«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1991, ТОМ 22, ВЫП. 3

УДК 530.145

МИНИМАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

Н. П. Илиева, В. Н. Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Методом минимального квантования проанализирован ряд двумерных калибровочных теорий. Предложена новая интерпретация нарушения киральной симметрии и вырождения вакуума, имеющих место в этих теориях. Исследована роль топологической структуры калибровочного поля и выявлена его остаточная продольная динамика. Указан возможный топологический механизм конфайнмента и сформулирован соответствующий критерий. В присутствии аномалии построена однозначно определенная унитарная релятивистски инвариантная квантовая теория.

With the help of the minimal quantization method some two-dimensional gauge theories are considered. A new interpretation of the chiral symmetry breaking and vacuum degeneration that take place in these theories are proposed. The role of the topological structure of the gauge field is studied and its residual longitudinal dynamics is found. A possible topological confinement mechanism is pointed out and the corresponding criterium is formulated. In the presence of anomalies a uniquely determined unitary relativistic-invariant quantum theory is constructed.

ВВЕДЕНИЕ

С момента возникновения квантовой теории поля (КТП) двумерное пространство-время рассматривалось как теоретическая модель для апробирования и развития математических методов и физических идей КТП (историю вопроса см. в монографиях [1, 2])

Действительно, изучение двумерных моделей породило немало интересных идей, которые успешно применяются в более реалистических четырехмерных теориях. Например, модель Тирринга послужила основой для исследования проблемы фермионного конфайнмента в явно кирально-инвариантных теориях [3]. Разнообразные σ-модели с $O(N)$ и $SU(N)$ киральными фермионами широко использовались в отрабатывании квазиклассических методов квантовой теории поля для вычисления спектров связанных состояний и их формфакторов [4]. На примере двумерной модели Хиггса пытались выяснить физический смысл нетривиальной топологической структуры вакуума и связанных с ней инстантонов [5]. Двумерные голдстоуновские бозоны во многом похожи на четырехмерные калибровочные бозоны [6].

В последнее время, в связи с интенсивным развитием теории струны (обширную библиографию см. в работе [7]), возобновился интерес к конформно-инвариантным двумерным моделям [8]. Было достигнуто серьезное продвижение в исследовании теории представлений бесконечномерных алгебр Ли — алгебр Вирасоро и Каца — Муди [9—11]. В контексте теории струны возросло значение дальнейшего изучения нелинейной σ-модели [12]. Эти два последние аспекта прослеживаются в нелинейной σ-модели с весс-зуминовским членом в действии [6, 13].

Двумерные модели привлекают внимание и при исследовании аномальных теорий [14]. Как известно, в процессе квантования некоторые из классических симметрий теории могут нарушаться. Эта проблема затрагивает киральную и конформную симметрии безмассовых (вейлевских) фермионов в пространствах четной размерности. Несмотря на заметные упрощения, в двумерной теории уже присутствуют основные структуры, присущие аномалиям в пространствах более высокой размерности [15].

Среди всевозможных двумерных полевых моделей особое место, несмотря на свою простоту, занимает модель Швингера [16] как типичная калибровочная теория. Интерес к этой модели вызван некоторыми ее особенностями. Так, в спектре модели имеется массивная мода, которую в обычной интерпретации связывают с калибровочным бозоном, хотя механизм ее возникновения отличен от механизма Хиггса. Заряд экранируется, и это породило представление о конфайнменте на основе линейного роста потенциала [17, 18]. В связи с нарушением киральной симметрии в рамках этой модели возникли понятие θ-вакуума [19] и идея объяснения нарушения киральной симметрии в калибровочных теориях с безмассовыми фермионами локальными флуктуациями топологического заряда [20]. До сих пор двумерная безмассовая электродинамика подвергается пересмотру с точки зрения новых идей в квантовой физике [22].

Настоящий обзор предлагает новое осмысление модели Швингера и некоторых других двумерных полевых моделей с позиций минимального квантования, основанного на явном решении уравнений связи и выборе калибровочно-инвариантных физических переменных и тензора энергии-импульса [23—26]. Применение указанного метода приводит к иной интерпретации перечисленных феноменов, иногда противоположной существующей в литературе, и позволяет обнаружить новые, как, например, связь глобальной симметрии и структуры вакуума квантовой теории [34], роль моря Дирака в возникновении киральной аномалии и швингеровских членов в коммутаторах токов [26], физический смысл двумерного калибровочного поля (его «продольной» части) [33, 35]. Последнее особенно существенно для изучения теорий с аномалиями, поскольку приводит к естественному возникновению члена типа Весса — Зумино в лагранжиане, тем самым указывая на зависимость квантовой теории от структуры калибровочной группы, и позволяет построить унитарную релятивистски-ковариантную теорию с наиболее высокой возможной симметрией [38].

В разд. 1 обзора изложены основные идеи минимального квантования и разграничены понятия калибровочная инвариантность и калибровочная независимость. В разд. 2 рассматривается роль моря Дирака для возникновения киральной аномалии в двумерной теории. Раздел 3 посвящен исследованию топологической структуры двумерного абелева калибровочного поля. В разд. 4 обсуждается возможный топологический механизм конфайнмента в калибровочных теориях. В разд. 5 рассматриваются аномальные двумерные калиброчные теории с вейлевскими фермионами.

1. МЕТОД МИНИМАЛЬНОГО КВАНТОВАНИЯ: КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И КАЛИБРОВОЧНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ

Начнем с рассмотрения основных определений калибровочных теорий, пока не ограничиваясь рамками двумерного пространства.

Калибровочные теории взаимодействий элементарных частиц относятся к классу сингулярных лагранжевых теорий поля. Классический лагранжиан теории строится на основе принципов инвариантности относительно калибровочных

$$\left.\begin{aligned} &A_\mu \to A_\mu^g = g\,(A_\mu + \partial_\mu)\, g^{-1};\\ &\psi \to \psi^g = g\psi;\ \ g \in G \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и релятивистских преобразований *

$$\begin{gathered} A\ (x) \to A\ (x) + \delta_L A\ (x),\\ \delta_L A_k\ (x) = \varepsilon_k A_0\ (x) + \varepsilon_i\ (x_0 \partial_i - x_i \partial_0)\ A_k\ (x). \end{gathered} \tag{2}$$

По определению (1) часть компонент калибровочного поля являются нефизическими, и это препятствует применению стандартных методов квантования. Все методы квантования калибровочных полей можно разделить на две группы: квантование, в котором для сохранения явной релятивистской ковариантности теории квантуют все компоненты калибровочного поля, и квантование физических степеней свободы, оставшихся после явного решения всех уравнений связи. Ко второй группе относится и метод минимального квантования, последовательно сформулированный в [23—26].

Основной проблемой минимального квантования является доказательство релятивистской ковариантности. Рассмотрим решение этой проблемы на примере свободного электромагнитного поля

$$\mathscr{L}\,(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{0i}^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2\,;\ \ F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \tag{3}$$

В соответствии с предписаниями минимального квантования мы должны решить явно классическое уравнение на нединамическую

---

* Греческие индексы пробегают значения от 0 до d, а латинские — от 1 до d (d есть размерность пространства-времени).

компоненту A_0:

$$\partial^2 A_0 = \partial_i \partial_0 A_i \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_i \partial_0 A_i, \quad \mathbf{d}^2 \equiv \partial_i \partial_i. \tag{4}$$

Как уравнение связи, так и его решения инвариантны относительно калибровочных преобразований (1).

Подстановкой решения (4) в лагранжиан (3) мы исключаем зависимость последнего от продольных полей $\partial_i A_i$:

$$\mathcal{L}^G(x) = \frac{1}{2} (\partial_0 A_i^T)^2 - \frac{1}{2} (\partial_j A_k^T)^2, \tag{5}$$

где

$$A_i^T = \left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_j\right) A_j, \quad \partial_i A_i^T \equiv 0 \tag{6}$$

есть поперечное поле.

Факт устранения сразу двух компонент (временной и продольной) решением одного калибровочно-инвариантного уравнения (4) можно более наглядно продемонстрировать на примере тензора электрического поля F_{0i}, явно зависящего от четырех компонент калибровочного поля (A_0, A_i). На решениях уравнения (4) этот тензор, как нетрудно убедиться, зависит только от двух поперечных полей A_j^T (6):

$$F_{0i}\Big|_{A_0 = \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_i \partial_0 A_i} = \partial_0 \left(A_i - \partial_i \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_j A_j\right) = \partial_0 A_i^T.$$

Продольная компонента исчезает в силу самой калибровочной инвариантности тензора.

Решая явно связь, мы переходим от калибровочно-инвариантного лагранжиана к калибровочно-инвариантным переменным (6) [рассматривая эти переменные как функционалы от исходных полей $A_i(x)$]. Для построения двух независимых переменных надо ввести два поперечных орта $e_i^a(\partial_k)$, $\partial_i e_i^a(\partial_k) = 0$, которые вместе с вектором дифференцирования ∂_k образуют полный набор из трех векторов с условием полноты

$$e_i^a e_j^a + \partial_i \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_j = \delta_{ij} \Rightarrow e_i^a e_j^a = \delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_j. \tag{7}$$

Тогда независимые поля $A^a(x)$ и поперечные поля A_i^T (6) связаны следующим соотношением:

$$A_i^T = \left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_j\right) A_j = e_i^a (e_j^a A_j) = e_i^a A^a. \tag{8}$$

В терминах независимых полей (8) лагранжиан (5) переписывается как лагранжиан двухкомпонентного скалярного поля

$$\mathcal{L}^G(x) = \frac{1}{2} \partial^\mu A^a \partial_\mu A^a. \tag{9}$$

Квантование означает задать коммутационные соотношения для этих двух независимых компонент и канонически-сопряженных им импульсов:

$$\mathrm{i}\,[\partial_0 A^a(x),\ A^b(y)] = \delta^{ab}\ \delta(x-y),$$

или в терминах поперечных полей

$$[\mathrm{i}\,\partial_0 A_i^T(x),\ A_j^T(y)] = \left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\mathrm{d}^2}\,\partial_j\right)\delta(x-y). \tag{10}$$

Динамические величины можно построить из канонического тензора энергии-импульса системы [9] [27]:

$$T^G_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a\,\partial_\nu A^a - g_{\mu\nu}\mathscr{L},$$

который калибровочно-инвариантен и представляет собой редукцию тензора Белинфанте [28] исходной теории

$$T^B_{\mu\nu} = F^\alpha_\mu F_{\alpha\nu} - g_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{11}$$

на уравнениях Гаусса.

Таким образом, мы проквантовали калибровочную теорию, не использовав условие калибровки как исходное предположение. В методе минимального квантования сам термин «выбор калибровки» неправомерен. Этой процедуре более адекватен термин «выбор физических переменных», который осуществляется благодаря явному решению уравнения Гаусса.

В терминах квантования по Дираку следовало бы сказать, что мы получили «правила Фейнмана» в радиационной калибровке. Однако выражения (6) нельзя назвать калибровкой в общепринятом смысле, так как после преобразования Лоренца (2) исходных полей на решениях уравнений Гаусса функционал поперечных переменным (6) меняет свою «калибровку»

$$A_k^T\ [A + \delta_L A] - A_k^T\,[A] = \delta_L^0 A_k^T(x') + \partial_k \Lambda(x), \tag{12}$$

где $\Lambda(x)$ есть «калибровочный поворот»

$$\Lambda(x) = \varepsilon_k\,\frac{1}{\mathrm{d}^2}\,\partial_0 A_k^T. \tag{13}$$

В терминах минимального квантования этот поворот означает, что преобразования Лоренца сопровождаются заменой переменных. В новой системе мы должны выбрать переменные поперечными уже относительно новой оси времени $\eta'_\mu = \eta_\mu + \delta_L^0\,\eta_\mu$, где $\eta_\mu = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Минимальное квантование — единственное квантование калибровочной теории, в котором классические преобразования Лоренца (2) полностью совпадают с квантовыми преобразованиями на операторном уровне

$$\mathrm{i}\varepsilon_i\,[M_{0i},\ A_k^T] = \delta_L^0 A_k^T + \partial_k\Lambda. \tag{14}$$

[Здесь

$$M_{0i} = \int d^3x \, (x_i T^B_{00} - x_0 T^B_{0i})$$

— операторы лоренцевых поворотов или бустов Белифанте.]

Аналогичная ситуация возникает и в случае взаимодействующих полей [39]

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \psi \, (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \, \psi.$$

При этом физические спинорные переменные тоже определяются как функционалы от исходных полей

$$\psi^T \, [A, \psi] = v^T [A] \, \psi,$$

а их преобразования Лоренца

$$\psi^T \, [A + \delta_L A, \psi + \delta_L \psi] - \psi^T [A, \psi] = \delta_L \psi^T + \mathrm{i} \, e \Lambda \psi^T,$$

$$\Lambda = \varepsilon_k \frac{1}{\mathbf{d}^2} \left(\partial_0 A_k + \partial_k \frac{1}{\mathbf{d}^2} j_0 \right)$$

в точности совпадают с преобразованиями квантованных полей ψ^T

$$\mathrm{i}\varepsilon_k \, [M^B_{0k}, \psi^T] = \delta_L \psi^T + \mathrm{i} e \Lambda \psi^T.$$

С точки зрения этих преобразований локальные квантовые поля ставятся в соответствие нелокальному классическому функционалу

$$\psi^T_Q (x) \leftrightarrow \psi^T_{\mathrm{Cl}} = \exp \left\{ \mathrm{i} \frac{1}{\mathbf{d}^2} \partial_i A_i \right\} \psi (x). \qquad (15)$$

Преобразования Лоренца выявляют неоднозначность минимального квантования, связанную с выбором оси времени или, что то же самое, временной компоненты калибровочного поля A_0:

$$A_0 = A \cdot \eta. \qquad (16)$$

Эта неоднозначность, однако, кажущаяся, поскольку ось времени фиксируется граничными условиями и самой постановкой физической задачи.

Идея о группе совместных релятивистских и калибровочных преобразований, эквивалентная идее замены переменных (12), впервые обсуждалась еще в работе Гейзенберга и Паули [29] со ссылкой на неопубликованные замечания фон Неймана. Поэтому мы будем называть преобразования (14) преобразованиями Гейзенберга — Паули.

В КЭД эти преобразования были явно построены Зумино [30], позднее еще многими авторами (см., например, [31]), однако их истинный смысл как доказательство явной релятивистской ковариантности поперечных переменных в каждом порядке теории возмущений не был осознан из-за «догмы» калибровочной независимости, которую отождествляют с калибровочной инвариантностью. Эта «догма» открывает очень простой путь доказательства релятивистской ковариантности, заключающийся в арифметическом объединении кулоновского и поперечного пропагаторов (см. [31]), в то время как (16) означает поворот внешнего вектора оси времени, от которого зависят явно оба пропагатора, т. е. их ковариантность в отдельности.

В действительности калибровочная инвариантность лагранжиана (3) означает, что он не меняется при калибровочных преобразованиях

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda.$$

Выбор калибровки есть специфическое калибровочное преобразование λ^f, после проведения которого новое поле A_μ^f удовлетворяет условию

$$f[A_\mu^f] = 0, \quad A_\mu^f = A_\mu + \partial_\mu \lambda^f, \tag{17}$$

называемому калибровочным условием. Сами процедура квантования и правила Фейнмана формируются в какой-нибудь фиксированной калибровке, например:

$$A_3^A = 0, \quad \partial_i A_i^T = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{18}$$

Явное решение калибровочного условия (17) ведет к функциям калибровочных преобразований [в приведенных примерах (18) это функции λ^A и λ^T], представляющих собой функционалы от исходных полей

$$\lambda^A[A] = -\frac{1}{\partial_3} A_3, \quad \lambda^T[A] = -\frac{1}{\partial^2} \partial_i A_i,$$

а следовательно, и к физическим переменным того же свойства

$$\left.\begin{aligned} A_\mu^A[A] &= \left(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \frac{1}{\partial_3} \delta_{3\nu}\right) A_\nu; \quad A_3^A[A] \equiv 0; \\ A_i^T[A] &= \left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\mathrm{d}^2} \partial_j\right) A_j; \quad \partial_i A_i^T[A] \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Функционалы типа (19) инвариантны относительно калибровочных преобразований исходных полей A_μ в том же смысле, в котором инвариантен и лагранжиан.

Таким образом, с точки зрения явного решения калибровочного условия выбор калибровки означает выбор физических переменных как калибровочно-инвариантных функционалов от исходных полей. Поэтому зависимость каких-то физических результатов от «выбора переменных» (19) не означает нарушения принципа калибровочной инвариантности, так как любой выбор переменных типа (19) калибровочно-инвариантен.

Разные «переменные» связаны между собой преобразованием замены переменных, например A^T связаны с A^A заменой

$$A_i^T[A^A] = A_i^A - \partial_i \frac{1}{\mathrm{d}^2} \partial_j A_j^A = v^T[A^A] = v^T[A^A]\left(A_i^A + \frac{\mathrm{i}}{e}\partial_i\right)(v^T[A^A])^{-1},$$

$$v^T[A] = \exp\left\{\mathrm{ie}\frac{1}{\mathrm{d}^2}\partial_i A_i\right\}. \tag{20}$$

Хотя это преобразование выглядит как калибровочное, оно по смыслу не отличается от преобразований замены переменных в любых некалибровочных теориях.

Сама по себе такая замена не влияет на функции Грина

$$\langle\bar{\psi}^T \ldots \psi^T\rangle \equiv \langle\psi^A (v^T [A^A])^{-1} \ldots v^T [A^A]\psi^A\rangle,$$

однако кроме изменения правил Фейнмана порождает дополнительные так называемые «шпурионные» диаграммы от факторов $v^A [A]$. Поэтому «изменение калибровки» отличается от «замены переменных» тем, что означает только модификацию правил Фейнмана. Эти процедуры совпадают в случаях, когда вклад от шпурионных диаграмм равен нулю, например для S-матрицы рассеяния с асимптотическими состояниями на массовой поверхности.

Если шпурионные диаграммы дают ненулевой вклад в физические величины, типа спектра связанных состояний, это означает неравноправность различных физических переменных в калибровочных теориях; использование всех переменных, за исключением одних, «особых», требует учета факторов типа $v^T [A]$ (20), которые нельзя определить из исходного действия. Для описания связанных состояний в КЭД такими особыми переменными являются поперечные поля (6). Поэтому минимальное квантование оказывается более адекватным задаче определения спектра элементарных и коллективных возбуждений в квантовых калибровочных теориях, в том числе спектра связанных состояний [36, 37], в то время как явно релятивистски-ковариантное квантование удобно для решения задач рассеяния и диссоциации.

Заметим, что те величины, которые в обычном подходе зависят от выбора калибровки и на этом основании считаются нефизическими, при минимальном квантовании обретают статус физических. Это ставит по-новому проблему определения критерия конфайнмента на основе аналитических свойств одночастичных функций Грина. Иную интерпретацию в методе минимального квантования имеют и все другие проблемы, решение которых в методе Дирака зависит от выбора калибровки. Так, проблема Грибова [32] сводится к исследованию нулевых мод оператора Лапласа в экспоненциальном факторе в (5), (20), а проблема аномалий — к правильному выбору физических переменных спинорного поля [38].

Рассмотрение именно этого круга вопросов в двумерных теориях и составляет предмет настоящего обзора.

2. МОРЕ ДИРАКА И КИРАЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ: ЭФФЕКТ ЙОРДАНА

Возможность бозонизации значительно облегчает изучение двумерных полевых моделей с фермионами [17, 21, 40, 41], в том числе и исследование их функций Грина. При этом, однако, часто смешиваются эффекты бозонизации с динамическими эффектами, что приводит к заведомо неправильным выводам, в частности, о природе конфайнмента в двумерном мире [19]. Во избежание этого начнем с рассмотрения бозонизации свободных двумерных фермионов [33], которые описываются лагранжианом Дирака:

$$\mathscr{L}(x) = \mathrm{i}\overline{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x). \tag{21}$$

Здесь $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x) = \psi^{+}(x)\,\gamma^{0}$ — двухкомпонентные спиноры *. В квантовой теории спинорные операторы удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\{\psi_i(x),\ \psi_j^{+}(y)\} = \delta_{ij}\delta(x-y);\\ &\{\psi_i(x),\ \psi_j(y)\} = \{\psi_i^{+}(x),\ \psi_j^{+}(y)\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

После разложения по плоским волнам

$$\psi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp \exp(\mathrm{i}px)\, a_i(p)$$

наиболее естественной кажется следующая реализация соотношений (22) через коэффициенты $a_i(p)$, $a_i^{+}(p)$, трактуемые как операторы рождения и уничтожения:

$$\left.\begin{aligned} &\{a_i(p),\ a_j^{+}(q)\} = \delta_{ij}\delta(p-q);\\ &\{a_i(p),\ a_j(q)\} = \{a_i^{+}(p),\ a_j^{+}(q)\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

и определение вакуума как

$$a_i(p)\mid 0\rangle = 0. \tag{24}$$

При такой реализации коммутационных соотношений, однако, гамильтониан теории

$$H = \int dpp[a_2^{+}(p)a_2(p) - a_1^{+}(p)\,a_1(p)]$$

не является неотрицательно определенным, что с физической точки зрения неприемлемо [операторы $a_1(p)$ и $a_2(-p)$, $p > 0$, рождают состояния с отрицательной энергией].

Существование вакуума (как основного состояния с наинизшей энергией) для теории (21) можно обеспечить, превратив операторы рождения частиц с отрицательной энергией в операторы уничтожения частиц с положительной энергией:

$$\left.\begin{aligned} &a_1(p) = b(p)\,\theta(-p) + c^{+}(p)\,\theta(p);\\ &a_2(p) = b(p)\,\theta(p) + c^{+}(p)\,\theta(-p), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где ступенчатая функция $\theta(p)$ играет роль проекционного оператора на состояния с положительной $[\theta(p)]$ и отрицательной $[\theta-(p)]$

* Двумерные γ-матрицы определены следующим образом:

$$\gamma_0 = \sigma_1, \quad \gamma_1 = -\mathrm{i}\sigma_2, \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_3.$$

энергией. Для операторов b^+, b и c^+, c должны выполняться следующие коммутационные соотношения:

$$\left.\begin{array}{l}\{b^+(p),\ b(q)\}=\{c^+(p),\ c(q)\}=\delta(p-q);\\ \{b(p),\ b(q)\}=\{b^+(p),\ b^+(q)\}=0;\\ \{c(p),\ c(q)\}=\{c^+(p),\ c^+(q)\}=0,\end{array}\right\} \tag{26}$$

а вакуум определен как

$$b(p)\mid 0\rangle = c(p)\mid 0\rangle = 0. \tag{27}$$

Вакуум (27) называется дираковским, и его построение соответствует заполнению бесконечного числа состояний с отрицательными энергиями (т. е. заполнению моря Дирака).

Неотрицательная определенность гамильтониана

$$H = \int dp\mid p\mid [b^+(p)\, b(p) + c^+(p)\, c(p)]$$

есть не единственное следствие введения дираковского вакуума.

В работах 30-х годов Йордана, Борна, Соколова [42] (см. также [43]) было обнаружено, что построение вакуума путем заполнения моря Дирака приводит к изменению коммутатора компонент тока

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu\psi(x).$$

Вместо тривиального коммутатора, следующего из (23), (24),

$$[j_1(x),\quad j_0(y)] = 0,$$

в этом случае возникает нетривиальное выражение

$$[j_1(x),\ j_0(y)]=\frac{1}{\pi i}\ \frac{\partial}{\partial y}\,\delta(x-y), \tag{28}$$

которое позднее было названо «швингеровским членом» (см. приложение А).

С такой точки зрения аномалия в коммутаторе токов в свободной фермионной теории есть эффект доопределения фоковского пространства вторично квантованной теории. В работе [44] сделан такой же вывод для теории взаимодействующих фермионов. Этот эффект следовало бы назвать «эффектом Йордана», так как Йордан впервые показал роль моря Дирака для его возникновения [42].

Именно в силу соотношения (28) свободная фермионная теория в двумерии оказывается эквивалентной теории свободного безмассового скалярного поля. Действительно, подстановкой

$$j_{5\mu}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\partial_\mu\varphi(x);\qquad j_{5\mu}(x)=\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) \tag{29}$$

коммутатор (28) сводится к коммутатору скалярного поля

$$\left[\Pi(x),\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)\right]=\frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial y}\,\delta(x-y);\qquad \Pi(x)\equiv\partial_0\varphi(x),$$

описываемого лагранжианом

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2} \partial^{\mu}\varphi(x)\, \partial_{\mu}\varphi(x).$$

Заметим, что соотношение (29) устанавливает простое соответствие между скалярным полем $\varphi(x)$ и квадратичной по фермионам величиной — током. Бозонизация самих фермионов, т. е. их корректное описание как функционалов от бозонного поля $\varphi(x)$, требует отдельного рассмотрения, хотя тоже опирается на это соотношение.

Компонента $j_{50}(x)$ аксиального тока пропорциональна каноническому импульсу, сопряженному полю $\varphi(x)$:

$$j_{50}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_0 \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Pi(x).$$

Поэтому, в силу соотношения

$$[\Pi(x),\ f(\varphi(y))] = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} f(\varphi(y)),$$

поле $\psi(x)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \psi(\varphi(y)) = i\sqrt{\pi}\, \gamma_5 \delta(x-y)\, \psi(\varphi(y)).$$

Его решения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \exp\{i\sqrt{\pi}\,\gamma_5\varphi(x)\}\,\chi(x), \\ \psi^+(x) &= \chi^+(x)\exp\{-i\sqrt{\pi}\,\gamma_5\varphi(x)\}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где $\chi(x)$ — спинорное поле, не зависящее от поля $\varphi(x)$. Требование о воспроизведении на этом языке обычной двухточечной функции Грина свободных фермионов вакуумным средним

$$\langle\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\rangle = \exp[-i\pi\Delta_0(x-y)]\,\langle\chi(x)\,\bar{\chi}(y)\rangle \tag{31}$$

[$\Delta_0(x)$ — функция Грина свободного безмассового скалярного поля] однозначно доопределяет спинор $\chi(x)$:

$$\chi(x) = \exp\{i\sqrt{\pi}\,\gamma_5\Sigma(x)\}\,\chi_0(x), \tag{32}$$

где $\Sigma(x)$ — свободное безмассовое скалярное поле, квантуемое с отрицательной метрикой [необходимое для компенсации $\Delta_0(x)$ в (31)], а $\chi_0(x)$ — свободное фермионное поле.

Итак, если в исходной теории (21) фермионная функция Грина

$$G(x-y) = \left.\frac{\delta^2 Z[\bar{\eta},\eta]}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(y)}\right|_{\bar{\eta}=\eta=0}$$

порождалась функционалом

$$Z[\bar{\eta}\cdot\eta] = \int \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \exp\{iS[\bar{\eta},\eta]\}$$

с действием

$$S[\bar{\eta}, \eta] = \int d^2x\,[\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta],$$

то для ее точного описания в эквивалентной бозонизированной теории следует исходить из более сложного действия

$$S_B^0[\bar{\eta}\cdot\eta] = \int d^2x \Big[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\Sigma)^2 + \mathrm{i}\bar{\chi}_0\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\chi_0 +$$

$$+ \bar{\eta}\exp[\mathrm{i}\sqrt{\pi}\,\gamma_5(\varphi+\Sigma)]\,\chi_0 + \bar{\chi}_0\exp[-\mathrm{i}\sqrt{\pi}\,\gamma_5(\varphi+\Sigma)]\,\eta + J\varphi\Big],$$

содержащего помимо безмассового скалярного поля $\varphi(x)$ еще два поля — безмассовое спинорное поле $\chi_0(x)$ и нефизическое безмассовое скалярное поле $\Sigma(x)$ с отрицательной метрикой. Разумеется, такое усложнение имеет смысл только при рассмотрении задач с нетривиальным взаимодействием.

3. ТОПОЛОГИЯ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ, ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА И Θ-ВАКУУМ

Рассмотрим теорию двумерных безмассовых фермионов, взаимодействующих с электромагнитным полем, — хорошо знакомую модель Швингера [16], которая уже более четверти века служит своеобразной лабораторией, где отрабатывается понимание новых математических и физических идей в квантовой теории поля [17, 19, 40, 41, 45—47]. Интерес к этой простой, точно решаемой модели вызван тем, что по своим свойствам она более близка к квантовой хромодинамике, чем к четырехмерной квантовой электродинамике: $КЭД_{1+1}$ является инфракрасно-нестабильной теорией с топологически вырожденным вакуумом, в которой реализуется конфайнмент заряда.

Для исследования модели Швингера обычно используется операторный метод ее решения [40], который выходит за рамки физического сектора, что, на наш взгляд, несколько затрудняет физическую интерпретацию результатов. Популярным стал и функциональный метод Фуджикавы [48, 49], но он тоже оставляет некоторый произвол в интерпретации массивной моды и в понимании полевого содержания модели. В последнее время, однако, все большее внимание привлекает гамильтонова формулировка этой теории [50]. Мы воспользуемся рассмотренным выше методом минимального квантования, что позволит выявить роль чисто квантовых эффектов движения фермионного и бозонного вакуумов для ее точного решения и проиллюстрировать зависимость физических результатов квантовой теории от выбора вакуума и глобальных свойств конфигурационного пространства калибровочного поля.

Модель Швингера описывается следующим лагранжианом:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}(x) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - \mathrm{i}eA_{\mu})\,\psi; \\ F_{\mu\nu} &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Согласно методу минимального квантования мы должны исключить нединамическую компоненту калибровочного поля A_0 через соответствующее уравнение связи

$$\delta S/\delta A_0 = 0 \Rightarrow \partial_1^2 A_0 = \partial_1 \partial_0 A_1 + e j_0. \tag{34}$$

На основе решения уравнения (34)

$$A_0 = \frac{1}{\partial_1^2} (\partial_1 \partial_0 A_1 + e j_0) \tag{35}$$

определим функционал $v[A]$:

$$v[A] = \exp\left\{-\mathrm{i} e \frac{1}{\partial_1^2} \partial_1 A_1\right\} = \exp\{-\mathrm{i} e \partial_1^{-1} A_1\}, \tag{36}$$

построим нелокальные калибровочно-инвариантные поперечные переменные A_1^T, ψ^T, $\overline{\psi}^T$:

$$\left.\begin{aligned} &A_1^T[A] = v[A]\left(A_1 + \frac{\mathrm{i}}{e}\partial_1\right) v^{-1}[A]; \\ &\psi^T[A, \psi] = v[A]\psi; \quad \overline{\psi}^T[A, \overline{\psi}] = \overline{\psi} v^{-1}[A]. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

На решениях уравнения связи лагранжиан (33) полностью записывается в терминах полей (37)

$$\mathscr{L}(x) = \mathrm{i}\overline{\psi}^T \gamma^\mu \partial_\mu \psi^T + \frac{e^2}{2} j_0 \frac{1}{\partial_1^2} j_0. \tag{38}$$

Лагранжиан (38) уже содержит только динамические переменные. Для перехода к квантовой теории остается задать коммутационные соотношения между (двухкомпонентными) спинорами ψ^T, ψ^{T*} и соответствующим образом определить пространство состояний.

Гамильтониан модели Швингера в терминах нелокальных полей, следующий из (38),

$$\mathscr{H}(x) = \mathrm{i}\overline{\psi}^T \gamma_1 \partial_1 \psi^T + \frac{e^2}{2} (\partial_1^{-1} j_0)^2 \tag{39}$$

отличается от свободного фермионного гамильтониана кулоновским взаимодействием между токами, которое при помощи (28) переписывается как $e^2\varphi^2/(2\pi)$, т. е. принимает вид массового члена для поля $\varphi(x)$ со значением массы $m = e/\sqrt{\pi}$ — знакомая швингеровская масса. Иными словами, бозонизация (28) в этом случае является тривиальным способом решения модели Швингера, указывающим на ее эквивалентность теории свободного массивного скалярного поля с эффективным бозонизированным гамильтонианом

$$H_{\text{эф}} = \frac{1}{2} \int dx\, [\Pi^2 + (\partial_1 \varphi)^2 + m^2 \varphi^2]. \tag{40}$$

Такой вывод и был сделан в работах [34, 47, 51].

Бозонное представление для фермионных операторов в модели Швингера такое же, как и в случае свободной теории (30), (32):

$$\psi(x) = \exp\left\{\mathrm{i}\sqrt{\pi}\, \gamma_5 (\varphi(x) + \Sigma(x))\right\} \chi_0(x),$$

но поле $\varphi(x)$ уже массивно, и эффективное бозонизированное действие принимает вид

$$S_B=\int d^2x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\frac{1}{2}(\partial_\mu\Sigma)^2+\mathrm{i}\overline{\chi}_0\gamma^\mu\partial_\mu\chi_0+\right.$$
$$\left.+\overline{\eta}\exp[\mathrm{i}\sqrt{\pi}\,\gamma_5(\varphi+\Sigma)]\,\chi_0+\overline{\chi}_0\exp[-\mathrm{i}\sqrt{\pi}\,\gamma_5(\varphi+\Sigma)]\,\eta+J\varphi\right].$$

Отсюда для двухточечной фермионной функции Грина в модели Швингера получаем следующее выражение

$$G(x-y)=\exp\{-\mathrm{i}\pi[\Delta_m(x-y)-\Delta_0(x-y)]\}G_0(x-y) \quad (41)$$

[$\Delta_m(x)$ есть пропагатор массивного скалярного поля]. Заметим, что пропагаторы $\Delta_0(x)$ и $\Delta_m(x)$ взаимно гасят свои инфракрасные особенности. С учетом поведения всех трех пропагаторов получаем следующие асимптотики для функции (41) (см. приложение Б):

$$\underset{p\to\infty}{G(p)}\sim\frac{p}{p^2};\quad \underset{p\to 0}{G(p)}\sim\frac{\hat{p}}{(p^2+\mathrm{i}\varepsilon)^{5/4}}.$$

Из этих выражений следует, что вероятность обнаружения в спектре частицы с квантовыми числами кварка отлична от нуля:

$$|\Psi|^2=\lim_{\hat{p}\to 0}\hat{p}G(p)\neq 0,$$

что не согласуется с представлением о конфайнменте в этой модели. Выполнение критерия Вильсона о линейном росте кваркового потенциала не обеспечивает конфайнмент [33], как уже отмечалось и в работе [52], в случае четырехмерной теории.

Разумеется, между компонентами токов и КЭД$_{1+1}$ реализуются аномальные коммутационные соотношения. Следует подчеркнуть, однако, что эта аномалия не приводит с необходимостью к аномалии самих токов. Так вычисление дивергенции аксиального тока с помощью гейзенберговского уравнения движения для компоненты $j_{50}(x)$

$$\partial_0 j_{50}(x)=\mathrm{i}\,[H,\ j_{50}(x)]$$

в случае свободной теории (21) указывает на сохранение этого тока:

$$\partial_0 j_{50}(x)=j\int dy\,[\mathrm{i}\,\overline{\psi}(y)\,\gamma_1\partial_1\psi(y),\quad j_{50}(x)]=\partial_1 j_{51}(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\partial^\mu j_{5\mu}(x)=0. \quad (42)$$

В модели Швингера кулоновское взаимодействие между токами приводит к физическому проявлению аномалии в коммутаторе (28) в виде аномальной дивергенции аксиального тока (вычисления коммутаторов между билинейными по фермионам величинами приведены в приложении В):

$$\partial_0 j_{50}(x) = \partial_1 j_{51}(x) + \frac{e^2}{4\pi}\int dy j_0(y)\frac{\partial}{\partial x}\,|\,y - x\,| = -m^2\partial_1^{-1} j_{51}(x);$$

$$m^2 = e^2/\pi.$$

В результате имеем

$$\partial_\mu j_{5\mu}(x) = -m^2\partial_1^{-1} j_{51}(x). \tag{43}$$

Так, минимальное квантование модели Швингера выявляет существенную роль моря Дирака в двумерном пространстве-времени: заполнение состояний с отрицательными энергиями порождает швингеровский член в коммутаторе токов (28), а поляризация дираковского вакуума калибровочным полем является физической причиной аксиальной аномалии (43). Заметим, что несмотря на довольно долгую историю изучения аксиальной аномалии в четырехмерной теории (см. [28]), начавшейся с работы Штейнбергера [53], роль дираковского вакуума для ее возникновения была показана только в 1981 г. В. Н. Грибовым [54].

Уравнения (42), (43) с учетом соотношения (29) переписываются в виде релятивистских уравнений для бозонного поля $\varphi(x)$: $\partial^\mu\partial_\mu\varphi(x) = 0 \Rightarrow \Box\varphi(x) = 0$ в случае свободной фермионной теории;

$\partial^\mu\partial_\mu\varphi(x) = -m^2\varphi(x) \Rightarrow (\Box + m^2)\varphi(x) = 0$ для модели Швингера.

Швингеровский член в коммутаторе токов (28) и аксиальная аномалия (43) занимают центральное место в исследовании КЭД$_{1+1}$. Именно с аномалией (43), т. е. с нарушением киральной инвариантности в квантовой теории, связывают нетривиальную топологическую структуру вакуума в модели — так называемый θ-вакуум [19].

Действительно, в силу (28), (29) для кирального заряда имеет место соотношение

$$[Q_5, \varphi(x)] = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{\pi}}; \tag{44}$$

$$Q_5 = \int dx j_{50}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dx \Pi(x),$$

и он не сохраняется,

$$\partial_0 Q_5 = \mathrm{i}\,[H, Q_5] \neq 0,$$

а киральные топологические преобразования не являются преобразованиями симметрии для гамильтониана (39):

$$\sigma^n H_{\text{эф}}\sigma^{-n} \neq H_{\text{эф}},$$

$$\sigma^n = \exp\{\mathrm{i}n\sqrt{\pi}\,Q_5\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Это противоречит инвариантности исходного лагранжиана (33), для которого соответствующие преобразования фермионов сводятся к тождественному:

$$\exp \{in \sqrt{\pi} Q_5\} \psi(x) \equiv \psi(x).$$

Проблему нарушения киральной симметрии решают несколько искусственным образом [19, 55]. Поле $\varphi(x)$ представляют как сумму массивного поля $\hat{\varphi}(x)$ и постоянного поля θ со следующими трансформационными свойствами:

$$\sigma^n \bar{\varphi}(x) \sigma^{-n} = \hat{\varphi}(x);$$

$$\sigma^n \theta \sigma^{-n} = \theta + n,$$

θ имеет характер угловой переменной. Выбором вакуума в виде

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \sigma^n |0\rangle$$

киральная симметрия восстанавливается на уровне матричных элементов локальных операторов.

Коулмен [45] показал, что эффект введения такого θ-вакуума полностью воспроизводится включением в действие постоянного электрического поля, определяемого дополнительным параметром θ (кроме e). Заметим, что введение постоянного поля предполагает (в контексте вариационного принципа) наличие источников, а таковых в исходном действии нет. Наряду с этим возникает вопрос, зачем вводить этот дополнительный параметр и в массивную модель Швингера, в которой киральная симметрия нарушена с самого начала фермионным массовым членом.

Мы видели, что швингеровский член в коммутаторе токов есть следствие заполнения отрицательных уровней моря Дирака, цена, которую приходится платить за доопределение пространства состояний с тем, чтобы обеспечить ограниченность собственных значений гамильтониана снизу. Поэтому нельзя сравнивать свойства симметрии классической и квантовой теории, которые в рассматриваемом примере характеризуются одной и той же локальной динамикой, но разными основными состояниями (вакуумами). Тем более нет никаких оснований накладывать на квантовую теорию симметрию классического лагранжиана, противоречащую структуре ее фоковского пространства с дираковским вакуумом. Аксиальная аномалия и есть физическое проявление этого вакуума, результат его поляризации калибровочным (кулоновским) полем. Вследствие этой поляризации появляется масса у скалярного поля в эквивалентной бозонной теории.

Подчеркнем еще раз, что при такой постановке никакого топологического вырождения вакуума не возникает и именно в этом контексте следует понимать результат работы [56] об отсутствии нетривиальной вакуумной структуры в модели Швингера.

Хотя введение θ-вакуума в модели Швингера нельзя обосновать только имеющей место в ней аксиальной аномалией, идея вырождения основного состояния оказалась полезной в ряде конкретных задач [19, 46, 55, 57]. Покажем, что корни вырожденной структуры вакуума — в топологических свойствах свободного электромагнитного поля в двумерной теории:

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{46}$$

Подставляя в (46) явное решение уравнения связи

$$\frac{\delta S}{\delta A_0} = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\partial_1^2} \partial_1\partial_0 A_1, \tag{47}$$

мы приходим к тривиальному результату, отражающему отсутствие поперечных степеней свободы в двумерии. Формально $\mathcal{L}_0(x)$ может быть выражен в терминах нелокальной переменной $A_1^T[A]$ [по аналогии с (37)]

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} (\partial_0 A_1^T)^2 \equiv 0. \tag{48}$$

В действительности переменная $A_1^T[A]$ не доопределена, потому что до сих пор мы выписывали решения уравнений связи (35), (47) с точностью до решения соответствующих однородных уравнений. В этом конкретном случае полное решение для компоненты A_0 имеет вид

$$A_0[A] = \frac{1}{\partial_1^2} \partial_1\partial_0 A_1 + \mathfrak{M}(x); \quad \partial_1^2 \mathfrak{M}(x) = 0. \tag{49}$$

Включение нулевых мод оператора ∂_1^2 меняет вид функционала (36)

$$v[A] \to v^\lambda[A] = v[A]\, m(x);$$
$$m(x) = \exp\{-\mathrm{i}e\partial_0^{-1}\mathfrak{M}(x)\} \tag{50}$$

и переменной $A_1^T[A]$

$$A_1^T[A] \to A_1^{T,\lambda}[A] = v^\lambda[A]\left(A_1 + \frac{\mathrm{i}}{e}\partial_1\right)(v^\lambda[A])^{-1}. \tag{51}$$

Фаза $m(x)$ не должна быть сингулярной, поскольку мы рассматриваем лагранжиан (46) в пустом пространстве (без источников). Если дополнить уравнение (49) соответствующим граничным условием на саму функцию $\mathfrak{M}(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathfrak{M}(x) = 0,$$

единственное решение — тривиальное, и мы возвращаемся к случаю (48).

Однако граничные условия, обеспечивающие неизменность на границах пространства оператора перехода к поперечным физическим переменным $v[A]$, т. е. условия на фазу $m(x)$ (50)

$$\lim_{x\to\pm\infty} m(x) = 1, \tag{52}$$

порождают принципиально новую картину. Представим для удобства функцию $\mathfrak{M}(x)$ в виде

$$\mathfrak{M}(x) = \frac{1}{e}\,\partial_0\lambda(x).$$

Тогда условие (36) означает, что

$$\lambda(\infty) - \lambda(-\infty) = 2\pi n, \qquad n = 0, +1, +2, \ldots,$$

т. е. мы рассматриваем электродинамику в компактифицированном пространстве. Фактор $m(x)$ с граничным условием (52) задает отображение пространства $R(1)$ (с отождествленными точками на бесконечности) на групповое многообразие $U(1)$. Отображение характеризуется целым числом n — степенью отображения. Калибровочные поля разбиваются на топологические классы в зависимости от значения n, и их конфигурационное пространство приобретает топологию кольца:

$$\Pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}.$$

В такой теории могут существовать постоянные вакуумные поля без всяких внешних источников вследствие чисто квантового эффекта типа эффекта Джозефсона. Как известно, этот эффект состоит в существовании незатухающих токов из-за неоднородности фазы волновой функции, например скачков фазы волновой функции электронов в сверхпроводящем кольце вокруг тонкого соленоида

$$\Psi(x + 2\pi R) = \exp(\mathrm{i}\theta)\,\Psi(x),$$

где R — радиус кольца, а θ—скачок фазы.

Нетрудно убедиться, что аналогичное условие на волновую функцию калибровочного поля

$$\Psi[A^{(n+1)}(x)] = -\exp(\mathrm{i}\theta)\,\Psi[A^n(x)] \tag{53}$$

ведет к неисчезающему электрическому полю в основном состоянии, без внешних источников этого поля [35, 57], а именно такое условие имеет место в нашем случае в силу физической тождественности точек $A^{T(1)}, A^{T(2)}, \ldots, A^{T(n)} \ldots$ в неодносвязном конфигурационном пространстве калибровочного поля, где

$$A_1^{T(n)}[A] = v[A]\,m^n(x)\left(A_1 + \frac{\mathrm{i}}{e}\,\partial_1\right) m^{-n}(x)\,v^{-1}[A]. \tag{54}$$

Действительно, решение уравнения Шредингера

$$\left[\frac{1}{2}\int dx\hat{E}^2\right]\Psi = \varepsilon\Psi, \qquad \hat{E} = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\delta}{\delta A_1},$$

инвариантное относительно инфинитезимальных топологически тривиальных преобразований (с $n = 0$) $\hat{\partial}_1 E\Psi = 0$, имеет вид плоской волны

$$\Psi = \exp\{-\mathrm{i}\,pN[A]\}, \qquad p = 2\pi E/e \tag{55}$$

по переменной $N[A]$,

$$N[A]=\frac{e}{2\pi}\int dxA_1^T[A], \tag{56}$$

которая трансформируется ковариантно при преобразованиях (54)

$$N[A_1^{T(n)}]=N[A_1^T]+\frac{\lambda(\infty)-\lambda(-\infty)}{2\pi}=N[A_1^T]+n$$

и является непрерывным обобщением индекса Понтрягина [58]

$$\nu=\frac{e}{4\pi}\int d^2x\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=\int dx_0\dot{N}[A]=N|_{t=\infty}-N|_{t=-\infty}.$$

Переменная N — новая, топологическая переменная теории, которая вместе с сопряженным ей импульсом p описывает остаточную «продольную» динамику двумерного абелева калибровочного поля, его вакуумную топологическую динамику с действием

$$S_{\text{топ}}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial_1\partial_0\lambda}{e}\right)^2 d^2x=\frac{1}{2}\int\dot{N}^2\,dx_0. \tag{57}$$

Его квантование не вызывает затруднений:

$$p=\frac{\delta L_{\text{топ}}}{\delta\dot{N}}=\dot{N}I,\quad [p,\,N]=i,\quad I=\frac{1}{V}\left(\frac{2\pi}{e}\right)^2.$$

Спектр топологического импульса p легко определяется из граничного условия (53), указывающего на эквивалентность состояний

$$\langle p\mid N\rangle=\exp(-\mathrm{i}pN)\text{ и }\langle p\mid N+n\rangle=\exp[-\mathrm{i}p(N+n)].$$

Истинное состояние представляет собой блоховскую волну — усреднение по этому вырождению с весом $\exp\{\mathrm{i}n\theta\}$:

$$\langle p|N\rangle=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=-l/2}^{l/2}\exp(\mathrm{i}n\theta)\exp[-\mathrm{i}p(N+n)]=$$

$$=\begin{cases}\exp[-\mathrm{i}(2\pi k+\theta)], & p=2\pi k+\theta;\\ 0, & p\neq 2\pi k+\theta,\end{cases}$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots;\ |\theta|<\pi.$$

Это означает, что оператор $\hat{E}$ есть оператор постоянного электрического поля со спектром

$$\hat{E}\Psi=\frac{e}{2\pi}p\Psi,\quad p=2\pi k+\theta. \tag{58}$$

Минимальное (по модулю) значение этого поля $E_{\min}=e\theta/(2\pi)$ совпадает с классическим вакуумным электрическим полем Коулмена [45]. Коулмен обосновал его существование свойствами пространства $R(1)$ и рассматривал θ как дополнительный параметр. В излагаемом подходе параметр θ характеризует топологическую структуру теории и связан со спектром вакуумной физической наблюдаемой, которая описывает незатухающее коллективное вращение калибровочного поля в конфигурационном пространстве. Это дает основание интерпретировать такое вырождение вакуума, как полевой аналог эффекта Джозефсона, который проявляется также и в модели Швингера [34, 59].

Коллективное движение калибровочного поля, описываемое (55), (57), имеет конечную плотность энергии

$$\frac{\varepsilon}{V}=\frac{1}{2}\left[\frac{e}{2\pi}(2\pi k+\theta)\right]^2, \quad V\equiv\int dx.$$

Таким образом, мы получили согласованную, релятивистски-инвариантную квантовую теорию. Рассмотрим спектральное представление ее функции Грина в физическом секторе:

$$G(N_{t_2}|N_{t_1})={}_{N_{t_1}}\langle\exp(-\mathrm{i}tH)\rangle_{N_{t_2}}=\sum\exp[-\mathrm{i}\varepsilon(t_1-t_2)]\,\Psi_1\Psi_2^*=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_k\exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{(2\pi k+\theta)^2(t_2-t_1)}{2I}\right]\exp[\mathrm{i}(2\pi k+\theta)(N_2-N_1)].$$

Это выражение можно преобразовать в сумму по гомотопическим классам [60] в конфигурационном пространстве

$$G(N_{t_2}|N_{t_1})=\sqrt{\frac{I}{2\pi\mathrm{i}\,(t_2-t_1)}}\sum_n\exp(\mathrm{i}n\theta)\exp(\mathrm{i}S_n),$$

где

$$S_n(t_1,\ t_2;\ N)=\int_{t_1}^{t_2}dx_0L(x_0),\qquad L(x_0)=\frac{1}{2}I\dot N^2$$

есть эффективное классическое действие для n-го гомотопического класса. Переменная N (56) не имеет последовательной классической интерпретации. Но в действительности классическое приближение в такой теории несправедливо. Как следует из действия (57), область применимости квантовой теории в этом случае пропорциональна объему пространства V ($L_Q\sim I^{-1}$, $I^{-1}\sim V$). Поэтому в конкретных расчетах снятие инфракрасной регуляризации ($V\to\infty$) должно осуществляться в самую последнюю очередь. При исследовании проблемы конфайнмента в модели Швингера мы убедимся в важности соблюдения этого правила.

Проведенный выше анализ указывает на связь вырождения вакуума в двумерной квантовой электродинамике с особенностями конфигурационного пространства калибровочного поля. Действительно, топологическая мода N взаимодействует со спинорным полем, что приводит к модификации лагранжиана КЭД$_{1+1}$ в терминах поперечных полей по сравнению с (38):

$$L=\int dx\left[\mathrm{i}\bar\psi^T\gamma^\mu\partial_\mu\psi^T-\frac{e^2}{2}(\partial_1^{-1}j_0)^2+\frac{Ie^2}{2\pi}(Nj_1-\dot N\partial_1^{-1}j_0)\right]+\frac{1}{2}I\dot N^2.$$

Для гамильтониана, соответственно, получаем выражение, которое после бозонизации сохраняет информацию о вакуумной динамике калибровочного поля. Это проявляется в том, что в эффективном бозонном гамильтониане (40) скалярное поле становится комбинацией первичного скалярного поля $\varphi(x)$ и топологического импульса p:

$$H_{\text{эф}} \to H_{\text{эф}}^{(T)} = \frac{1}{2}\int dx\,[\Pi^2 + (\partial_1\tilde{\varphi})^2 + m^2\tilde{\varphi}^2];\quad \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{p}{2\sqrt{\pi}}. \qquad (59)$$

Полученный гамильтониан неинвариантен относительно преобразований (45), но преобразованиями симметрии для него являются совместные преобразования наблюдаемых полей

$$\tilde{\sigma}^n H_{\text{эф}}^{(T)} \tilde{\sigma}^{-n} = H_{\text{эф}}^{(T)};$$

$$\tilde{\sigma}^n = \exp\{\mathrm{i}n\sqrt{\pi}\,(Q_5 - 2N)\},$$

которые можно рассматривать как киральные преобразования для нового эффективного поля $\tilde{\varphi}(x)$ в топологически нетривиальной теории.

Перейдем к построению вакуумного состояния этой теории. Оно должно обеспечивать нулевое среднее значение для составного поля $\tilde{\varphi}(x)$ (59), а также воспроизводить спектр (58) топологического импульса p:

$$\langle \mathrm{vac} \mid \tilde{\varphi}(x) \mid \mathrm{vac}\rangle = 0;$$

$$p \mid \mathrm{vac}\rangle = (2\pi k + \theta) \mid \mathrm{vac}\rangle.$$

В силу соотношения (44) и коммутативности топологического импульса p и кирального заряда Q_5 приходим к следующему выражению для вакуумного состояния в модели Швингера [35]:

$$|\mathrm{vac}\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{i}pQ_5\right\}|0\rangle, \qquad (60)$$

где $|0\rangle$ — фоковский вакуум для скалярного поля $\varphi(x)$.

Так, вследствие остаточной продольной динамики двумерного абелева калибровочного поля (топологической переменной N), оказываются связанными остаточная симметрия (53), (54), киральная аномалия, нулевая мода фермион-антифермионного состояния и θ-вакуум (см. также [61]).

Вакуум (60) представляет собой когерентное состояние наблюдаемых полей. Он отличается от обычного θ-вакуума, поскольку не предполагает усреднения по топологическому вырождению на уровне состояний, а только при вычислении физических величин типа функций Грина, кварковых конденсаторов, корреляторов токов и т. д.

Для более детального изучения предложенной структуры вакуума модели Швингера (44) представляет интерес вычисление значений кварковых конденсаторов $\langle J(x)\rangle$ и $\langle J_5(x)\rangle$:

$$J(x) = \bar{\psi}(x)\,\psi(x), \qquad J_5(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma_5\psi(x). \qquad (61)$$

Аналогичные как при бозонизации фермионных операторов рассуждения приводят к следующему бозонному представлению для токов (61):

$$J(x)=(2C\cos(2\sqrt{\pi}\,\varphi(x));$$
$$J_5(x)=(2iC\sin(2\sqrt{\pi}\,\varphi(x)),$$

где C — постоянная [21]. Заметим, что первое из этих выражений позволяет бозонизировать и массивную модель Швингера [45]. Все выводы относительно топологического вырождения и поляризации моря Дирака для нее вполне справедливы. При этом отпадает вопрос о причинах введения в ней θ-вакуума, так как в контексте обсуждаемого метода киральная симметрия исходного лагранжиана несущественна.

Для кварковых конденсатов в вакууме (60) получаем:

$$\langle \mathrm{vac} \mid J(x) \mid \mathrm{vac} \rangle = 2C\cos\theta;$$
$$\langle \mathrm{vac} \mid J(x) \mid \mathrm{vac} \rangle = 2i\,C\sin\theta,$$

или

$$\langle \mathrm{vac} \mid J^{\pm}(x) \mid \mathrm{vac} \rangle = C\exp\{\pm i\theta\},$$

где

$$J^{\pm}(x)=\frac{1}{2}[J(x)\pm J_5(x)].$$

Нетрудно получить вакуумные средние произведений токов $J^{\pm}(x)$ (при предположении, что произведение этих операторов в одной и той же точке равняется их нормальному произведению [46]):

$$\langle \mathrm{vac}\,|J^{\pm}(0)\,J^{\pm}(0)\,|\mathrm{vac}\rangle=\langle \mathrm{vac}|:\exp[\pm 2\sqrt{\pi}\,i2\varphi(0)]:|\mathrm{vac}\rangle=$$
$$=C^2\exp(\pm 2i\theta);$$
$$\langle \mathrm{vac} \mid J^{\pm}(0)\,J^{\mp}(0) \mid \mathrm{vac}\rangle = C^2.$$

Полученные выражения явно зависят от значения угла θ, который является существенной характеристикой теории. Неправомерность произвольного фиксирования этого параметра указывает (в общем случае) на отличие от нуля обоих конденсатов.

Вакуум (60) сохраняет свойство кластеризации

$$\lim_{x\to\infty}\langle \mathrm{vac}|\,T(J^+(x)\,J^-(0))\,|\mathrm{vac}\rangle=\lim_{x\to\infty}\langle \mathrm{vac}|\,C^2:\exp[2i\sqrt{\pi}\,(\varphi(x)-$$
$$-\varphi(0))]:|\mathrm{vac}\rangle\exp[-4i\pi\Delta_m(x)]=\lim_{x\to\infty}C^2\exp[-4i\pi\Delta_m(x)]=$$
$$=C^2=\langle \mathrm{vac}|\,J^+\,|\mathrm{vac}\rangle\,\langle \mathrm{vac}\,|J^-|\,\mathrm{vac}\rangle.$$

Заметим, однако, что его когерентность по отношению к полю $\varphi(x)$

$$\langle \mathrm{vac}|\,\varphi(x)\,|\mathrm{vac}\rangle=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2\pi k+\theta)$$

делает разложение Вильсона справедливым только в нулевой зоне Бриллюэна.

Дальнейшее изучение топологического фактора, породившего вакуум со структурой (60), его явный вид и возможные проявления представляют самостоятельный интерес, и мы вернемся к этой теме в следующем разделе. Но уже сам факт существования вырождения с топологической природой приводит к новому физическому результату — остаточной «продольной» динамике абелева калибровочного поля в двумерном пространстве-времени, которая является полевым аналогом эффекта Джозефсона. Подобная интерпретация θ-вакуума возможна и в четырехмерных теориях [62].

4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ КОНФАЙНМЕНТ

Проблема конфайнмента в своей современной формулировке основывается на экспериментах по глубоконеупругому рассеянию. Как известно, инклюзивные сечения, т. е. суммы по всем адронным состояниям, описываются мнимыми частями кварковых (партонных) диаграмм. Адронизация кварковых диаграмм, известная как принцип кварк-адронной дуальности, служит основой КХД-феноменологии и успешно применяется при выводе разных правил сумм (см., например, [63, 64]). С теоретико-полевой точки зрения эта адронизация предполагает равенство нулю вероятности рождения цветных частиц, что можно рассматривать как модельно-независимое определение конфайнмента.

Существование линейно растущего потенциала между кварками и убывание площади петли Вильсона — среди наиболее популярных критериев конфайнмента. В их формулировке модель Швингера сыграла важную роль [17, 18]. Однако более поздние вычисления функций Грина цветных объектов породили некоторое сомнение в их строгости [52, 65]. Было показано, что они допускают существование полюсов кварковой функции Грина. Исследование этих полюсов является одним из стандартных методов определения спектра элементарных возбуждений в квантовой теории поля и статистической физике. Существование полюса интерпретируется как присутствие в спектре частицы с квантовыми числами кварка. С такой точки зрения отсутствие полюсов может рассматриваться как критерий конфайнмента, совпадающий с упомянутым выше модельно-независимым критерием.

Покажем, как нетривиальная топологическая структура конфигурационного пространства калибровочного поля создает возможность для выполнения этого уровня, предполагая тем самым топологический механизм конфайнмента.

Топологическое вырождение в двумерной электродинамике приводит к изменению не только поперечных переменных калибровочного поля (51), но и нелокальных спинорных полей (37)

$$\left.\begin{aligned} A_1^{T,\lambda}[A] &= v^\lambda[A]\left(A_1+\frac{i}{e}\partial_1\right)(v^\lambda[A])^{-1} = A_1^T[A]-\frac{\partial_1\lambda}{e}\,; \\ \psi^{T,\lambda}[A,\ \psi] &= v^\lambda[A]\,\psi = m(x)\,\psi^T[A,\ \psi]. \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

Фактор

$$m(x) = \exp\{-ie\partial_0^{-1}\mathfrak{M}(x)\} = \exp\{-i\lambda(x)\} \tag{63}$$

описывает фазовую неоднозначность поперечных физических полей, вызванную нулевой модой $\mathfrak{M}(x)$. Вопрос состоит в том, существуют ли нетривиальные решения уравнения на эту фазу (49) с граничными условиями (52) в классе гладких функций (63). Для конструктивного ответа на этот вопрос необходимо ввести инфракрасную регуляризацию. Выберем в качестве таковой ограничение объема пространства-времени:

$$-T/2 \leqslant x^0 \leqslant T/2; \quad -R/2 \leqslant x^1 \leqslant R/2.$$

Тогда граничное условие на фазовый фактор $m(x)$

$$\lim_{|x_1|\to R/2} m_\pm(x) = 1,$$

$$m_\pm(x) = m(x)|_{x_0=\pm T/2}$$

в действительности является условием гладкости отображения пространства R (1) на группу U (1) (на концах временного интервала), задаваемого функцией $m_\pm(x)$, и может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} dx \frac{1}{i} m_\pm \partial_1 m_\pm^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} dx \partial_1 \lambda_\pm(x) = n_\pm,$$

$$\lambda_\pm(x) = \lambda(x)|_{x_0=\pm T/2}; \quad n_\pm = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots$$

В КЭД$_{1+1}$ искомые нетривиальные решения существуют и имеют следующий вид:

$$\lambda(x_0|x_1) = 2\pi N(x_0)\frac{x_1}{R}, \tag{64}$$

где гладкая функция $N(x_0)$ с целочисленными граничными значениями

$$N(\pm T/2) = n_\pm$$

и есть топологическая переменная (56), описывающая нетривиальную вакуумную динамику двумерного абелева калибровочного поля.

Как мы видим, «классические вакуумы» теории [66] на концах временного интервала являются чисто калибровочными полями

$$A_{1(\pm)} = \frac{1}{i} m_\pm(x)\,\partial_1 m_\pm^{-1}(x) = \frac{1}{e}\partial_1\lambda_\pm(x),$$

которые вырождены (с параметрами вырождения — числа n_+, n_-), а само калибровочное поле интерполирует между ними.

Физические переменные $A_1^{T,\lambda}$, $\psi^{T,\lambda}$, $\bar{\psi}^{T,\lambda}$ (62) по самому своему построению топологически вырождены. В результате в производящем функционале функций Грина спинорные источники приобретают неоднозначные фазы

$$\bar{\eta}^T(x)\,\psi^T(x) + \bar{\psi}^T(x)\,\eta^T(x) \to$$
$$\to \bar{\eta}^T(x)\,m^{-1}(x)\psi^T(x) + \bar{\psi}^T(x)\,m(x)\eta^T(x);$$
$$\bar{\eta}^T(x) = v[A]\eta(x); \quad \bar{\eta}^T(x) = \bar{\eta}(x)v^{-1}[A],$$

которые соответствуют одному и тому же физическому состоянию и требуют проведения соответствующего усреднения.

Хотя функция $m(x)$ гладкая по построению, усреднение по бесконечному вырождению фаз с учетом (60), (64) приводит к появлению сингулярности

$$\langle m(x)\rangle_\theta = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=-l/2}^{l/2}\left\langle n,\ \theta\left|\exp\left\{-2\pi i N(x_0)\frac{x_1}{R}\right\}\right|n,\ \theta\right\rangle =$$
$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=-l/2}^{l/2}\left\langle n,\ \theta|n+\frac{x_1}{R},\ \theta\right\rangle = \delta_{\frac{x_1}{R},\,0},$$

где $\delta_{x,0}$ есть символ Кронекера.

Такая особенность резко меняет фермионную «цветную» функцию Грина

$$G(x-y) = \left.\frac{\delta^2 Z_{\text{conf}}[\bar{\eta}^T,\ \eta^T]}{\delta\bar{\eta}^T(x)\,\delta\eta^T(y)}\right|_{\bar{\eta}^T=\eta^T=0},$$

где функционал $Z_{\text{conf}}[\bar{\eta}^T,\ \eta^T]$ определен как

$$Z_{\text{conf}}[\bar{\eta}^T,\ \eta^T] = \lim_{R,\,T\to\infty}\langle Z^\lambda_{R,\,T}[\bar{\eta}^T,\ \eta^T]\rangle_\theta.$$

Вместо выражения (41) получаем [23, 33]

$$G(x-y) = \lim_{R,\,T\to\infty}\exp\{-\pi i[\Delta_m(x-y) -$$
$$-\Delta_0(x-y)]\}\,G_0(x-y)\,\langle m^{-1}(x)\,m(y)\rangle_\theta, \qquad (65)$$

которое в импульсном пространстве тождественно обращается в нуль. Это происходит вследствие деструктивной интерференции топологических фаз. Тождество (65) в действительности отражает факт существования конфайнмента в модели Швингера в смысле модельно-независимого определения, приведенного в начале этого раздела.

Следует особо подчеркнуть последовательность проведения предельных переходов (по R, T и l): усреднение должно быть проведено до снятия инфракрасной регуляризации. Заметим, что такая последовательность указанных процедур согласуется с выводом о квантовой природе переменной N и об отсутствии ее последовательной классической интерпретации [23, 33, 34] и предписывается также и в квантовой статистике [67].

Интерференция топологических фаз не оказывает никакого влияния на незаряженные функции Грина, потому что в этом случае фазы гасятся взаимно. Так, в корреляторе токов остается полюс в точке $p^2 = e^2/\pi$, указывающий на присутствие скалярной частицы в спектре модели

$$\langle \tilde{j}_{5\mu}(p)\tilde{j}_{5\nu}(q)\rangle \sim \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad m^2 = \frac{e^2}{\pi}.$$

Таким образом, деструктивную интерференцию топологических фаз физических полей можно рассматривать как причину конфайнмента в двумерной квантовой электродинамике. Возникновение этих фаз связано с существованием нулевых мод (65), которое является прямым следствием нетривиальности отображения координатного пространства [прямой $R(1)$] на калибровочную группу теории — $U(1)$:

$$\Pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}. \tag{66}$$

Условие (66) можно обобщить на случай D-мерной теории с калибровочной группой G и рассматривать его как топологический критерий конфайнмента:

$$\Pi_{D-1}(G) = \mathbb{Z}. \tag{67}$$

В четырехмерной квантовой электродинамике этот критерий не выполняется [$\Pi_3(U(1)) = 0$], что согласуется с наблюдаемостью электрона. С точки зрения топологической структуры более близка к модели Швингера четырехмерная КХД, в которой критерий (67) также удовлетворяется:

$$\Pi_3(SU(3)) = \mathbb{Z}.$$

В этом случае обращение в нуль функций Грина цветных объектов может служить обоснованием принципа кварка-адронной дуальности [24].

5. МИНИМАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ АНОМАЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

В последние годы аномальные калибровочные теории стали предметом оживленных дискуссий в литературе. До недавнего времени эти теории считались неприемлемыми с физической точки зрения, а сокращение аномалий в локальных симметриях использовалось в качестве критерия физической состоятельности различных полевых моделей. Причина тому — непонимание как физических, так и математических аспектов квантования таких теорий. Попытки непосредственного перенесения их классической физики в квантовую теорию сталкивались с непреодолимыми трудностями как нарушение калибровочной инвариантности, унитарности и перенормируемости.

Проблема при квантовании аномальных калибровочных теорий вызвана тем, что некоторые из связей первого рода становятся после квантования связями второго рода, что требует модификации самой процедуры квантования. В этом и отражается несохранение части классических симметрий на квантовом уровне. Продвижение в изучении аномальных теорий было достигнуто в рамках гамильтонова подхода [68, 69] и лишь после понимания того, что число степеней свободы в классической и в квантовой теориях может быть разным вследствие «оживания» части калибровочных преобразований. В частности, было обнаружено, что добавление скалярного поля с вессзуминовским действием сохраняет природу связей в процессе квантования [70, 71]. Позднее было показано, что такой дополнительный член в действии внутренне присущ теории, а его появление объясняется невозможностью игнорировать объем калибровочной группы в интеграле Фаддеева — Попова как в случае свободных от аномалии теорий [72].

К «аномальным» связям в калибровочных теориях относится закон Гаусса, выражающий поперечность физических полей. В методе минимального квантования соответствующее уравнение решается явно еще на классическом уровне. Это не означает игнорирования аномальной природы рассматриваемой модели, поскольку особенности связи переносятся через оператор $v\,[A]$ на нелокальные физические переменные. Тем не менее и в этом случае метод позволяет построить согласованную, унитарную квантовую теорию с однозначно определенным массовым спектром [38]. Проиллюстрируем это на примере двух моделей: двумерная электродинамика с киральными фермионами [73] и киральная модель Швингера [74—79].

Двумерная электродинамика с левыми фермионами определяется лагранжианом

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}\,(x) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\bar{\psi}_L\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\,\psi_L = \\ &= \frac{1}{2}F_{01}^2 + \mathrm{i}\psi^+\Gamma_-(\partial_0 + \partial_1)\,\psi + e\psi^+\Gamma_-(A_0 + A_1)\,\psi; \\ &\psi_{L(R)} = \Gamma_{-(+)}\psi; \quad \Gamma_\pm = (\mathbb{1} \pm \gamma_5)/2. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Поскольку метод минимального квантования основывается на исключении нединамических переменных через их уравнения движения, выбор оси времени системы квантования становится существенным и должен быть физически аргументирован. Напомним, что в этом состоит единственный произвол данного метода. В рассматриваемой модели (68) выделяются две возможности: в качестве оси времени системы квантования выбрать ось x^0 или ось $x^+ = x^0 + x^1$.

Выбор x^0 в качестве оси времени приводит к следующему уравнению связи:

$$\frac{\delta S}{\delta A_0} = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\partial_1^2}\,(\partial_1\partial_0 A_1 + eJ_0^+), \tag{69}$$

где

$$J_\mu^+ = \bar{\psi}\Gamma_+\gamma_\mu\psi = \frac{1}{2}\,(j_\mu + j_{5\mu})$$

$$(J_0^+ = -J_1^+ = \psi_L^+\psi_L = \psi^+\Gamma_-\psi)$$

есть нетеровский ток в модели. На решениях (69) лагранжиан (68) принимает вид

$$\mathscr{L} = \mathrm{i}\overline{\psi}\Gamma_+\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{e^2}{2} J_0^+ \frac{1}{\partial_1^2} J_0^+ + eJ_0^+\partial_1^{-1}\partial_0 A_1 - eJ_1^+A_1.$$

В модели (68) не имеют места ни векторная, ни (левая) киральная калибровочные инвариантности. Аномальные дивергенции обоих токов легко можно вычислить, например, при помощи гейзенберговских уравнений движения для их компонент $j_0(x)$ и $J_0^+(x)$:

$$\partial_0 j_0(x) = \mathrm{i}\,[H,\ j_0(x)] = \partial_1 J_1^+(x) + \frac{e^2}{2\pi}\partial_1^{-1}J_0^+(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial^\mu j_\mu(x) = -\partial_1 J_1^-(x) + \frac{e^2}{2\pi}\partial_1^{-1}J_0^+(x) \tag{70}$$

и

$$\partial_0 J_0^+(x) = \mathrm{i}\,[H,\ J_0^+(x)] = \partial_1 J_1^+(x) + \frac{e^2}{2\pi}\partial_1^{-1}J_0^+(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial^\mu J_\mu^+(x) = \frac{e^2}{2\pi}\partial_1^{-1}J_0^+(x) \tag{71}$$

(аномальные коммутаторы между билинейными фермионными операторами в двумерном пространстве-времени приведены в приложении В).

В случае неаномальной теории переход к нелокальным поперечным полям выявляет ее физическое содержание через изменение действия. Это объясняется инвариантностью фермионной меры относительно осуществляющих этот переход преобразований. В аномальных теориях, из-за нарушения калибровочной инвариантности, это уже не так, и на основе только изменений в структуре гамильтониана нельзя делать выводы, например, о спектре теории.

В модели (68) переход к поперечным полям (37) приводит к следующему гамильтониану:

$$\mathscr{H}^T = \mathrm{i}\overline{\psi}^T\Gamma_+\gamma_1\partial_1\psi^T - \frac{e^2}{2} J_0^+ \frac{1}{\partial_1^2} J_0^+, \tag{72}$$

но не меняет выражений (70), (71) для дивергенций токов.

Однако, несмотря на формальную аналогию между выражениями (71), (72) и (39), (43), аналогия в интерпретации обеих моделей невозможна. Причина состоит в появлении, в отличие от модели Швингера, аномалии в коммутаторах одноименных компонент токов (см. приложение В). Это нарушает каноническую структуру пары $\{\varphi,\ \Pi = \partial_0\varphi\}$, определенной соотношением

$$J_\mu^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_\mu\varphi(x),$$

поскольку коммутаторы $[\varphi(x),\ \varphi(y)]$ и $[\Pi(x),\ \Pi(y)]$ отличны от нуля.

Заметим, что выбор x^0 в качестве оси времени не может быть убедительно обоснован с физической точки зрения. Действительно, единственное физическое поле в двумерной киральной электродинамике — спинор ψ_L, распространяется вдоль оси x^+, а взаимодействие, описываемое этой моделью (между токами, построенными из спиноров ψ_L, ψ_L^+), имеет кулоновскую структуру (72), но относительно системы (x^0, x^1). Так, асимметрия в фермионном секторе естественно указывает на необходимость перехода к конусной системе координат (x^+, x^-), т. е. к выбору оси x^+ в качестве оси физического времени системы квантования. Это меняет уравнение связи

$$\frac{\delta S}{\delta A_+} = 0 \Rightarrow A_+ = \frac{1}{\partial_-^2}(\partial_-\partial_+ A_- + 4eJ_+),$$

и на его решениях лагранжиан (68) записывается как

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi_L^+\partial_+\psi_L + 2e^2 J_+ \frac{1}{\partial_-^2} J_+ + eJ_+\partial_-^{-1}\partial_+ A_-. \qquad (73)$$

В конусной системе координат единственный аномальный коммутатор есть (см. приложение В)

$$[J_+(x^-),\ J_+(y^-)] = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\delta'(x^- - y^-).$$

Отсюда для временной эволюции оператора J_+ получаем

$$\partial_+ J_+(x^-) = \frac{\mathrm{i}}{2}[H,\ J_+(x^-)] = -\frac{e^2}{\pi}\partial_1^{-1} J_+(x^-),$$

т. е. J_+ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\left(\Box + \frac{m^2}{4}\right) J_+(x^-) = 0; \quad \Box = \partial_+\partial_-, \quad m^2 = \frac{4e^2}{\pi}.$$

Так, спектр двумерной квантовой электродинамики с киральными фермионами состоит из массивной скалярной моды со значением массы

$$m = 2e/\sqrt{\pi}, \qquad (74)$$

которая представляет собой связанное состояние киральных фермионов.

Киральная модель Швингера, в отличие от рассмотренной выше модели, содержит кинетический член и для второй киральной компоненты фермионного поля:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}e\Gamma_- A_\mu)\psi =$$
$$= \frac{1}{8} F_{-+}^2 + \mathrm{i}\psi_R^+\partial_-\psi_R + \mathrm{i}\psi_L^+\partial_+\psi_L + e\psi_L^+\psi_L A_+. \qquad (75)$$

Начнем с рассмотрения $t = x^0$. Поскольку калибровочное поле взаимодействует только с током левых фермионов, уравнение связи совпадает с уравнением (69), и на его решениях лагранжиан (75) принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{e^2}{2} J_0^+ \frac{1}{\partial_1^2} J_0^+ - eJ_1^+ A_1 + eJ_0^+\partial_1^{-1}\partial_0 A_1.$$

Соответствующий гамильтониан при помощи уравнения Гейзенберга и с учетом всех аномальных коммутаторов приводит к следующему выражению для дивергенции нетеровского тока в киральной модели Швингера:

$$\partial^{\mu} j_{\mu}(x) = -\frac{e}{2\pi}\partial_1 A_1(x) + \frac{e^2}{2\pi}\partial_1^{-1} J_0^{+}(x), \tag{76}$$

а для дивергенций левого и правого токов получаем

$$\left.\begin{aligned} \partial^{\mu} J_{\mu}^{+}(x) &= \frac{e^2}{2\pi}\partial_1^{-1} J_0^{+}(x); \\ \partial^{\mu} J_{\mu}^{-}(x) &= -\frac{e}{2\pi}\partial_1 A_1(x). \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Второе из этих соотношений и отражает присутствие правых фермионов в теории. Хотя правый ток не взаимодействует с калибровочным полем, он не сохраняется, и его аномалия может быть устранена в подходящей калибровке.

Фермионная асимметрия рассматриваемой модели порождает два возможных набора поперечных полей:

$$\begin{aligned} A_1^T &= v[A]\left(A_1 + \frac{i}{e}\partial_1\right) v^{-1}[A] & \qquad & A_1^T = v[A]\left(A_1 + \frac{i}{e}\partial_1\right) v^{-1}[A] \\ \psi_L^T &= v[A]\,\psi_L & \text{и} \qquad & \psi_L^T = v[A]\,\psi_L \\ \psi_R^T &= v[A]\,\psi_R & & \psi_R^T = \psi_R \end{aligned}$$

которые приводят к двум разным гамильтонианам

$$\mathcal{H}^{(T,A)} = i\psi^{T,A}\gamma_1\partial_1\psi^{T,A} - \frac{e^2}{2} J_0^{+}\frac{1}{\partial_1^2} J_0^{+} - eJ_1^{-}A_1;$$

$$\mathcal{H}^{(T,B)} = i\psi^{T,B}\gamma_1\partial_1\psi^{T,B} - \frac{e^2}{2} J_0^{+}\frac{1}{\partial_1^2} J_0^{+}.$$

Заметим, что в гамильтониане $\mathcal{H}^{(T,A)}$ появился член, описывающий взаимодействие калибровочного поля с правым током, что еще раз подчеркивает разницу между поперечной проекцией в минимальном квантовании и фиксированием кулоновской калибровки в методе Дирака.

В терминах поперечных полей типа (A) и (B), вследствие их трансформационных свойств, меняются некоторые коммутационные соотношения (см. приложение В), но имеют место те же самые выражения (76), (77) для дивергенций токов.

Итак, фермионная асимметрия модели (74) делает структуру связи (69) неадекватной динамике системы. Выбор оси x^+ в качестве оси физического времени делает нединамическими переменные A_- и ψ_R, чьи уравнения движения становятся связями:

$$\left.\begin{aligned} \partial_-^2 A_+ &= \partial_-\partial_+ A_- + 4eJ_+; \\ \partial_-\psi_R &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

На решениях уравнений (78) лагранжиан (75) совпадает с соответствующим лагранжианом электродинамики с левыми фермионами (73). Таким образом, в спектре киральной модели Швингера тоже возникает массивная скалярная мода с $m^2 = 4e^2/\pi$. Правые фермионы отщепляются и распространяются свободно вдоль оси x^-.

В работах по киральной модели Швингера и двумерной электродинамике с вейлевскими фермионами [70, 73, 74] разными методами была получена однопараметрическая формула для массы бозонной моды

$$m^2 = \frac{e^2}{\pi}\frac{a^2}{a-1}, \tag{79}$$

где a — регуляризационный параметр фермионного детерминанта. В случае обычной КЭД$_{1+1}$ значение этого параметра фиксировано требованием калибровочной инвариантности, а в аномальных моделях из-за отсутствия соответствующего принципа симметрии, остается такой однопараметрический произвол с единственным ограничением $a > 1$ (для исключения тахионов). Сравнение формул (77) и (79) показывает, что применение метода минимального квантования привело к выделению одной квантовой теории из этого класса, соответствующей значению регуляризационного параметра $a = 2$, которая по указанной причине должна отличаться от остальных появлением новой, дополнительной симметрии.

Значение $a = 2$ регуляризационного параметра фермионного детерминанта впервые было выделено в работе [72], в которой обсуждалась эквивалентность исходной классической теории эффективному квантовому действию с добавленным весс-зуминовским членом. Это значение параметра a впоследствии также обсуждалось и в работах [77], где было показано, что именно в этой точке киральная модель Швингера наиболее близка (в известном смысле эквивалентна) обычной КЭД$_{1+1}$ и в ней появляется дополнительная локальная кац-муди-симметрия.

Выбор x^- в качестве физического времени приводит к уравнениям связи для нединамических паременных A_+ и ψ_L:

$$\partial_- A_+ = \partial_+ A_- \Rightarrow F_{-+} \equiv 0;$$

$$D_+\psi_L = 0 \quad (\text{или} \quad \partial_+\psi_L^T = 0, \; \psi_L^T = v[A]\,\psi_L)$$

и лагранжиану

$$\mathcal{L} = i\psi_R^+\partial_-\psi_R,$$

что определяет свободную фермионную теорию, которая, как известно, эквивалентна теории свободного безмассового скалярного поля. В работах [75, 76] такая картина рассматривается как соответствующая значению $a = 1$ регуляризационного параметра фермионного детерминанта.

Рассмотренные примеры позволяют сделать следующий вывод: метод минимального квантования выбирает среди однопараметрического класса квантовых теорий, описываемого данным аномальным лагранжианом, ту, которая наиболее близка по своим свойствам к соответствующей неаномальной теории и которая отличается дополнительной симметрией, появившейся именно на квантовом уровне. Полученная таким образом теория по самому своему построению унитарна и релятивистски-инвариантна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали некоторые двумерные калибровочные теории методом минимального квантования, что позволило выявить истинные причины ряда известных явлений, обнаружить и осмыслить новые. Мы также разграничили эффекты бозонизации, которые связаны с проявлениями моря Дирака, от динамических эффектов. К первым относится возникновение швингеровского члена в коммутаторе токов в результате заполнения состояний с отрицательными энергиями (эффект Йордана). Понимание киральной аномалии как следствие поляризации заполненного моря калибровочным полем существенно для анализа происхождения θ-вакуума в двумерной безмассовой КЭД, как относящегося ко второй группе эффектов. Мы показали, что вырождение вакуума непосредственно связано не с аксиальной аномалией, а с глобальными свойствами бозонного сектора: с топологией конфигурационного пространства калибровочного поля. В случае нетривиальной топологии обнаруживается остаточная продольная вакуумная динамика, соответствующая постоянному вакуумному электрическому полю без источников, что можно интерпретировать как полевой аналог эффекта Джозефсона. Для описания этой динамики введена новая пара динамических переменных — топологические координата и импульс. Следствием взаимодействия топологической переменной с фермион-антифермионным связанным состоянием и является θ-вакуум, который представляет собой когерентное состояние физических полей.

Мы показали, что модель Швингера, которая послужила одной из решающих предпосылок для формулировки вильсоновского критерия конфайнмента, на самом деле представляет пример его нарушения. Как показывает и решение уравнения Швингера — Дайсона, растущий потенциал, подтверждаемый вычислениями на решетках и спектроскопией кваркония, ведет не к конфайнменту, а к конституентным массам легких кварков и глюонов, являясь тем самым естественным регуляризатором для теории возмущений в КХД. Конфайнмент, как и θ-вакуум, обусловлен топологическими свойствами двумерного абелева калибровочного поля и есть следствие деструктивной интерференции фаз топологического вырождения. Критерием топологического конфайнмента является нетривиальность гомотопического класса, соответствующего отображению координатного пространства на группу стационарных калибровочных преобразований $[\Pi_{D-1}(G) = \mathbb{Z}]$. Указанному критерию, кроме модели Швингера, удовлетворяет и КХД в четырехмерном пространстве-времени [24].

Преимущества минимального квантования особенно проявляются при решении проблемы квантования теорий с аномалиями. Метод обосновывает выбор конусных координат и позволяет построить однозначно определенную унитарную релятивистски-инвариантную квантовую теорию, в которой классическая глобальная кац-муди-симметрия становится локальной.

Рассмотренные двумерные примеры иллюстрируют возможности метода минимального квантования для адекватного описания калибровочных теорий. Вообще говоря, все методы квантования носят эмпирический характер и нуждаются в физическом обосновании. Те аргументы, котрые мы привели к настоящем обзоре, вместе с корректным и согласующимся с экспериментальными данными описанием спектра связанных состояний в КЭД и КХД, на наш взгляд, выделяют метод минимального квантования среди других подходов и стимулируют интерес к его дальнейшему развитию.

Мы благодарны И. Я. Арефьевой, М. Асорей, Н. В. Красникову, В. А. Новикову, В. А. Рубакову, В. И. Ткачу, И. Тодорову, Д. Стоянову, К. Фуджикава, С. Л. Шаташвили и всем участникам семинаров ЛТФ ОИЯИ за обсуждения и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: ВЫЧИСЛЕНИЕ АНОМАЛИИ В КОММУТАТОРЕ ТОКОВ НА ОСНОВЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ВАКУУМА

Чтобы проследить влияние дираковского вакуума на коммутатор токов, рассмотрим следующие величины:

$$\rho_i(p) = \int dx \psi_i^+(x)\psi_i(x)\,\mathrm{e}^{ipx} = \int_{-\infty}^{\infty} dk a_i^+(k+p)\,a_i(k);$$

$$\rho_i(-p) = \int dx \psi_i^+(x)\psi_i(x)\,\mathrm{e}^{-ipx} = \int_{-\infty}^{\infty} dk a_i^+(k)\,a_i(k+p), \quad p > 0. \tag{A.1}$$

Они представляют собой фурье-образы составляющих токов

$$\mathscr{N}_i(x) = \psi_i^+(x)\psi_i(x) = \frac{1}{2\pi}\int dp\rho_i(p)\,e^{-ipx}, \tag{A.2}$$

где

$$\mathscr{N}_1(x) = \frac{1}{2}[j_0(x) + j_1(x)];$$

$$\mathscr{N}_2(x) = \frac{1}{2}[j_0(x) - j_1(x)]. \tag{A.3}$$

Для теории с вакуумом (24) токи $\mathscr{N}_1(x)$, $\mathscr{N}_2(x)$ коммутируют между собой и друг с другом. Действительно, с помощью соотношений (23) для коммутатора

$[\rho_1(p),\ \rho_1(-p')]$ получаем

$$[\rho_1(p),\ \rho_1(-p')] = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,[a_1^+(k+p)\,a_1(k+p') - a_1^+(k+p-p')\,a_1(k)]. \qquad (A.4)$$

Линейной заменой переменных второй член этой разности сводится к первому, и искомый коммутатор оказывается равным нулю. Соотношения

$$[\rho_2(p),\ \rho_2(-p')] = 0 = [\rho_1(p),\ \rho_2(-p')]$$

выводятся аналогичным образом и вместе с (А.2), (А.3) приводят к тривиальному коммутатору компонент тока

$$[j_1(x),\ j_0(y)] = 0 = [j_{50}(x),\ j_{51}(y)].$$

Однако для теории с дираковским вакуумом (27) это не так. Подставив в (А.4) определение (25), после нормального упорядочения по-новому вакууму получим

$$[\rho_1(p),\ \rho_1(-p')] =$$

$$= :[\rho_1(p),\ \rho_1(-p')]: + \delta(p-p')\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk\theta(k+p) - \int_{-\infty}^{\infty} dk\theta(k)\right] = p\delta(p-p'). \qquad (A.5)$$

Аналогично для токов $\rho_2(p)$ получим

$$[\rho_2(p),\ \rho_2(-p')] = -p\delta(p-p'). \qquad (A.6)$$

Таким образом, введение дираковского вакуума переопределением операторов рождения уничтожения (26) уточняет наши исходные неявные предположения о свойствах класса функций, на которых действуют эти операторы. Так, линейная замена, ведущая к тривиальному результату в (А.4), уже неправомерна.

Из выражений (А.4), (А.6) нетрудно получить коммутационные соотношения для составляющих $\mathcal{N}_i(x)$:

$$[\mathcal{N}_1(x),\ \mathcal{N}_1(y)] = -\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x-y);$$

$$[\mathcal{N}_2(x),\ \mathcal{N}_2(y)] = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x-y),$$

из которых непосредственно следует аномальный коммутатор токов

$$[j_1(x),\ j_0(y)] = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\delta(x-y) = [j_{50}(x),\ j_{51}(y)].$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б: ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИК ФЕРМИОННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА В МОДЕЛИ ШВИНГЕРА

Фермионная функция Грина в модели Швингера имеет вид (41):

$$G(x-y) = \exp\{-i\pi\,[\Delta_m(x-y) - \Delta_0(x-y)]\}\,G_0(x-y), \qquad (Б.1)$$

где

$$G_0(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\gamma^\mu x_\mu}{x^2 - i\varepsilon} \qquad (Б.2)$$

есть функция Грина свободного фермиона.

При малых x^2 логарифмические особенности двух скалярных пропагаторов сокращаются и

$$G(x-y) \xrightarrow[x^2\to 0]{} G_0(x-y),$$

или в импульсном пространстве

$$G(p) \xrightarrow[p^2\to\infty]{} \frac{p}{p^2},$$

т. е. на малых расстояниях фермионы становятся свободными.

На больших расстояниях функция Грина массивного скалярного поля (функция Макдональда нулевого порядка) убывает и фактор $\exp\{-i\pi\Delta_m(x)\}$ может быть положен равным единице. Поскольку

$$i\pi\Delta_0(x) = \frac{1}{4}\ln(x^2 - i\varepsilon) + \mathrm{const}$$

и с учетом (Б.2) для $G(x)$ в пределе больших x получаем

$$\underset{x\to\infty}{G(x)} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^\mu x_\mu}{x^2 - i\varepsilon}(x^2)^{1/4}. \tag{Б.3}$$

В импульсном пространстве это выражение удобнее записать в конусных координатах

$$G(p)\Big|_{p\to 0} = -\frac{1}{2\pi}\int dx_0\, dx_1 \frac{\gamma^\mu x_\mu}{x^2 - i\varepsilon}(x^2)^{1/4} e^{ipx} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int dx_+\, dx_- \frac{\gamma_+ x_- + \gamma_- x_+}{x_+ x_- - i\varepsilon}(x_+ x_-)^{1/4} e^{\frac{i}{2}(p_+ x_- + p_- x_+)}. \tag{Б.4}$$

Тогда для функции Грина правых фермионов получаем

$$G_R(p)\Big|_{p\to 0} = \frac{\gamma_-}{4\pi}\left\{\int_0^\infty dx_+\, x_+^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2}p_- x_+}\int_{-\infty}^{\infty} dx_- \frac{x_-^{\frac{1}{4}}}{x_- - i\varepsilon} e^{\frac{i}{2}p_+ x_-} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty dx_+ (-x_+)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}p_- x_+}\int_{-\infty}^{\infty} dx_- \frac{x_-^{\frac{1}{4}}}{x_- + i\varepsilon} e^{\frac{i}{2}p_+ x_-}\right\}. \tag{Б.5}$$

Первые сомножители обоих слагаемых в (Б.5) легко вычисляются после поворота оси интегрирования на 90°. В результате получаем

$$\int_0^\infty dx_+ x_+^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{2}p_- x_+} = \frac{1}{4}\left(\frac{2i}{p_- + i\varepsilon}\right)^{\frac{5}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\theta(-p_-);$$

$$\int_0^\infty dx_+ (-x_+)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}p_- x_+} = -\frac{1}{4}\left(\frac{2i}{p_- - i\varepsilon}\right)^{\frac{5}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\theta(p_-).$$

Аналогичным образом для вторых сомножителей получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_- \frac{x_-^{\frac{1}{4}}}{x_- - \mathrm{i}\varepsilon} e^{\frac{\mathrm{i}}{2} p_+ x_-} = \mathrm{i}\sqrt{2\mathrm{i}} \left(\frac{2\mathrm{i}}{p_+ + \mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \theta(p_+);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_- \frac{x_-^{\frac{1}{4}}}{x_- + \mathrm{i}\varepsilon} e^{\frac{\mathrm{i}}{2} p_+ x_-} = -\mathrm{i}\sqrt{2\mathrm{i}} \left(\frac{2\mathrm{i}}{p_+ + \mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \theta(-p_+),$$

что приводит к следующему выражению для функции $G_R(p)$:

$$G_R(p)\Big|_{p\to 0} = \frac{\mathscr{C}\gamma_-}{(p_+p_- + \mathrm{i}\varepsilon)^{1/4}} \left[\theta(p_+)\,\theta(-p_-)\frac{1}{p_- + \mathrm{i}\varepsilon} + \theta(p_-)\,\theta(-p_+)\frac{1}{p_- - \mathrm{i}\varepsilon}\right],$$

$$\mathscr{C} = \frac{1}{4\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

Выражение в скобках есть в точности функция Грина свободных (правых) фермионов в двумерном пространстве-времени $G_{0R}(p)$.

Подобное выражение имеет место и для функции Грина левых фермионов. Так, для функции (Б.1) в пределе очень малых импульсов получаем

$$G(p)_{p\to 0} = \mathscr{C}G_0(p)\left(\frac{1}{p_+p_- + \mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} = \mathscr{C}G_0(p)\left(\frac{1}{p^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В: ВЫЧИСЛЕНИЕ КОММУТАТОРОВ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА РАЗДВИЖКИ ТОЧЕК

Метод, использованный в приложении А для вычисления аномалии в коммутаторе токов, позволяет выявить физическую причину ее возникновения и применим для теории без взаимодействия. Легко можно убедиться, что взаимодействие с калибровочным полем, хотя и приводит к изменению коммутаторов билинейных по фермионам величин вследствие необходимой в этом случае регуляризации, никак не влияет на швингеровский член.

При вычислении указанных коммутаторов воспользуемся обобщенным методом раздвижки точек [80]. Билинейные по фермионам величины будем рассматривать как локальный предел нелокальных функционалов, исходя из их представления в виде

$$J(f) = \int dx \psi^+(x)\, f(x)\, \Gamma\psi(x), \tag{В.1}$$

где матрица Γ определяет лоренцеву структуру данной величины.

Рассмотрим класс гладких функций $\mathscr{F}(x, y)$, для которых выполняется соотношение

$$\lim_{x\to y} \mathscr{F}(x, y) = f(x)\,\delta(x - y).$$

Для каждой $\mathscr{F}(x, y)$ определим билокальный функционал $J(\mathscr{F})$:

$$J(\mathscr{F}) = \int dx\, dy \psi^+(x)\, \mathscr{F}(x, y)\, \Gamma\psi(y) \tag{В.2}$$

и фурье-образ

$$\tilde{\mathcal{F}}(p, q) = \int dx\, dy\, e^{ip\frac{x+y}{2}} e^{iq(x-y)} \mathcal{F}(x, y), \tag{B.3}$$

который в пределе $p \to q$ переходит в

$$\tilde{\tilde{f}}(p) = \int dx e^{ipx} f(x). \tag{B.4}$$

Функционалы $J(\mathcal{F})$ хорошо определены в гильбертовом пространстве теории, и для них имеет место равенство

$$[J(\mathcal{F}), J(\mathcal{G})] = J([\mathcal{F}, \mathcal{G}]), \tag{B.5}$$

где

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}](x, y) = \int dz \{\mathcal{F}(x, z)\,\mathcal{G}(z, y) - \mathcal{G}(x, z)\,\mathcal{F}(z, y)\}.$$

При помощи одновременного пропагатора

$$\left.\begin{aligned} &P(x, y) = \langle\psi(x)\,\psi^+(y)\rangle\Big|_{x^0-y^0=+0} = iS(x-y)\Big|_{x^0-y^0=+0}\gamma^0 \\ &S(x-y) = \frac{1}{i}\langle\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\rangle \end{aligned}\right\} \tag{B.6}$$

можно определить вакуумное среднее от (B.2)

$$\langle J(\mathcal{F})\rangle = \int dx\, dy\, \Gamma P(x, y)\,\mathcal{F}(y, x) \equiv \mathrm{tr}\,\mathcal{F}\Gamma P.$$

Выражение для $P(x, y)$ расходится при $x = y$, но после выделения расходящейся части P^{inf} оно будет иметь локальный предел. Это позволяет определить интересующую нас величину $J(f)$ (B.1) как локальный предел регуляризованного нелокального функционала $J(\mathcal{F})$:

$$J(f) = \text{local}\quad \text{limit}\, J_{\mathrm{reg}}(\mathcal{F}),$$

$$J_{\mathrm{reg}}(\mathcal{F}) = J(\mathcal{F}) - \mathrm{tr}\,\mathcal{F}\Gamma P^{\mathrm{inf}}.$$

Тогда аномалия в коммутаторах билинейных по фермионам величин, если она имеет место, связана с дополнительным членом в соотношении (B.5) для функционалов $J_{\mathrm{reg}}(\mathcal{F})$, $J_{\mathrm{reg}}(\mathcal{G})$ и с учетом (B.6) может быть представлена как

$$i\tilde{a}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = J([\mathcal{F}, \mathcal{G}]) - J_{\mathrm{reg}}([\mathcal{F}, \mathcal{G}]) = \mathrm{tr}\,[\mathcal{F}, \mathcal{G}]\,\mathcal{T}P^{\mathrm{inf}},$$

$$\mathcal{T} = \Gamma_{\{\mathcal{F}}\Gamma_{\mathcal{G}\}}$$

или

$$\tilde{a}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{tr}\,[\mathcal{F}, \mathcal{G}]\,\mathcal{T}S^{\mathrm{inf}}(x-y)\Big|_{x^0-y^0=+0}\gamma^0. \tag{B.7}$$

Сама аномалия есть локальный предел выражения (B.7):

$$a \sim a(f, g) = \text{local limit}\,\tilde{a}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Функция Грина свободных фермионов в пределе $x^0 - y^0 \to +0$ имеет вид

$$S(x-y)\Big|_{x^0-y^0=+0} = -\frac{i\gamma_+}{4\pi}\int dp\varepsilon(p)\,e^{ip(x-y)},$$

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 1, & p \geqslant 0; \\ -1, & p < 0. \end{cases}$$

В таблице приведены Г-матрицы и билокальные функции для токов и свободных гамильтонианов в обычных и конусных координатах.

Так, для коммутатора компонент тока, например, получаем

$$\tilde{a}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \int \frac{dk_1\,dk_2\,dq}{(2\pi)^3}\left\{2\pi\delta(k_1+k_2)\,\varepsilon\left(-q-\frac{k_1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+i\tilde{\alpha}(-k_1-k_2)\left[\varepsilon\left(-q-\frac{k_1}{2}\right)-\varepsilon\left(k_2+\frac{k_1}{2}+q\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{\tilde{\mathcal{F}}(k_1, q)\,\tilde{\mathcal{G}}\left(k_2, q-\frac{k_1+k_2}{2}\right)-\tilde{\mathcal{G}}(k_1, q)\,\tilde{\mathcal{F}}\left(k_2, q-\frac{k_1+k_2}{2}\right)\right\}$$

и с учетом разложения (В.4) приходим к следующему выражению для аномалии:

$$a(f, g) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int dk\left[-k\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(-k)+i\int\frac{ds}{2\pi}\,k\tilde{\alpha}(-s)\,\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(s-k)\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int dx\,dy\left[-i\frac{\partial}{\partial y}\,\delta(x-y)+\alpha'(x)\,\delta(x-y)\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow [j_1(x), j_0(y)] = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\delta(x-y)+\frac{e}{\pi}A_1(x)\,\delta(x-y). \tag{B.8}$$

Как мы видим, взаимодействие с калибровочным полем не повлияло на структуру швингеровского члена. Однако учет изменения функции $S(x-y)$ при калибровочных преобразованиях полей $\psi(x)$, $\psi^+(x)$

$$\psi(x) \to \exp\{i\alpha(x)\}\,\psi(x) \tag{B.9}$$
$$S(x-y) \to \exp[-i\alpha(x)]\,S(x-y)\exp[i\alpha(y)]$$

приводит к появлению в правой части (В.8) дополнительного слагаемого

$$\frac{2i}{(2\pi)^3}\int dk\,ds k\tilde{\alpha}(-s)\,\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(s-k) = \frac{1}{\pi}\int dx\,dy\,\alpha'(x)\,\delta(x-y),$$

которое и есть следствие этого взаимодействия.

Аналогичным образом вычисляются и остальные коммутаторы:

$$i[H_0, j_0(x)]_{\text{ан}} = \frac{e}{\pi}\,\partial_1 A_1(x);$$

$$i[H_0, J_0^+(x)]_{\text{ан}} = -i[H_0, J_1^+(x)]_{\text{ан}} = \frac{e}{2\pi}\,\partial_1 A_1(x);$$

$$i[{}^{(L)}H_0, J_0^+(x)]_{\text{ан}} = \frac{e}{2\pi}\,\partial_1 A_1(x);$$

$$i[H_0, J_0^-(x)]_{\text{ан}} = i[H_0, J_1^-(x)]_{\text{ан}} = \frac{e}{2\pi}\,\partial_1 A_1(x);$$

$$[J_0^+(x), J_0^+(y)] = [J_1^+(x), J_1^+(y)] = \frac{1}{2\pi i}\,\delta'(x-y)+\frac{e}{2\pi}A_1(x)\,\delta(x-y);$$

$$[J_0^+(x),\ J_1^+(y)] = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y) - \frac{e}{2\pi}A_1(x)\,\delta(x-y);$$

$$[J_0^-(x),\ J_0^-(y)] = [J_1^-(x),\ J_1^-(y)] = [J_0^-(x),\ J_1^-(y)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y) - \frac{e}{2\pi}A_1(x)\,\delta(x-y);$$

$$[J_+(x^-),\ J_+(y^-)] = \frac{i}{2\pi}\delta'(x-y) + \frac{e}{2\pi}A_-(x^-)\,\delta(x^- - y^-).$$

При вычислении коммутаторов в конусных координатах одновременной пропагатор принимает вид

$$S(x-y)\Big|_{x^+-y^+=+0} = -\frac{\gamma_+}{8\pi}\int dp_-\theta(p_-)\,e^{\frac{i}{2}p_-x^-};$$

$$\theta(p_-) = \begin{cases} 1, & p_- \geqslant 0; \\ 0, & p_- < 0, \end{cases}$$

а фурье-образ билокальной функции $\mathcal{F}(x^-,\ y^-)$ записывается как

$$\tilde{\mathcal{F}}(k_-,\ q_-) = \int dx^-\,dy^-\,e^{ik_-\frac{x^-+y^-}{2}}\,e^{iq_-(x^--y^-)}\mathcal{F}(x^-,\ y^-).$$

Заметим, что в терминах поперечных переменных некоторые коммутаторы меняются, что связано с трансформационными свойствами этих переменных.

Таблица. **Билокальные функции и Г-матрицы для операторов тока и свободных гамильтонианов; верхним индексом (L) обозначены величины, относящиеся только к электродинамике с левыми фермионами, верхним индексом c ($\pm$) — величины в конусных координатах с x^+ или x^- в качестве оси физического времени соответственно**

Оператор	Билокальная функция $\mathcal{F}$	Матрица Г
$j_0 = \bar\psi\gamma_0\psi = -j_{51}$	$\mathcal{F}_1(x,\ y) \xrightarrow[x\to y]{} \delta(x-y)$	$\mathbb{1}$
$j_1 = \bar\psi\gamma_1\psi = -j_{50}$	$\mathcal{F}_1(x,\ y)$	γ_5
$J_0^+ = \psi_L^+\psi_L = -J_1^-$	$\mathcal{F}_1(x,\ y)$	Γ_-
$J_0^- = \psi_R^+\psi_R = J_1^-$	$\mathcal{F}_1(x,\ y)$	Γ_+
$\mathcal{H}_0 = i\bar\psi\gamma_1\partial_1\psi$	$\mathcal{F}_2(x,\ y) = \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{F}_1(x,\ y)$	γ_5
${}^{(L)}\mathcal{H}_0 = -i\psi_L^+\partial_1\psi_L$	$\mathcal{F}_2(x,\ y)$	$-\Gamma_-$
$\mathcal{H}_0^{c(+)} = -i\psi_R^+\partial_-\psi_R$	$\mathcal{F}_4(x^-,\ y^-) = \frac{\partial}{\partial y^-}\mathcal{F}_3(x^-,\ y^-)$	$-\Gamma_+$
$\mathcal{H}_0^{c(-)} = -i\psi_L^+\partial_+\psi_L$	$\mathcal{F}_6(x^+,\ y^+) = \frac{\partial}{\partial y^+}\mathcal{F}_5(x^+,\ y^+)$	$-\Gamma_-$
${}^{(L)}\mathcal{H}_0^{c(-)} = +i\psi_L^+\partial_+\psi_L$	$\mathcal{F}_6(x^+,\ y^+)$	Γ_-
$J_+ = \psi_L^+(x^-)\,\psi_L(x^-)$	$\mathcal{F}_3(x^-,\ y^-) \xrightarrow[x^-\to y^-]{} \delta(x^- - y^-)$	$-\Gamma_-$
$J = \psi_R^+(x^+)\,\psi_R(x^+)$	$\mathcal{F}_5(x^+,\ y^+) \xrightarrow[x^+\to y^+]{} \delta(x^+ - y^+)$	Γ_+

Поскольку они инвариантны относительно калибровочных преобразований исходных полей, соотношение (В.9) не имеет места. Так, первые четыре коммутатора (В.10) становятся неаномальными, а в коммутаторах компонент токов остаются только швингеровские члены.

Результаты вычисления билокальных функций приводятся в таблице.

СПИСОК ЛИТЕРАТУТЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
2. **Вайтман А. С.** Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей: Пер. с англ. М.: Наука, 1968.
3. **Chang S.-J., Ellis S.D., Lee B.W.**//Phys. Rev. D. 1975. Vol. 11. P. 3572—3582.
4. **Abbott L. F.**//Phys. Rev. D. 1976. Vol. 14. P. 552—557; **Campbell D. K., Liao Y.-T.**//Phys. Rev. D. 1976. Vol. 14. P. 2093—2116; **Banks T., Zaks A.**//Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 128. P. 333—339.
5. **Muller-Kirsten H.J.W., Wiedemann A.**//Fortschr. Phys. 1984. Vol. 32. P. 281—314.
6. **Polyakov A., Wiegmann P. B.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 131. P. 121—126.
7. **Green M. B.**//Physica Scripta. 1987. Vol. T15. P. 7—18.
8. **Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.**//Nucl. Phys. B. 1984. Vol. 241. P. 333—380; **Friedan D., Qiu Z., Shenker S.**//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 1575—1578.
9. **Goddard P., Kent A., Olive D. I.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 152. P. 88—92; **Goddard P., Olive D. I., Schwimmer A.**//Phys. Lett. 1985. Vol. 157. P. 393—399; **Goddard P., Olive D. I.**//Nucl. Phys. B. 1985. Vol. 257. P. 226—252.
10. **Goddard P., Kent A., Olive D. I.**//Commun. Math. Phys. 1986. Vol. 103. P. 105—119.
11. **Witten E.**//Commun. Math. Phys. 1988. Vol. 114. P. 1—53; **Arbarello E., De Concini C., Kac V. G., Procesi C.**//Commun. Math. Phys. 1988. Vol. 117. P. 1—36.
12. **Henneaux M., Mezincescu L.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 152. P. 340—342; **Curtright T. L., Mezincescu L., Zachos C. K.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 161. P. 79—84.
13. **Witten E.**//Commun. Math., Phys. 1984. Vol. 92. P. 455—472.
14. **Alvarez-Gaume L.** Lectures delivered at the Intern. School on Math. Phys. Erice, July 1985; HUTP—85/AO92, Cambridge, 1985; **Морозов А. Ю.**// УФН. 1986. Т. 150. С. 337—416.
15. **Hwang D. S.**//Phys. Rev. D. 1987. Vol. 35. P. 1268—1279; **Kim J. K., Yoon Y.**//Phys. Lett. B. 1988. Vol. 214. P. 98—104.
16. **Schwinger G.**//Theoretical Physics (Lectures presented at the seminar on theoretical physics, Trieste, 1962) Vienna, IAEA, 1963. P. 89—134.
17. **Casher A., Kogut J., Susskind L.**//Phys. Rev. D. 1974. Vol. 10. P. 732—745.
18. **Wilson G.**//Phys. Rev. D. 1974. Vol. 10. P. 2445—2459.
19. **Kogut J., Susskind L.**//Phys. Rev. D. 1975. Vol. 11. P. 3594—3610.
20. **Nielsen N. K., Schroer B.**//Nucl. Phys. B. 1977. Vol. 120. P. 62—76.
21. **Klaiber B.** Lectures in Theoretical Physics, Boulder Lectures 1967, Gordon and Breach, N.Y., 1968.
22. **Morchio G., Pierotti D., Strocchi F.**//Ann. Phys. (N.Y). 1988. Vol. 188. P. 217—238.
23. **Илиева Н. П., Первушин В. Н.**//Труды VIII Междунар. семин. по пробл. физ. высоких энергий, Дубна, 1986. ОИЯИ Д1 2-86-668. Дубна, 1987. Т. 1. С. 69—77.
24. **Pervushin V. N.**//Riv. Nuovo cimento. 1985. Vol. 10, N 8. P. 1—54.
25. **Илиева Н. П., Нгуен Суан Хан, Первушин В. Н.**//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 1169—1176; **Suan Han. N., Pervushin V. N.**//Fortschr. Phys. 1989. Vol. 37. P. 611.

26. **Ilieva N. P., Pervushin V. N.**//Proc. VII. Intern. Seminar on the HEP Problems, Dubna, 1984; JINR D1 2-84-599. Dubna, 1984. P. 65.
27. **Ilieva N.P., Litov L.**//Selected Topics in Quantum Field Theory and Mathematical Physics. Singapore: World Scientific, 1989.
28. **Трейман С., Джекив Р., Гросс Д.** Лекции по алгебре токов: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1977.
29. **Heisenberg W., Pauli W.**//Z. Phys. 1929. Vol. 56. P. 1—28; Ibid. 1930. Vol. 59. P. 168—175.
30. **Zumino B.**//J. Math. Phys. 1960. Vol. 1. P. 1—6.
31. **Bjorken J. D., Drell S. D.** Relativistic Quantum Fields: McGraw-Hill Comp., 1965.
32. **Gribov V. N.**//Nucl. Phys. B. 1978. Vol. 139. P. 1—19.
33. **Ilieva N. P., Pervushin V. N.** JINR Commun. E2-85-355. Dubna, 1985.
34. **Илиева Н. П., Первушин В. Н.**//ЯФ. 1984. Т. 39. С. 1011—1020.
35. **Ilieva N. P.**//Proc. VII Warszawa Symp. on Elem. Part. Phys., Kazimierz, 1984; Warszawa, 1984. P. 443—453.
36. **Pervushin V. N., Kalinovsky Yu. L., Kallies W., Sarikov N. A.** Preprint JINR P2-88-674. Dubna, 1988.
37. **Kalinovksy Yu. L., Kaschluhn L., Pervushin V. N.**//Phys. Lett. B. 1989. Vol. 231. P. 288.
38. **Илиева Н. П.**//Проблемы квантовой теории поля. ОИЯИ Д2-87-798. Дубна, 1987. С. 146—159; **Ilieva N.**//Intern. J. Mod. Phys. A. 1989. Vol. 4. P. 4567.
39. **Nguyen Suan Han, Pervushin V. N.**//Mod. Phys. Lett. A. 1987. Vol. 2. P. 367—383.
40. **Lowenstein J., Swieca A.**//Ann. Phys. (N.Y.). 1971. Vol. 68. P. 172—195.
41. **Coleman S., Jackin A., Susskind L.**//Ann. Phys. (N.Y.). 1975. Vol. 93. P. 267—275.
42. **Jordan P.**//Z. Phys. 1935. Vol. 93. P. 464; 1936. Vol. 98. P. 759; Vol. 99. P. 109; **Born M., Nagendra-Nath N.**//Proc. Ind. Acad. Sci. 1936. Vol. 3. P. 318. **Socolov A. A.**//Phys. Z. Sov. Union. 1937. Vol. 12. P. 148.
43. **Mattis D. C., Lieb E. H.**//J. Math. Phys. 1965. Vol. 6. P. 304—312.
44. **Jackiw A.** Preprint CTP-1300. Cambridge, 1985.
45. **Coleman S.**//Ann. Phys. (N.Y.), 1976. Vol. 101. P. 239—267.
46. **Красников Н. В., Матвеев В. А., Рубаков В. А., Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф.**//ТМФ. 1980. Т. 45. С. 313—328; **Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф.**// ЭЧАЯ. 1985. Т. 16. С. 973—1004; **Пивоваров А. А., Токарев В. Ф.**//ЯФ. 1985. Т. 41. С. 524—533; **Матвеев В. А., Рубаков В. А., Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф.** //ТМФ. 1986. Т. 68. С. 3—17.
47. **Hagen C. R.**//Phys. Rev. D. 1985. Vol. 32. P. 2229—2230.
48. **Fujikawa K.**//Phys. Rev. D. 1980. Vol. 21. P. 2848—2858.
49. **Roskies A.** Preprint Pitt-217. Pittsburgh, 1979.
50. **Iso S., Murayama H.** Preprint UT-533. Tokyo, 1988; **Iso S., Murayama H.** Preprint UT-534. Tokyo, 1988.
51. **Di Vecchia P.** Preprint WU B 85-13. Wuppertal, 1985.
52. **Arbuzov B. A.**//Phys. Lett. B. 1983. Vol. 125. P. 497—500.
53. **Steinberger J.**//Phys. Rev. 1949. Vol. 76. P. 1180—1186.
54. **Gribov V. N.**//Nucl. Phys. B. 1982. Vol. 206. P. 103—131.
55. **Callan C. G. (Jr.), Dashen R. F., Gross D. J.**//Phys. Lett. B. 1976. Vol. 63. P. 334—340; **Jackiw A., Rebbi C.**//Phys. Rev. Lett. 1976. Vol. 37. P. 172—175; **Rothe K. D., Swieca J.A.**//Nucl. Phys. B. 1978. Vol. 138. P. 26—30.
56. **Nakawaki Y.**//Progr. Theoret. Phys. 1984. Vol. 72. P. 134—166.
57. **Первушин В. Н.**//ТМФ. 1980. Т. 45. С. 394—406.
58. **Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.**//Phys. Lett. B. 1979. Vol. 59. P. 85—87.
59. **Kiskis J.**//Phys. Rev. D. 1985. Vol. 31. P. 2006—2011.
60. **Pollard B. R.** Lecture Notes. Univ. of Bristol, 1976—1977.
61. **Hetrick J. E., Hosotani Y.**//Phys. Rev. D. 1988. Vol. 38. P. 2621—2624.
62. **Chou K., Wu Y., Xie Y.**//Commun. Theoret. Phys. 1987. Vol. 7. P. 27—35.

63. **Efremov A. V., Radyushkin A. V.**//Riv. Nuovo cimento. 1980. Vol. 3, N 2. P. 1—87.

64. **Shifman M. A., Vainstein A. J., Zakharov V. I.**//Nucl. Phys. B. 1979. Vol. 147. P. 385—534.

65. **Зиновьев Ю. М.**//ТМФ. 1982. Т. 50. С. 207—220.

66. **Jackiw R.** Lecture Notes, Les Houshes, France, 1983; Cambridge, 1983.

67. **Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.)** Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.

68. **Faddeev L. D.**//Phys. Lett. B. 1984. Vol. 145. P. 81—84; **Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л.**,//ТМФ. 1984. Т. 60. С. 206—217.

69. **Nelson P., Alvarez-Gaume L.**//Commun. Math. Phys. 1985. Vol. 99. P. 103—114.

70. **Lott J., Rajaraman R.**//Phys. Lett. B. 1985. Vol. 165. P. 321—326.

71. **Faddeev L. D., Shatashvili S. L.**//Phys. Lett. B. 1986. Vol. 167. P. 225—228.

72. **Шаташвили С. Л.**//ТМФ. 1987. Т. 71. С. 40—45.

73. **Babelon O., Schaposnik F. A., Viallet C. M.**//Phys. Lett. B. 1986. Vol. 177. P. 385—388; **Harada K., Tsutsui J.**//Phys. Lett. B. 1987. Vol. 183. P. 311—314.

74. **Jackiw A., Rajaraman R.**//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. P. 1219—1221; **Banerjee A.**//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1889—1892; **Harada K., Kubota H., Tsutsui J.**//Phys. Lett. B. 1986. Vol. 173. P. 77—80.

75. **Girotti H. C., Rothe H. G., Rothe K. D.**//Phys. Rev. D. 1986. Vol. 34. P. 592—597.

76. **Falck N. K., Kramer G.**//Ann. Phys. (N.Y.) 1987. Vol. 176. P. 330—343.

77. **Miyake S., Shizuya K.**//Phys. Rev. D. 1987. Vol. 36. P. 3781—3787; **Shizuya K.**//Phys. Lett. B. 1988. Vol. 213. P. 298—302.

78. **Link R., Roberge A., Semenoff G. W.**//Z. Phys. C. Particles and Fields. 1988. Vol. 39. P. 269—273.

79. **Das A.**//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 2126—2128; **Hagen C. R.**// Ibid. P. 2223 (C); **Halliday I. G., Rabinovici E., Schwimmer A., Chanowitz M.**// Nucl. Phys. B. 1986. Vol. 268. P. 413—426.

80. **Jo S.-G.**//Phys. Rev. D. 1987. Vol. 35. P. 3179—3186.