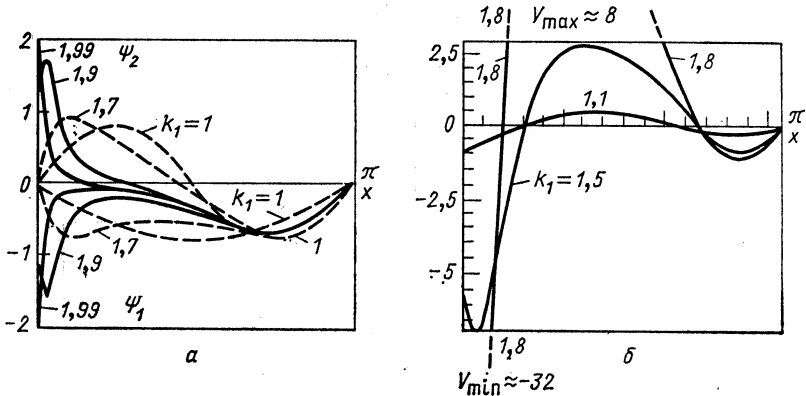


Рис. 5. Возмущения, вызываемые сдвигом $E_1 \rightarrow E_2$:

a — сближение по модулю функций основного $\Psi_1(x)$ и первого возбужденного $\Psi_2(x)$ состояний при подъеме уровня E_1 к E_2 . Справа от узла $\Psi_2(x)$ функции Ψ_1 с $k > 1,9$ становятся приближенно равны Ψ_2 , слева — различаются почти только знаком (смена знака происходит в подбарьерной области); *б* — барьер возмущающего потенциала в центре ямы толкает E_2 вверх; углубление справа увеличивает $|\gamma_1|$ и одновременно вместе с левым углублением компенсирует влияние центрального барьера на возбужденные уровни (ср. с рис. 3)

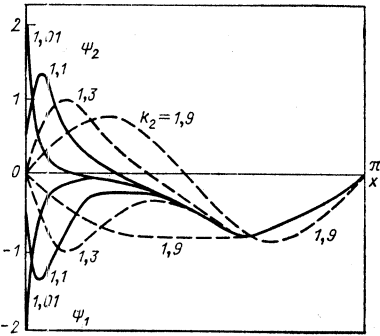


Рис. 6. Картина, подобная изображенной на рис. 5, *a*, только сближение двух нижних уровней происходит за счет спуска E_2 к E_1

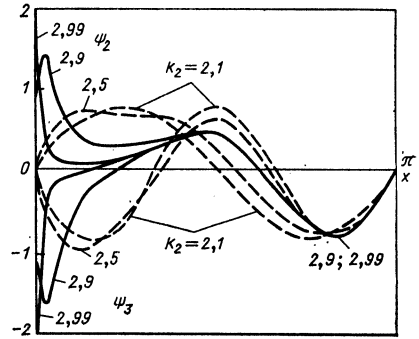


Рис. 7. Деформация волновых функций первого $\Psi_2(x)$ и и второго $\Psi_1(x)$ возбужденных состояний при подъеме $E_2 \rightarrow E_3$

состояний $\Psi_v(x)$ и $\Psi_{v\pm 1}(x)$ (рис. 9) оказываются тем не менее приближенно равными, но с точностью до постоянных множителей (возможно, разных слева и справа от узлов, чтобы скомпенсировать разницу нормировочных интегралов; нарушение постоянства отно-

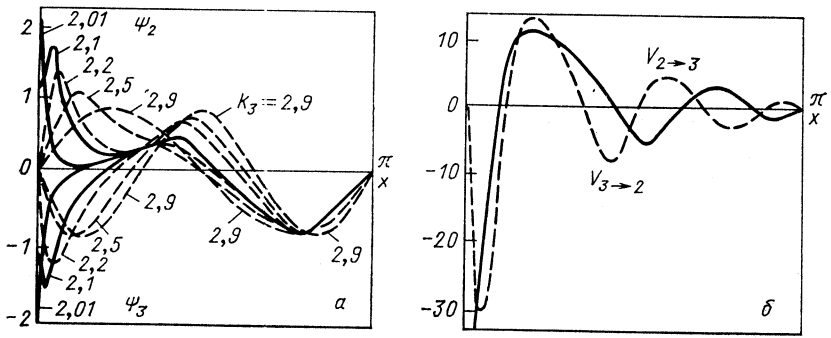


Рис. 8. Возмущения, вызываемые опусканием третьего уровня: а — то же, что на рис. 7, но при спуске $E_3 \rightarrow E_2$; б — сравнение потенциалов при сдвигах $E_3 \rightarrow E_2$ и $E_2 \rightarrow E_3$. Потенциальная яма у левой стенки шире в случае более низкого расположения пары сближаемых уровней E_2 и E_3 .

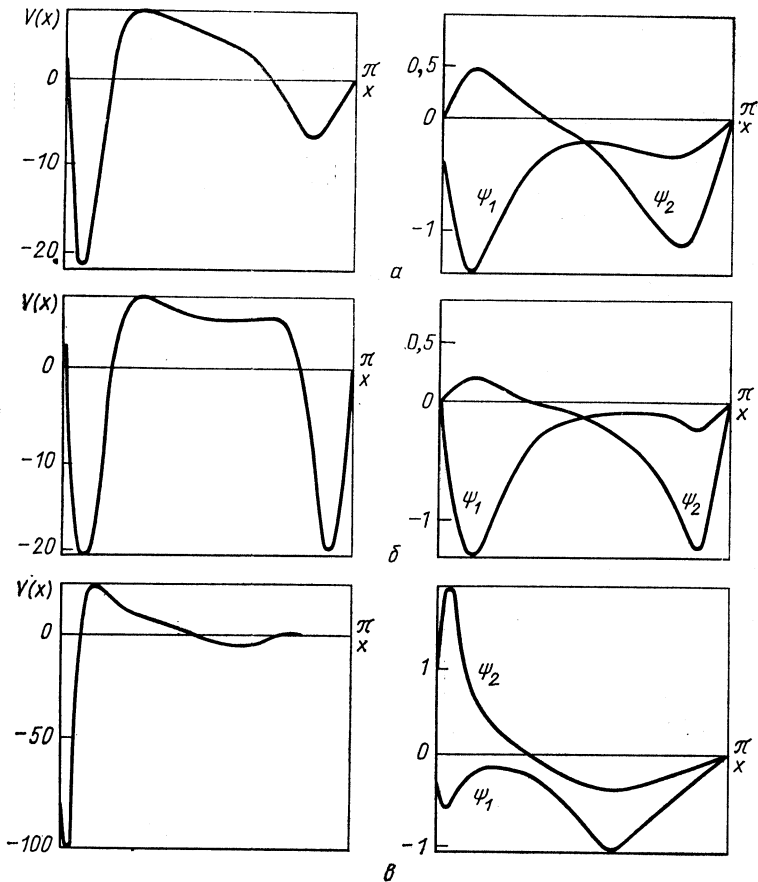


Рис. 9. Потенциалы возмущения и функции Ψ_1 и Ψ_2 при уровне E_2 , опущенном к E_1 ($k_2 = 1, 2$):
 а — $\nu_2 = 3(2/\pi)^{1/2}/k_2$; б — $\nu_2 = 6(2/\pi)^{1/2}/k_2$; в — $\nu_2 = 0,3(2/\pi)^{1/2}/k_2$

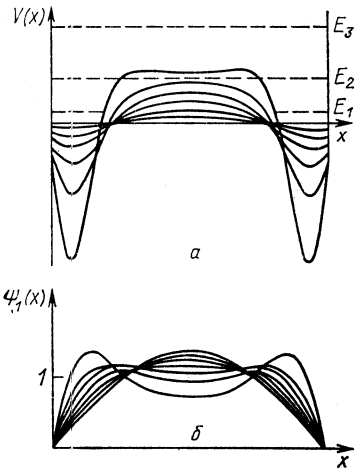


Рис. 10. Сближение уровней с сохранением симметрии $V(x)$ и $|\Psi_\nu(x)|$:

a — деформация потенциала при подъеме уровня основного состояния E_1 к первому возбужденному (ср. с рис. 11); *б* — изменение собственной функции Ψ_1 при $E_1 \rightarrow E_2$. Связь собственных значений и нормировочных констант в симметричной яме приводит к одновременному изменению производных при $x = a$ (ср. с рис. 11, 12)

пения $\Psi_\nu/\Psi_{\nu\pm 1}$ происходит лишь под барьером, где обе функции малы).

Отметим, кстати, полезное правило поведения волновой функции в подбарьерной области. Там функция не может иметь больше одного узла, а также у функции не бывает положительных максимумов и отрицательных минимумов*.

Можно позаботиться о том, чтобы возмущающие потенциалы получались симметричными**. На рис. 10, *a* [83] показана деформация дна потенциальной ямы, когда уровень основного состояния поднимается к первому возбужденному. Видно формирование у стенок двух симметричных углублений, отделенных растущим центральным барьером. Барьер в середине сильнее толкает вверх основное состояние, чем первое возбужденное, так как здесь $\Psi_1(x)$ по модулю больше, чем $\Psi_2(x)$, у которой здесь имеется узел. И наоборот: ямки по краям сильнее тянут вниз возбужденное состояние с двумя раздвинутыми максимумами модуля $|\Psi_2(x)|$, чем основное, у которого к краям $\Psi_1(x)$ меньше по модулю. Таким образом, под действием возмущений, изображенных на рис. 10, *a*, второй уровень должен оставаться на месте, так как влияние притяжения и влияние отталкивания компенсируют друг друга. На рис. 10, *б* [83] показано, как при этом меняется волновая функция основного состояния: она постепенно расщепляется на два состояния в отдельных ямках. По мере сближения уровней $|\Psi_1(x)|$ в центре убывает вместе с необходимостью отталкивания в этом месте (воздействовать на уровень эффективней там, где эта вероятность больше) (см. намечающийся минимум в центре барьера на рис. 10, *a*, то же происходит и в осцилляторе — см. рис. 11, *д*).

Отметим еще, что форма симметричного (относительно центра) потенциала, как на рис. 10, *a*, *б* [83]; 11, *a—д* [83], полностью определяется его уровнями энергии, а нормировочные константы γ_i

* Нам, в частности, знание этого правила ускорило нахождение ошибки в программе сдвиг уровней, составленной для персонального компьютера.

** Потенциалы, имеющие форму, симметричную относительно своего центра, однозначно определяются уровнями энергии без задания нормировочных констант γ (см. [20, с. 40]), которые сами подстраиваются под заданный спектр уровней.

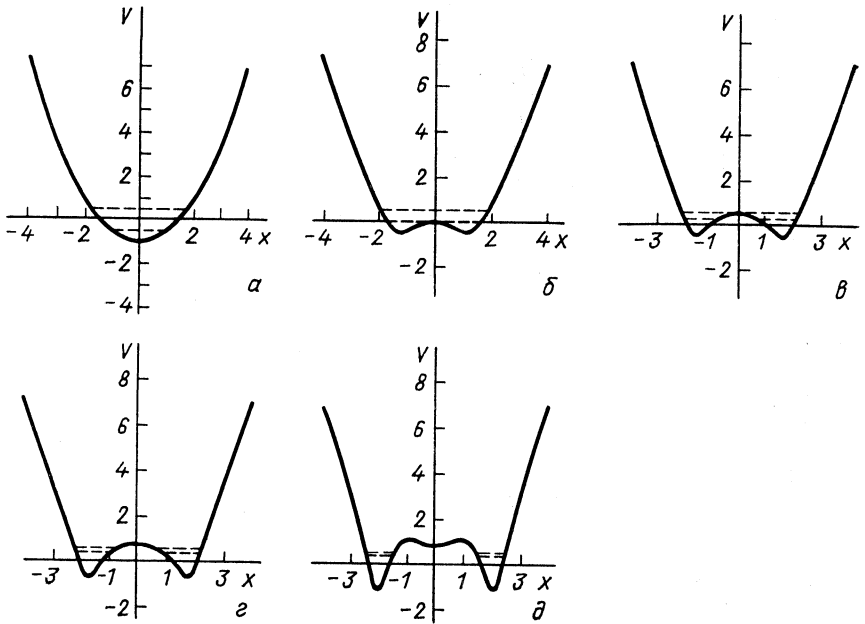


Рис. 11. Постепенная деформация осцилляторного потенциала (от a до ∂) при подъеме уровня основного состояния E_1 к E_2 [88] (ср. с рис. 10, a)

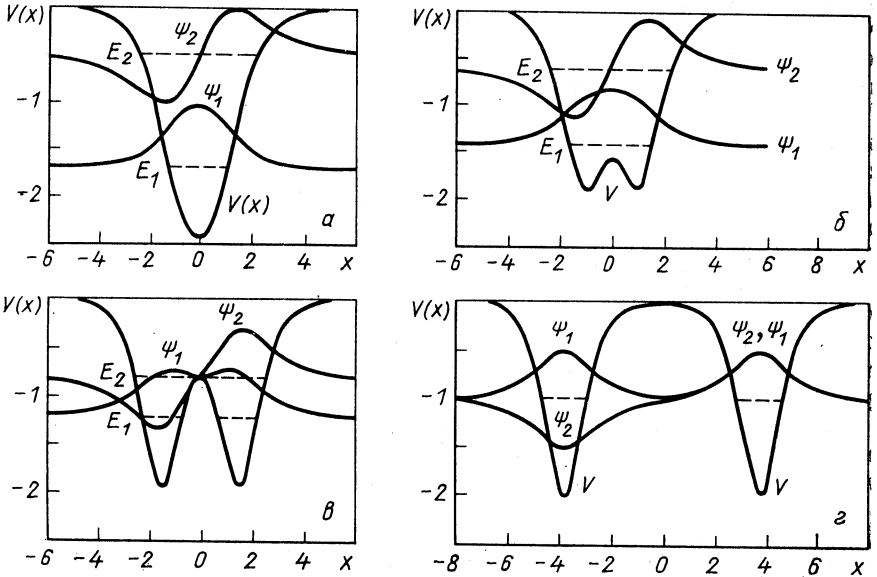


Рис. 12. Постепенное изменение формы прозрачной потенциальной ямы (от a до $г$) при сближении уровней двух ее связанных состояний. Показана также деформация волновых функций [76]

тоже задаются набором собственных значений (см. [20, с. 40—43]). Поэтому вместе со сдвигом уровня меняется и нормировка γ_1 , как видно на рис. 10, б [83] (нормировки подстраиваются под заданные уровни).

Еще одной иллюстрацией раздвоения симметричной потенциальной ямы при сближении двух нижних уровней служит рис. 11 с серией потенциалов, получающихся из осцилляторного с возмущаю-

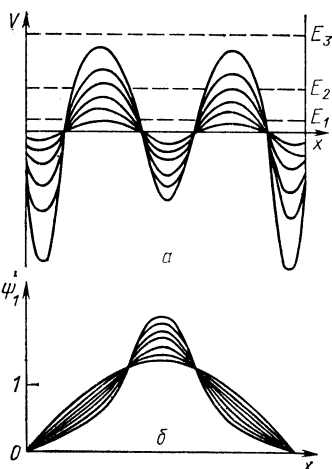


Рис. 13. Возмущения, вызываемые подъемом второго уровня к третьему:

a — деформация потенциала при $E_2 \rightarrow E_3$. Барьеры в области максимумов $|\Psi_2(x)|$ толкают E_2 вверх, пересиливая влияние ямок притяжения вблизи узлов Ψ_2 . Вид соответствующих волновых функций не показан, но качественно о нем можно судить, рассматривая вторую и третью собственные функции на рис. 14; *б* — функции основного состояния, отвечающие потенциалам, изображенным на рис. *a*

щими добавками, которые требуются для подъема первого уровня ко второму, и рис. 12 [75] для прозрачных (безотражательных, «двухсолитонных») потенциалов ($E_1 \rightarrow \leftarrow E_2$).

Если сближать не первый уровень со вторым, а двигать второй к третьему, то для этого в потенциале возмущения (см. рис. 13 [83]) имеются уже два максимума отталкивания в тех местах, где у $|\Psi_2(x)|$ расположены максимумы. Три же ямки вблизи трех максимумов $|\Psi_3(x)|$ не дают подняться E_3 (удерживают этот уровень на прежнем месте). При действии на относительно медленно меняющееся основное состояние осцилляции потенциала возмущения также компенсируют друг друга. Высшие состояния чувствуют в основном лишь среднее значение $\int V(x) \Psi_\lambda^2(x) dx$ возмущения, близкое в нашем случае к нулю.

Поняв качественно, каково должно быть изменение потенциала при вариации одного спектрального параметра, легче разобраться и в более сложном случае сближения трех уровней в прозрачном потенциале на рис. 14 [75]. Подъем дна ямы в ее центре толкает вверх основное состояние и слабее сказывается на втором уровне (узел Ψ_2). Три углубления на дне ямы сформировались для действия на три максимума $|\Psi_3(x)|$, чтобы опустить E_3 , этому же способствует расширение верхней части ямы. Обратим внимание на то, что волновая функция второго уровня в средней ямке стремится к нулю. Вызвано

это тем, что $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$, будучи решениями одного и того же уравнения при близких энергиях, должны вести себя одинаково с точностью до «постоянного» множителя. Свести к минимуму нарушение этого требования для функций с разным числом узлов удается, устремляя к нулю функции в области узлов (всех трех — в подбарьерных областях и второй в центральной зоне притяжения).

Новый пример «сложения» возмущений представлен на рис. 15 [83]. Сдвинем сначала E_1 к E_2 , получим один из серии потенциалов

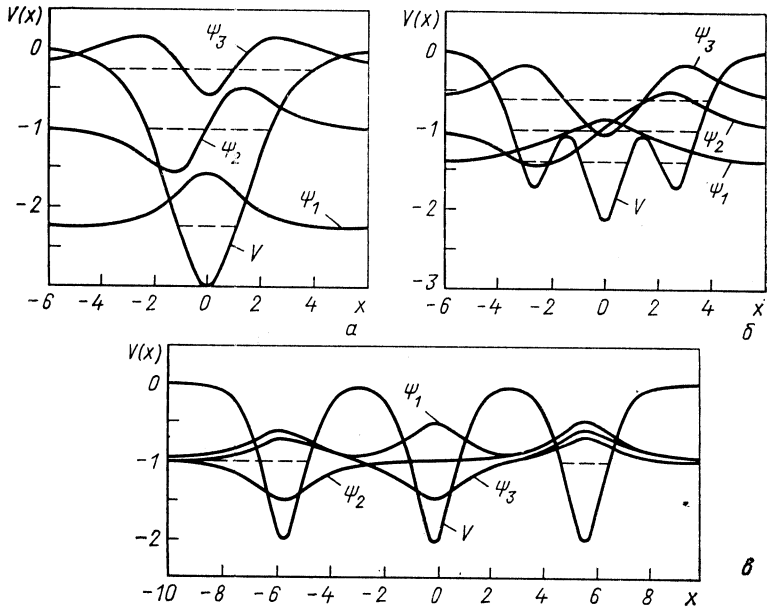


Рис. 14. Постепенное изменение формы прозрачной потенциальной ямы (от а до в) при сближении трех уровней. Штриховыми линиями показаны уровни [76]

рис. 10, а — его легко найти и на рис. 15. Теперь при сдвинутом E_1 , зафиксированном в новом положении, будем двигать вверх E_2 . Можно ожидать, что при этом на один из потенциалов с рис. 10, а будут накладываться возмущения, представленные на рис. 13, а. Эти «суммы» возмущений мы и видим на рис. 15. Если теперь зафиксируем какие-то из указанных сдвигов вверх нижних двух уровней и начнем двигать вверх третий, то на потенциал из серии рис. 15 наложится элементарное возмущение с тремя максимумами, что и показано на рис. 16 [83].

Интересно сравнить, как на связи « $V(x) \leftarrow$ спектр» сказывается скорость подъема потенциальных стенок у различных типов ям: с вертикальными бесконечными стенками (рис. 1—3), со стенками, растущими линейно (рис. 4), как квадрат расстояния (рис. 11), для

потенциалов, исчезающих на больших расстояниях (рис. 12, 14). Проследите общие черты и различия в поведении формы потенциалов и функций при возмущении спектральных параметров.

До сих пор мы ограничивались лишь сдвигами уровней в пределах их соседей. Но перемещение уровня за эти пределы (например,

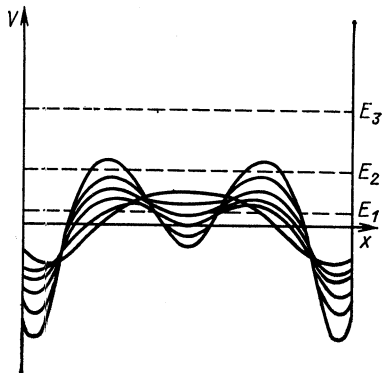


Рис. 15. Сложение возмущений при $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$. Серия потенциальных добавок к бесконечной прямоугольной яме, сдвигающих основной уровень к E_2 , а E_2 — к E_3 . Форма возмущения «складывается» из элементарных возмущений, изображенных на рис. 10, а и 13, а

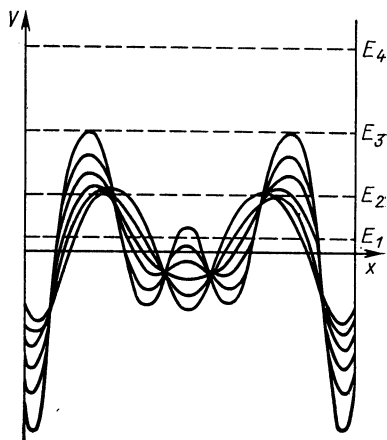


Рис. 16. То же, что и на рис. 15, но с дополнительным сдвигом третьего уровня к четвертому. К возмущению типа изображенного на рис. 15 «прибавляется» возмущение с тремя максимумами между узлами $\Psi_3(x)$ и тремя ямами в районе ее узлов

сдвиг E_1 в промежуток между вторым и третьим уровнями $E_2 < < E'_1 < E_3$) оказывается эквивалентным цепочке рассмотренных ограниченных сдвигов (E_1 — на место E_2 ; E_2 — на место E'_1 ; см. рис. 17).

Восстановление потенциала по спектральным параметрам. *R-матричный подход.* Продемонстрируем, как, следуя идее «квантового конструктора», можно приближенно решать обратную задачу: «собрать» систему с заданным спектральным набором $\{E_\nu, \gamma_\nu\}$ для искомого потенциала $V(r)$, последовательно подправляя спектральные данные $\{E_\mu, \gamma_\mu\}$ вспомогательной задачи с потенциалом V_0 (сдвигая на нужные места E_ν нижние уровни E_μ вспомогательного исходного потенциала $V_0(r)$ и соответственно исправляя приведенные ширины $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\nu$). Это, к тому же, — первый пример численного восстановления формы потенциала по спектральным данным в подходе *R-матричной* теории рассеяния с помощью аналитических решений баргмановского типа [52].

Формализм одномерной обратной задачи Штурма — Лиувилля на конечном отрезке был впервые предложен И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [8].

Он был применен к задачам рассеяния с потенциалами конечного радиуса действия (R -матричная теория) в работе [14]. Об использовании R -матрицы в качестве исходной информации в обратной задаче, правда, в менее удобном в данном случае формализме на

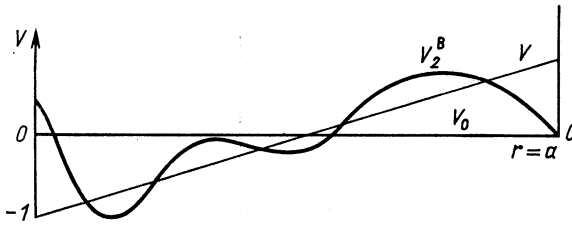


Рис. 17. Восстановление потенциала методом сдвигов спектральных параметров. Искомый потенциал — бесконечная потенциальная яма с наклонным дном; исходный потенциал — бесконечная прямоугольная яма; кривая — баргмановский потенциал $V^B(r)$, у которого два нижних уровня имеют те же $\{E_\nu, \gamma_\nu\}$, что и у искомого, а все остальные как у невозмущенной ямы (двухуровневое приближенное решение обратной задачи)

полуоси ($0 \leq r < \infty$), говорится в работе [55]. Многоканальное обобщение R -матричной обратной задачи, различные точно решаемые модели для взаимодействий конечного радиуса см. в работах [20, 52].

Формализм, которым мы здесь будем пользоваться, является частным одноканальным случаем общей теории многоканальной обратной задачи [52], изложенной во второй части обзора.

R -матричные баргмановские волновые функции, построенные по M парам $\{E_\nu, \gamma_\nu\}$ спектральных параметров нижних M уровней искомого потенциала, представляют собой элементы левой половины вектора-строки

$$\Psi_0^T(r) = \Psi_0^T(r) \hat{P}^{-1}(r) \quad (2)$$

с элементами $\{\Psi(E_\nu, r), \dots, \Psi(E_\mu, r) \dots\}$, где ν, μ пробегает значения $1, \dots, M$; E_ν, E_μ — уровни искомой и невозмущенной потенциальной ямы; $\Psi_0^T(r) = \{\Psi_0(E_{\nu'}, r), \dots, \Psi_0(E_{\mu'}, r) \dots\}$ — вектор-строка из решений исходной прямоугольной ямы; γ_ν и $\gamma_{0\mu}$ — приведенные ширины связанных состояний в искомой $V(x)$ и исходной $V_0(x)$ ямах соответственно (в данном случае они включены в значения собственных функций и не фигурируют явно); T — знак транспонирования; $\hat{P}(r)$ — блочная 2×2 -матрица с элементами четырех

блоков [52]:

$$\left. \begin{aligned}
 P_{\nu'\nu}(r) &= \delta_{\nu'\nu} + \int_r^a \Psi(E_{\nu'}, r') \Psi(E_{\nu}, r') dr'; \\
 P_{\nu'\mu}(r) &= \int_r^a \Psi(E_{\nu'}, r') \Psi(E_{\mu}, r') dr'; \\
 P_{\mu'\nu}(r) &= - \int_r^a \Psi(E_{\mu'}, r') \Psi(E_{\nu}, r') dr'; \\
 P_{\mu'\mu}(r) &= \delta_{\mu'\mu} - \int_r^a \Psi(E_{\mu'}, r') \Psi(E_{\mu}, r') dr'.
 \end{aligned} \right\} (3)$$

Потенциал, восстанавливаемый в M -уровневом приближении, имеет вид [52]:

$$\begin{aligned}
 V(r) &= 2 \left\{ \sum_{\nu\nu'} \Psi(E_{\nu}, r) P_{\nu\nu'}^{-1}(r) \Psi(E_{\nu'}, r) - \right. \\
 &\quad - \sum_{\nu\mu'} \Psi(E_{\nu}, r) P_{\nu\mu'}^{-1}(r) \Psi_0(E_{\mu'}, r) + \\
 &\quad + \sum_{\mu\nu'} \Psi_0(E_{\mu}, r) P_{\mu\nu'}^{-1}(r) \Psi(E_{\nu'}, r) - \\
 &\quad \left. - \sum_{\mu\mu'} \Psi_0(E_{\mu}, r) P_{\mu\mu'}^{-1}(r) \Psi_0(E_{\mu'}, r) \right\}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

В качестве искомого был взят потенциал с бесконечными стенками на концах отрезка $0 < r < a$ и линейным наклонным дном.

Сначала решалась вспомогательная прямая задача: с потенциалом, который нужно восстановить, находились собственные значения E_{ν} и приведенные ширины γ_{ν} — исходные данные для обратной задачи. Затем в бесконечной прямоугольной потенциальной яме уровня E_{μ} конечного числа нижних состояний сдвигались на места заданных E_{ν} , а значения их приведенных ширин γ_{μ} заменялись γ_{ν} . При этом прямоугольная яма деформировалась, приближаясь к искомой.

На рис. 17—19 показаны формы потенциалов баргмановского типа, построенные по 2, 10 и 18 парам спектральных параметров $\{E_{\lambda}, \gamma_{\lambda}\}$ для нижних R -матричных состояний. Видно, что сначала наблюдается сходимость последовательных приближений к искомому потенциалу, но при дальнейшем увеличении числа учитываемых R -резонансов ошибки вычислений нарастают и усиливаются осцилляции приближенных $V^B(r)$ по отношению к линии искомого потенциала.

Для исследования сходимости приближенных решений обратных задач (особенно многоканальных) полезно иметь модели, использующие точные аналитические решения и прямых задач. Можно

воспользоваться сочетанием двух разных подходов (R -матричного и Гельфанда — Левитана или Марченко) построения точно решаемых

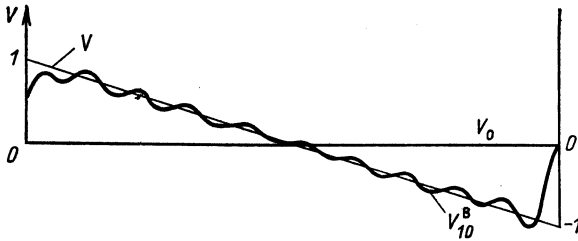


Рис. 18. То же, что и на рис. 17, но кривой обозначен $V^B(r)$, построенный по десяти парам спектральных параметров $\{E_\nu, \gamma_\nu\}$ искомого потенциала

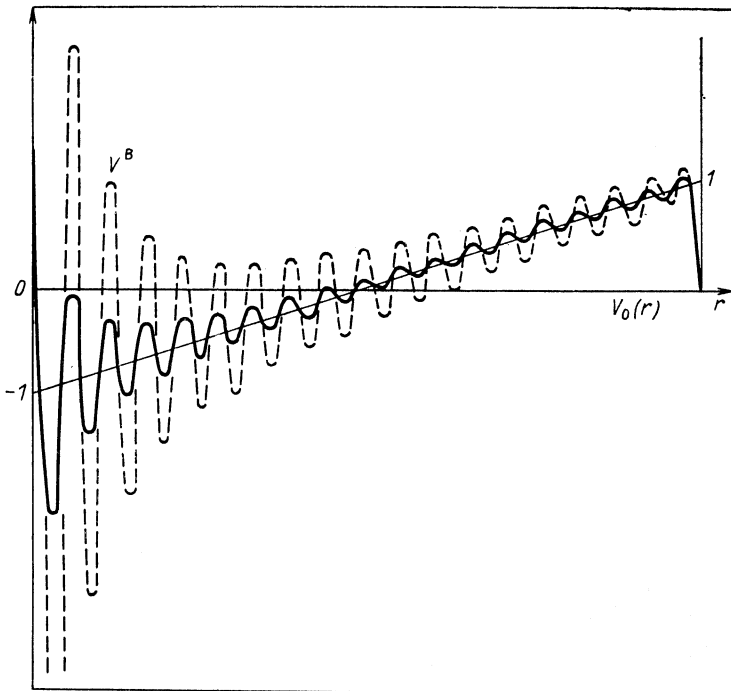
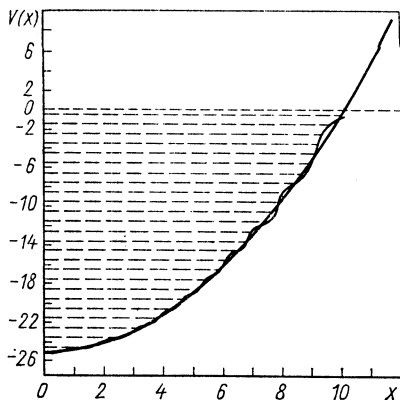


Рис. 19. Баргмановский потенциал, построенный по 18 уровням искомой ямы: пункт отвечает той же точности вычисления спектральных параметров $\{E_\nu, \gamma_\nu\}$ искомого потенциала, что и на рис. 17, 18; сплошная кривая получена для $V^B(r)$, восстановленного по $\{E_\nu, \gamma_\nu\}$, найденным при решении прямой задачи с большей точностью (с вдвое меньшим шагом разностного дифференцирования)

моделей, чтобы модельные потенциалы, полученные в одном подходе, использовать как искомые, а потенциалы баргмановского типа другого подхода использовать для приближенного решения обратной

Рис. 20. Приближение безотражательно-го потенциала с 25 уровнями к форме осцилляторной потенциальной ямы при совмещении их спектров в области $E \leq E_{25}$ [76]



задачи. Например, берем баргмановский потенциал и соответствующие решения в подходе Гельфанда—Левитана или Марченко и строим из этих решений волновые функции, удовлетворяющие граничным условиям Штурма — Лиувилля (R -матричных резонансных состояний). Так, для баргмановских регулярных решений $\Phi(k, r)$, равных нулю в начале координат и известных в аналитическом виде, находим значения $k = k_\nu$ и тем самым энергий, при которых они обращаются в нуль и в точке $r = a$, что существенно проще численного решения уравнения Шредингера. А по найденным таким образом E_ν и соответствующим γ_ν приближенно восстанавливаем исходный баргмановский потенциал (Гельфанда — Левитана), но только на отрезке $0 \leq r \leq a$, с помощью R -матричных баргмановских потенциалов, как показано выше.

Аналогично поступаем и в многоканальном случае, пользуясь матричным обобщением описанной процедуры.

Благодаря практически неограниченной точности, с которой можно определять спектральные параметры R -матричной задачи по точным баргмановским решениям Гельфанда — Левитана и Марченко, таким образом, открывается путь исследования зависимости погрешностей восстановления взаимодействия от степени точности задания E_ν и приведенных ширин.

Для ограниченных по значению потенциалов конечного радиуса действия сколь угодно подробную информацию о взаимодействии можно извлечь из конечного отрезка континуума [по непрерывной зависимости фазы рассеяния $\delta(E)$ от энергии определить счетное множество параметров E_ν, γ_ν — правда однозначности здесь может помешать нелинейность связи $R(E)$ с E_ν, γ_ν].

Восстановление формы потенциалов с помощью баргмановских потенциалов конечной глубины. В 1980 г. Шонефельд и др. [86] показали (см. также [75]), как, подгоняя до восьми уровней прозрачных «многосолитонных» (безотражательных) потенциалов к нижней части спектра линейной, прямоугольной и осцилляторной ям, удается приближенно воспроизвести их форму в области энергий, где совпадают спектры аппроксимируемого и аппроксимирующего потенциалов. Позднее [76] эти авторы провели расчеты с большим числом уровней. На рис. 20 показано приближение осцилляторной ямы прозрачной

ямой при 25 совпадающих нижних уровнях и специальном выборе положения верхнего края конечной ямы. Удивительно, что, несмотря на совершенно разные спектры (дискретный и непрерывный) выше этих 25 уровней, получается столь близкое совпадение форм потенциалов при $E < E_{25}$. Рисунок 20 — это новый пример реакции формы потенциала на своеобразный сдвиг уровней: они как бы «отщеплялись» от нижней кромки непрерывного спектра и опускались на указанные им эквидистантные позиции (само положение кромки оказалось кардинально важным для качества приближения). В разд. 2 мы рассмотрим примеры сдвига уровней в обратном направлении: из дискретного в непрерывный спектр — погружение связанных состояний в континуум (с потенциалами, удерживающими связанные состояния выше порога распада). Рассматриваемые задачи позволяют лучше понять, чем регулируется прозрачность или запирающие свойства квантовых систем с потенциальным взаимодействием. В следующем разделе обсуждаются имеющие к этому непосредственное отношение эффекты туннелирования сквозь потенциальные барьеры.

Сюрпризы квантового туннелирования. Резонансное туннелирование. Система из двух одинаковых потенциальных барьеров может быть прозрачной при энергии квазистационарного состояния между ними, даже если каждый из них в отдельности слабопроницаем. Простое объяснение этому дано в книге [20], здесь мы дадим еще одно, правда, менее строгое.

Представим себе стоячую волну, запертую между барьерами при резонансной энергии. В обе стороны от системы барьеров будут расходиться протуннелировавшие волны с очень малой амплитудой, вызванные распадом квазисвязанного состояния. Достаточно теперь

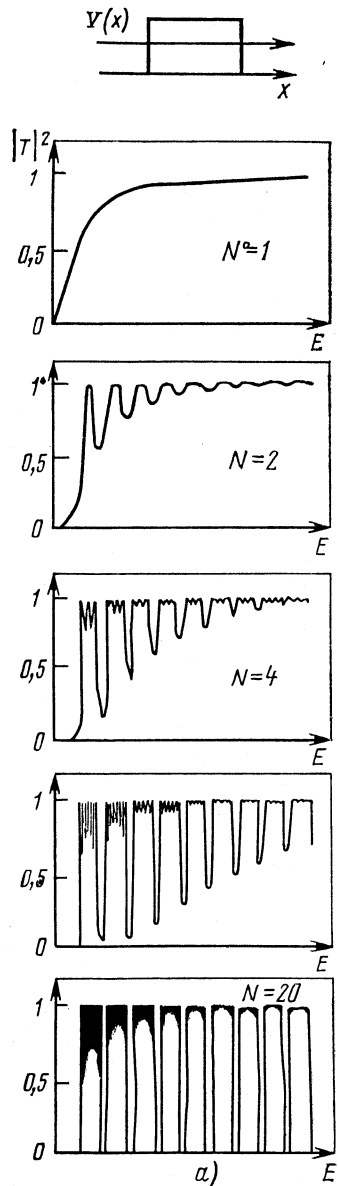
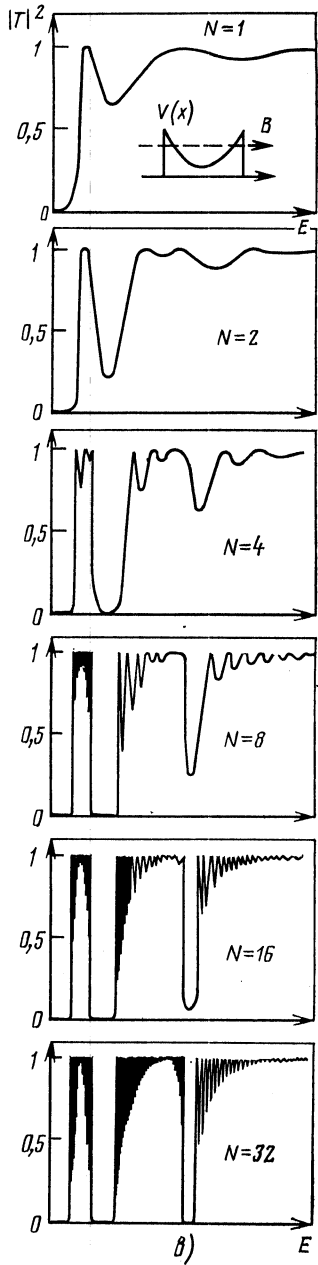
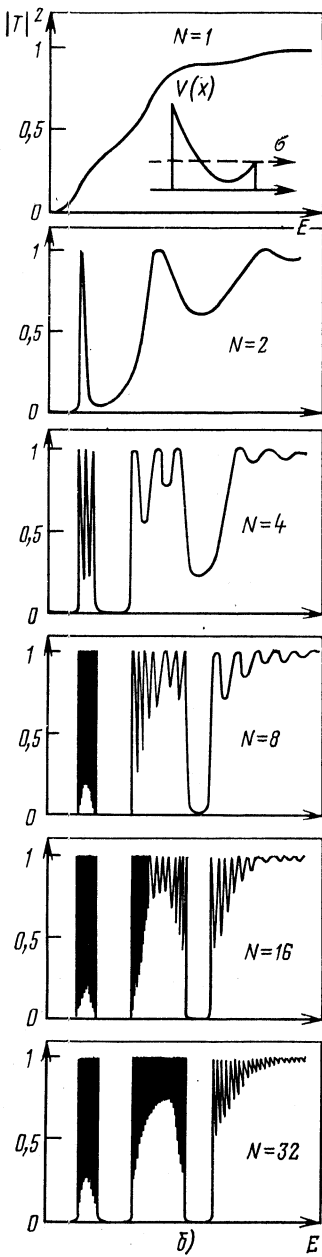


Рис. 21. Проницаемость системы одинаковых барьеров при последовательном увеличении их числа $N = 1, 2, 4 \dots$: а — прямоугольные барьеры; б, в — барьеры с переменной высотой



на такую систему дополнительно направить с одной стороны слабую падающую волну с той же энергией и такими фазой и амплитудой, чтобы вызванная ею отраженная волна, интерферируя с распадной, уничтожила ее, — и мы получим желаемую картину прозрачности двух барьеров. Нестрогость нашего рассуждения заключается в том, что мы складывали решения с энергиями, отличающиеся малой мнимой добавкой. Но суть явления при этом схватывается правильно, и с увеличением барьеров неточность эта может быть сделана пренебрежимо малой.

На рис. 21 показана энергетическая зависимость коэффициентов проицаемости для систем с разным числом N одинаковых барьеров

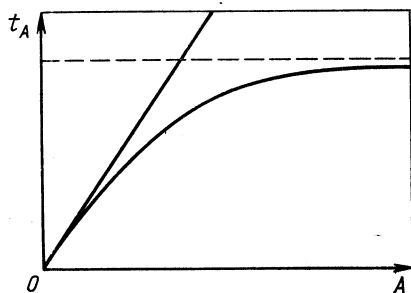


Рис. 22. Зависимость времени задержки пакета под барьером t_A от ширины барьера A :

горизонтальный участок кривой свидетельствует о том, что при достаточно длинном барьере дополнительное его удлинение не приводит к лишней затрате времени на туннелирование сквозь него. Наклонная линия соответствует постоянной конечной скорости пакета

[72]. Видно, как постепенно с ростом N формируются полосы разрешенного движения одномерной кристаллической решетки (зоны проводимости).

О скорости движения пакета под барьером. Подбарьерное туннелирование — наиболее яркое проявление специфики квантовой механики. Оно принципиально важно для ядерного деления и синтеза, для большинства ядерных реакций. С ним связаны эффект Джозефсона и создание туннельного микроскопа. И хотя туннелирование изучают с самого создания квантовой теории, в нем остается еще много интересного и непонятного. Это особенно касается многочастичных аспектов явления, но и в простейшем одномерном случае движения одной частицы во внешнем поле имеются загадочные моменты. Так, в работе Флетчера [63] было обнаружено (рис. 22), что в зависимости от ширины барьера A время t_A пребывания волнового пакета под барьером сначала линейно возрастает, а затем выходит на насыщение. Получается как бы ускорение волн при прохождении длинных барьеров: средняя скорость движения в подбарьерной области возрастает с длиной барьера. Но Флетчер не исследовал временную эволюцию волнового пакета внутри подбарьерной области. Происходит ли движение в разных ее точках с одинаковой скоростью или отдельные ее участки преодолеваются быстрее (медленнее)? В [91]

сделаны оценки моментов времени, когда «центр масс» пакета или его максимум находятся в разных точках подбарьерной области. Оказалось, что движение экспоненциально замедляется в направлении от начала к концу барьера, так что время на прохождение подбарьерной области тратится в основном в конце барьера.

Рассмотрим сначала простейший случай прямоугольного барьера. Поток

$$J = i/2m [\Psi(x) \Psi^{*'}(x) - \Psi^*(x) \Psi'(x)] \quad (5)$$

в соответствии с законом его сохранения имеет постоянное значение до, внутри барьера и за ним. До барьера он представляет собой сумму потоков падающей и отраженной волн. Менее известно, что внутри барьера потоки для отдельных компонент решения (растущей и убывающей) равны нулю и лишь их интерференция обеспечивает сохранение J .

Условно можно было бы сказать о потоках, идущих в противоположные стороны под барьером в произвольной точке x_1 . Укоротим барьер, отбросив ту его часть, которая расположена правее x_1 , но оставим нетронутым решение слева от x_1 . Чтобы его продолжить гладко вправо, за обрезанный барьер, необходимо ввести при $x > x_1$ волны, бегущие в обе стороны (поток J_- налево должен быть меньше потока J_+ направо, чтобы сохранялся полный поток J). Сдвигая точку x_1 обрезания барьера и сшивая каждый раз со свободными решениями справа, мы получаем информацию о потоках J_+ , J_- в зависимости от положения x_1 (экспоненциальное убывание с ростом x_1). Если интерпретировать эти факты как указание на значения потоков J_+ , J_- под барьером, то можно сказать, что по мере продвижения под барьером все большая часть потока слева поворачивает назад, а в точке $x = A$ поток J_+ пропадает совсем.

Другим интересным фактом является то, что растущее решение $\beta \exp(\kappa x)$; $0 < x < a$; $\kappa = \{2(V - E)\}^{1/2}$ сравнивается по модулю со спадающим $\alpha \exp(-\kappa x)$ в конце барьера. Коэффициент α в $\exp(2\kappa a)$ раз больше β , так что фактически растущее решение в $\sim \exp(\kappa a)$ раз экспоненциально спадает в сторону начала барьера от значения, до которого уменьшилось спадающее решение в конце подбарьерной области.

Будем составлять пакет из стационарных решений Ψ , интегрируя их с весом g_k :

$$\Psi_{\text{pack}}(t, x) = \int dk g(k) \Psi(k, x) \exp(-iEt). \quad (6)$$

Можно определить средний момент прохождения пакета в области барьера через точку x по формуле [33]:

$$t_x = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t |\Psi_{\text{pack}}(t, x)|^2 dt \right\} / \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{\text{pack}}(t, x)|^2 dt \right\}. \quad (7)$$

При этом, правда, происходит усреднение по движениям волн в обоих направлениях.

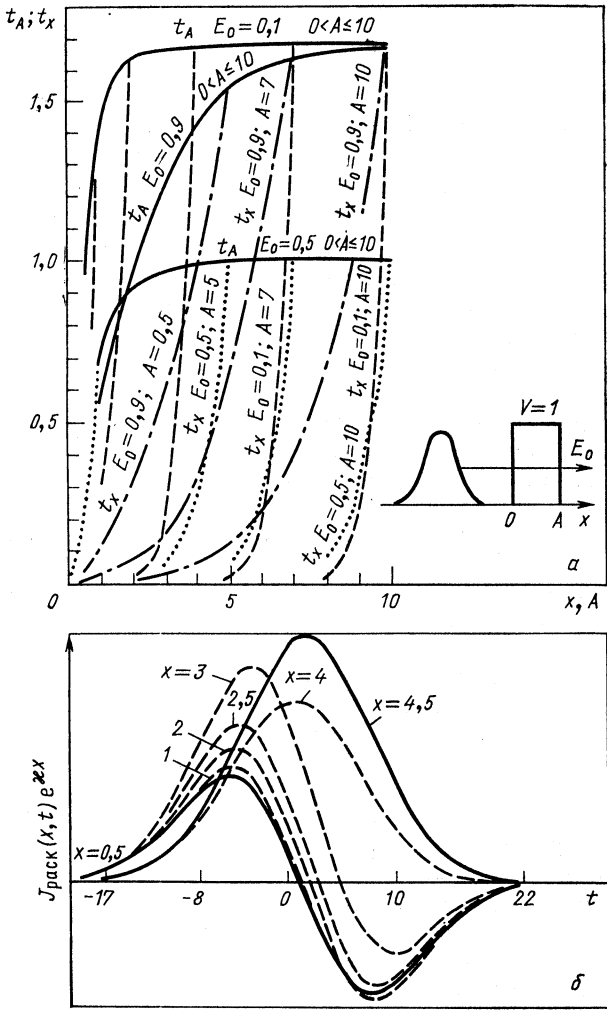


Рис. 23. Временная эволюция волнового пакета под барьером:

a — времена t_x прохождения «центра масс» пакета через точку x в зависимости от положения этой точки под барьером: $0 < x \leq A$ при разных значениях средней энергии E_0 пакета; штриховая кривая — $E_0 = 0,1$ V; пунктир — $E_0 = 0,5$ V; штрихпунктир — $E_0 = 0,9$ V. Зависимость времен t_A задержки пакета барьером от ширины барьера дана сплошными кривыми; *б* — зависимость от времени среднего потока в точках ($0 < x < 5$) под барьером, имеющим ширину $A = 5$ (для удобства сравнения значений потоков $J_{\text{пак}}(x, t) = i/2m [\Psi_{\text{пак}}^*(x, t) \Psi'_{\text{пак}}(x, t) - \Psi_{\text{пак}}(x, t) \Psi'^*_{\text{пак}}(x, t)]$ в разных точках они изображены с увеличением μx)

На рис. 23 представлена зависимость t_x для барьеров разной длины A , а на рис. 23, б зависимость от времени потока $J_{\text{пак}}(x, t)$ в различных точках x под барьером. Сдвинутые по времени положи-

тельные и отрицательные суммарные потоки на рис. 23, б являются, по-видимому, первым прямым свидетельством наличия падающей и отраженной компонент пакета в подбарьерной области. Для лучшей сопоставимости временной эволюции $J_{\text{пак}}(x, t)$ в разных точках x на рис. 23, б введены факторы $\exp(\kappa x)$, компенсирующие экспоненциальное затухание (с ростом x) волн под барьером.

Все кривые на рис. 23, а исходят из нулевой точки. Но это происходит только в том случае, если отсчитывать t_x и t_A от момента t_0 , когда в точке $x = 0$ находится центр всего пакета (с падающей и отраженной компонентами — последняя имеет существенную задержку во времени).

Крутой подъем кривых t_x в конце барьера и смещение максимума $J_{\text{пак}}(x, t)$ на рис. 23, б отвечают затуханию скорости движения пакета под барьером при его сближении с $x = A$.

Эти расчеты согласуются с результатами Флетчера [63] как в том, что время задержки t_A для достаточно широких барьеров перестает зависеть от A , так и в том, что такие предельные времена задержки оказываются минимальными для средней энергии пакета, равной половине высоты барьера. Для широких барьеров имеется аналитическое выражение такой зависимости

$$t_A = \hbar [E(V - E)]^{-1/2}.$$

2. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нерелятивистская квантовая физика уже сейчас существенно многоканальна, а в будущем эта тенденция будет быстро усиливаться. Многоканальные задачи часто имеют прямой физический смысл. Интересны они и потому, что к ним сводятся многомерные задачи: удобнее решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений (связанные одномерные уравнения Шредингера) вместо уравнений в частных производных.

Особенно же интересны многоканальные уравнения своей связью с многочастичными задачами. Последние трудны как своей многомерностью, так и сложностью областей взаимодействия в многомерном конфигурационном пространстве. Для иллюстрации в приложении приведена картина областей взаимодействия четырех частиц, движущихся по одной оси (мы решили ее показать, так как никогда не встречали ее в литературе и вряд ли многие физики отчетливо представляли себе ее вид: публикуется она впервые).

Мы начнем с примера сведения простейшей одномерной системы трех тел к многоканальным одномерным уравнениям.

Если точно решаемые модели углубляют качественное понимание свойств одноканальных квантовых объектов, то нужда в точно решаемых примерах неизмеримо больше для сложных систем с сильной связью каналов, где наша квантовая интуиция значительно беднее. Чтобы облегчить использование многоканальных моделей и избавить тех, кому они могут понадобиться, от не столько сложных по

существо, сколько громоздких выкладок, свести к минимуму возможные погрешности формул, мы приведем их здесь для взаимодействий конечного радиуса (в рамках R -матричной теории) в общем и, по возможности, компактном виде, следуя [52] с некоторыми усовершенствованиями.

Далее обсуждаются модели разделения переменных: обычной непрерывной координаты конфигурационного пространства и переменной движения по «решетке каналов» в многоканальной задаче или по «решетке периодов» в периодическом поле.

В конце раздела рассматривается деформация матрицы взаимодействия $V_{\alpha\beta}(x)$ точно решаемой модельной задачи при сдвиге связанного состояния в непрерывный спектр. Дается сравнение одноканального и многоканального случаев.

Многочастичная и многоканальная обратная задача. Сведение трехчастичной задачи к многоканальной. Пусть частица 1 рассеивается составной мишенью: частицей 2, удерживаемой бесконечной прямоугольной потенциальной ямой вблизи частицы 3, закрепленной в точке $x = 0$. Картина областей взаимодействия в этом случае отличается от изображенной на рис. П1 тем, что разрешено движение лишь в горизонтальной полосе.

Соответствующее уравнение Шредингера (в частных производных):

$$\begin{aligned} &[-\partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2 + V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_{12}(|x_1 - x_2|) + \\ &+ V_{123}(x_1, x_2)] \Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (8)$$

может быть сведено к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-\frac{d^2}{dx_1^2} \Psi_\alpha(x_1) + V_1(x_1) + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta}(x_1) \Psi_\beta(x_1) = (E - \varepsilon_\alpha) \Psi_\alpha(x_1) \quad (9)$$

для коэффициентов $\Psi_\alpha(x_1)$ разложения

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{\alpha} \Psi_\alpha(x_1) \Phi_\alpha(x_2) \quad (10)$$

трехтельной волновой функции в полный набор состояний $\Phi_\alpha(x_2)$ внутреннего движения мишени:

$$-\frac{d^2}{dx_2^2} \Phi_\alpha(x_2) + V_2(x_2) \Phi_\alpha(x_2) = \varepsilon_\alpha \Phi_\alpha(x_2). \quad (11)$$

Потенциальная матрица $V_{\alpha\beta}(x_1)$, которая связывает уравнения в системе (9), выражается через потенциал $V_{12}(|x_1 - x_2|)$ и трехчастичный потенциал $V_{123}(x_1, x_2)$, если он не равен нулю:

$$V_{\alpha\beta}(x_1) = \int \Phi_\alpha(x_2) [V_{12}(|x_1 - x_2|) + V_{123}(x_1, x_2)] \Phi_\beta(x_2) dx_2. \quad (12)$$

Система многоканальных уравнений (9) может быть, в частности, использована для решения трехчастичной обратной задачи [90, 94].

Если двухчастичные потенциалы V_1 , V_2 и V_{12} предполагаются известными, то, восстанавливая по данным рассеяния матрицу $V_{\alpha\beta}(x_1)$, находим неизвестный потенциал $V_{123}(x_1, x_2)$, используя обращение соотношения (12).

Многоканальная обратная задача. Построим сначала точно решаемые модели для M канальной системы, которая может быть получена обрывом системы (9).

Системе M связанных одномерных уравнений Шредингера отвечает система уравнений обратной задачи, являющаяся матричным обобщением [20, 52, 82] обычного уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко (для простоты мы будем опускать индексы «1» пространственных переменных x, y, z первой частицы):

$$K_{\alpha\alpha'}(x, y) + Q_{\alpha\alpha'}(x, y) + \int_x^a dz \sum_{\beta=1}^M K_{\alpha\beta}(x, z) Q_{\beta\alpha'}(z, y) = 0, \quad (13)$$

где матричное ядро Q определяется исходными спектральными (или рассеяния) данными, а матричное решение K уравнения (13) определяет искомую потенциальную матрицу:

$$V_{\alpha\beta}(x) = \overset{\circ}{V}_{\alpha\beta}(x) - 2 \frac{d}{dx} [K_{\alpha\beta}(x, x)]. \quad (14)$$

Знак минус в уравнении (14) и пределы интеграла в (13) выбраны в соответствии с R -матричным вариантом формализма обратной задачи (см. [20]). Знаком $\overset{\circ}{V}_{\alpha\beta}(x)$ и др., отвечающие некоторой известной точно решаемой задаче.

Для вырожденных ядер Q^B система интегральных уравнений (13) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, решения которой могут быть записаны в замкнутой форме [20, 82]. Соответствующие потенциальные матрицы $V_{\alpha\beta}^B(x)$, зависящие от произвольных параметров, дают широкий класс точно решаемых моделей баргмановского типа. Эти свободные параметры входят и в соответствующую матрицу рассеяния $S_{\alpha\beta}^B$ или R -матрицу и могут быть выбраны так, чтобы возможно точнее описывать входные данные обратной задачи. Фиксированные таким образом значения параметров дают приближенное решение многоканальной обратной задачи с помощью явного вида $V_{\alpha\beta}^B(x)$.

Удобно начать с R -матричного формализма, когда задача непрерывного спектра с взаимодействием конечного радиуса сводится к рассмотрению дискретного набора R -матричных состояний [14, 20, 28].

Рассмотрим решения $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ системы (9), отвечающие граничному условию в некоторой внешней точке $x = a$, где предполагается, что короткоживущая матрица $V_{\alpha\beta}(x)$ становится пренебрежимо малой

$$\Phi'_{\alpha\beta}(a) = \delta_{\alpha\beta}; \quad \Phi_{\alpha\beta}(a) = 0, \quad (15)$$

аналогично вводим решения $\overset{\circ}{\Phi}_{\alpha\beta}(x)$ для исходной потенциальной матрицы $\overset{\circ}{V}_{\alpha\beta}(x)$, которая предполагается известной. Можно, напри-

мер, выбрать $\mathring{V}_{\alpha\beta}(x)$ постоянной и диагональной:

$$\mathring{V}_{\alpha\beta}(x) = \mathring{V}_{\alpha}\delta_{\alpha\beta}; \quad \mathring{\Phi}_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} \sin [k(x-a)]/k. \quad (16)$$

Кроме этих функций будем использовать собственные решения $\Psi_{\alpha}^{\nu}(x) = \Psi_{\alpha}(E^{\nu}, x)$ для уравнения (9) и $\mathring{\Psi}_{\alpha}^{\mu}(x) = \mathring{\Psi}_{\alpha}(E^{\mu}, x)$ для опорной матрицы взаимодействия $\mathring{V}_{\alpha\beta}(x)$ с граничными условиями:

$$\Psi_{\alpha}^{\nu}(0) = \mathring{\Psi}_{\alpha}^{\mu}(0) = 0; \quad \Psi_{\alpha}^{\nu}(a) = \mathring{\Psi}_{\alpha}^{\mu}(a) = 0. \quad (17)$$

Эти собственные функции предполагаются нормированными:

$$\sum_{\alpha=1}^M \int_0^a [\Psi_{\alpha}^{\nu}(x)]^2 dx = 1; \quad \sum_{\alpha=1}^M \int_0^a [\mathring{\Psi}_{\alpha}^{\mu}(x)]^2 dx = 1 \quad (18)$$

и могут быть представлены в виде линейных комбинаций функций $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ и $\mathring{\Phi}_{\alpha\beta}(x)$ при собственных значениях энергии E^{ν} и E^{μ} :

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\alpha}^{\nu}(x) &= \sum_{\beta=1}^M \Phi_{\alpha\beta}(E^{\nu}, x) \Gamma_{\beta}^{\nu}; \\ \mathring{\Psi}_{\alpha}^{\mu}(x) &= \sum_{\beta=1}^M \mathring{\Phi}_{\alpha\beta}(E^{\mu}, x) \mathring{\Gamma}_{\beta}^{\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где коэффициенты Γ (компоненты нормировочных векторов) определяются граничными значениями производных собственных векторов Ψ :

$$\Gamma_{\alpha}^{\nu} = [\Psi_{\alpha}^{\nu}]'_{x=a}; \quad \mathring{\Gamma}_{\alpha}^{\mu} = [\mathring{\Psi}_{\alpha}^{\mu}]'_{x=a}. \quad (20)$$

Нам также понадобятся векторы решений системы (9) с опорной потенциальной матрицей $\mathring{V}_{\alpha\beta}(x)$, построенные по аналогии с (19), но при значениях энергии $E = E^{\nu}$, отвечающих искомой потенциальной матрице $V_{\alpha\beta}(x)$:

$$\mathring{\Psi}_{\alpha}^{\nu}(x) = \sum_{\beta=1}^M \mathring{\Phi}_{\alpha\beta}(E^{\nu}, x) \Gamma_{\beta}^{\nu}. \quad (21)$$

С помощью векторов (19) и (21) могут быть построены вырожденное ядро Q интегрального уравнения (13) и соответствующее ему K :

$$Q_{\alpha\beta}^B(x, y) = \sum_{\nu=1}^M \mathring{\Psi}_{\alpha}^{\nu}(x) \mathring{\Psi}_{\beta}^{\nu}(y) - \sum_1^M \mathring{\Psi}_{\alpha}^{\mu}(x) \mathring{\Psi}_{\beta}^{\mu}(y); \quad (22)$$

$$K_{\alpha\beta}^B(x, y) = - \sum_{\nu=1}^M \Psi_{\alpha}^{\nu}(x) \mathring{\Psi}_{\beta}^{\nu}(y) + \sum_{\mu=1}^M \Psi_{\alpha}^{\mu}(x) \mathring{\Psi}_{\beta}^{\mu}(y). \quad (23)$$

Эти формулы могут быть записаны и в более компактной форме скалярных произведений:

$$Q(x, y) = \hat{\Psi}_0^{t\tau}(x) \hat{\Psi}_0^{T-}(y); \tag{22'}$$

$$K(x, y) = -\hat{\Psi}^{t\tau}(x) \hat{\Psi}_0^{T-}(y), \tag{23'}$$

где шляпка ^ над Ψ обозначает вектор в трех (или двух) «пространствах» с компонентами, пронумерованными каналовым индексом α , верхними индексами ν или μ и одним невыписанным индексом, указывающим на связь данной компоненты с параметрами исходного подпространства группы (μ), например, $\hat{V}_{\alpha\beta}^{\nu}(x)$ или искомого подпространства группы (ν) $\hat{V}_{\alpha\beta}^{\nu}(x)$ взаимодействия. Верхние индексы T, t, τ означают соответствующее транспонирование векторов в этих «пространствах». Для простоты мы будем опускать в большинстве случаев переменную x в аргументах функций

$$\begin{aligned} & \hat{\Psi}^{t\tau}(x) = \\ = & \left\{ \begin{array}{l} \left[\Psi_{\alpha=1}^{\nu=1}(x); \Psi_{\alpha=1}^{\nu=2}; \dots; \Psi_{\alpha=1}^{\nu=M} \right] \\ \left[\Psi_{\alpha=2}^{\nu=1}(x); \Psi_{\alpha=2}^{\nu=2}; \dots; \Psi_{\alpha=2}^{\nu=M} \right] \\ \dots \\ \left[\Psi_{\alpha=M}^{\nu=1}(x); \Psi_{\alpha=M}^{\nu=2}; \dots; \Psi_{\alpha=M}^{\nu=M} \right] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \left[\Psi_{\alpha=1}^{\mu=1}; \Psi_{\alpha=1}^{\mu=2}; \dots; \Psi_{\alpha=1}^{\mu=M} \right] \\ \left[\Psi_{\alpha=2}^{\mu=1}; \Psi_{\alpha=2}^{\mu=2}; \dots; \Psi_{\alpha=2}^{\mu=M} \right] \\ \dots \\ \left[\Psi_{\alpha=M}^{\mu=1}; \Psi_{\alpha=M}^{\mu=2}; \dots; \Psi_{\alpha=M}^{\mu=M} \right] \end{array} \right\} = \\ = & \left\{ \hat{\Psi}^{\nu t}(x), \hat{\Psi}^{\mu t}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Это вектор-столбец по отношению к α -компонентам и вектор-строка по отношению к ν - и μ -компонентам

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^{T-}(y) = & \left\{ \begin{array}{l} \left[\Psi_{\beta=1}^{\nu=1}(y) \right] \left[\Psi_{\beta=2}^{\nu=1} \right] \dots \left[\Psi_{\beta=M}^{\nu=1} \right] \\ \left[\Psi_{\beta=1}^{\nu=2}(y) \right] \left[\Psi_{\beta=2}^{\nu=2} \right] \dots \left[\Psi_{\beta=M}^{\nu=2} \right] \\ \dots \\ \left[\Psi_{\beta=1}^{\nu=M}(y) \right] \left[\Psi_{\beta=2}^{\nu=M} \right] \dots \left[\Psi_{\beta=M}^{\nu=M} \right] \\ \left[\Psi_{\beta=1}^{\mu=1}(y) \right] \left[\Psi_{\beta=2}^{\mu=1} \right] \dots \left[\Psi_{\beta=M}^{\mu=1} \right] \\ \left[\Psi_{\beta=1}^{\mu=2}(y) \right] \left[\Psi_{\beta=2}^{\mu=2} \right] \dots \left[\Psi_{\beta=M}^{\mu=2} \right] \\ \dots \\ \left[\Psi_{\beta=1}^{\mu=M}(y) \right] \left[\Psi_{\beta=2}^{\mu=M} \right] \dots \left[\Psi_{\beta=M}^{\mu=M} \right] \end{array} \right\} = \\ = & \left\{ \hat{\Psi}^{\nu T}(y), \hat{\Psi}^{\mu T}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Верхний индекс «—» соответствует знаку μ -компонент вектора (т. е. μ -подвектора). Это вектор-строка по отношению к α -компонентам и вектор-столбец по отношению к ν - и μ -компонентам. Векторы $\hat{\Psi}_0^{t\nu}(x)$ и $\hat{\Psi}_0^{T-}(x)$, отвечающие опорной матрице $\hat{V}_{\alpha\beta}(x)$, имеют аналогичный вид. Ядра K и Q не имеют $\nu - \mu$ -структуры.

Подставляя Q и K в вырожденной форме (22), (23) в интегральное уравнение (13), получаем алгебраические уравнения для собственных векторов $\hat{\Psi}$:

$$\hat{\Psi}^{t\nu}(x) \left[1 + \int_x^a \hat{\Psi}_0^{T-}(y) \hat{\Psi}_0^{t\nu}(y) dy \right] = \hat{\Psi}_0^{t\nu}(x). \tag{24}$$

Решение этих уравнений может быть записано в замкнутой форме:

$$\hat{\Psi}^{t\nu}(x) = \hat{\Psi}_0^{t\nu}(x) \{P(x)\}^{-1}, \tag{25}$$

где величина $P(x)$ представляет собой скаляр в пространстве каналовых индексов α и матрицу в векторных пространствах, с компонентами, нумеруемыми с помощью ν и μ :

$$P(x) = 1 + \int_x^a \hat{\Psi}_0^{T-}(y) \hat{\Psi}_0^{t\nu}(y) dy, \tag{26}$$

где ν -, μ -структура P такова: $\begin{bmatrix} \hat{p}^{\nu\nu'} & \hat{p}^{\nu\mu'} \\ \hat{p}^{\mu\nu'} & \hat{p}^{\mu\mu'} \end{bmatrix}$.

Ядро $K^B(x, y)$ теперь запишется в виде

$$K^B(x, y) = -\{\hat{\Psi}_0^{t\nu}(x) [P(x)]^{-1}, \hat{\Psi}_0^{T-}(y)\}, \tag{23''}$$

а для одинаковых аргументов [ср. (4.1.9) в книге Шадана и Сабатье [57)] так:

$$\begin{aligned} \hat{K}^B(x, x) &= \text{Sp} \{ \hat{\Psi}_0^{T-}(x) P^{-1}(x) \hat{\Psi}_0^{t\nu}(x) \} = \\ &= \text{Sp} \left\{ P^{-1}(x) \frac{d}{dx} [P(x)] \right\} = \frac{d}{dx} [\ln \det P(x)]. \end{aligned} \tag{23'''}$$

Одно из удобств записи решений в явной форме (25) состоит в возможности проверки (прямой подстановкой, см. [52]), что матричное уравнение Шредингера (9) с потенциальной матрицей, получаемой согласно (14):

$$\begin{aligned} \hat{V}(x) &= 2\{\hat{\Psi}_0^{t\nu}(x)\}' \{P(x)\}^{-1} \hat{\Psi}_0^{T-}(x) - 2\hat{\Psi}_0^{t\nu}(x) P^{-1} P' P^{-1} \hat{\Psi}_0^{T-}(x) + \\ &+ 2\hat{\Psi}_0^{t\nu}(x) P^{-1} \{\hat{\Psi}_0^{T-}(x)\}', \end{aligned} \tag{27}$$

удовлетворяется функцией (25). В (27) мы использовали правило дифференцирования обратной матрицы:

$$\{P^{-1}\} = -P^{-1} P' P^{-1}. \tag{28}$$

С помощью (14) и (23'') получается еще одна, более компактная форма записи потенциальной матрицы [ср. равенство (4.1.10) в книге Шадана и Сабатье [57]]:

$$\hat{V}(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} [\ln \det P(x)], \quad (29)$$

$$P' = -\hat{\Psi}_0^{T-}(x) \hat{\Psi}_0^{t\tau}(x). \quad (30)$$

При проверке решения принимаем во внимание также уравнение Шредингера для свободного движения:

$$-\{\hat{\Psi}_0^{t\tau}(x)\}'' = \hat{\Psi}_0^{t\tau}(x) \hat{E}; \quad -\{\hat{\Psi}_0^{T-}(x)\}'' = \hat{E} \hat{\Psi}_0^{T-}(x) \quad (31)$$

и то, что вронскиан свободных решений может быть переписан в форме (обратите внимание на порядок множителей в правой части):

$$W = \int_x^a \hat{\Psi}_0^{T-}(y) \hat{\Psi}_0^{t\tau}(y) dy \hat{E} - \hat{E} \int_x^a \hat{\Psi}_0^{T-}(y) \hat{\Psi}_0^{t\tau}(y) dy, \quad (32)$$

где \hat{E} представляет собой диагональную $2MN \times 2MN$ -матрицу, составленную из значений энергии $E^\nu - \varepsilon_\alpha$, $E^\mu - \varepsilon_\alpha$, а интегралы могут быть выражены через P с помощью уравнения (26),

$$W = (P - 1) \hat{E} - \hat{E} (P - 1). \quad (32')$$

Для проверки удовлетворения собственной функцией (25) граничных условий (17) и того, что ее производная равна $\hat{\Gamma}^{t\tau}$ при $x = a$, достаточно взять уравнение (24) при $x = 0$; $x = a$ и производную от обеих частей (24) при $x = a$. Нужно только учитывать очевидный факт, что интеграл в уравнении (26) исчезает в пределе $x \rightarrow a$, а также условие ортонормировки для $\hat{\Psi}_0$ [так, мы имеем $\hat{P}^{\mu\mu'}(0) = 1 - 1 = 0$ для μ -подматрицы в P]. Следовательно, в μ -подвекторной компоненте уравнения (24)

$$\hat{\Psi}^\nu(x) \hat{P}^{\nu\mu}(x) + \hat{\Psi}^{\mu'}(x) \hat{P}^{\mu\mu'}(x) = \hat{\Psi}_0^\mu(x) \quad (33)$$

мы имеем $[\hat{P}^{\mu\mu'}(0) = 0$, см. также уравнение (17)] при $x = 0$:

$$\hat{\Psi}^\nu(0) \hat{P}^{\nu\mu}(0) = \hat{\Psi}_0^\mu(0) \equiv 0. \quad (33')$$

Если $\hat{P}^{\nu\mu}$ — квадратная матрица (т. е. размерности ν - и μ -пространств одинаковы), то уравнение (24') дает $\hat{\Psi}^\nu(0) \equiv 0$, как требуют граничные условия. Если бы мы попытались построить модель системы с теми же спектральными данными $[\hat{E}; \hat{\Gamma}]$, что и для опорного потенциала, но с добавлением нескольких новых уровней, подматрица $\hat{P}^{\nu\mu}$ не была бы квадратной и уравнение (24') не обеспе-

чивало бы выполнение граничного условия. Аналогично мы не можем убрать из спектра опорного потенциала какие-либо уровни без изменения спектральных данных других уровней.

Компонента v уравнения (17) при $x = a$ дает:

$$\hat{\Psi}^v(a) = \hat{\Psi}_0^v(a) = 0; [\hat{\Psi}^v]'_{x=a} = [\hat{\Psi}_0^v]'_{x=a} = \hat{\Gamma}^v.$$

Представление о движении по переменной α , нумерующей каналы.

В сложном движении волн в квантовой многоканальной системе можно выявить простую, но специфическую составляющую. Оказывается, легко построить точно решаемые модели движения по дискретной переменной α , нумерующей каналы: разностные аналоги прямоугольной ямы, потенциалов Баргмана и др. Так что интуиция, накопленная при рассмотрении распространения волн в обычном конфигурационном пространстве, переносится и на новое измерение. В частности, могут существовать резонансы или связанные состояния особой природы (отвечающие стоячим α -волнам).

Подобная же идея — отделить в случае движения в периодическом поле свободное распространение волн по дискретной переменной, нумерующей периоды, от колебаний на каждом периоде — позволяет по-новому посмотреть на эту важнейшую квантовую задачу.

Как уже отмечалось выше, уравнения движения для многих сложных квантовых систем удобно сводить к связанным одномерным уравнениям Шредингера с потенциальной матрицей $V_{\alpha, \alpha'}(x)$ и «канальными функциями» Ψ_{α} . Здесь индексы α представляют собой переменные, сопряженные с пространственными переменными исходной многомерной волновой функции, от которых удалось «избавиться» с помощью обобщенного преобразования Фурье, оставив лишь одну из них x . Выигрыш в вычислительной простоте (дискретность значений α , возможность ограничиться конечным их числом) сопровождается, однако, потерей физической прозрачности формализма. Нам труднее представить себе закономерности поведения канальных функций в зависимости от α , чем форму волновой функции в обычном пространстве.

В данном разделе показано, что наглядность поведения функций в α -пространстве может быть в значительной степени восстановлена. Можно представить себе движение по α : колебания, стоячие волны, вызывающие резонансы рассеяния, распространение пакетов в нестационарной постановке задачи. Ключевым моментом здесь является «выделение» оператора кинетической энергии α -движения из матрицы взаимодействия $V_{\alpha, \beta}$. В результате мы получаем привычный гамильтониан и по новой переменной. Если к тому же выбрать модельную потенциальную матрицу, допускающую разделение координат x и α , то можно получить в чистом виде канальную составляющую волновой функции и спектра (связанных состояний и резонансов).

Такой же подход неожиданно оказался возможным и к совсем другим задачам: о движении частицы в периодическом поле. Они рассмотрены ниже.

Модель, допускающая разделение переменных x и α . Сначала нужно уточнить, что мы будем понимать под термином «каналы». При описании сложных многомерных, многочастичных квантовых систем бывает удобно разлагать волновую функцию $\Psi(x, \xi)$, зависящую от нескольких переменных по известным базисным функциям $\Phi_\alpha(\xi)$, где ξ обозначает все переменные системы, кроме *одной* x , специально выделенной [разложение по каналам α ; ср. с (12)]:

$$\Psi(x, \xi) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x) \Phi_{\alpha}(\xi). \quad (34)$$

Подставляя (34) в уравнение Шредингера и проецируя последнее на разные базисные функции $\Phi_{\alpha}(\xi)$, получаем систему **одномерных** связанных уравнений Шредингера для коэффициентов Ψ_{α} разложения (34):

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Psi_{\alpha}(x) + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta}(x) \Psi_{\beta}(x) = (E - \varepsilon_{\alpha}) \Psi_{\alpha}(x). \quad (35)$$

В системе (35) волны могут двигаться как по пространственной переменной x , так и переходить из одного канала α в другие каналы β . Решать одномерные системы типа (35) на ЭВМ обычно бывает проще, чем исходное дифференциальное уравнение Шредингера. В то же время физическая интуиция о деталях механизма квантовых процессов, определяемых матрицей взаимодействия $V_{\alpha\beta}(x)$, развита пока очень слабо. Приходится закладывать исходные данные в ЭВМ и получать из нее численные результаты, практически не представляя себе качественно связь $V_{\alpha\beta}(x)$ со спектральными параметрами или данными рассеяния.

Прояснить здесь ситуацию [заглянуть в «черный ящик» системы (35)] позволяют точно решаемые модели. Простейшие из них — это δ -образные и постоянные матрицы взаимодействия. Класс таких решаемых моделей образуют матрицы баргмановского типа (см. [20, гл. 5]).

В работе [91] рассматривается новый подход к построению точно решаемых моделей, связанных с **разделением движения по пространственной x и каналовой α переменным**.

Как теперь стало ясно, трудность перенесения наших привычных представлений о движении квантовых волн в x -пространстве на движение по α состоит в отсутствии в многоканальном операторе Шредингера оператора кинетической энергии \hat{T}_{ch} перемещения по каналам. Поскольку переменная α дискретная, построим такой оператор как конечно-разностный аналог производной второго порядка по α (с шагом Δ):

$$\hat{T}_{\text{ch}} \Psi_{\alpha} = -(\Psi_{\alpha+1} - 2\Psi_{\alpha} + \Psi_{\alpha-1})/\Delta^2. \quad (36)$$

Можно считать, что \hat{T}_{ch} содержится в матрице взаимодействия $V_{\alpha\beta}$. Выделим его [прибавляя и вычитая соответствующие члены в (35)]

и включая ε_α в потенциальную сумму]:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Psi_\alpha(x) - (\Psi_{\alpha+1} - 2\Psi_\alpha + \Psi_{\alpha-1})/\Delta^2 + \sum_{\beta} \tilde{V}_{\alpha\beta}(x) \Psi_\beta(x) = E\Psi_\alpha(x), \quad (37)$$

где новая эффективная матрица взаимодействия $\tilde{V}_{\alpha\beta}(x)$ имеет вид

$$\tilde{V}_{\alpha\beta}(x) = V_{\alpha\beta}(x) + (\delta_{\alpha+1, \beta} - 2\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha-1, \beta})/\Delta^2 + \delta_{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha. \quad (38)$$

Уравнение (37) является уравнением в частных производных (обычных по x и разностных по α).

Воспользуемся теперь свободой выбора матрицы $V_{\alpha\beta}(x)$, построим простые точно решаемые модели, в которых бы отделялось

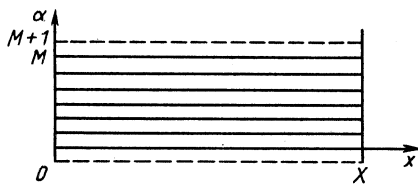


Рис. 24. Двумерная прямоугольная область в (α, x) -пространстве, где движение описывается дифференциальным уравнением (4) в частных производных. Переменная α принимает дискретные значения, а x — непрерывные. Отсутствующие каналы с $\alpha=0$ и $\alpha=M+1$ показаны штриховыми линиями ($\Psi_{\alpha=0} = \Psi_{\alpha=M+1} = 0$)

движение по каналовой переменной α . Можно, например, специальным подбором $V_{\alpha\beta}(x)$ получить $\tilde{V}_{\alpha\beta}(x)$ в виде прямоугольной ямы

$$\tilde{V}_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}V_0 \text{ при } 0 < x < R; 0 < \alpha, \beta < M \quad (39)$$

с дополнительным граничным условием, отвечающим не только запирающей бесконечной яме, но и R -матричной теории рассеяния:

$$\Psi_\alpha(x) = 0 \text{ при } x \leq 0, x \geq R, \alpha \leq 0, \alpha > M. \quad (40)$$

Здесь выбором конечного числа M мы ограничи́ли количество связанных каналов. Двумерная область, непрерывная по x и дискретная по α , где мы ищем решение, изображена на рис. 24.

Для того чтобы выполнялось условие прямоугольности (39), матрица взаимодействия $V_{\alpha\beta}$ тоже должна быть тридиагональной [см. (38), (39)]:

$$V_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}V_0 - (\delta_{\alpha+1, \beta} - 2\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha-1, \beta})/\Delta^2 - \delta_{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha. \quad (41)$$

Из этой формулы следует важный качественный вывод: ширина ямы $L = M\Delta$ по переменной α , тем уже, чем сильнее связь каналов [в выражение для L шаг Δ входит в виде множителя, а в потенциале (41) он стоит в знаменателе и в квадрате].

В двумерном дифференциально-разностном уравнении (37) с матрицей взаимодействия из (39) и граничными условиями (40) разделяются переменные x и α ($\Psi_\alpha(x) = \Psi_n(x) \chi_{\alpha m}$):

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Psi_n(x) + V_0 \Psi_n(x) = \varepsilon_n \Psi_n(x); \quad \Psi_n(0) = 0; \quad \Psi_n(R) = 0; \quad (42)$$

$$-(\chi_{\alpha+1, m} - 2\chi_{\alpha m} + \chi_{\alpha-1, m}) = \Delta^2 \lambda_m \chi_{\alpha m}; \quad \chi_{0m} = 0, \quad \chi_{M+1, m} = 0. \quad (43)$$

Уравнение (42) имеет обычный спектр бесконечной прямоугольной ямы: $\varepsilon_n = V_0 + n^2 \pi^2 / R^2$, а разностная задача (43) на собственные значения в прямоугольной яме по переменной α имеет M уровней энергии:

$$\lambda_m = [1 - \cos(\pi m / M)] / \Delta^2,$$

которые лишь при $m \ll M$ близки к уровням соответствующей задачи с непрерывной α :

$$\lambda_m \xrightarrow{m \ll M} m^2 n^2 / L^2, \quad \text{где } L = M \Delta^2.$$

Полный спектр системы представляет собой сумму спектров для движений по переменным x и α :

$$E_{nm} = \varepsilon_n + \lambda_m. \quad (44)$$

Меняя ширины ям R и L , можно сжимать и растягивать «системы» уровней ε_n и λ_m ; например, увеличивая L , мы получим над каждым уровнем колебаний по x «полосу» возбуждений колебаний по α . Напомним, кстати, специфику конечно-разностного спектра прямоугольной ямы. В отличие от дифференциальной задачи, с ростом энергии возбуждения расстояние между уровнями увеличивается лишь до $n = M/2$, а выше уровни начинают сгущаться (спектр симметричен относительно своей середины).

В R -матричной теории рассеяния указанным уровням соответствуют резонансы (только там обычно используют несколько иные граничные условия на собственные функции, см. книгу Лейна и Томаса [28]). Идею о возможности возникновения резонансов, отвечающих α -колебаниям, впервые высказал А. И. Базь, он же сделал попытку построить точно решаемую модель с такими колебаниями. Однако предложенная им матрица взаимодействия не допускала разделения переменных x и α и в гамильтониане не выделялся оператор кинетической энергии α -движения (см. [1]). Это мешало ясности физической картины. Ряд работ, посвященных α -резонансам, был выполнен Ю. А. Симоновым и др. [53]; они назвали их *сс* (coupled channel)-резонансы. В этих работах также не разделялись переменные. А с педагогической точки зрения предпочтительнее вводить понятие «каналовых» резонансов, разделяя переменные конфигурационного и каналового пространств.

Ясно, что на случай каналовой переменной обобщаются и другие точно решаемые модели, помимо прямоугольной ямы (см. [20]). Можно рассмотреть также случаи многих каналовых переменных,

континуума каналов, нелокальной связи по α (например, сепарабельных по α матриц взаимодействия). Выше было показано, как из потенциальной матрицы $V_{\alpha\beta}$ выделяется оператор второй разностной производной (с тридиагональной матрицей). Разностным производным более высокого порядка (4-, 6-го и т. д.) отвечают матрицы с большим числом диагоналей (5, 7 и т. д.). Если оператору (кинетической энергии) второго порядка отвечают два линейно-независимых решения, например, волны, бегущие в противоположных направлениях, то оператору четвертого порядка уже четыре независимых волны (например, $\exp(\pm ik_1 n)$; $\exp(\pm ik_2 n)$ для «свободного движения», причем связь волновых чисел k_1, k_2 с энергией E иная, чем в случае обычного уравнения Шредингера, см. [20]). Аналогично для 6-го порядка — шесть волн и т. д. Так что потенциальной матрице общего вида со всеми M отличными от нуля диагоналями соответствует сложная система волн, распространяющихся по «каналовому измерению». Для матриц, зависящих от x , переменные α и x не разделяются, и происходит смешивание колебаний по α и x .

Еще одним наглядным модельным примером участия связи каналов в формировании спектра системы может служить разностный (по $x : x_n = n \cdot \Delta$) аналог многоканальных уравнений (35):

$$\begin{aligned}
 & -[\Psi_\alpha(n+1) - 2\Psi_\alpha(n) + \Psi_\alpha(n-1)]/\Delta^2 + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta}(n) \Psi_\beta(n) = \\
 & = (E - \varepsilon_\alpha) \Psi_\alpha(n). \tag{35'}
 \end{aligned}$$

Если поставить однородные граничные условия $\Psi_\alpha(0) = 0$, $\Psi_\alpha(N+1) = 0$, то получим $M \times N$ однородных алгебраических уравнений на $M \times N$ неизвестных $\Psi_\alpha(n)$; $\alpha = 1, 2, \dots, M$; $n = 1, 2, \dots, N$, имеющих решения при $N \times M$ собственных значениях энергии (т. е. спектр формируется из N колебательных состояний по x_p и M — по α). Удобство этой модели со всеми дискретными переменными, принимающими конечное число значений, состоит в возможности пересчитать точки спектра (связанные состояния и резонансы) и увидеть, как их общее число зависит от числа каналов.

Движение из канала в канал в специальном случае одинаковых каналов непосредственно связано с хорошо известным явлением снятия вырождения за счет включения связи между каналами. Действительно, пусть имеется M несвязанных уравнений Шредингера с одинаковыми потенциальными ямами и, следовательно, с одинаковыми уровнями. Если рассматривать эти уравнения как единую систему, то уровни ее спектра будут M -кратно вырождены. Включив же связь каналов (вводя недиагональные элементы в потенциальную матрицу), мы расщепим уровни, что можно интерпретировать как появление полосы колебательных возбуждений по каналовой переменной α .

Задача Блоха (полосатый спектр). С точки зрения предложенного подхода, оказывается, можно рассмотреть и движение частицы в периодическом внешнем потенциале. Введем эквивалентную задачу

о движении в двумерной (α, x) -полосе (лестнице, рис. 25). Для этого запишем сначала уравнение для движения частицы на одном из периодических интервалов (обозначим его номером α , равным 0, $\pm 1, \pm 2 \dots$):

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Psi_\alpha(x) + V(x) \Psi_\alpha(x) = E \Psi_\alpha(x); \quad 0 \leq x \leq X; \quad (45)$$

$$\Psi_\alpha(x) = \exp(i\gamma) \Psi_{\alpha+1}(x); \quad (46)$$

$$\Psi_\alpha(0) = \exp(i\gamma) \Psi_\alpha(X); \quad \Psi'_\alpha(0) = \exp(i\gamma) \Psi'_\alpha(X). \quad (47)$$

Прибавим и вычтем теперь в левой части уравнения Шредингера разностный оператор кинетической энергии типа (36) ($\hat{X} = \Delta$):

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Psi_\alpha(x) + \hat{T}_{ch} \Psi_\alpha(x) + [\Psi_{\alpha+1}(x) - 2\Psi_\alpha(x) + \Psi_{\alpha-1}(x)]/\Delta^2 + V(x) \Psi_\alpha(x) = E \Psi_\alpha(x),$$

которое перепишем, заменяя $\Psi_{\alpha\pm 1}$ на Ψ_α с помощью формулы (46):

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Psi_\alpha(x) + \hat{T}_{ch} \Psi_\alpha(x) + \tilde{V}(x) \Psi_\alpha(x) = E \Psi_\alpha(x), \quad (48)$$

где новый эффективный потенциал \tilde{V} имеет вид

$$\tilde{V}(x) = V(x) + [\exp(-i\gamma) - 2 + \exp(i\gamma)]/\Delta^2. \quad (49)$$

Уравнение (48) допускает разделение переменных x и α . В результате получаем две одномерные задачи: одну — Штурма — Лиувилля

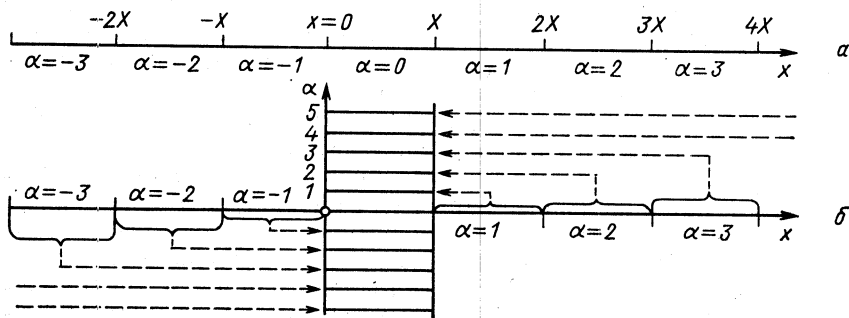


Рис. 25. «Перестроение» оси x на рис. a , разделенной на периоды α , в двумерную (α, x) -область в виде бесконечной лестницы (b) конечных интервалов (периодов), пронумерованных индексом α (см. рис. a). Два типа движений вдоль x (стоячие волны в пределах одного периода и свободное «движение по периодам») легче представлять себе разделенными на двумерной лестнице (b)

вилля на конечном отрезке длиной R с однородными (но комплексными) граничными условиями (47), а другую для свободного движения по дискретной переменной α , описываемого разностным уравне-

нием второго порядка $[\Psi_{\alpha n \varepsilon}(x) = \Psi_n(x) \chi_{\alpha \varepsilon}]$:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \Psi_n(x) + \tilde{V}(x) \Psi_n(x) = \varepsilon_n \Psi_n(x); \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_n(0) &= \exp(i\gamma) \Psi_n(R); \quad \Psi'_n(0) = \exp(i\gamma) \Psi'_n(R); \\ -(\chi_{\alpha+1, \lambda} - 2\chi_{\alpha\lambda} + \chi_{\alpha-1, \lambda})/\Delta^2 &= \lambda\chi_{\alpha\lambda}, \quad \lambda = 1 - \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Спектр задачи (50) с граничными условиями, отвечающими (47), чисто дискретный, а (45) представляет собой разностный аналог уравнения Шредингера для свободного движения. Такому уравнению соответствует непрерывный спектр, но лишь на ограниченном интервале (разрешенная энергетическая полоса) в результате получается полосный спектр. Хотя предложенный способ изложения задачи Блоха эквивалентен по физической сути обычному ее описанию, но педагогически предпочтительнее разделить два вида движения вдоль одной оси x : колебания внутри одного периода и «движение по периодам», чтобы они не путались, и сопоставить каждому более простые уравнения.

Чтобы подчеркнуть общность с другими задачами, было предложено [95] называть независимые решения в периодическом поле «блоховскими синусами, косинусами, экспонентами с действительными и мнимыми частотами», подобно тому, как можно сопоставлять функциям Бесселя — синусы, функциям Неймана — косинусы, функциям Ханкеля — экспоненты или говорить о «кулоновских, квазипотенциальных синусах» и т. д. Общие решения на произвольных отрезках строятся из линейных комбинаций таких решений, с постоянными коэффициентами, определяемыми из условий сшивания. В частности, можно «вшить» в периодическое поле участок, у которого зона колеблющихся решений (разрешенная) попадает в запрещенную энергетическую зону всей системы, где решения экспоненциально растут или затухают. Таким образом, в запрещенной зоне может быть получено связанное состояние (даже выше непрерывного спектра). И, наоборот, кусок лакуны в полосе проводимости, играет роль эффективного потенциального барьера. Комбинации таких барьеров могут составлять системы с резонансным туннелированием для блоховских волн. Сдвиги зон на конечных участках можно осуществлять с помощью дополнительных потенциалов, например, постоянных на каком-либо участке оси ($\pm V_0 = \text{const}$ дает параллельный сдвиг соответственно вверх и вниз). Представляет интерес рассмотрение временной эволюции туннелирования волновых пакетов, построенных из блоховских волн (по аналогии с [91]).

Блоховские решения можно использовать в различных подходах обратной задачи (на всей оси [96], на полуоси — по Гельфанду — Левитану или по Марченко, на конечном отрезке — в R -матричной теории и т. п.) для построения различных квадратично интегрируемых возмущений периодического поля. Так можно строить потенциальные добавки баргмановского типа, в том числе со связанными

состояниями в зонах проводимости и в запрещенных зонах [95]. Все эти модели расширяют набор элементов нашего «квантового конструктора».

Приведенные рассуждения распространяются и на многоканальные и многочастичные системы [95]. Спектр матричной (многоканальной) периодической задачи тоже полосатый. Если в какой-либо точке имеется волна лишь в одном из каналов, то можно ожидать в соседних точках из-за возмущений периодическим полем появления волн и в других каналах. Однако имеется N (по числу каналов) собственно канальных состояний, для которых относительные веса канальных функций остаются неизменными при сдвиге координаты x на период. Интересно было бы исследовать с помощью многоканальной техники движение двух (или более) связанных частиц в периодическом поле.

Потенциал, меняющийся периодически со временем. Обратимся теперь к нестационарной задаче:

$$i \frac{d}{dt} \Psi(x, t) = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t), \quad (52)$$

где V меняется со временем периодически с периодом T :

$$V(x, t) = V(x, t + T). \quad (52')$$

Рассмотрим установившийся режим, когда волновая функция в разные периоды, но в одной и той же точке отличается лишь на фазовый множитель:

$$\Psi(x, t) = \exp(\pm i\gamma) \Psi(x, t \pm T). \quad (53)$$

Введем новую переменную α , нумерующую периоды, и рассмотрим движение волн в трехмерном пространстве (x, t, α) — задачу, эквивалентную исходной (52), (52'). Пусть по x движение ограничено бесконечными потенциальными стенками в точках $x = 0; R$, а по t зададим однородное граничное условие, соответствующее (53):

$$\Psi_\alpha(x, t) = \exp(\pm i\gamma) \Psi_{\alpha+1}(x, t). \quad (54)$$

Как и в предыдущем разделе, можно отделить свободное движение по переменной α от колебаний внутри периода:

$$\Psi_\alpha(x, t) = \Psi(x, t) \chi_\alpha; \quad \frac{\chi_{\alpha+1} - \chi_\alpha}{\Delta} = \lambda \chi_\alpha, \quad (55)$$

где λ — так называемая квазиэнергия, и отдельно решаем задачу на собственные значения в прямоугольнике $0 \leq x \leq R; 0 \leq t \leq T$ (рис. 26):

$$[-id/dt - d^2/dx^2 + V(x, t) + 2(\cos \gamma - 1)/\Delta^2] \Psi_n(x, t) = \varepsilon_n \Psi_n(x, t);$$

$$E = \varepsilon_n + \lambda.$$

Квазиэнергия (для свободно-го движения по дискретной переменной), как и квазимпульс, имеет конечную полосу разрешенных значений.

Запирание волн в непрерывном спектре. Перейдем теперь к рассмотрению связанных состояний, погруженных в непрерывный спектр (ССПНС). Они представляют довольно редкое явление в квантовом мире. Но они очень интересны как для понимания одного из механизмов образования резонансов (особенно — узких), близких им по своей природе, так и в педагогическом отношении (как иллюстрация неожиданных проявлений квантовых законов, позво-

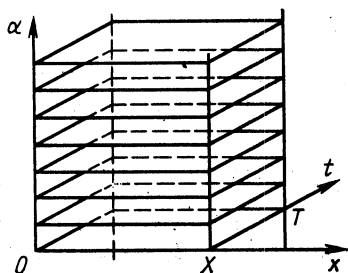


Рис. 26. Трехмерная область в (x, t, α) -пространстве:

свободные волны в α -направлении вместе со стоячими волнами собственных состояний на прямоугольнике $0 \leq x \leq X; 0 \leq t \leq T$ в плоскости (x, t) дают полную волновую функцию Ψ частицы в бесконечной одномерной прямоугольной яме, возмущаемой внешним периодическим потенциалом

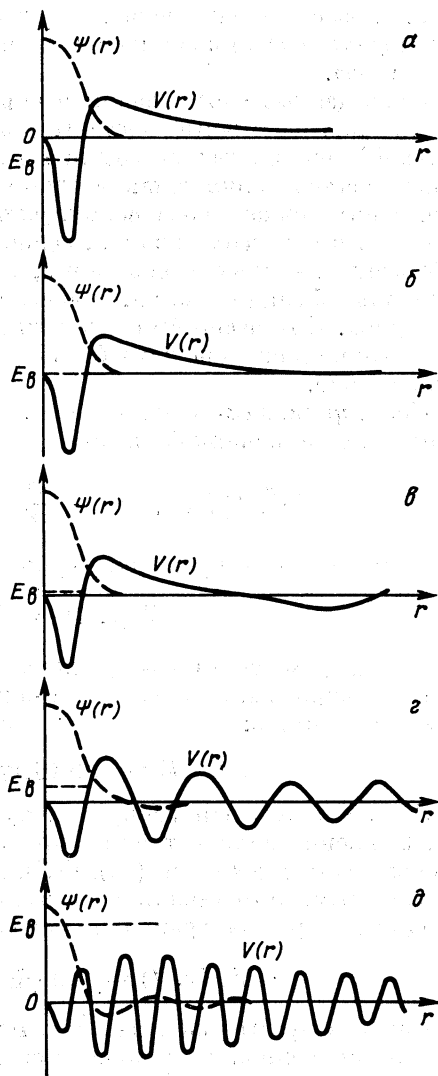


Рис. 27. Деформация потенциала при подъеме состояния из области отрицательных энергий в область непрерывного спектра [87]

ляющая глубже их понять). Первые их примеры в замкнутой аналитической форме были даны Нейманом и Вигнером еще в 1929 г. С тех пор ССПНС привлекали к себе внимание многих физиков и математиков. Появилась даже монография Истхема и Калфа [58], целиком посвященная им (см. также Рида и Саймона [37], т. 3, гл. XI и т. 4, гл. XIII). И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан [8] показали в 1951 г.,

что легко построить потенциалы баргмановского типа, имеющие ССПНС, с помощью уравнений обратной задачи. В [18] и [64] был указан ряд новых одноканальных ССПНС. Здесь мы остановимся в основном на многоканальном случае.

Сравним одноканальную (рис. 27) и двухканальную (рис. 28) системы. При подъеме связанного состояния из области отрицательных энергий в область $E > 0$ в одноканальном случае (рис. 27) в потенциале появляются медленно затухающие [как $\sin(kr)/r$] осцилляции, удерживающие волновую функцию от «вытекания» [87].

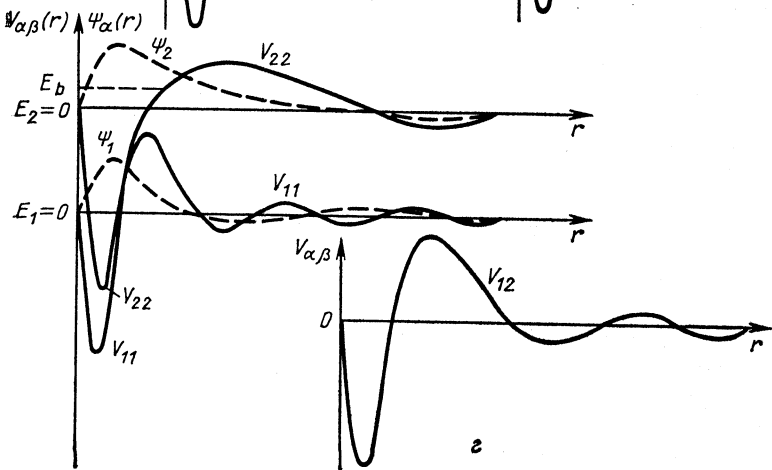
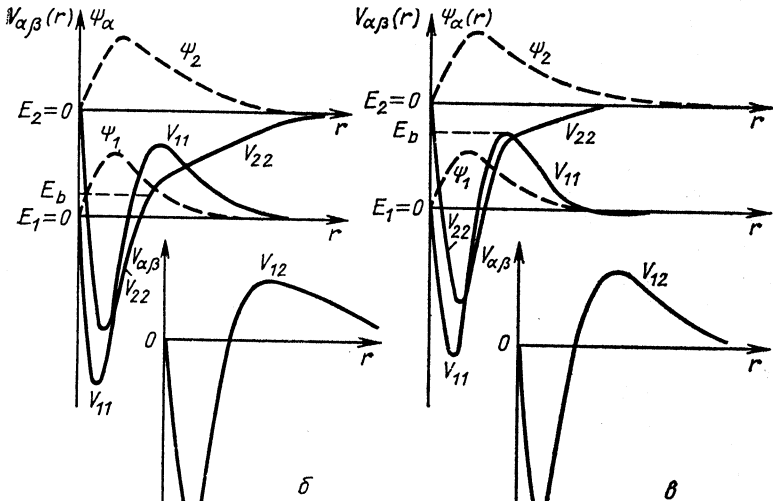
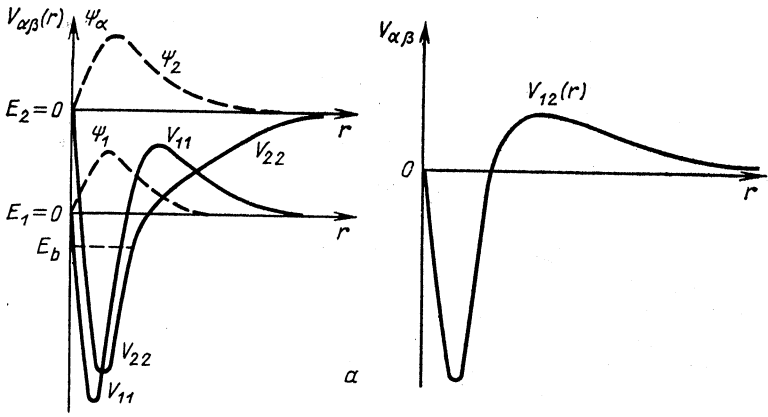
Связь каналов позволяет осуществлять удержание волны в области непрерывного спектра и с короткодействующей (экспоненциально спадающей — рис. 28, б, в) [87] матрицей взаимодействия. Это оказывается возможным при хотя бы одном закрытом канале (энергия выше нижнего $E_1 = 0$, но ниже верхнего $E_2 = 0$ порога открывания каналов). И только когда энергия связанного состояния оказывается выше наивысшего порога (рис. 28, г, д), в матрице взаимодействия появляются слабо затухающие [как $\sin(kr)/r$] осцилляции.

На рис. 28, е, ж показаны матрицы взаимодействия $V_{\alpha\beta}(r)$, отвечающие связанному состоянию в континууме при той же энергии, что и на рис. 28, в, но с измененным нормировочным вектором $\{c_1, c_2\}$ (значений производных канальных функций Ψ_1, Ψ_2 в нуле). При $c_1 = 1; c_2 = 0,4$ влияние закрытого канала ослабляется [см. рис. 28, е (сравнить с рис. 28, в, где $c_1 = c_2 = 1$)]. На рис. 28, ж $c_1 = 1; c_2 = 2$. Это лишний пример роли нормировочных множителей (связи их вариаций с формой потенциальной матрицы).

Упомянем здесь еще такие простые примеры связанных состояний в непрерывном спектре: 1. Резонансы над прямоугольным барьером переходят в пределе бесконечного увеличения высоты барьера в связанные состояния (рис. 29); 2. В двухканальной задаче с разными порогами ϵ_1, ϵ_2 [при $E = \epsilon_\alpha$ энергия $E - \epsilon_\alpha$ в канале α системы (35) равна нулю], при которых открываются отдельные каналы, если устремить к нулю недиагональные элементы $V_{12}(x) = V_{21}(x)$ матрицы взаимодействия, то связанные состояния в потенциальной яме $V_{22}(x)$ канала с более высоким порогом, расположенные между пороговыми значениями энергии ϵ_1 и ϵ_2 , становятся связанными состояниями в непрерывном спектре первого открытого канала (рис. 30).

КОММЕНТАРИИ ПО ЛИТЕРАТУРЕ

Обратная задача для линейного уравнения Шредингера в свое время послужила становлению нового направления в физике и математике — развитию эффективного метода обратной задачи решения нелинейных уравнений (теории солитонов) — «одного из самых красивых открытий математической физики XX столетия» [16]. Теперь же выяснилось, что большинство известных в «линейной» квантовой физике точно решаемых моделей объединяются с точки зрения ново-



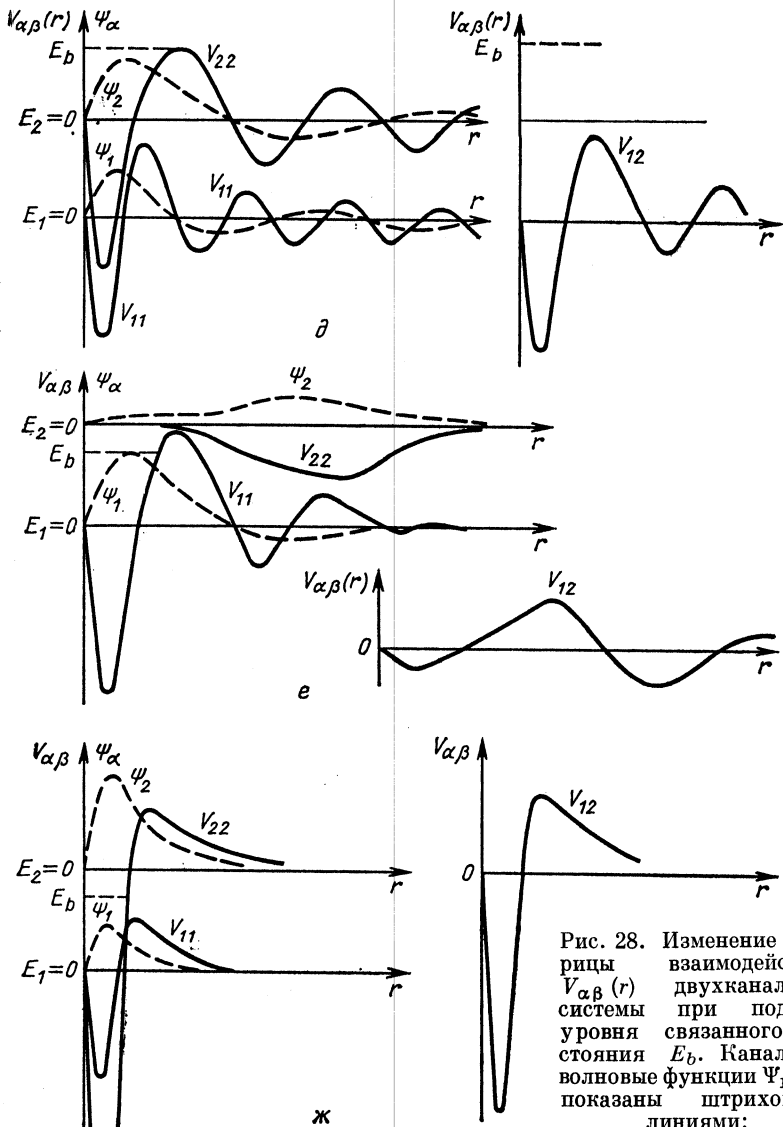


Рис. 28. Изменение матрицы взаимодействия $V_{\alpha\beta}(r)$ двухканальной системы при подъеме уровня связанного состояния E_b . Каналовые волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 показаны штриховыми линиями:

а — уровень E_b расположен ниже нижнего порога непрерывного спектра (обычное связанное состояние); б — энергия связанного состояния E_b расположена в области непрерывного спектра первого канала (первый канал открыт, а второй закрыт). Экспоненциально спадающая при больших r матрица взаимодействия полностью удерживает волны от вытекания из области взаимодействия; в — то же, что и на рис. б, только E_b приподнят ближе к порогу непрерывного спектра второго канала $E_2 = 0$; г — связанное состояние находится в области выше второго порога $E_2 = 0$. Для удержания связанного состояния требуются уже осциллирующие хвосты элементов V_{11} , V_{22} , $V_{12} = V_{21}$ потенциальной матрицы; д — то же, что и на рис. г, только связанное состояние поднято еще выше, из-за чего осцилляции $V_{\alpha\beta}$ усиливаются; е — матрица взаимодействия двухканальной системы со связанным состоянием в континууме и с производной в нуле функции второго канала, уменьшенной в 10 раз по сравнению с рис. в. Обращает на себя внимание появление осцилляций в V_{11} , хотя он остается короткодействующим; ж — то же, что и на рис. е, но $c_1 = 1$, $c_2 = 2$

го математического аппарата (см., например, [10, 12, 24, 50]). Появились новые классы решаемых моделей: оказалось, что существуют аналоги баргмановских потенциалов для нестационарных решений уравнения Шредингера (с двумя переменными x и t [10, 39, 59, 66], а также в многомерном случае [48]).

Например, обобщением системы алгебраических уравнений (24) стационарной задачи служат уравнения с временной зависимостью [см. (44) в [10]]:

$$\sum_{j=1}^N \left[C_{ij} + \frac{e^{i(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\kappa_i - \kappa_j} \right] \Psi_j = -e^{i\bar{\omega}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (56)$$

где $\omega_i = \kappa_i (x + \kappa_i t)$, а потенциал, зависящий от времени, определяется выражением, подобным (29) [см. (37) в [10]]:

$$V(x, t) = 2\partial_x^2 \ln \det P(x, t),$$

где $P(x, t)$ — матрица коэффициентов в системе уравнений (56). Такая же близкая аналогия имеется между формулами для волно-

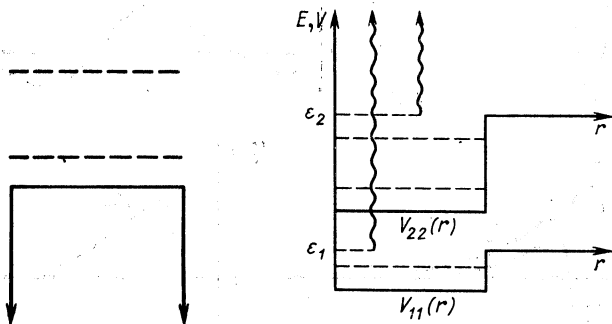


Рис. 29. Полное надбарьерное отражение от бесконечных потенциальных ступенек приводит к связанным состояниям, расположенным выше вершины барьера для бесконечных потенциальных ступенек барьеров конечной высоты, эти связанные состояния переходят в резонансные. Форма вершины барьера для этого не существенна

Рис. 30. Двухканальная модель, демонстрирующая, что при отсутствии связи каналов состояния, отвечающие уровням закрытого канала, являются одновременно и связанными состояниями, погруженными в непрерывный спектр открытого канала (длинная волнистая линия). При включении $V_{12}(r)$ они становятся резонансами [14]

вой функции при любой энергии в стационарном и нестационарном случаях [ср. (4.3.19а) из [57] и (36) из [10]], несмотря на разницу в числе переменных.

Указанные нестационарные и многомерные решения еще предстоит использовать для исследования влияния вариаций отдельных спектральных параметров на форму соответствующих полей подобно «картинкам», приведенным в нашем обзоре.

Замечательно установление тесных связей точных моделей из таких далеких, казалось бы, областей, как нерелятивистская квантовая механика, теория поля и статистическая физика [5, 16, 42]. Здесь важную роль играют уравнения Лакса и Янга — Бэкстера, метод r -матрицы, алгебры Е. К. Склянина [25, 38, 74]. Представление Лакса для одномерного уравнения Шредингера) с конечнозонным потенциалом было предложено Фейрбанксом [61] (см. также [23]).

Перечислим теперь отдельные работы по точно решаемым моделям, появившиеся в последние годы.

В одну группу моделей можно было бы объединить решения, отвечающие уравнениям (шредингеровского типа) со спектральным параметром не E , как обычно, а множителем при потенциале (Б. В. Рудяк, Б. Н. Захарьев [85], Шапан [56], И. В. Поплавский [35], М. Н. Попушной [36]).

Аналоги баргмановских решений для нелокальных потенциалов могут быть получены на основе формализма, развитого В. М. Музафаровым [31]. Ряд точно решаемых моделей объединяется своей связью с суперсимметричными квантовыми системами ([78, 88] и цитируемая там литература). Класс потенциалов с произвольным, но конечным числом связанных состояний, известных в аналитическом виде («квазиточнорешаемые» системы — промежуточные между точно решаемыми и нерешаемыми точно), рассматривался Р. Т. Турбинером и А. Г. Ушверидзе [44, 45].

Простые преобразования, сводящие уравнения движения в кулоновском и осцилляторном потенциалах к уравнениям с потенциалом Морзе, были предложены Хеймекером [93].

Матричное обобщение преобразований Крама — Крейна — Дарбу для случая разных порогов рассматривалось Хуми [70] и А. А. Сузько [40] (см. многомерный случай у Хуми [70]). Как нам сообщил Л. М. Беркович, преобразования, связываемые с именем Дарбу, рассматривались еще Эйлером [60] в 1780—1794 гг. и В. Г. Имшенецким в 1882 г. [21].

Баргмановские нецентральные потенциалы, допускающие разделение переменных в сфероидальных координатах, рассматривались Функе [64], а также А. А. Сузько [40].

Л. П. Нижник [32], рассматривая обратную задачу для гиперболических уравнений, приводит примеры точно решаемых уравнений Дирака. Преобразование, связывающее операторы Шредингера, Клейна — Гордона и Дирака, предложено Леоном [77].

Обратная задача рассеяния на некомпактном графе рассматривалась Н. И. Герасименко [9], а о новой задаче — восстановлении потенциала по положениям узлов собственных функций — см. [68]. Модели с δ -образными взаимодействиями см. в [34, 51].

Теорема о двух спектрах для задач на полуоси с общим граничным условием в нуле и двумя разными асимптотическими условиями

на бесконечности сформулирована М. Г. Гасымовым и Г. Ш. Гусейновым [7].

Общие и простые условия интегрируемости нелинейных уравнений, а также условия эквивалентности, позволившие существенно сократить списки интегрируемых систем и сделать их обозримыми, см. в обзоре А. В. Михайлова и др. [30].

Точно решаемые модели, уравнения которых сводятся преобразованием координат и функций к уравнениям для известных полиномов, рассмотрены Леваи [78].

Хотелось бы еще обратить внимание на новую книгу по теории резонансного рассеяния В. И. Кукулина и др. [73].

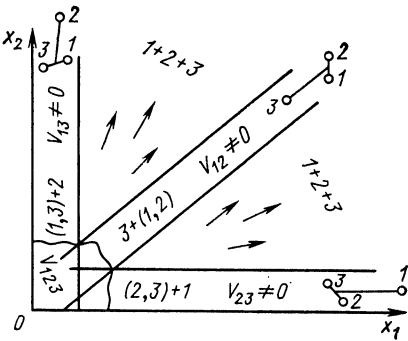
Авторы выражают благодарность И. В. Амирханову, Г. А. Емельяненко, В. Н. Мельникову, И. В. Пузынину и Т. П. Пузыниной, В. С. Ольховскому, В. Н. Пивоварчику, Б. В. Рудяку, Я. А. Смородинскому, А. А. Сузько, В. М. Шилову, с которыми обсуждались вопросы, относящиеся к данному обзору.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Сначала напомним известную и более простую двумерную картину областей взаимодействий для одномерного движения двух частиц в поле третьей, зафиксированной в начале координат (рис. П1). Пусть потенциалы имеют конечный радиус действия (например, прямоугольные ямы). Каждая из трех пересекающихся полос отвечает области, где отличен от нуля один из двухчастичных потенциалов: V_{12} ; V_{13} ; V_{23} .

Вдали от начала координат в этих полосах происходит свободное движение одной из частиц относительно центра масс кластера двух других. Вблизи начала координат (волнистая линия) действуют трехчастичные силы конечного радиуса, если они есть. Каждая из полос может служить входным каналом, где происходит упругое и неупругое рассеяние частицы i на паре (j, k) ; $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$. Другие полосы будут каналами продуктов реакции перераспределения частиц: $j + (i, k)$. В областях между полосами будут расходящиеся волны развала системы на три свободные частицы, если канал развала открыт.

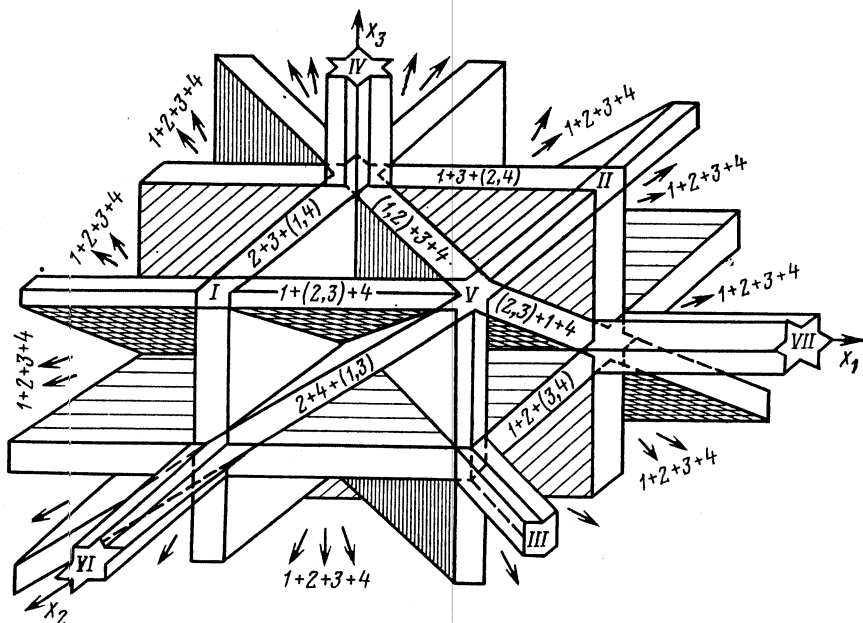
Рассмотрим теперь одномерную задачу движения трех частиц в поле четвертой, находящейся в точке $x = 0$ (см. рис. П2, а), взаимодействующих между собой прямоугольными ямами. В системе центра масс, расположенном в нашем случае в точке нахождения четвертой частицы, конфигурационное пространство уже трехмерно. Область, где отличен от нуля потенциал V_{ij} — взаимодей-



ствия двух частиц i и j , представляет собой плоский слой с толщиной, равной ширине потенциальной ямы (внутри такого слоя эти частицы находятся рядом, а остальные могут располагаться как угодно по отношению друг к другу и к данной паре). Пересечением двух взаимно ортогональных слоев служит «труба», в которой частицы группируются в две пары взаимодействующих частиц $(i, j) +$

Рис. П1. Система трех частиц, совершающих одномерное движение вдоль оси, где в точке $x = 0$ закреплена третья частица

+ (k, l), а вдоль трубы меняется расстояние между парами. На рис. П2 три таких трубы имеют прямоугольное сечение. На пересечении трех слоев образуется труба, внутренняя область которой отвечает трехчастичному компактному кластеру (i, j, k) и четвертой частице, удаленность которой от кластера ме-



$$I = (1,4) + (2,3); \quad II = (1,3) + (2,4); \quad III = (1,2) + (3,4); \quad IV = 3 + (1,2,4); \quad V = 4 + (1,2,3); \\ VI = 2 + (1,3,4); \quad VII = 1 + (2,3,4)$$

Рис. П2. Области взаимодействия частиц 1, 2, 3 с частицей 4, зафиксированной в начале координат трехмерного конфигурационного пространства четырехчастичной системы. Шесть плоских слоев, отвечающих областям, где отличны от нуля короткодействующие потенциалы $V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{23}, V_{24}, V_{34}$ (для каждого двухчастичного потенциала свой слой), пересекаются, проходя под разными углами через начало координат. Семь цилиндрических «труб» (образованных пересечениями слоев), расходящихся из центра (от четвертой частицы), отвечают взаимодействию связанных пар частиц: $(I, 4) + (2, 3)$; $(I, 2) + (3, 4)$; $(I, 3) + (2, 4)$ (три трубы с сечением в виде прямоугольников) или связанных троек частиц с оставшейся (четыре трубы с сечением в виде шестиконечных звезд — форма сечений зависит от соотношения ширины потенциалов). Области вне слоев отвечают полному развалу системы: $1 + 2 + 3 + 4$

няется вдоль трубы (см. на рис. П2 четыре трубы с сечением в виде шестиконечных звезд). В таких трубах могут быть отличными от нуля и трехчастичные взаимодействия. Четырехчастичные короткодействующие силы отличны от нуля вблизи начала координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базь А. И. // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. С. 397—408.
2. Беркович Л. М. Преобразование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Куйбышев: Изд-во Куйбыш. ун-та, 1978.

3. Богданов И. В.//ТМФ. 1985. Т. 65. С. 35—43.
4. Богданов И. В., Демков Ю. Н.//ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 3—16; ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 1798.
5. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
6. Владимиров А. А. Введение в квантовые интегрируемые системы (лекции для молодых ученых). Р17-85-742. Дубна, 1985.
7. Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш.//Диф. уравн. 1989. Т. 25, № 4. С. 588—599.
8. Гельфанд И. М., Левитан Б. М.//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 309—360.
9. Герасименко Н. И.//ТМФ. 1988. Т. 75, № 2. С. 187—200.
10. Дубровин Б. А., Маланюк Т. М., Кричевер И. М., Маханьков В. Г.//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. Вып. 3. С. 579—621.
11. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.//УМН. 1976. Т. 31. Вып. 1. С. 55—83.
12. Дубровин Б. А.//УМН. 1981. Т. 36. С. 11—48; Функц. анализ. 1975. Т. 9. С. 41—45.
13. Жигунов В. П., Захарьев Б. Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. М.: Атомиздат, 1974.
14. Жигунов В. П., Захарьев Б. Н., Ниязгулов С. А., Сузько А. А.//Препринт ОИЯИ Р4-7815. Дубна, 1974.
15. Загребав В. И.//Элементарные процессы при столкновении атомных и молекулярных частиц. Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1977; ЯФ. 1989. Т. 49. С. 1630—1643; Ann. Phys. 1990. Vol. 197. P. 33—93.
16. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
17. Захаров В. Е., Шабат А. Б.//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118—131.
18. Захарьев Б. Н., Пивоварчик В. Н., Сузько А. А.//Теория квантовых систем с сильным взаимодействием. Калинин: КалГУ, 1985. С. 69—81.
19. Захарьев Б. Н., Плеханов Е. Б.//Препринт ОИЯИ Р4-89-287. Дубна, 1989.
20. Захарьев Б. Н., Сузько А. А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985.
21. Имшенецкий В. Г.//Записки императ. АН. 1882. Т. 42. С. 1—21.
22. Колкунов В. А.//ЯФ. 1969. Т. 16, № 6. С. 1296—1312.
23. Kostov N.A.//Lett. Math. Phys. 1989. Vol. 17. P. 95—106.
24. Кричевер И. М.//УМН. 1989. Т. 44. Вып. 2. С. 121—184.
25. Кузнецов В. Б. Применение метода обратной задачи в теории двумерных интегрируемых классических и квантовых динамических систем. Дис. канд. физ.-мат. наук. Л., 1989.
26. Куперин Ю. А.//ТМФ. 1986. Т. 69. С. 100—112; 1988. Т. 75. С. 431—444.
27. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
28. Лейн А., Томас Р. Теория ядерных реакций при низких энергиях: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
29. Лянце В. Э.//Мат. сб. 1967. Т. 72(114), № 4. С. 537—551.
30. Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И.//УМН. 1987. Т. 42. С. 3—47.
31. Музафаров В. М.//ТМФ. 1987. Т. 70, № 1, С. 30—45; 1985. Т. 64, № 2, С. 208—229; Inverse Probl., 1988. Vol. 4, № 1. P. 185; Mod. Phys. Lett., 1987. Vol. 2. P. 177—183, 239; 1986. Vol. 1. P. 449—456.
32. Niznik L.P.//Rep. Math. Phys. 1988. Vol. 26, N 2. P. 261—282.
33. Ольховский В. С.//ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. Вып. 2. С. 289—343.
34. Павлов Б. С.//УМН. 1987. Т. 42. С. 99—131.
35. Поплавский И. В.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51, № 11. С. 97—105; ЯФ. 1986. Т. 44(10). С. 952—961; ТМФ. 1986. Т. 69(3). С. 475—484.
36. Погушой М. Н.//ТМФ. 1986. Т. 69. С. 466—474; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1988. Т. 52, № 1. С. 150—161; 1987. Т. 51, № 5. С. 952—963.

37. Рид М., Саймон Б. Методы современной физики: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
38. Склянин Е. К. // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1980. Т. 95. С. 129—145; Функц. анализ и прил. 1982. Т. 16. Вып. 4. С. 27—34; 1987. Т. 21. Вып. 2. С. 86—87.
39. Славов С. И. // Препринт ОИЯИ P5-89-261. Дубна, 1989.
40. Сузько А. А. // Phys. Scripta. 1985. Vol. 31. P. 447—451; 1986. Vol. 34. P. 5—8; Proc. Fev. Body Conf. 11, Japan. 1986; Sov. Ing. Phys. J. Vol. 50. P. 316—321.
41. Тараканов А. В., Шилов В. М. // ЯФ. 1988. Т. 48, № 1(7). С. 109—117.
42. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
43. Трускова Н. Ф. // ЯФ. 1982. Т. 36, № 3. С. 790—808.
44. Турбинер Р. Т. // Функц. анализ и прил. 1988. Т. 22. Вып. 2. С. 92—101; ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 33—42.
45. Ушверидзе А. Г. // ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. Вып. 5. С. 1185—1245.
46. Фаддеев Л. Д. Юбилейный сборн. ЛОМИ. Мем. М.: Наука, 1987. С. 4—29.
47. Филиппов Г. Ф. // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 1338—1387; 1985. Т. 16. С. 349—406.
48. Фуцич В. И., Штельень В. М., Серов Н. И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наукова думка, 1989.
49. Христов Е. Х. Нелинейные эволюционные уравнения для приближенно-го решения обратных задач спектрального анализа. Дисс. д-ра физ.-мат. наук. Дубна, 1981.
50. Чередник И. В. // Функц. анализ и прил. 1978. Т. 12. Вып. 3. С. 45—54.
51. Albeverio S., Gestezy P., Hoegh-Kron R.e.a. // Solvable Models in Quantum Mechanics. Springer. Heidelberg, 1988.
52. Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynin T.P. e.a. // Proc. Conf. Schroedinger Operator. Standart and Nonstandart. Dubna, 1988. World Scientific, 1989. P. 353—464; Preprint ОИЯИ E4-89-312. Дубна, 1989.
53. Badalyan A.M., Kok L.P., Polikarpov M.I., Simonov Yu.A. Resonances in coupled channels in nuclear and particle physics. Univ. Groningen. 1981.
54. Brand S., Dahmen H.D. The Picture Book of Quantum Mechanics. N.Y.: John Wiley, 1985.
55. Chadan K., Montes A. // J. Math. Phys. 1968. Vol. 9. P. 1898—1906.
56. Chadan K., Musette M. // Inverse Probl. 1989. Vol. 5. P. 257—261; Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. II. 1987. Vol. 305. P. 1409—1413; Vol. 303. P. 329—340. Vol. 299. P. 1305—1312.
57. Chadan K., Sabatier P. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. Heidelberg: Springer, 1977.
58. Eastham M.S.P., Kalf M. Shroedinger-type Operations with Continuous Spectra. Pitman. London, 1982.
59. Enolskii V.-Z., Kostov N.A. Preprint Lab. Appl. Phys. Techn. Univ. Denmark, 1989.
60. Euler L. // Acad. Exhib. 13, Jan. 1780; Institutiones Calculi Integralis. 1794. Vol. 4. P. 533—543.
61. Fairbanks L.D. // Compositio Math. 1988. Vol. 68. P. 31—40.
62. Fernandez D.J. // Lett. Math. Phys. 1984. Vol. 8, N 4. P. 337—345.
63. Fletcher J.R. // J. Phys. 1985. Vol. C18. P. L-55—L-59.
64. Funke H., Zakhariev B.N. // Phys. Lett. 1987. Vol. B185. P. 265—271; Proc. Inverse Problems 1986. Montpellier. Acad. Press. 1987. P. 99—115.
65. Gagnon L., Winternitz P. // J. Phys. 1989. Vol. A22, N 5. P. 469.
66. Gerdt V.P., Kostov N.A. // Computers and Mathematics. Heidelberg: Springer, 1989. P. 279—288.
67. Grosse H., Martin A. // Nucl. Phys. 1978. Vol. B132. P. 125—137; 1979. Vol. B148. P. 413—421; Lect. Notes Phys. 1979. Vol. 116. P. 68—85; Phys. Rep. 1980. Vol. C60. P. 341—401.

68. Hald O. H., McLaughlin J.R.//Inverse Problems. 1989. Vol. 5. P. 307—347.
69. Heller E.J., Yamani H.A.//Phys. Rev. 1974. Vol. A9, N 3. P. 1201—1209.
70. Humi M.//J. Phys. 1988. Vol. A21. P. 2075—2084; 1985. Vol. A18. P. 1085—1097.
71. Infeld L., Hull T.E.//J. Math. Phys. 1951. Vol. 23. P. 21—67.
72. Kovalsky J.M., Fry J.L.//J. Math. Phys. 1987. Vol. 28(10). P. 2407—2418.
73. Kukulin V.I., Krasnopolsky V.M., Horacek J. Theory of Resonances. Principles and Applications. Praha: Scademia, 1989.
74. Kuznetsov V.B., Tsiganov A.V.//J. Phys. 1989. Vol. 22. P. L73—L78.
75. Kwong W., Rosner J.L., Schonleld J.F. e.a.//Amer. J. Phys. 1980. Vol. 48. P. 926—931.
76. Kwong W., Rosner J.L.//Progr. Theor. Phys. Suppl. 1986. Vol. 86. P. 366—378.
77. Leon J.J.//J. Math. Phys. 1981. Vol. 22(5). P. 965—969.
78. Levai G.//J. Phys. 1989. Vol. A22. P. 689—698.
79. Novikov R.G., Henkin G.M.//Sov. J. Usp. Math. Nauk. 1987. Vol. 42, N 3, P. 93—134.
80. May R., Noye J.//Computational Techniques for Differential Equations. North-Holland, 1984. P. 1—94.
81. Pivovarchik V.N., Suzko A.A., Zakhariev B.N.//Phys. Scripta. 1986. Vol. 34. P. 101—107.
82. Plekhanov E.B., Suzko A.A., Zakhariev B.N.//Ann. der Phys. 1982. Vol. 39. P. 313—324.
83. Poschel J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory Acad. Press. Boston, 1987.
84. Роттер И.//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 274—306. Rotter I., Kleinwachter//Phys. Rev. 1985. Vol. C32. P. 1742—1751.
85. Rudyak B.V., Zakhariev B.N.//Inverse Probl. 1987. Vol. 3. P. 125—132.
86. Schonfeld J.F., Kwong W., Rosner J.//Ann. Phys. 1980. Vol. 128. P. 1—13.
87. Stillinger F.H., Herrik D.R.//Phys. Rev. 1975. Vol. A11. P. 446—452.
88. Sukumar C.V.//J. Phys. A: Math. Gen. 1985. Vol. 18. P. 2917—2932.
89. Thaker H.B., Quigg C., Rosner J.L.//Phys. Rev. 1980. Vol. D21. P. 234—247.
90. Zakhariev B.N.//Few-Body Systems. 1988. Vol. 4. P. 25—37; Inverse Problems. Acad. Press. 1987. P. 141—151; Order. Disorder and Chaos in Quantum Systems. P. 171; World Scientific, 1989.
91. Zakhariev B.N., Olkhovsky V.S., Shilov V.M.//Preprint JINR P4-89-289. Dubna, 1989.
92. Zakhariev B.N., Zastavenko L.G.//Phys. Rev. 1989. Vol. A39. P. 5528—5530; Preprint JINR P4-88-662. Dubna, 1988.
93. Haumaker R.H., Ray A.R.P.//Amer. J. Phys. 1989. Vol. 54. P. 928—937.
94. Dubovik V.M., Markovsky B.L., Suzko A.A.e.a.//Phys. Lett. 1989. Vol. A185. P. 1371; Виницкий С.И., Кадомцев М. В., Сузько А. А.//ЯФ. 1989. Т. 48. С. 1325.
95. Захарьев Б. Н. Препринт ОИЯИ P4-90-46. Дубна, 1990.
96. Фирсова Н. Е.//Записки научн. сем. ЛОМИ. Л.: 1975. Т. 51, вып. 7. С. 183—196.