

## ЗА ПРЕДЕЛАМИ ПЕРТУРБАТИВНОЙ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ—РОЖДЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

*Я. З. Дарбаидзе*

Институт физики высоких энергий ТГУ, Тбилиси

*В. А. Ростовцев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются аналитические методы изучения многоструйных партонных и эксклюзивных адронных процессов в рамках КХД.

Выведена цепочка дифференциальных уравнений (модель КВАРКЕР) из структуры сечения тормозного излучения глюонов в древесных диаграммах кварков с целью адронизации сильно коррелированных компонент. Обсуждается возможность приведения системы дифференциальных уравнений для средних (ассоциативных) множественностей к диссипативной модели Вольтерры для конкурирующих компонент за общий ресурс кваркового субстрата. Проведен фазовый анализ на плоскости полного сечения и средней множественности в рамках нелинейной модели. [Эти модели учитывают динамику образования резонансных систем с разной степенью корреляций. Обсуждаются бифуркация рождения серпуховского эффекта и закон Вольтерры — Гаузе как результат неполного насыщения многокомпонентных взаимодействий при распределении кваркового субстрата. В пределе большого числа коррелированных компонент наблюдается феномен перемежаемости во множественных процессах.

The analytical methods for study of multijet events and exclusive hadronic processes are discussed in the framework of the quantum chromodynamic. The chain of the differential equations (model QUARKER) was derived on the basis of consideration of the cross-section structure of the gluon bremsstrahlung emission in multi-quark tree diagrams for the purpose of hadronization of the strong correlating components. The examples of the multiparticle process characteristic dependence on the number of a few correlated components are considered. The possibility for reducing the differential equation system to a dissipative type Volterra model of competing biological species for the same food is discussed. The phase analysis of the total cross section and the mean multiplicity on the plane has been carried out. The models take into account the birth dynamics of the resonance systems with different strengths of correlation in QCD. The Serpukhov effect bifurcation and the Volterra-Gause law are discussed as a result of the incomplete saturation of the multi-component interactions at distribution of the same quark substratum. The phenomena of intermittency in multiparticle processes is observed in the limit of large component number.

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы с образованием адронных систем разного типа (компонент, резонансов, струй ...) интенсивно изучались в течение последних 20 лет (см., например, [1—13]). За это время ответственность за объяснение большинства явлений во множественных процессах, особенно эффектов на малых расстояниях, брала на себя пертурбативная квантовая хромодинамика (КХД) [10]. Таким способом интенсивно исследуются проблемы жесткого [4, 16] и мягкого [14, 15] рождения частиц в высокоэнергетических адрон (лептон)-адронных и адрон-ядерных рассеяниях [16—18].

Эта тенденция, естественно, продлится в ближайшие годы с появлением новых ускорителей с энергиями  $s^{1/2} > 1$  ТэВ [19]. Однако известную проблему адронизации партонов (кварков и глюонов) в адроны, уходящую за рамки теории возмущения (ТВ) КХД, пока нельзя считать окончательно решенной [20—24].

Она не менее актуальна, чем, вообще говоря, проблемы, находящиеся за пределами стандартной модели электрослабых взаимодействий и КХД (см. в [25]).

Особенно нуждаются в прояснении рождение многокомпонентных систем (резонансов) и соответствующие ему характеристики или, как в последнее время стали именовать, вопросы «перемежаемости» (структурности, неоднородности) во множественных процессах [26—29].

В дальнейшем при исследовании перемежаемости мы будем следовать следующей программе [30]: пусть некоторая функция (например, распределение Кобы, Нильсена и Ольсена (КНО) [2]  $\psi(z_c)$ ) зависит от некоторого скрытого параметра  $\nu$  так, что при некоторых значениях  $\nu$  она падает с ростом независимой переменной ( $z_c$ ). Если при этом соответствующие ей моменты растут, то мы считаем это явление перемежаемостью и начинаем исследовать причины ее возникновения.

При обсуждении физических характеристик эксклюзивного процесса

$$a + b \Rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_\nu, \quad (1)$$

в котором участвуют  $n_1, n_2, \dots, n_\nu$  адронов  $\nu$ -типа, в первую очередь следует, по-видимому, упомянуть известную гипотезу КНО [2], базирующуюся на существовании фейнмановского плато (скейлинга) в быстротных распределениях инклюзивных спектров [1].

Она заключается в следующем: пусть  $\sigma(n_1, \dots, n_\nu)$  и  $\sigma$  — топологическое и инклюзивное (полное) сечения процесса (1). Тогда:

1) их комбинирование со средними множественностями  $\langle n_i \rangle$  приводит к следующему автомодельному соотношению:

$$\prod_{i=1}^{\nu} \langle n_i \rangle \sigma(n_1, \dots, n_\nu) / \sigma = f(z_1, \dots, z_\nu), \quad (2)$$

где  $z_i = n_i / \langle n_i \rangle$ ;

2) для заряженных частиц в полуинклюзивной реакции

$$a + b \Rightarrow (n_1 = n_c) + X$$

из (2) следует одномерное соотношение

$$\langle n_c \rangle \sigma_{n_c} / \sigma \equiv \psi(z_c) = \int_0^\infty dz_2 \dots \int_0^\infty dz_\nu f(z_c, z_2, \dots, z_\nu); \quad (3)$$

3) соотношения (3) означают «инвариантность» относительно распада (или рождения) резонансов.

Нам непонятен третий пункт этой гипотезы. Во-первых, согласно известной формуле Коши,  $\nu$ -кратная квадратура выражения (3) приводится к однократной

$$\psi(z_c) = \frac{1}{(\nu-1)!} \int_{z_c}^\infty (t-z_c)^{\nu-2} f(t) dt, \quad (4)$$

если аргументы функции (2) аддитивны,  $t = \sum z_i$ . Так, например,  $\psi$  может зависеть от  $\nu$ . Это может произойти также и в том случае, когда резонансы рождаются в ограниченном количестве и при этом распределены (распадаются) по закону  $\delta(z_i - \alpha_i)$  или  $\delta(z_i - \alpha_i z_1)$ , где  $\alpha_i$  — константы распада,  $i = 2, \dots, \nu$ . Тогда квадратуры вообще не возникают, но  $f$  может зависеть от  $\nu$  и соответственно соотношение (3) нарушится аналогично тому, как это происходит при сужении интервала по псевдобыстроте  $|\eta| < \eta_c$  (см. [31] и рис. 1).

Во-вторых, в работах, где можно уловить такие эффекты адронизации, к нашему удивлению, ограничиваются двухкомпонентным рассмотрением [32—35]. Чтобы показать неоправданность такого ограничения, приведем следующий пример [36, 37]. С помощью формул (2)—(4) нетрудно получить соотношение корреляции между ассоциативными множествами нейтральных и заряженных частиц следующего вида:

$$\frac{\langle n_0(n_c) \rangle}{\langle n_0 \rangle} = \frac{1}{\nu-1} \frac{\int_{z_c}^\infty (t-z_c)^{\nu-1} f(t) dt}{\int_{z_c}^\infty (t-z_c)^{\nu-2} f(t) dt}. \quad (5)$$

Подставляем сюда функцию [7]

$$f(t) = t^{a-\nu} \exp[-(a/\nu)t], \quad (6)$$

которую мы будем называть обобщенным гамма ( $\Gamma$ )-распределением. Тогда, очевидно, при  $\nu < a$  соотношение (5) описывает отрицательные корреляции (т. е. его правая часть — убывающая функция от  $z_c$ ). При  $\nu > a$  достигается насыщение по положительным корреляциям. Такое поведение согласуется с экспериментальными данными (см. [37—43]), что еще раз указывает на возможность флуктуации числа коррелированных компонент.

Соответствующие экспериментальные данные хорошо фиторуются линейной функцией

$$\frac{\langle n_0(n_c) \rangle}{\langle n_0 \rangle} = Az_c + B, \quad (7)$$

где параметры  $A$  и  $B$  оказывались зависящими от полной энергии сталкивающихся частиц в области  $s^{1/2} = (3 \div 15)$  ГэВ [40].

Однако использование многомерной КНО-функции (2) в формуле (5) привело к естественному изменению этих параметров за счет увеличения числа  $\nu$  коррелированных компонент. Удивление вызывал только тот факт, что параметр ( $a$ ) имел тенденцию к уменьшению с ростом энергии. Причиной этого может служить отмеченное выше рождение нескольких  $\nu_1$ -компонент с локальным ( $\delta$ -образным) вкладом в усреднение при большом числе  $\nu_2 \gg 1$  «запаздывающих» (нелокальных или последующих) компонент. Так, если рождаются  $\nu = \nu_1 + \nu_2$  компонент, но в усреднении принимает участие только  $\nu_2$ . Тогда интересующее нас отношение (5) в пределе большого числа  $\nu_2$ -компонент  $\nu_2 \gg 1$  вырождается по этому параметру (насыщение):

$$\frac{\langle n_i(n_1) \rangle}{\langle n_i \rangle} = \left\{ \frac{z_1}{a_e} \right\}^{1/2} \frac{K_{a_e} (2\sqrt{a_e z_1})}{K_{a_e-1} (2\sqrt{a_e z_1})} \quad (8)$$

и зависит лишь от эффективных констант  $\bar{a}_e = a - \nu_1 + 1 < a$  и  $a_e = a/\nu_1 < a$ . Здесь  $K$  — модифицированная функция Бесселя.

Интересно отметить, что зависимость  $\langle n_i(n_1) \rangle / \langle n_i \rangle$  от  $a_e$  и  $\bar{a}_e$  (от  $\nu_1$ ) обнаруживается и в других соотношениях. Точнее, ранее наблюдалось усиление известного эффекта «чайки» с ростом числа  $\nu_1$  [42]. А в [41, 43] для описания поведения нормированных полуинклюзивных спектров  $\frac{1}{\sigma_{n_c}} \frac{d\sigma_{n_c}}{d\eta}$  при  $s^{1/2} = 540$  ГэВ, в частности, углубления изображенных (см. рис. 6) спектров в центральной области  $\eta$ , установлено условие  $\bar{a}_e < 1$  и т. д.

Естественно, возникает вопрос, насколько это число определено и не является ли оно причиной «загадки» столь популярного отрицательного биномиального распределения [24, 44, 45] или феномена перемежаемости во множественных процессах [26—29, 50, 51]?

С одной стороны, одномерное КНО-соотношение (3) в адронных столкновениях должно описываться  $\Gamma$ -распределением [46, 47]

$$\langle n_c \rangle' \sigma_{n_c} / \sigma \equiv \psi(z_c) = \frac{a^a}{\Gamma(a)} z_c^{a-1} \exp(-az_c), \quad (9)$$

с учетом некоторых модифицирующих поправок [48]. Здесь параметр ( $a$ ) должен быть постоянным ( $a = 3 \div 4$ ) и определяться из соотношения Врублевского [49]

$$D_c^2 = \frac{1}{a} (\langle n_c \rangle - \varepsilon_c)^2. \quad (10)$$

Однако этот параметр также «загадочно» меняется при изменении условия эксперимента, в частности, при сужении интервала по псевдобыстроте  $|\eta| < \eta_c$  [31, 44, 45], что и является отмеченной выше загадкой в терминах  $\Gamma$ -распределения. Это явление имеет также место в зависимости от типа сталкивающихся частиц [33].

С другой стороны, эффект нарушения КНО-скейлинга усиливается в высших (факториальных) моментах и, как отмечается в недавних работах [28, 29, 50, 51], напоминает феномен перемежаемости.

Заранее скажем, что ответ на поставленные выше вопросы положительен: во-первых, на языке КНО-функции загадкой является обобщение  $\Gamma$ -распределения в следующей форме:

$$\langle n_c \rangle \sigma_{n_c} / \sigma \Rightarrow t^{a-\nu} \exp [-(a/\nu)t], \quad (11)$$

где  $t = z_c + \alpha$  (см. в разд. 1).

Во-вторых, соответствующие моменты как функция от  $k$  быстро растут в режиме большого числа компонентности  $\nu \geq a$  и наблюдается перемежаемость, так как сама функция (11) от  $z_c$  при этом падающая (см. рис. 1). К примеру, на рис. 4 (см. разд. 4) иллюстрируется зависимость отношения моментов  $C(k+1)/C(k)$  от числа  $\nu$  по формуле

$$C(k+1)/C(k) \approx (\nu/a)k + 1. \quad (12)$$

Здесь

$$C(k) = \int_0^\infty z_c^k \psi(z_c) dz_c$$

— моменты распределения по множественности заряженных частиц. Заметим, что такая зависимость эквивалентна взаимосвязи между  $C(k)$  (и его аналогами [2, 26, 27]) и интервалом псевдобыстроты  $|\eta| < \eta_c$ , привлекающей в последнее время такое внимание.

Основная цель данной работы — объяснить отмеченные явления на языке многокомпонентной детерминистической модели типа Вольтерра и др. [52] для взаимодействующих видов биологической популяции. При этом обнаружение [53—55] зависимости функции (3) и других характеристик от числа  $\nu$  взаимодействующих компонент — явление новое и при всей длительной истории этих моделей до настоящего времени не изучалось [56—63].

Вообще говоря, методы нелинейной физики (см. [64, 65] и цитированную там литературу) часто прилагаются к физике элементарных частиц и, в частности, весьма сложной проблеме описания динамики многочастичных объектов в рамках КХД.

Например, методы исследования процессов (1) сводились к проблеме решения алгебраических [66], дифференциальных (Д) [7, 35], дифференциально-разностных (ДР) [67] уравнений. Часто использовались интегральные уравнения для описания многочастичной

динамики в рамках квазипотенциального подхода (соответствующую литературу см. в [5, 68]).

Весьма популярными стали ДР [32] и дифференциально-интегральные [70] уравнения, полученные из КХД-рассмотрения эксклюзивных процессов.

Особенно интенсивно исследуются в последнее время ДР-схемы (см. [71, 72] и цитированную там литературу). В рамках КХД их вывел Джованнини в предположении о стохастической (марковской) природе процессов глюонного слияния, тормозного излучения глюонов и рождения кварк-антикварковой пары [32].

Заметим, что многие авторы без изменения переносят эти уравнения с кварк-партоного на адронный уровень, и, кроме того, ситуация изучения множественных процессов на современных ускорителях такова, что возможно сначала использовать детерминистические модели. Мы имеем в виду класс моделей [52], часто используемых при решении экологических задач и приспособленных к описанию объектов с численностями  $10^2$ — $10^4$  [58—63].

Мы не придерживаемся стохастического направления адронизации в КХД в связи с неопределенностью схем реакции, отличных от (1), и отсутствием, вообще говоря, аналога «закона действующих масс» [59].

Особенно близки нам программа Блоха — Нордсика [14, 15] по изучению инфракрасного (ИК) поведения в рамках ТВ КХД и суперсимметричной КХД (СКХД) [73—81, 87, 88].

В связи с этой программой в настоящее время эксклюзивные кварк-глюонные процессы точно рассчитаны в  $\alpha_s^3$ -порядке КХД [79, 80] и  $N = 1,2$  СКХД [73—76] благодаря мощным аналитическим методам (см. [82—86]).

Отметим, что в самых сложных реакциях этого порядка с участием трех и пяти глюонов ( $GG \Rightarrow GGG$ ,  $q\bar{q} \Rightarrow GGG$  и т. д.) сокращение ИК-сингулярностей происходит так убедительно [75], что нетрудно поверить в справедливость теоремы КЛН [15] для более высоких порядков ТВ КХД и последующей экспоненциации [77] остаточных радиационных поправок ( $K$ -факторов) [87, 88].

Следует также отметить, что в высших порядках ТВ КХД и СКХД расчет квадрата матричного элемента для калибровочно-инвариантного набора древесных диаграмм Фейнмана требует полной автоматизации всех этапов вычислений, и выполнить его, например, с помощью универсальной системы REDUCE-3 [83] пока не удалось [89].

Чтобы реально увидеть проблемы компьютерных реализаций расчетов эксклюзивных процессов, например, в рамках  $N = 1$  суперсимметричной КХД, в работе [89] мы приводим примеры. Кажется, работать над улучшением подобных алгоритмов гораздо важнее, чем переоценивать физическое содержание полученных результатов, обозреваемых во многих работах [4, 16]. Мы подчеркиваем, что в моделях квантовой теории поля (например, в КХД [97, 98])

для расчетов в высших порядках ТВ принципиально необходимо привлечь методы компьютерной алгебры [91—95, 99—102] и основанные на них системы аналитических вычислений (САВ) [82—86, 96].

За последние 10 лет накопилось много ярких примеров удачного использования САВ SCHOONSCHIP [82] и REDUCE [83] при подобных вычислениях (см. соответствующую литературу в [91—95]). Эти системы хорошо приспособлены к вычислениям по физике высоких энергий [141].

Отметим, что в настоящее время существует новый вариант типа системы SCHOONSCHIP для персональных компьютеров, получивший название FORM [86]. Кроме этого, появилась быстродействующая программа CompHEP [90], написанная на языках ПАСКАЛЬ и REDUCE-3. Вообще говоря, особенно развитой является REDUCE-3. Своей универсальностью она обязана базовому языку программирования LISP [96], хорошо известному в теории искусственного интеллекта [99].

С целью иллюстрации некоторых возможностей системы REDUCE-3 мы хотели бы привести опыт расчета калибровочно-инвариантного набора диаграмм Фейнмана в эксклюзивных ( $2 \Rightarrow 3$ ) процессах рассеяния партонов в моделях суперсимметричной КХД [89]. Некоторые полезные советы для расчета древесных диаграмм в КХД имеются в [103]. Отметим, что уже в  $\alpha^3$ -порядке ТВ суммирование квадратов амплитуд калибровочно-инвариантного набора в КХД и СКХД сводится к огромной рациональной функции от пяти независимых переменных. Однако благодаря физическим закономерностям изучаемых процессов (см. в [76, 79]) происходит сокращение большого числа общих множителей (ненужных степеней пропагаторов или их аналогов с аксиальным вектором) и факторизация окончательного результата на так называемые обобщенные борновский и инфракрасный факторы. Важно подчеркнуть, что при использовании машинной аналитики факторизацию можно считать одним из строгих и основных критериев правильности и самопроверки получаемого результата. При этом, поскольку мелкие технические ошибки приводят к катастрофически большим нефакторизуемым выражениям, весьма желательно исключить ручной труд. В связи с этим весьма полезным кажется появившаяся недавно программа CompHEP [90], позволяющая автоматизировать генерацию и квадрирование со своими цветовыми весами фейнмановских диаграмм для большого набора модельных лагранжианов. Такая автоматизация особенно необходима для получения разумных результатов с помощью САВ в  $\alpha^4$  и более высоких порядках ТВ.

С другой стороны, во многих работах ухитряются обойти эту проблему методами спиральных амплитуд [111] и суперсимметричных преобразований [104] так, чтобы упомянутые выше дополнительные степени пропагаторов не возникали (см., например, [81]). При этом квадраты независимых спиральных амплитуд содержат лишь ИК-фак-

тор, а борновский — восстанавливается при их простом суммировании, так что ручные расчеты стали реалистичными.

Особенно «драматически» упрощаются расчеты для всего набора партоновых подпроцессов из одного представления группы симметрии при использовании соотношения Грессару и др. [104], позволяющего связать спиральные амплитуды разных подпроцессов действием на них генератора суперсимметрии [76, 81].

Однако в таких случаях трудно избежать появления ошибок хотя бы в коэффициентах, и, вообще говоря, соответствующие результаты всегда нуждаются в согласовании с точными выражениями некоторых базисных процессов, полученных с помощью САВ [76].

Попытки автоматизации эксклюзивных процессов  $\alpha$ -порядка, подчиняющихся известным правилам кваркового счета [105, 106], предпринимаются в работах Фаррар и Нери [107] с помощью языка программирования «С». Нам неизвестны подробности этих расчетов, и в дальнейшем воспользуемся результатами [108, 109], состоящими в установлении общей структуры квадратов матричного элемента для процессов КХД в  $\alpha^n$ -порядке с целью выявления усиления некоторых эффектов от рождения и распада резонансов. Поскольку такие механизмы иногда называют «лазером» той компоненты, которая усиливается в численности (например, «пазер» — пионный лазер, «казер» и т. д.) [110], мы тоже именуем предложенную ниже модель «кваркером» в связи с тем, что она обязана предположению об образовании многоструйной конфигурации с жестким глюонным перерасеянием в ведущем порядке ТВ КХД [53] при столкновении частиц высоких энергий.

Мы понимаем, что это предположение аналогично уже давно известной гипотезе существования многокварковой [105, 106] («кумулятивной») [17] или «флюкционной» [18]) кварк-глюонной системы. Поэтому мы считаем также возможным с целью описания такого механизма привлекать правила кваркового счета [105, 106] в следующем виде [53]:

$$n = \sum_{i=1}^{\nu} N_i n_i \quad (13)$$

( $N_i$  — число валентных кварков в адроне  $i$ -го типа) и, таким образом, определять схему реакции

$$a + b \Rightarrow n \Rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_{\nu}. \quad (1a)$$

Далее мы исходим из уравнения Эйлера для однородной функции, степень которой точно определяется из простого размерного анализа. Переход к инклюзивному усреднению приводит к зацепляющейся системе для средних ассоциативных множественностей, зависящей от  $D_{ik}$ -компонент матрицы корреляций между образующими системами:

$$\frac{d}{d\tau} \langle n_i \rangle = - \sum_{k=1}^{\nu} N_k D_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, \nu. \quad (14)$$



Предложенная модель носит статистический характер в том смысле, что, во-первых, имеет аналогию с известной цепочкой уравнений Боголюбова [112] из статистической кинетики, и, во-вторых, в ней удастся найти обобщение статистического распределения Кернера [57] на диссипативную систему конкурирующих компонент в виде (6) как многомерной КНО-функции. До сих пор статистическая интерпретация удавалась лишь в консервативной модели «хищник — жертва» [52] при четном числе динамических систем (см. [58]).

Заметим, что средние (ассоциативные) множественности уже изучались ранее с помощью интегродифференциального уравнения типа Вольтерра, вытекающего из формализма Алтарелли — Паризи (см. [4, 9, 16]). Соответствующее решение называлось КХД-«ускорением» средних множественностей.

Не вдаваясь в детали, мы позволим себе сказать, что полученная нами система Д-уравнений (14) может оказаться более удобной в следующем смысле: во-первых, она не имеет отношения к таким непertурбативным объектам, как функция распределения (фрагментации) партонов, и не привязана к таким утверждениям, как теорема о факторизации жесткой и мягкой частей рассматриваемого процесса [113, 114] и т. д. Во-вторых, поскольку под адронизацией мы понимаем разделение полного числа  $n$  имеющихся кварков («кварковой пици») между конкурирующими за эту «пицу» компонентами адронов согласно правилу (13) и необходимое инклюзивное усреднение, постольку мы не загромождаем модель такими механизмами, как преконфайнмент [115] или бесцветная струна [116] и т. п.

В разд. 2 развит метод получения более богатого спектра дифференциальных уравнений для средних и также ассоциативных множественностей [54]. Что касается интегральной части, ей соответствует запаздывание по множественности из-за многокомпонентности и приводит к сильной бифуркации в поведении средней множественности и полного сечения образования, например, заряженных частиц [55].

Изучение упругих и полных сечений в рамках моделей квантовой теории поля носит принципиальный характер [117—125]. В КХД оно не является тривиальной задачей [98, 120, 121] и требует трудоемких аналитических расчетов в высших порядках теории возмущения.

Мы полагаем, что всевозможные расчеты подобного типа в КХД могут дать неполную информацию, если не включить в рассмотрение правильную схему адронизации резонансов.

С этой целью часто прибегали к редже-феноменологии и всегда отмечали [124, 125] необходимость привлечения КХД-рассмотрения, например, для описания так называемого «серпуховского» эффекта [122, 123].

Этот эффект, по нашему мнению, полностью обязан многокомпонентной динамике появления резонансных систем и хорошо описывается в рамках модели КВАРКЕР [55].

Существует убеждение, что качественное (топологическое) исследование нелинейных систем дифференциальных уравнений приносит пользу и в том случае, когда они решаются также и аналитически [61, 63]. В разд. 3 мы придерживаемся этой точки зрения и изучаем бифуркацию серпуховского эффекта и вопросы справедливости закона Вольтерра — Гаузе [52, 56] в рамках двух нелинейных моделей многокомпонентной динамики. Это нетрудно проделать стандартной бифуркационной техникой [126], но особенно облегчает дело существование иллюстративной программы PHASER [140].

Заметим, что в настоящее время нам неизвестны точные экспериментальные значения всех величин  $a_{ik}$  корреляционной матрицы

$$D^2 = \{D_{ik}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11} (\langle n_1 \rangle - \varepsilon_1)^2 & \dots & a_{1\nu} \langle n_1 \rangle \langle n_\nu \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} \langle n_\nu \rangle \langle n_1 \rangle & \dots & a_{\nu\nu} (\langle n_\nu \rangle - \varepsilon_\nu)^2 \end{array} \right\}, \quad (15)$$

и подчеркнем важность их измерения для выяснения окончательной картины динамики взаимодействия резонансных систем с целью установления приоритета одной из многочисленных моделей последнего времени, в частности, по феномену перемежаемости во множественных процессах.

Мы предполагаем, что возникающие здесь параметры, выражающие интенсивности корреляций между разными компонентами, подчиняются принципу «универсальности» [46]. Согласно этому принципу, они не зависят от временного параметра  $\tau$  и от числа  $\nu$  динамической размерности системы. Однако, как будет видно ниже, мы не привязываемся к ренорм-групповой [127] интерпретации. Тем не менее мы не видим несогласованности с прежними результатами работ [7, 35, 46, 47].

В разд. 1 предложена модель КВАРКЕР. В разд. 2 устанавливается ее связь с многокомпонентной моделью Вольтерра и другими. Раздел 3 носит прикладной характер: в рамках модели КВАРКЕР получена бифуркация серпуховского эффекта и обсуждается закон Вольтерра — Гаузе во множественных процессах. В разд. 4 показано, что феномен перемежаемости свойствен ассоциативному подходу в пределе большого числа коррелированных компонент  $\nu \gg 1$  и проявляется в таких характеристиках, как корреляционное соотношение нейтральных и заряженных частиц, многомерная КНО-функция и ее моменты и т. д. В конце раздела обсуждается вопрос: нужен ли фейнмановский скейлинг для получения многомерного масштабно-инвариантного соотношения КНО, и в общем виде показано, что последнее возникает в модели КВАРКЕР как результат, вытекающий из правил кваркового счета.

## 1. АНАЛИЗ Д-УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭКСКЛЮЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ И ОБЪЯСНЕНИЕ «ЗАГАДКИ» Г-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**Цепочка Д-уравнений для коррелированных адронных компонент.** В настоящее время установлена общая форма для дифференциальных сечений  $n$ -частичных партонов в КХД [108, 109].

Например, квадрат матричного элемента  $n$ -глюонного процесса воспроизводит известные формулы с четырьмя и пятью глюонами и имеет следующую структуру:

$$|M|_{ng}^2 \approx \sum (p_i p_j)^4 \sum C_i / [(p_1 p_2) (p_2 p_3) \dots (p_n p_1)], \quad (16a)$$

где  $C_i$  — независимые изотопические константы.

Замена глюонов кварками, как нами тоже было проверено в  $\alpha_s^3$ -порядке [73—76], приводит к несущественному изменению первого множителя формулы (16a) следующим образом:

$$\sum (p_i p_j)^4 \Rightarrow \sum (p_i p_j)^{\gamma^1} (p_k p_j)^{\gamma^2}, \quad (16b)$$

где  $\gamma^1 + \gamma^2 = 4$ .

Мы принимаем на веру формулы (16) при рассмотрении  $n$ -кварковых древесных диаграмм с обменами глюонов в лидирующем порядке ТВ КХД и  $N = 1, 2$  СКХД. И так принято считать, что этими жесткими диаграммами реализуется эксклюзивное рассеяние адронов, подчиняющееся правилам кваркового счета при больших переданных импульсах (см., например, [5, 6, 12]).

Выражение  $|M|^2$  как функция от импульсов  $p_1, p_2, \dots, p_n$  удовлетворяет принципу автомодельности, т.е. при масштабном растяжении импульсов  $p_i \Rightarrow \lambda p_i$  ведет себя как однородная функция [105, 106]. Степень однородности равна  $m = -2 (n - 4)$ . Иначе говоря, она удовлетворяет Д-уравнению

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial p_i} |M|^2 = m |M|^2. \quad (17)$$

Перейдем теперь на адронный уровень в следующем порядке:

1) предположим, что число кварков задано настолько большим, чтобы можно было образовывать несколько адронных компонент

$$n = \sum_{i=1}^v N_i n_i \gg 4, \quad m \cong -2n, \quad (17a)$$

где  $N_i$  — число кварков в адроне  $i$ -типа;

2) проинтегрируем (17) по всем «лишним» импульсам кварков так, чтобы их осталось лишь столько, сколько необходимо для ком-плектации одного (или двух) адрона;

3) проведем усреднение по множественностям и определим из физических соображений дополнительные условия для решения системы Д-уравнений.

При интегрировании соотношения (17), например, по  $(n-1)$  импульсам, кроме первого, левая часть легко приводится к виду

$$\left[ p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - (n-1) \right] \int |M|^2 \prod_{i=2}^{\nu} dp_i. \quad (18)$$

Если входящий здесь интеграл интерпретировать как сечение «квазиэксклюзивного» процесса с одним выделенным адроном импульса  $p = p_1$

$$a + b \Rightarrow c(p) + n_1 + n_2 + \dots + n_{\nu}, \quad (19)$$

то согласно (17) и (17а) имеем характеристическое уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \sigma(n_1, \dots, n_{\nu}) = - \left( \sum N_i n_i \right) \sigma(n_1, \dots, n_{\nu}). \quad (20)$$

Временному параметру можно придать физический смысл, если  $p^\mu = p_0^\mu e^t$  — решение уравнения  $dp^\mu = p^\mu dt$  — переписать в виде  $\tau = \ln(pp_0)/p_0^2$ . Если  $p$  — импульс первичной частицы в реакции типа  $a + b \Rightarrow n_c + X$ , то  $\tau = \ln s/2m_p^2$ .

Теперь нетрудно получить характеристики инклюзивного процесса  $a + b \Rightarrow c(p) + X$ . Усредняя по множественностям, для дифференциального сечения и ассоциативных множественностей получаем соответственно

$$\frac{d}{d\tau} \sigma = - \left( \sum_{i=1}^{\nu} N_i \langle n_i \rangle \right) \sigma; \quad (21)$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle n_i \rangle = - \sum_{k=1}^{\nu} N_k D_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (22)$$

где  $D_{ik} = \langle n_i n_k \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_k \rangle$  образуют матрицу корреляции (дисперсии) между множественностями разных компонент. Они также зацеплены с высшими моментами по множественностям.

Мы начнем процедуру расщепления (обрезания) этой цепочки именно с решения ДР-уравнения для высших нормированных моментов, определенных следующим образом:

$$C(q_1, \dots, q_{\nu}) = \int_0^{\infty} f(z_1, \dots, z_{\nu}) \prod_{i=1}^{\nu} z_i^{q_i} dz_i. \quad (23)$$

Соответствующие ДР-уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} C(q_1, \dots, q_{\nu}) = & \sum_{i=1}^{\nu} \{ N_i \langle n_i \rangle [C(q_1, \dots, q_{i+1}, \dots, q_{\nu}) - \\ & - C(q_1, \dots, q_i, \dots, q_{\nu}) [1 + q_i D_{ii} / \langle n_i \rangle^2]] \}. \end{aligned} \quad (24)$$

С целью сравнения выпишем простой вариант ДР-уравнения Джованнини [32, 71, 72]

$$\frac{d}{dt} P_n = -A n P_n + \tilde{A} (n-1) P_{n-1}, \quad (25)$$

где  $P_n$  — нормированное сечение  $n$ -глюонного процесса,  $A$  и  $\tilde{A}$  — постоянные. Уравнения (20) и (25) различаются вторым (разностным) слагаемым. Однако процесс адронизации в нашем подходе больше напоминает цепочку Боголюбова, чем Маркова. Заметим также, что аналогичные уравнения могут возникать, по нашему мнению, при ренорм-групповом анализе соответствующих процессов в рамках КХД.

### Решение задачи Коши методами рекурсии и комбинирования.

Покажем, что нетривиальные и физически интересные решения уравнений (20) — (24) возникают лишь для коррелированных компонент. Начнем с некоррелированного случая, когда при  $i \neq k$  элементы  $D_{ik} = 0$ , т. е. матрица корреляций

$$D = \begin{Bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1v} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{v1} & \dots & D_{vv} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

диагональна. Оставшиеся элементы линеаризуем в виде

$$D_{ii} = \frac{1}{a_i} (\langle n_i \rangle - \varepsilon_i)^2 \quad (27)$$

и будем считать параметры  $a_i$  и  $\varepsilon_i$  «универсальными», т. е. не зависящими от параметров теории (временного параметра  $\tau$  или числа  $v$ ). Такая закономерность хорошо известна, например, для заряженных частиц [49] [см. формулу (10)].

Поскольку все  $\langle n_i \rangle$  независимы и, кроме того,

$$C(1, \dots, 1) = 1, \text{ т. е. } \frac{d}{d\tau} C(1, \dots, 1) = 0,$$

то из уравнения (24) получаем решение с индексами 2:

$$C(2, 1, \dots, 1) = \{1 + [1 - (2\alpha_1 / \langle n_1 \rangle) + (\alpha_1^2 / \langle n_1 \rangle^2)]\}.$$

Чтобы продолжить рекурсию, приходится еще предположить, что  $\langle n_i \rangle \gg \alpha_i$  для всех  $i = 1, \dots, v$ . Тогда нетрудно проверить, что для любого набора индексов моменты по множественностям не будут зависеть от  $\tau$ , и получаются они рекурсивно в факторизованном виде

$$C(q_1, \dots, q_v) = \prod_{i=1}^v \{\Gamma(a_i + q_i) / [a_i^{q_i} \Gamma(a_i)]\}, \quad (28)$$

где  $\Gamma(x)$  — функция Эйлера.

Соответственно многомерная КНО-функция (2) также восстанавливается с помощью обратного преобразования Меллина как произведение однокомпонентных  $\Gamma$ -распределений [46, 47]

$$\Psi(z_i) = \frac{a_i^{a_i}}{\Gamma(a_i)} z_i^{a_i-1} \exp(-a_i z_i). \quad (29)$$

Как было отмечено во введении, фигурирующий в ней параметр  $a_i$  ( $a_c$ ) «загадочно» меняется [24, 45]. Это лишний раз указывает на необходимость выйти из однокомпонентного режима и получить физически правильное решение многомерной КНО-функции [35].

Как мы уже видели, ДР-уравнение (24) рекурсивно решается в весьма ограниченных условиях, и при решении этой проблемы оно нам больше не поможет. Поэтому мы приступаем к непосредственному решению цепочки Д-уравнений (20) — (22).

При линеаризации в общем случае матрицу (15) в недиагональном виде можно задать с разными весами (степенями) корреляции [7]:

$$D_{ik} = \frac{1}{a_{ik}} \langle n_i \rangle \langle n_k \rangle, \quad i, k = 1, \dots, \nu. \quad (30)$$

Однако удобнее рассматривать случай насыщения корреляций одинаковых сил  $a_{ik} = a$  для всех  $i, k = 1, \dots, \nu$ . Тогда состоящую из  $\nu$  уравнений систему (22) можно свести к одному уравнению

$$\frac{d \langle x \rangle}{d\tau} = -D^2(x), \quad (31)$$

где

$$x = \sum_1^\nu N_i n_i; \quad \langle x \rangle = \sum_1^\nu N_i \langle n_i \rangle; \quad D^2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

Нетрудно проверить, что предположение (30) при насыщении корреляций эквивалентно равенству

$$D^2(x) = \frac{1}{a} \langle x \rangle^2. \quad (32)$$

Поделим (20) и (21) на (31) с целью исключения параметра  $\tau$ . В результате получим уравнения

$$\frac{d}{d \langle x \rangle} \sigma(n_1, \dots, n_\nu) = \frac{ax}{\langle x \rangle^2} \sigma(n_1, \dots, n_\nu); \quad (33)$$

$$\frac{d}{d \langle x \rangle} \sigma = \frac{a}{\langle x \rangle} \sigma. \quad (34)$$

Их легко интегрировать:

$$\sigma(n_1, \dots, n_\nu) = C_1 \exp\left(-a \frac{x}{\langle x \rangle}\right), \quad \sigma = C_2 \langle x \rangle^a, \quad (35)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — первые интегралы.

Сформулируем задачу Коши так, чтобы комбинация решений (35) при  $\tau = 0$  удовлетворяла, например, функции

$$F(Z) = Z^{a-\nu} \exp(-aZ), \quad (36)$$

т. е.

$$\left\{ \langle x \rangle^{\nu} \frac{\sigma(n_1, \dots, n_{\nu})}{\sigma} \right\}_{\tau=0} = F(Z) \quad (37)$$

с аргументом  $Z = x/\langle x \rangle$ . Отсюда получаем равенство

$$\left\{ \frac{C_1}{C_2} \right\}_{\tau=0} = x^{a-\nu}.$$

Подставляя в последнее выражение первые интегралы из (35), нетрудно проверить, что соотношение (37) выполняется для всех значений  $\tau$  и ему можно придать вид формулы (2).

Поскольку

$$\frac{d}{d\tau} \langle n_i \rangle = -\langle n_i \rangle \langle x \rangle / a,$$

поскольку  $\langle n_i \rangle / \langle n_1 \rangle = C_i$  являются первыми интегралами. Их теперь можно доопределить, если подставить в стандартное определение  $\langle n_i \rangle$  явный вид функции (35). Получим соотношения (см. конец разд. 4)

$$N_i \langle n_i \rangle = N_1 \langle n_1 \rangle, \quad \langle x \rangle = \nu N_1 \langle n_1 \rangle, \quad Z = \sum z_i / \nu, \quad (37a)$$

которые и придадут формуле (36) требуемый вид КНО-функции

$$f(z_1, \dots, z_{\nu}) = f\left(\sum z_i\right) = A \left(\sum z_i\right)^{a-\nu} \exp\left[-\frac{a}{\nu} \left(\sum z_i\right)\right], \quad (38)$$

где  $A = \left[\frac{a}{\nu}\right]^a \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(a)}$ .

Наконец, объясним упомянутую во введении «загадку» на основе формулы (38). Рассмотрим именно тот случай, когда при  $\nu > 1$ , квадратуры в функции (3) не возникают благодаря  $\delta(z_i - \alpha_i)$ . Тогда КНО-функция (3) для  $n_1 = n_c$  согласно (38) параметризуется в виде обобщенного  $\Gamma$ -распределения

$$\Psi(z_c) \Rightarrow (z_c + \alpha)^{\nu(a_e - 1)} \exp[-a_e(z_c + \alpha)]. \quad (39)$$

Подчеркнем физические значения возникающих здесь параметров:  $a_e = a/\nu$  — эффективная степень силы корреляции,  $\alpha$  — интенсивность рождения [при  $\delta(z_i - \alpha_i)$ ] или распада [при  $\delta(z_i - \alpha_i z_c)$ ] резонансов.

Сравнение формулы (39) с экспериментальными данными [31] подтверждает увеличение числа ( $\nu = 2, 3$ ) компонент в центральной области  $|\eta|$  и соответственно уменьшение величины  $a_e$  таким образом, чтобы их произведение оставалось постоянным, т. е.  $\nu a_e = a \Rightarrow 4$  (табл. 1 и рис. 1). При  $\nu > a$  функция (39) приводит к явлению перемежаемости и подробно будет рассмотрена в разд. 4.

Такой принцип неопределенности между  $\nu$  и  $a_e$ , а также явление перемежаемости наблюдаются и на основе соотношения (5) при фитировании соответствующих данных [37, 40].

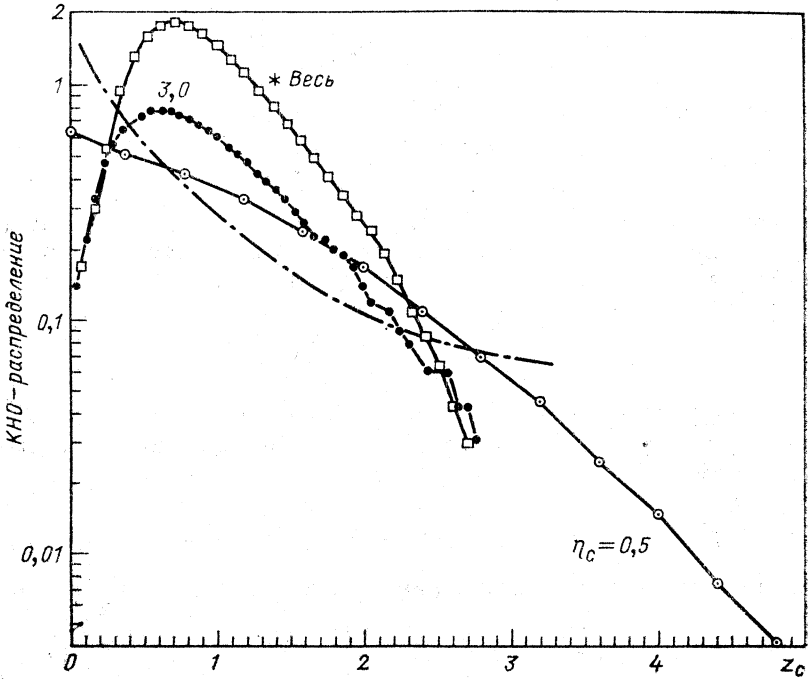


Рис. 1. Распределение КНО-функции (39) в зависимости от  $z_c$  при  $s^{1/2} = 200$  ГэВ [31] для трех интервалов псевдобыстроты  $\eta_c = 0,5; 3; *$  (всего). Штрихпунктирная линия — функция (39б)

При отсутствии же  $\delta(z_i - \alpha_i)$  или  $\delta(z_i - \alpha_i z_c)$  форма  $\Gamma$ -распределения сильно искажается. На самом деле, подставляя обобщенное  $\Gamma$ -распределение (6) в (4) и интегрируя, получаем [7, 129]:

$$\Psi(z_c) = \left[ \frac{a}{v} \right]^a \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(a)} z_c^{a-1} \exp \left[ -\frac{a}{v} z_c \right] \Psi \left( v-1, a, \frac{a}{v} z_c \right). \quad (39a)$$

Здесь мы воспользовались интегральным представлением вырожденной гипергеометрической функции [138]

$$\Psi(a, b, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} e^{-\alpha t} dt.$$

Функция (39a) при  $v = 1$  совпадает с (9). В остальном случае при  $v > 1$  она всегда убывающая с ростом  $z_c$ . В пределе больших  $v \gg 1$  она принимает вид

$$\Psi(z_c) = 2a^{a+1/2} z_c^{(a-1)/2} K_{a-1}(2\sqrt{az_c}) / \Gamma(a). \quad (39б)$$



Таблица 1. Результаты подгонки экспериментальных данных для КНО-функции в центральной области псевдобыстроты  $|\eta| < \eta_c$  формулой (39) при  $\sqrt{s} = 200$  и  $900$  ГэВ [31].

Приведены значения параметров при  $\alpha = 4$ : числа компонент  $\nu$ , нормировки  $A$  и постоянной  $\alpha$ , а также  $\chi^2/\text{NDF}$

$\eta_c$	$\nu$	$\alpha$	$A$	$\chi^2/\text{NDF}$
$\sqrt{s} = 200$ ГэВ				
0,5	$2,77 \pm 0,18$	$0,86 \pm 0,07$	$2,60 \pm 0,28$	5/11
1,5	$1,72 \pm 0,06$	$0,45 \pm 0,03$	$6,23 \pm 0,58$	6/30
3,0	$1,30 \pm 0,03$	$0,20 \pm 0,02$	$15,45 \pm 1,39$	9/50
5,0	$1,11 \pm 0,02$	$0,07 \pm 0,02$	$27,91 \pm 2,38$	5/55
*	$1,04 \pm 0,02$	$0,03 \pm 0,02$	$72,55 \pm 6,31$	5/28
$\sqrt{s} = 900$ ГэВ				
0,5	$2,63 \pm 0,13$	$0,82 \pm 0,06$	$2,72 \pm 0,21$	6/20
1,5	$1,87 \pm 0,06$	$0,59 \pm 0,04$	$5,34 \pm 0,41$	24/49
8,0	$1,51 \pm 0,03$	$0,35 \pm 0,02$	$9,50 \pm 0,68$	46/80
5,0	$1,22 \pm 0,02$	$0,15 \pm 0,01$	$19,34 \pm 1,29$	49/98
*	$1,11 \pm 0,02$	$0,08 \pm 0,01$	$55,42 \pm 3,94$	36/51

Поведение \* этой функции изображено штрихпунктирной линией на рис. 1.

Таким образом, нетрудно понять, что  $\delta$ -образные вклады, вызванные распадами резонансов в заряженные частицы  $\delta(z_i - \alpha_i z_c)$  или

\* Надо помнить, что исторически принята неправильная нормировка [130]

$$\int \Psi(z_c) dz_c = 2, \quad C(k) = \frac{1}{2} \int z_c^k \Psi(z_c) dz_c.$$

рождениями тяжелых резонансных систем с пороговыми значениями множественностей  $\delta(z_i - \alpha_i)$ , приводят к правильному порогу пережаемости  $v \geq a$  (см. подробнее разд. 4).

## 2. МОДЕЛЬ ВОЛЬТЕРРЫ И АДРОНИЗАЦИЯ КВАРКОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНУЮ СИСТЕМУ АДРОНОВ

**Адронизация как модель Вольтерры для конкурирующих видов.** Написание настоящего раздела стимулировано удивительным сходством моделей (21) и (22), называемой нами КВАРКЕР [53], с многокомпонентной моделью Вольтерры [52] для описания численностей взаимодействующих видов биологической популяции.

Чтобы углубить аналогию [54], возьмем некоторые понятия из этой модели. Например, если мы будем говорить о кварковой пище, разделяемой между конкурирующими компонентами по формуле (13), тогда «кварко»- (вместо био-) массой будет величина

$$M = \sum_{i=1}^v N_i \langle n_i \rangle. \quad (40)$$

Нетрудно опознать также уравнение, вытекающее из (16) с учетом (18) и описывающее сечение  $\sigma_n$  полуинклюзивного образования  $n$ -партона при  $n \gg 1$ .

Это уравнение Мальтуса [131]

$$\frac{d}{d\tau} \sigma_n = -\gamma n \sigma_n, \quad (41)$$

где  $\gamma$  — коэффициент убывания (прироста) и равен или аномальной размерности поля [46, 47] (если ведем ренорм-групповое рассмотрение), или просто постоянному числу.

Согласно формуле (20) для сечения генерации  $v$ -компонентной системы адронов также имеем уравнение Мальтуса \*

$$\frac{d}{d\tau} \sigma(n_1, \dots, n_v) = -\gamma \left( \sum_{i=1}^v N_i n_i \right) \sigma(n_1, \dots, n_v). \quad (42)$$

Усредняя это соотношение по  $n_2, \dots, n_v$ , получаем уравнение для сечения полуинклюзивного образования  $n_1 = n_c$  заряженных частиц

$$\frac{d}{d\tau} \sigma_{n_1} = -\gamma N_1 n_1 \sigma_{n_1} - \gamma \sum_{i=2}^v N_i \sum_{n_2 \dots n_v} n_i \sigma(n_1, \dots, n_v), \quad (43)$$

\* В действительности мы рассматриваем эти уравнения как характеристические, соответствующие уравнению в частных производных первого порядка. Это позволяет определить физический смысл временного параметра  $\tau$  и задать в виде начального условия функцию, подчиняющуюся гипотезе многомерного КНО-скейлинга (2).

где второе слагаемое с помощью (2) приводится к оператору вольтерровского запаздывания по множественности  $n_1$  (а не по времени):

$$\sum_{n_2 \dots n_\nu} n_i \sigma(n_1, \dots, n_\nu) \Rightarrow \int_{z_1}^{\infty} g(t - z_1) f_\nu(t) dt, \quad (44)$$

где  $f_\nu$  есть функция (2) и

$$g(t - z_1) = (t - z_1)^{\nu-2}$$

— функция «последействия».

С помощью определения

$$\langle n_i(n_1) \rangle = \sum_{n_2 \dots n_\nu} n_i \sigma(n_1, \dots, n_\nu) | \sigma_{n_1} \quad (45)$$

коэффициент убывания в уравнении (43) принимает вид

$$K = -\gamma \left\{ N_1 n_1 + \sum_{i=2}^{\nu} N_i \langle n_i(n_i) \rangle \right\}. \quad (46)$$

Интересно заметить, что после усреднения по оставшейся множественности  $n_1$  запаздывание исчезает, но мультикомпонентность остается в соответствующем уравнении для сечения инклюзивного процесса  $a + b \Rightarrow c(p) + X$ :

$$\frac{d}{d\tau} \sigma = -\gamma \left( \sum_{i=1}^{\nu} N_i \langle n_i \rangle \right) \sigma. \quad (47)$$

Аналогию можно продолжить, если принять гипотезу (15) о параметризации матрицы  $D^2 = \{D_{ik}\}$ . Например, в однокомпонентном случае с помощью (10), в пренебрежении постоянного  $\epsilon_c^2$  для средней множественности заряженных частиц, имеем уравнение Ферхюльста [132] или, как его часто называют, логистическое уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \langle n_c \rangle = K \langle n_c \rangle (s - \langle n_c \rangle) / s, \quad (48)$$

где  $s = 2\epsilon_c$  — уровень насыщения (т. е.  $\langle n_c \rangle \Rightarrow s$ , когда  $\tau \Rightarrow \infty$ );  $K = 2\gamma \epsilon_c N_c / a$ .

В многокомпонентном случае диагональные элементы зададим согласно закономерностям (27), а остальные представим [7] в виде (30), которые соответствуют методу «встреч» Вольтерры.

Тогда уравнение (22) принимает вид

$$\frac{d \langle n_i \rangle}{d\tau} = \langle n_i \rangle \left( \bar{\epsilon}_i - \sum_{k=1}^{\nu} \bar{a}_{ik} \langle n_k \rangle \right), \quad (49)$$

где  $\bar{\epsilon}_i = 2\gamma \epsilon_i a_{ii} N_i$  определяет скорость естественного прироста  $i$ -го вида;  $\bar{a}_{ik} = \gamma N_k a_{ik}$  пропорционален степени корреляции (убывания)  $\langle n_i \rangle$  при встрече с  $\langle n_j \rangle$ .

Оно совпадает с моделью Вольтерры для описания динамики взаимодействия нескольких ( $\nu$ ) видов биологической популяции. Рассмотрение этой модели как адронизации кварков в многокомпонентную систему адронов позволяет ввести дальнейшие упрощения. Предположим, что матрица  $\{a_{ik}\}$  симметрична и все ее элементы одинаковы (имеем полное насыщение корреляций):

$$a_{ik} = a_{ki} = 1/a, \quad (50)$$

где  $a$  определяется соотношением (10). Тогда, исключая модель «хищник — жертва», мы приходим к модели компонент, конкурирующих за один ресурс (кварковую пищу):

$$\frac{d\langle n_i \rangle}{d\tau} = \langle n_i \rangle [\hat{\varepsilon}_i - \gamma_i F(\langle n_1 \rangle, \dots, \langle n_\nu \rangle)], \quad (51)$$

где

$$F(\dots) = M \equiv \sum_{i=1}^{\nu} N_i \langle n_i \rangle; \quad \gamma_i = \gamma/a; \quad \hat{\varepsilon}_i = 2\gamma\varepsilon_i N_i/a. \quad (52)$$

Легко показать также, что эта модель диссипативна. Умножим (22) на  $N_i$  и просуммируем. Мы приходим к уравнению для кваркомассы  $\tilde{M}$ :

$$\frac{dM}{d\tau} = -\gamma D^2(M), \quad (53)$$

где

$$D^2(M) = \left\langle \left( \sum_{i=1}^{\nu} N_i n_i - M \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{\nu} N_i^2 D_{ii} + 2 \sum_{i>j=1}^{\nu} N_i N_j D_{ij}. \quad (54)$$

Мы считаем, что одно из слагаемых в (54) отлично от нуля и все  $D_{ik} \geq 0$ . Поэтому  $D^2(M) > 0$  и по вольтерровской классификации имеем диссипативную систему адронных компонент. Она имеет больше шансов на реализацию в природе, чем консервативная, когда  $D^2(M) = 0$ .

Отметим, что уравнение (53) в некоторых случаях позволяет обойти трудную проблему решения системы (20) — (22). Например, для получения многомерной КНО-функции (2) в виде обобщенного  $\Gamma$ -распределения достаточно замкнуть систему из уравнений (42), (47) и (53) следующим допущением:

$$D^2(M) = \frac{1}{a} \langle M \rangle^2. \quad (55)$$

Однако решение модели (20) — (22), вообще говоря, кажется привлекательной задачей, целью которой является получение важной информации об ассоциативных множествах. Как признают Монтролл и др. [58], путь аналитического решения такой задачи сложен и обычно ограничивается лишь двумя или тремя взаимодействующими видами. Но мы надеемся продвинуться вперед по пути

аналитических расчетов, привлекая методы компьютерной алгебры и систему программирования REDUCE-3 [83].

**Алгоритмы вывода уравнений для ассоциативных множественностей.** В эксперименте обычно измеряется множественность одной из нескольких рассмотренных нами компонент. Чтобы описать ее усредненные значения, необходимо из системы (22) получить соответствующее Д-уравнение  $\nu$ -го порядка, т. е. найти дифференциальный результат. При высоких порядках эту трудоемкую задачу можно быстро выполнить с помощью системы REDUCE, используя, например, ПЭВМ IBM—AT. С целью иллюстрации разберем подходящую программу для случая  $\nu = 3$  и  $\varepsilon_i = 0$ . Тогда согласно (22) имеем модель

$$\left. \begin{aligned} n'_1 &= -a_1 n_1^2 - a_2 n_1 n_2 - a_3 n_1 n_3; \\ n'_2 &= -b_1 n_1 n_2 - b_2 n_2^2 - b_3 n_2 n_3; \\ n'_3 &= -c_1 n_1 n_3 - c_2 n_2 n_3 - c_3 n_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$n_i = \langle n_i \rangle, \quad a_i = \gamma a_{1i} N_i, \quad b_i = \gamma a_{2i} N_i, \quad c_i = \gamma a_{3i} N_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

На языке системы REDUCE система (56) переписется таким образом:

Operator n,a,b,c; Array a(3), b(3), c(3);

for i := 1 : 3 do «depend n(i), tm»;

Df(n(1),tm) := -a(1)\*n(1)\*\*2-a(2)\*n(1)\*n(2)-a(3)\*n(1)\*n(3)\$

Df(n(2),tm) := -b(1)\*n(1)\*n(2)-b(2)\*n(2)\*\*2-b(3)\*n(2)\*n(3)\$

Df(n(3),tm) := -c(1)\*n(1)\*n(3)-c(2)\*n(2)\*n(3)-c(3)\*n(3)\*\*2\$

Вместо известного метода исключения мы запрограммируем следующий прием. Пусть  $d_i$  ( $i = 1, \dots, 15$ ) — неопределенные коэффициенты. Присвоим значения  $x_i$  следующим мономам:

$$\begin{aligned} x_1 &= n'_1, \quad x_2 = n''_1, \quad x_3 = n^2_1, \quad x_4 = n^3_1, \quad x_5 = n^4_1, \quad x_6 = n^5_1, \\ x_7 &= n_1 n'_1, \quad x_8 = n_1 n''_1, \quad x_9 = n^{2'}_1, \quad x_{10} = n^2_1 n'_1, \quad x_{11} = n^3_1 n^2_1, \\ x_{12} &= n^2_1 n''_1, \quad x_{13} = n_1 n^{2'}_1, \quad x_{14} = n_1 n^3_1, \quad x_{15} = n'_1 n''_1. \end{aligned}$$

Тогда искомое уравнение как результат системы (56) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{15} d_i x_i = 0 \quad (57)$$

и задача сведется к нахождению коэффициентов  $d_i$ .

На языке программирования имеем следующую:

Operator d,x; Array d(15), x(15);

x(1):=Df(n(1),tm) \$ x(2):=Df(n(1),tm,2) \$ x(3):=n(1)\*\*2\$...\$

x(15):=x(1)\*x(2) \$ s15:=for i:=1:15 sum d(i)\*x(i) \$ Clear x;

Подстановки значений  $x_i$ , вычисленных на основе (56), в равенство (57) преобразуют его левую часть в сумму независимых мономов  $n_1^{\alpha} n_2^{\beta} n_3^{\gamma}$ . Возникающие при них коэффициенты должны быть равны нулю для того, чтобы удовлетворялось (57). Последние условия и определяют неопределенные коэффициенты  $d_i$ .

Алгоритм определения этих условий состоит в домножении s15 на функцию sn(0,0,0) с ее дальнейшим заселением степенями  $\alpha, \beta, \gamma$  и использованием команды COEFF [89]:

```
Order a,b,c,d,n(1),n(2),n(3),sn; On nero, div; Off nat;
s15:=s15*(n(1)*n(2)*n(3))*3*sn(0,0,0) $
for all b3 let n(3)**b3*sn(0,0,0)=sn(0,0,b3);
for all b2, b3 let n(2)**b2*sn(0,0,b3)=sn(0,b2,b3);
for all b1, b2, b3 let n(1)**b1*sn(0,b2,b3)=sn(b1,b2,b3);
s15:=s15 $ array cc(1);
for b1:=3:8 do for b2:=3:8 do for b3:=3:8 do write
c1(b1,b2,b3):=if coeff(s15,sn(b1,b2,b3),cc(1)) neq 0
then cc(1) else 0;
```

Заметим, что эта конструкция позволяет работать на ПЭВМ с ограниченной памятью (640 Кбайт), когда  $v \geq 4$ . В случае необходимости нужно лишь варьировать предел первого цикла. Кроме того, данный вариант программы составлен для версии REDUCE-3.2. В связи с изменением синтаксиса и семантики функции COEFF в версии REDUCE-3.3 [86] программа требует соответствующей адаптации.

В завершение приравниваем нулю значения  $c1$  и определяем коэффициенты  $d_i$ . На простом примере насыщения корреляции (50), когда  $a_i = b_i = c_i$ , это выглядит так:

```
for i:=1:3 do «b(i):=c(i):=a(i)»;
for b1:=3:8 do for b2:=3:8 do for b3:=3:8 do write
c1(b1,b2,b3):=c1(b1,b2,b3);
```

Соответствующий ответ системы:

```
c1(4,3,4):=-a(3)*d(1)
c1(4,3,5):=2*a(3)**2*d(2)
c1(5,3,3):=-a(1)*d(1)+d(3)
c1(5,3,4):=-a(3)*(-4*a(1)*d(2)+d(7))
c1(5,4,4):=2*a(3)*a(2)*(d(9)+2*d(8)) и т. д.
```

эквивалентен следующим значениям  $d_i$ :

$$d_i = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11 \text{ и} \\ d_8 = -d_9/2, d_{12} = -d_{13}/2, d_{14} = -d_{15}/3.$$

В результате (57) принимает вид

$$d_9 \left( -\frac{1}{2} n_1 n_1'' + n_1'^2 \right) + d_{13} \left( -\frac{1}{2} n_1^2 n_1'' + n_1 n_1'^2 \right) + \\ + d_{15} \left( -\frac{1}{3} n_1 n_1''' + n_1'' n_1' \right) = 0.$$

В силу произвольности  $d_i$  получаем два уравнения. Но независимым является лишь одно,

$$n_1 n_1'' - 2n_1'^2 = 0, \quad (58)$$

и производная от него приводит ко второму.

Нетрудно показать, что для произвольных коэффициентов  $a_i \neq b_i$  получаем нелинейное автономное уравнение в форме

$$a_2 n_1 n_1'' - (a_2 + b_2) n_1'^2 - (2a_1 b_2 - a_1 a_2 - a_2 b_1) n_1^2 n_1' + a_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2) n_1^4 = 0. \quad (59)$$

Не представляет также трудности ввести в рассмотрение коэффициенты естественного прироста  $\varepsilon_i \neq 0$  или другие усложнения.

**Методы решения уравнения для ассоциативных множественностей.** К сожалению, мы не осведомлены о физических экспериментах для выявления компонентности во множественных процессах, и нам остается лишь в математическом смысле понять, почему рассматриваемые формулы при сравнении с экспериментальными данными показывают то или иное значение числа компонентности. Например, согласно табл. 1, для полного интервала  $\eta$  происходит рождение заряженных частиц как однокомпонентной системы. Это находится в полном согласии с принципом неопределенности для данного случая, когда  $\nu = 1$  и  $a_e = a \Rightarrow 4$ . Покажем, что такое «исчезновение» компонентности эквивалентно замене запаздывания по множественности  $n_1$  в уравнениях (43) и (44) последствием по времени  $\tau$ .

Согласно модели конкурирующих компонент, при разделении кварковой пицци число кварков  $n$  трансформируется в мультикомпонентные коэффициенты прироста (13) или (46), в зависимости от того, измеряем ли мы сечения от многих переменных (множественностей) или от одной. Как отмечалось во введении, фигурирующую в (46) величину (45), содержащую мультикомпонентность в виде последствия (44) по множественности  $n_1$ , можно линеаризовать согласно (7). Тогда коэффициент (46) принимает вид

$$K = -A n_1 - B, \quad (60)$$

где параметры

$$A = \gamma \left( N_1 + \sum_{i=2}^{\nu} A_i N_i \right), \quad B = \gamma \sum_{i=2}^{\nu} B_i \quad (61)$$

скрывают в себе мультикомпонентность и, вообще говоря, зависят от полной энергии (временного параметра  $\tau$ ). Поэтому при таком грубом способе обрезания зацепляющихся уравнений средняя множественность заряженных частиц подчиняется уравнению типа Рикатти

$$\langle n_c \rangle' = -A D_c^2, \quad (62)$$

где  $D_c^2$  параметризуется в виде (10).

Образно говоря, оно содержит как самодействие Ферхюльста, так и последствие по времени в смысле зависимости от него коэффициентов  $A$ . Здесь больше не будем рассматривать это уравнение, а с точки зрения методики заметим, что для его анализа уже использован [133] метод ренормализационной группы (и можно успешно использовать также алгоритмы систем аналитических вычислений [134, 135]).

Следовательно, в модели КВАРКЕР мы можем получить решения для ассоциативных множественностей, зависящие от импульса выделенной частицы  $p$  (или от переданного импульса  $Q$  через временной параметр  $\tau$ ) и, вообще говоря, от компонентности  $\nu$ .

Например, в модели насыщения корреляций (50) между всеми видами, когда коэффициенты естественного прироста равны нулю,  $\varepsilon_i = 0$ , согласно (49) имеем

$$\langle n_i \rangle' = -\gamma_1 M \langle n_i \rangle, \quad (62a)$$

где  $\gamma_1 = \gamma/a$  и  $M$  — кваркомасса, подчиняющая (40). При гипотезе (55) нетрудно получить соответствующее решение

$$\langle n_i \rangle = \langle n_i \rangle_0 / (1 + \gamma_1 M_0 \tau).$$

Здесь  $\langle n \rangle_0$  и  $M_0$  — значения при  $\tau = 0$ . Чтобы увидеть зависимость от  $\nu$ , достаточно сказать, что в рамках соотношения (37a) кваркомасса пропорциональна  $\nu$ :  $M_0 = \nu N_i \langle n_i \rangle_0$ .

Рассмотрим теперь модели с неполным насыщением корреляций. Например, нелинейное автономное уравнение (59) можно решать методом Берковича [136]. Перепишем его в следующей форме:

$$n'' + f(n) n'^2 + \beta_1 \varphi(n) n' + \Lambda(n) = 0, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} n &= \langle n \rangle; & f(n) &= -(a_2 + b_2)/(a_2 n); & \varphi(n) &= n; \\ \beta_1 &= -(2a_1 b_2 - a_1 a_2 - a_2 b_1); & \Lambda(n) &= a_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2) n^3 / a_2. \end{aligned}$$

Согласно [136], уравнение (63) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$X_t'' + \beta_1 X_t' + \beta_0 X_t + \alpha = 0, \quad (64)$$

если выполняется условие

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \varphi(n) \exp\left(-\int f(n) dn\right) [\beta_0 \int \varphi(n) \times \\ &\times \exp\left(\int f(n) dn\right) dn + \alpha]. \end{aligned} \quad (65)$$

Это имеет место при следующих значениях  $\alpha$  и  $\beta_0$ :

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = a_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2) [2 - (a_2 + b_2)/a_2] / a_2.$$



Уравнение (63) приводится к (64) следующими преобразованиями зависимой и независимой переменных:

$$X(n) = \int \varphi(n) \exp\left(\int f(n) dn\right) dn, \quad dt = \varphi(n) d\tau. \quad (66)$$

Заметим, что в пределе насыщения, когда  $a_i \Rightarrow b_i$ , имеем

$$X(n) = \ln n, \quad dt = n d\tau, \quad X_i^* = 0 \quad \text{и} \quad n \sim 1/\tau.$$

Уменьшение множественности с ростом  $\tau$  вызвано ограничением случая невозобновимого ресурса, когда коэффициенты естественного прироста равны нулю.

### 3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И СОСУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

**Бифуркация на плоскости**  $(\sigma_{\text{tot}}, \langle n_c \rangle)$  **от отрицательных корреляций.** Таким образом, если на промежуточном этапе реакции (1а) имелся мальтузиан  $n$  кварков и на окончательном этапе они подсчитаны согласно правилу (13), то после инклюзивного усреднения по всевозможным дополнительным импульсам и множественностям  $n_2, \dots, n_\nu$  имеем Д-уравнение (43) для топологического сечения  $\sigma_{n_1}$  рождения  $n_c = n_1$  заряженных адронов одного типа

$$\sigma_{n_1}^* = K \sigma_{n_1},$$

где  $(\prime)$  означает  $d/d\tau$  — дифференцирование по эволюционному параметру.

Здесь коэффициент прироста согласно (46) имеет вид

$$K = - \left\{ N_1 n_1 + \sum_{i=2}^{\nu} N_i \langle n_i (n_1) \rangle \right\}$$

и зацепляется с ассоциативными средними множественностями. Они характеризуют корреляции между разными видами систем резонансов ( $c = \pi^c, i = \pi^0, K, \Lambda \dots$ ). Экспериментальные данные и теоретические соображения (см. [37, 40]) приводят к отрицательным корреляциям в рассматриваемой нами области вплоть до серпуховских энергий для тяжелых частиц ( $c = \pi^c, i = K, \Lambda \dots$ ). Это означает, что  $\langle n_i (n_1) \rangle$  флуктуируют, например, линейной функцией

$$\langle n_i (n_c) \rangle = A_i n_c + B_i$$

и что параметры  $A_i$  и  $B_i$  удовлетворяют условиям

$$A_i < 0, \quad B_i > 0. \quad (67)$$

Тенденция сохранения такого режима для тяжелых резонансов должна наблюдаться и на современных ускорителях, что позволяет предполагать следующее: система уравнений для полного сечения  $y = \sigma_{\text{tot}}$  (мб) и средней множественности  $x = \langle n_c \rangle$  заряженных

частиц

$$x' = -A(x - \varepsilon_c)^2/a_c, \quad (68)$$

$$y' = -Axy - By, \quad (69)$$

вытекающая из (43) с учетом соотношений (7), (46) и закона (10), есть неавтономная система. Иначе говоря, параметры

$$A = \left( N_1 + \sum_{i=2}^{\nu} A_i N_i \right), \quad B = \sum_{i=2}^{\nu} B_i N_i \quad (70)$$

зависят от полной энергии  $s^{1/2}$  сталкивающихся частиц (1) (т. е. от временного параметра  $\tau = \ln s/2m_p^2$ ) и удовлетворяют неравенствам вида (67)

$$A < 0, \quad B > 0. \quad (71)$$

Напомним, что значения величин  $\varepsilon_c \approx 1$  и  $a_c \approx 4$  жестко фиксированы из анализа экспериментальных данных [49].

При существовании и единственности решения уравнения (68) можно считать, что  $A$  и  $B$  функционально зависят не от  $\tau$ , а только от  $x$ , и исследовать систему уравнений (68) и (69) методами качественного анализа [62, 63, 126, 140] в связи с тем, что такая функциональная зависимость явно не определена.

Система имеет сложную особую точку  $(\varepsilon_c, 0)$ , вблизи которой характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \delta = 0$$

имеет значения параметров  $\delta = 0$  и  $\sigma = -(A\varepsilon_c + B)\varepsilon_c$ . В режиме (71) изменение знака параметра  $A$  приводит к перестройке (бифур-

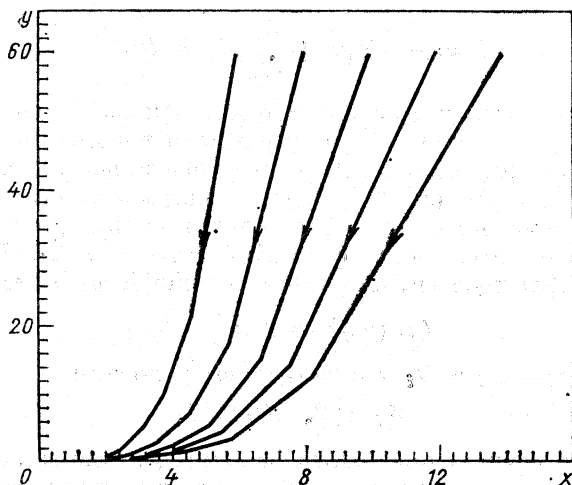


Рис. 2. Фазовый портрет системы (68) и (68) при следующих значениях параметров:  $A = -2$ ,  $B = 0$ ,  $\varepsilon_c = 0$  и  $a = 4$

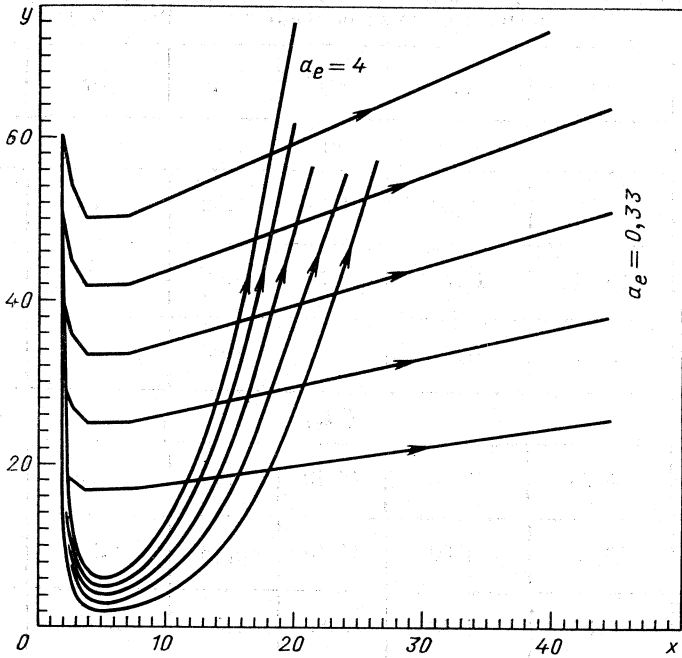


Рис. 3. Бифуркация фазового портрета системы (68) и (69) при изменении знака параметра  $A$ . Кривые проведены для двух значений силы корреляции  $a_e$  при следующих значениях параметров:  $A = 0,1$ ,  $B = -0,5$  и  $\varepsilon_c = 0$

кации) фазового портрета, что иллюстрируется на рис. 2 и 3. Вместо узла появляется седло, позволяющее, в принципе, параметризовать серпуховский минимум для полных сечений  $y = \sigma_{\text{tot}}$  (мб). Пусть он достигается при  $x_s = \langle n_c \rangle_s$ . Это значит, что функция

$$\Phi(x) = x + B/A$$

в этой точке обращается в нуль,  $\Phi(x_s) = 0$ , и уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a_e \Phi(x)/(x - \varepsilon_c)^2 \quad (72)$$

вблизи нее принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = a_e y (x - x_s)/(x - \varepsilon_c)^2. \quad (73)$$

Соответствующее решение

$$y = C (x - \varepsilon_c)^{a_e} \exp [F/(x - \varepsilon_c)] \quad (74)$$

удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные для  $pp$ -,  $pp$ -,  $\pi^\pm p$ -,  $K^\pm p$ -взаимодействий [41, 43]. Значения параметров

Таблица 2. Результаты подгонки экспериментальных данных для полных сечений по формулам (74) и (77а)

Параметр	$\bar{p}\bar{p}$	$p p$	$\pi^+ p$	$\pi^- p$	$K^+ p$	$K^+ p$
(74)						
$\varepsilon_c$	1,60	0,20	1,82	1,00	1,34	-0,74
$C$	15,14	14,36	9,56	8,82	8,51	6,90
$F$	2,17	1,92	1,47	2,05	0,92	2,56
(77а)						
$A$	16,68	15,46	10,19	9,73	8,80	7,48
$B$	16,16	4,30	14,15	3,38	5,26	3,94
$C$	2,58	1,93	2,85	2,30	2,75	1,69

приведены в табл. 2. Проясним их физический смысл:

$$F = x_s - \varepsilon_c > 0,$$

$C$  — константа интегрирования — определяется начальными условиями, величина

$$a_e = a\Phi'_x(x_s) \quad (75)$$

— эффективная степень самокорреляции  $n_c$  частиц, перенормированная отрицательными корреляциями (71), т. е. присутствием других компонент

$$\Phi'_x(x_s) = 1 + (B/A)'_{x_s}. \quad (76)$$

Подчеркнем важность такой перенормировки в связи с возможным аналитическим продолжением зависимости

$$\sigma_{\text{tot}} = C \langle n_c \rangle^{a_e} \quad (77)$$

при современных ускорительных энергиях.

Наконец, с целью полноты картины в табл. 2 приведены значения параметров для следующей полуфеноменологической формулы:

$$\sigma_{\text{tot}} = A \langle n_c \rangle^{a_e + B/\langle n_c \rangle^C}. \quad (77a)$$

Нетрудно убедиться, что образование стохастического слоя вблизи детерминистической траектории вынуждает нас работать, вообще говоря, в рамках принципа неопределенности [53]  $a_\epsilon v = 4$ .

**Закон Вольтерры — Гаузе и неполное насыщение ядерных сил.** Более реально с точки зрения физики и интересно математически решать многокомпонентную модель с разными коэффициентами всех типов корреляций, т. е. когда дисперсионная матрица имеет вид (15).

Такая постановка проблемы приводит, в первую очередь, к вопросу о сосуществовании  $v$  конкурирующих компонент при использовании одного и того же кваркового субстрата. Естественно, возникает также необходимость сведения задачи, например, к двумерному случаю. Чтобы это сделать, установим заранее закономерность типа Вольтерры — Гаузе [52, 56], налагающую ограничения на сосуществование конкурирующих адронных систем.

С этой целью рассмотрим случай частичного насыщения корреляций

$$a_{ik} = 1/a_i, \quad i = 1, 2, \dots, v. \quad (78)$$

Тогда система Д-уравнений (22) для множественностей адронов  $i = 1, 2, \dots, v$  сортов принимает вид

$$\langle n_i \rangle' = \langle n_i \rangle [\hat{\epsilon}_i - F(\langle n_1 \rangle, \dots, \langle n_v \rangle) / a_i], \quad (79)$$

где

$$F(\dots) = M \equiv \sum_{i=1}^v N_i \langle n_i \rangle, \quad \hat{\epsilon}_i = 2N_i \epsilon_i / a_i.$$

Решения уравнений (79)

$$\langle n_1 \rangle^{a_1} / \langle n_i \rangle^{a_i} = \exp [2 (N_1 \epsilon_1 - N_i \epsilon_i) \tau], \quad i = 2, \dots, v, \quad (80)$$

часто интерпретируются как закон Вольтерры — Гаузе: со временем  $\tau \Rightarrow \infty$  все резонансы «распадаются»,  $\langle n_i \rangle \Rightarrow 0$ , кроме самого «приспособленного» с высшим коэффициентом прироста

$$N_1 \epsilon_1 > N_i \epsilon_i, \quad i = 2, \dots, v. \quad (81)$$

В действительности во множественных процессах временной параметр  $\tau = \ln(pp_0/p_0^2)$  ограничен величиной  $t = \ln(s/2m_p^2)$  — так же, как и сама множественность  $\langle n_1 \rangle$ . Поэтому нам кажется более реальным вместо «исчезновения» некоторых компонент сформулировать гипотезу о степени уменьшения отношений средних множественностей с увеличением  $\tau$  (или  $\langle n_1 \rangle$ ):

$$\langle n_i \rangle / \langle n_1 \rangle = \Phi_i(\langle n_1 \rangle) \quad (82)$$

с целью сведения многомерной задачи к двумерной.

Таким образом, если системы упорядочены согласно (81) или (82), то мы не считаем, что они исчезают, хотя соответствующие ассоциативные множественности, как было сказано выше, уменьшаются с увеличением численности доминирующего вида.

Эти отрицательные корреляции получаем в рамках многомерной КНО-функции, если подсистемы, образованные после распада упорядоченной массы, содержат малое число равноправно коррелированных компонент со следующими значениями параметров:

$$v = \sum v_\alpha, \quad v_\alpha = 2 \text{ или } 3, \\ a_{ik}^\alpha = 1/a_c^\alpha, \quad i, k = 1, \dots, v_\alpha.$$

В силу такого подобия естественно предложить механизм сведения аналогичный тому, что был изложен в предыдущем пункте. С этой целью используем, например, параметризацию

$$\Phi_i(\langle n_1 \rangle) = A_i \langle n_1 \rangle + B_i, \quad (83)$$

где  $A_i, B_i$  удовлетворяют условиям (67).

В этих предположениях мы приходим, например, к следующей многокомпонентной модели:

$$\sigma'_{\text{tot}} = - \sum_{i=1}^v N_i \langle n_i \rangle \sigma_{\text{tot}}, \quad (84)$$

$$\langle n_1 \rangle' = - \langle n_1 \rangle \sum_{i=1}^v a_{1i} N_i \langle n_i \rangle. \quad (85)$$

При одинаковых коэффициентах  $a_{1i} = 1/a_c$ , что мы называем полным насыщением, бифуркации нет, так как получаем решение (77) с неперенормированной степенью  $a_c = 4$ .

Когда все  $a_{1i}$  разные, т. е. при мягком рождении резонансов, с помощью подстановок (82) и (83) в (79) получаем слегка отличную от (68) и (69) модель следующего вида:

$$x' = -x^2 (A_1 x + B_1); \quad (86)$$

$$y' = -A y - B y. \quad (87)$$

Здесь параметры  $A, B, A_1$  и  $B_1$  также должны удовлетворять условиям (74).

#### 4. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В АССОЦИАТИВНОМ ПОДХОДЕ

**Перемежаемость в пределе большого числа компонент.** Постараемся ввести в рассмотрение и другие нелинейные модели.

Допустим, что рождение резонансов создает некую флуктуирующую среду (шум). Тогда мы анализировали бы, например, следующую модель:

$$\frac{d}{d\tau} \sigma_{nc} = -N_c n_c \sigma_{nc} + g_1(\tau) n_c \sigma_{nc} - g_2(\tau) \sigma_{nc}. \quad (88)$$

В ней запаздывание типа (44) учитывается с помощью флуктуирующих функций  $g_i(\tau)$ , например, следующего типа:

$$g_i(\tau) = \sum_j \sigma_{ij} \theta(\tau - \tau^j), \quad i = 1, 2, \quad (89)$$

где  $\sigma_{ij}$  — постоянные, характеризующие интенсивности шума [30];  $\theta(t) = 1$  (или 0) при  $0 < t < t_0$  ( $t < 0$  и  $t > t_0$ ),  $t_0$  — длительность шума.

Тогда логистическое уравнение для среднего числа заряженных частиц принимает вид

$$\langle n_c \rangle' = (-N_c + g_1(\tau)) D_c^2. \tag{90}$$

Для полного сечения имеем соответственно

$$\sigma_{tot}' = (-N_c + g_1(\tau)) \langle n_c \rangle \sigma_{tot} - g_2(\tau) \sigma_{tot}. \tag{91}$$

Как было сказано во введении, чтобы установить перемежаемость, необходимо, во-первых, получить стационарное решение для КНО-функции  $\Psi(z_c)$  и ее моментов  $C(k)$ . Во-вторых, следует найти режим перемежаемости, когда при определенных значениях параметров  $\sigma_{ij}$  убывающей функции  $\Psi(z_c)$  соответствуют быстрорастущие значения  $C(k)$ .

Чтобы это показать, в отличие от метода стохастической кинетики, мы не нуждаемся в использовании каких-либо дополнительных уравнений, например, типа Фоккера — Планка [30].

Аналогично тому, как было сделано в разд. 1 для многокомпонентного случая, стационарное решение получаем непосредственным интегрированием системы уравнений (88), (90) и (91).

Действительно, поделим (88) и (91) на (90) и проинтегрируем. Получим следующие соотношения:

$$\ln(\sigma_{n_c}/\sigma_{n_c}^0) = \int_{\langle n_c \rangle^0}^{\langle n_c \rangle} d\langle n_c \rangle / D_c^2 + \int_{\langle n_c \rangle^0}^{\langle n_c \rangle} d\langle n_c \rangle [g_2(\tau) / \{D_c^2 [N_c - g_1(\tau)]\}]; \tag{92}$$

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_{tot}/\sigma_{tot}^0) &= \int_{\langle n_c \rangle^0}^{\langle n_c \rangle} d\langle n_c \rangle [\langle n_c \rangle / D_c^2] + \\ &+ \int_{\langle n_c \rangle^0}^{\langle n_c \rangle} d\langle n_c \rangle [g_2(\tau) / \{D_c^2 [N_c - g_1(\tau)]\}]. \end{aligned} \tag{93}$$

Здесь  $\sigma_{n_c}^0$ ,  $\sigma_{tot}^0$  и  $\langle n_c \rangle^0$  — значения соответствующих функций при  $\tau = 0$ .

Комбинируя КНО-функцию  $\Psi(z_c)$ , видим, что второй интеграл с неизвестными стохастическими функциями просто сокращается и с учетом (10) результат принимает вид

$$\begin{aligned} &[\langle n_c \rangle - \varepsilon_c] (\sigma_{n_c}/\sigma_{tot}) / [(\langle n_c \rangle - \varepsilon_c) (\sigma_{n_c}/\sigma_{tot})]_{\tau=0} = \\ &= \{\tilde{z}_c^{a-1} \exp(-a\tilde{z}_c)\} / \{\tilde{z}_c^{a-1} \exp(-a\tilde{z}_c)\}_{\tau=0}, \end{aligned} \tag{94}$$

где  $\tilde{z}_c = (n_c - \varepsilon_c) / (\langle n_c \rangle - \varepsilon_c)$ .

Отсюда следует слегка модифицированное стационарное решение для КНО-функции [137]

$$\langle n_c \rangle - \varepsilon_c (\sigma_{n_c} / \sigma_{\text{tot}}) \Rightarrow \tilde{z}_c^{\alpha-1} \exp(-\tilde{a}z_c), \quad (94a)$$

которое вообще не зависит от интенсивностей  $\sigma_{ij}$  шума и, значит, не приводит к перемежаемости.

Совершенно отличными свойствами обладает обобщенное Г-распределение (39), характеризующее ассоциацию  $\nu$ -компонент.

Соответствующие моменты распределения по множественности нетрудно вычислить:

$$C(k) = A \alpha \bar{a}_e^{k+1} \Gamma(k+1) \Psi(k+1, \bar{a}_e + k + 1, a_e \alpha), \quad (95)$$

где  $A$  — нормировочный параметр — определяется условием нормировки

$$C(0) = 1.$$

В пределе при малых  $\alpha \rightarrow 0$  имеем [138]

$$\Psi(a, b, \alpha) = \alpha^{1-b} \Gamma(b-1) / \Gamma(a),$$

и формула (95) упрощается:

$$C(k) = a_e^{-k} \Gamma(k + \bar{a}_e) / \Gamma(\bar{a}_e). \quad (95a)$$

Следует добавить, что этот предел действительно имеет место при следующих значениях числа компонентности:  $\nu = 1$  и  $\nu = a$ . В этих случаях особенно простой вид имеет упомянутое во введении отношение моментов (12).

На основе формул (12), (39), (95) и (95a) заключаем, что перемежаемость наступает в пределе большого числа коррелированных компонент, когда  $\nu \geq a$ .

Это явление иллюстрируется на рис. 1 и 4. Заметим, что в области перемежаемости попадают лишь события из весьма узкого интервала по псевдобыстроте  $\eta_c \leq 0,2$ .

**Перемежаемость в  $(n_0, n_c)$ -корреляциях.** Другой, более красивый пример этого явления был рассмотрен еще в 1982 г. в работах [37—40], хотя само слово «перемежаемость» (во множественных процессах) мы впервые услышали от И. М. Дремина [27].

Чтобы понять, что мы имеем дело с сильно выраженным эффектом, достаточно проанализировать формулу

$$\langle n_0(n_c) \rangle / \langle n_0 \rangle = z_c \Psi\left(\nu, a+1, \frac{a}{\nu} z_c\right) / \Psi\left(\nu-1, a, \frac{a}{\nu} z_c\right). \quad (96)$$

Она получается подстановкой обобщенного Г-распределения (6) в (5). В пределе большого числа коррелированных компонент  $\nu \gg 1$ , когда функция (6) быстро ( $\delta$ -образно) падает, ее первый (!) момент по множественности нейтральных частиц быстро растет как резуль-



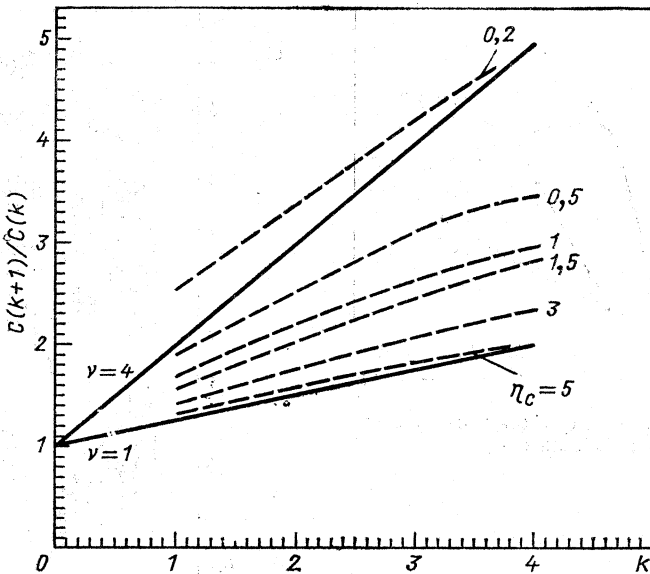


Рис. 4. Отношение моментов  $C(k+1)/C(k) = k/a_e + 1$  при  $a = 4$ ,  $\nu = 1$  и 4: пунктирные линии — расположения экспериментальных данных [31] для шести интервалов псевдобыстроты  $\eta_c$

тат того, что нейтральные частицы ассоциированы не только с заряженными частицами, но и с большим числом резонансных систем.

Наблюдаемое вырождение соотношения (96) по  $\nu$  в пределе  $\nu \gg 1$  в работе [40] было названо автомательностью в  $(n_0, n_c)$ -корреляциях.

Нетрудно понять, что  $\delta$ -образные вклады в функциях (3) и (5), вызванные распадами резонансов в заряженные частицы  $\delta(z_i - \alpha_i z_c)$  или рожденьями тяжелых резонансных систем с пороговыми значениями множественностей  $\delta(z_i - \alpha_i)$ , приводят к правильному порогу перемежаемости  $\nu \geq a$ . В действительности этот феномен объясняется предельными соотношениями (8), (12), (39б).

К сожалению, не все модели с многокомпонентной структурой приводят к такой перемежаемости. Рассмотрим, например, модель Томаса [66], в основе которой заложена идея многокомпонентной жидкости Ван-дер-Ваальса. Если предположить, что объем жидкости  $Y \sim \langle n_c \rangle$ , тогда аналогичное (96) соотношение задается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} & \tilde{L}_\nu / [1 - 0,13(0,78z_c + \nu \tilde{L}_\nu)] = \\ & = 0,23 \exp \{ -0,13(0,78z_c + \nu \tilde{L}_\nu) / [1 - 0,13(0,78z_c + \nu \tilde{L}_\nu)] + \\ & \quad + 0,88(0,78z_c + \nu \tilde{L}_\nu) \}. \end{aligned}$$

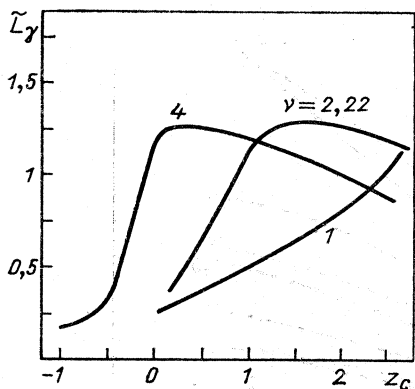


Рис. 5.  $\tilde{L}_\gamma$  как функция от  $z_c$  при различных  $\nu$

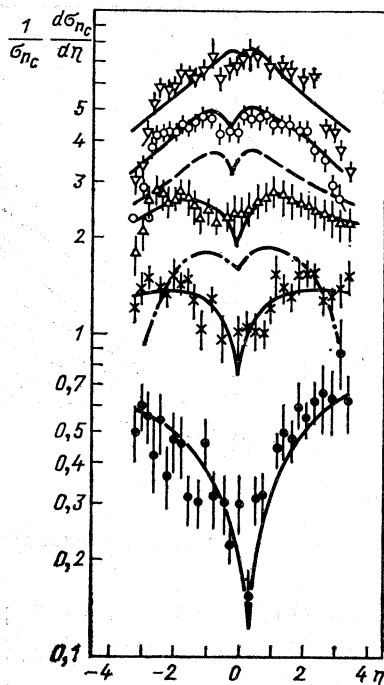


Рис. 6. Нормированная  $\eta$ -плотность заряженных частиц как функция от  $\eta$ : сплошные линии соответствуют формуле (97) для пяти интервалов  $n_c$ :  $(1 \div 5)$ ,  $(6 \div 10)$ ,  $(11 \div 20)$ ,  $(21 \div 30)$ ,  $(31 \div 40)$  (снизу вверх); пунктирная линия — инклюзивный спектр

Здесь  $\tilde{L}_\gamma = \langle n_0(n_c) \rangle / \langle n_0 \rangle$ ,  $z_c = n_c / \langle n_c \rangle$ ,  $\nu \geq 1$ .

Подгонка экспериментальных данных в интервале энергии  $s^{1/2} = (6,5 \div 540)$  ГэВ дает удовлетворительные результаты  $\chi^2/\text{NDF} = 109/76$  при  $\nu = 2,22$  [40]. Однако говорить о переменяемости при этом не приходится хотя бы из-за того, что при больших  $z_c$  нормированный момент  $\tilde{L}_\gamma$  начинает уменьшаться. Как видно из рис. 5, это происходит именно при больших  $\nu$ .

**Нужен ли фейнмановский скейлинг?** На рис. 6 приведены данные, полученные на коллайдере SPS CERN для нормированных полуинклюзивных распределений  $\frac{1}{\sigma_{nc}} \frac{d\sigma_{nc}}{d\eta}$  по псевдобыстроте  $\eta$  для пяти значений интервалов по множественности  $n_c$  [139].

Кривые проведены с помощью формулы [43]

$$E \frac{d\sigma_{nc}}{dp} \simeq G \tau^{-(a_e-1)} K_{a_e-1}(2\sqrt{\kappa\tau}), \quad (97)$$

где  $G$  — константа нормировки;  $\kappa = \gamma \nu n_c$ ;  $\tau = \ln\left(\frac{m_T}{m} \text{ch } \eta\right)$ .

Формула (97) вытекает из (39б) и (62а). Она соответствует пределу  $v \gg 1$  и  $a_e = 0,35$ .

Как видим, говорить о фейнмановском плато [1] в центральной области  $\eta$  не имеет смысла. Тогда чем объяснить справедливость многомерного КНО-скейлинга (2)?

В рамках модели КВАРКЕР такому объяснению, приведенному в разд. 1, можно дать более общую формулировку: поскольку правило кваркового счета (13) заранее обеспечивает следующую функциональную структуру сечения  $\sigma(n_1, \dots, n_v)$

$$\sigma(n_1, \dots, n_v) = Af \left( \sum_1^v N_i n_i / \Phi \right), \quad (98)$$

постольку справедливо соотношение типа (2)

$$\prod_{i=1}^v \langle n_i \rangle \sigma(n_1, \dots, n_v) / \sigma_{\text{tot}} = (\tilde{a}_e^v / I_v) f(\tilde{a}_e \sum_1^v n_i / \langle n_i \rangle), \quad (99)$$

где величины  $A$ ,  $\Phi$ ,  $\tilde{a}_e$  и  $I_v$  не зависят от множественностей  $n_1, \dots, n_v$ .

Последнее утверждение нетрудно доказать с помощью следующих формул, получаемых из (98) усреднением:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum \sigma(n_1, \dots, n_v) = A\Phi^v I_v / \prod_{i=1}^v N_i; \\ \langle n_i \rangle &= \Phi \tilde{a}_e / N_i; \quad I_v = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty t^{v-1} f(t) dt; \\ \tilde{a}_e &= I_{v+1} / I_v. \end{aligned}$$

Подобное утверждение в однокомпонентном случае рассмотрения содержалось в работе [128].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интересно, прежде всего, насколько далеко за пределы ТВ КХД мы ушли. Если судить по исходным предположениям, например, о структуре квадрата матричного элемента  $n$ -партонного процесса, или об использовании правил кваркового счета, или об инклюзивном усреднении и т. д., все они характерны для ТВ КХД.

При формулировке обзриваемой модели КВАРКЕР пришлось прежде всего отказаться от ДР-схем типа (25) как искусственного математического аппарата [140]. Оригинально то, что нашлась аналогия с детерминистическими моделями Вольтерра [52], позволяющая понять истинный смысл разностных слагаемых. Они возникают из-за многокомпонентности и в некоторых случаях появляются как вольтерровское запаздывание по множественностям резонансных систем.

Особенно важным результатом мы считаем установление предела

большого числа коррелированных компонент, поскольку в этом режиме проясняется физический смысл перемежаемости во множественных процессах.

Естественно, модель будет и в дальнейшем развиваться. В этом особенно помогут измерения в экспериментах таких весьма характерных величин, как, например, коэффициенты корреляционной матрицы, определенные нами методом «встреч», и т. д.

Авторы выражают благодарность Н. С. Амаглобели, И. М. Дремину, В. Г. Кадышевскому, Т. И. Копалейшвили, В. А. Матвееву, И. В. Пузынину, А. Н. Сисакяну, А. Н. Тавхелидзе и Д. В. Ширкову за интерес к работе и научную поддержку, И. С. Авалиани, В. Р. Гарсеванишвили, В. П. Гердту, А. Г. Грозину, В. Ф. Еднералу, А. П. Крюкову, Н. В. Махалдиани, З. В. Мерebaшвили, В. Г. Маханькову, Н. Б. Скачкову, А. В. Радиошкину, Л. А. Слепченко, В. А. Степаненко, Г. Т. Торосяну и А. А. Хелашвили за плодотворные дискуссии и помощь в работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
2. Koba Z., Nielsen H.B., Olesen P.//Nucl. Phys. 1972. Vol. B40. P. 317—335; Koba Z. Multi-body Phenomena in Strong Interactions//Proc. of the 1973 CERN-JINR School of Physics. CERN 13-12. Geneva, 1973. P. 147.
3. Whitmore I.//Phys. Repts. 1974. Vol. 10C. P. 273—375.
4. Perturbative Quantum Chromodynamics. Physics Reports Reprint Book Series. Netherlands, 1982. Vol. 5.
5. Квинихидзе А.Н., Сисакян А.Н., Слепченко Л. А., Тавхелидзе А.Н.//ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 478—543.
6. Sivers D., Brodsky S., Blankenbecler R.//Phys. Repts. 1976. Vol. 23. P. 1—190.
7. Дарбаидзе Я. З., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А. Препринт ОИЯИ Р2-80-615. Дубна, 1980; Тр. Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино, 1980, Т. 1. С. 304—310.
8. Гришин В. Г.//УФН. 1986. Т. 148. С. 224—287.
9. Киселев А. В., Петров В. А.//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 51—110.
10. Gross D.T., Wilczek F.//Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 30. P. 1343—1346; Politzer H.D.//Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 30. P. 1346—1349.
11. Matting P.//Phys. Repts. 1989. Vol. 177. P. 142—317.
12. Радиошкин А.В.//ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 97—154.
13. Marciano W., Pagels H.//Phys. Rep. 1978. Vol. 36. P. 137—276; Cornwall J., Tiktopoulos G.T.//Phys. Rev. 1976. Vol. D13. P. 3370—3397.
14. Bloch F., Nordsieck A.//Phys. Rev. 1937. Vol. 52. P. 54—57; Yenie D.H., Frautschi S.C., Suura H.//Ann. Phys. 1961. Vol. 13. P. 379—395.
15. Lee T.D., Nauenberg M.//Phys. Rev. 1964. Vol. 133. P. B1549; Kinoshita T.//Math. Phys. (N.Y.) 1962. Vol. 3.P. 650.
16. Bassetto A., Ciafaloni M., Marchesini G.//Phys. Repts. 1983. Vol. 100. P. 201—272; Dokschitzer Yu. L., Khoze V.L., Troyan S.I., Mueller A.H.//Rev. Mod. Phys. 1988. Vol. 60. P. 373—389.
17. Балдин А.М.//ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 429—477.
18. Лукьянов В. К., Титов А. И.//ЭЧАЯ. 1978. Т. 10. С. 815—849; Ефремов А. В.//ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 613—640.
19. Исаев П. С.//ЭЧАЯ. 1989. Т. 21. С. 5—74.

20. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.//ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 543—612.
21. Арбузов Б. А.//ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 5—50.
22. Ефимов Г. В., Иванов М. А.//ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 1129—1184.
23. Тарасов О. В., Ширков Д. В.//Тр. Международного семинара «Кварки—88». Тбилиси, 1988 (World Scientific: Singapore, 1989). С. 11—25.
24. Van Hove L.//Proc. of the Shandong Workshop. June. China, 1987. World Scientific: Singapore, 1988. Preprint CERN TH 4901/87. Geneva, 1987.
25. Kazakov D.I. Beyond the Standard Model. Lectures presented at GERN-JINR school of physics 1989. Netherlands, 1989. E2-89-711. Dubna, 1989.
26. Bialas A., Peschanski A.//Nucl. Phys. 1986. Vol. B273. P. 703—718.
27. Дремин И. М.//УФН. 1987. Т. 152. С. 531—539.
28. Dahlqvist P., Andersson B., Gustafson G.//Nucl. Phys. 1989. Vol. B328. P. 76—84.
29. Hwa A.C.//Nucl. Phys. 1989. Vol. B328.P. 59—75.
30. Mikhailov A.S.//Phys. Rep. 1989. Vol. 184. P. 308—374;
- Михайлов А. С., Упоров И. В.//УФН. 1984. Т. 144. С. 79—112.
31. Ansonge A.E., Asman B., Burow L.e.a. (UA5 Collab.)//Z. Phys. C. Particles and Fields. 1989. Vol. 43. P. 357—374; Alner G.J., Ansonge R.E., Asman B.e.a.//Phys. Rep. 1987. Vol. 154. P. 247—361.
32. Giovannini A.//Nucl. Phys. 1979. Vol. B161. P. 429—448.
33. Chou Kuang-chao, Liu Lian-sou, Meng Ta-chung//Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 1080—1085.
34. Biyajima M., Suzuki N.//Ann. Inst. Statist. Math. 1988. Vol. 40. P. 229—240.
35. Дарбаидзе Я. З., Махалдиани Н. В. Сообщение ОИЯИ P2-80-160. Дубна, 1980; Дарбаидзе Я. З. Некоторые масштабно-инвариантные закономерности в инклюзивных процессах: Дис. канд. физ.-мат. наук. Тбилиси: ТГУ, 1980. М.: ВИНТИ, 1980.
36. Дарбаидзе Я. З., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А., Торосян Г. Т.//ЯФ. 1981. Т. 34. С. 844—849.
37. Amaglobeli N.S., Darbaidze Ya. Z., Sissakian A. N., Slepchenko L.A. Preprint JINR E2-82-107. Dubna, 1982.
38. Дарбаидзе Я. З., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А., Торосян Г. Т. Препринт ОИЯИ P2-82-297. Дубна, 1982.
39. Дарбаидзе Я. З., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А., Торосян Г. Т. Препринт ОИЯИ P2-83-312. Дубна, 1983.
40. Дарбаидзе Я. З., Тевзадзе Ю. В., Слепченко Л. А.//Сообщение АН ГССР. 1984. Т. 113. С. 289—292.
41. Darbaidze Ya. Z., Sissakian A. N., Slepchenko L. A., Torosian G. T.//Fortschr. Phys. 1985. Vol. 33. P. 299—308.
42. Дарбаидзе Я. З.//Сообщение АН ГССР. 1984. Т. 114. С. 285—289.
43. Дарбаидзе Я. З., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А., Торосян Г. Т. Препринт ОИЯИ P2-84-64. Дубна, 1984.
44. Giovannini A., Van Hove L.//Z. Phys. 1986. Vol. C30. P. 391—340.
45. Szwed R., Wrochna G., Wroblewsky A. K. Mystery of the Negative Binomial Distribution, Warsaw Univ. Preprint IFD/3/87. 1987.
46. Ernst W., Schmitt I.//Nuovo cimento. 1976. Vol. 31A. P. 109—119.
47. Дарбаидзе Я. З., Махалдиани Н. В., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А.//ТМФ. 1978. Т. 34. С. 303—310.
48. Ernst W., Schmitt I.//Nuovo cimento. 1976. Vol. 31A. P. 120—125.
49. Wroblewski A.//Acta Phys. Polon. 1973. Vol. 4B. P. 867—873.
50. Van Hove L.//Phys. Lett. 1989. Vol. B232. P. 509—511.
51. Hwa H. Self-Similarity and Multiplicity Fluctuations. Preprint OITS-430. 1990; Chiu C. B., Hwa R. C. Multifractional Structure of Multiparticle production in the Branching Models. Preprint OITS-431. 1990.
52. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976; Lotka A. J. Elements of Physical Biology. Baltimore, Williams, Wilkins, 1925.

53. Darbaidze Ya. Z., Rostovtsev V. A. Preprint JINR E2-89-286. Dubna, 1989.
54. Darbaidze Ya. Z., Rostovtsev V. A. Preprint JINR E2-89-622. Dubna, 1989.
55. Дарбаидзе Я. З., Ростовцев В. А. Препринт ОИЯИ P2-90-103. Дубна, 1989.
56. Gause G. F. The Struggle for Existence. Baltimore, Williams, Wilkins, 1934.
57. Kerner E. H. A Statistical Mechanics of Interacting Biological Associations//Bull. Math. Biophys. 1957. Vol. 19. P. 121—125.
58. Goel N. S., Maitra S. C., Montroll E. W.//Rev. Mod. Phys. 1971. Vol. 43. P. 231—276.
59. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Наука, 1979.
60. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
61. Смит Дж. М. Модели в экологии: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
62. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
63. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
64. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
65. Makhankov V. G.//Phys. Rep. 1978. Vol. 35. P. 1—128; Солитоны и нелинейные волновые уравнения/Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Морис: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
66. Thomas G.//Phys. Rev. 1973. Vol. D8. P. 3042—3049.
67. Мальцев В. М., Душутин Н. К., Синеговский С. И.//ЯФ. 1975. Т. 22. С. 1051—1056.
68. Darbaidze Ya. Z., Esakia S. M., Garsevanishvili V. R., Menteshashvili Z.R. //Fortschr.Phys. 1980. Vol. 28. P. 501—525; Гарсеванишвили В. Р., Ментешашвили З. Р., Мирианашвили Д. Г., Ниорадзе М. С.//ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 1411—1453.
69. Dokshitzer Yu. L., Daykonov D. I., Troyan S. I.//Phys. Rep. 1980. Vol. 58. P. 269—395.
70. Altareli G., Parisi G.//Nucl. Phys. 1977. Vol. B126. P. 298—348.
71. Durand B., Sarcevic I.//Phys. Lett. 1986. Vol. B172. P. 104—108.
72. Biyajima M., Suzuki N.//Phys. Lett. 1984. Vol. B143. P. 463—470; Biyajima M., Shirane K., Suzuki N.//Phys. Rev. 1988. Vol. D37. P. 1824—1829.
73. Darbaidze Ya. Z., Matveev V. A., Merebashvili Z. V., Slepchenko L. A.//Phys. Lett. 1986. Vol. 777B. P. 188—190.
74. Darbaidze Ya. Z., Matveev V. A., Merebashvili Z. V., Slepchenko L.A.//Phys. Lett. 1987. Vol. 191B. P. 179—181.
75. Darbaidze Ya. Z., Matveev V. A., Merebashvili Z. V., Slepchenko L. A.//Phys. Lett. 1988. Vol. 206B. P. 127—132.
76. Дарбаидзе Я. З., Матвеев В. А., Меребашвили З. В., Слеченко Л. А. Препринт ОИЯИ P2-88-129. Дубна, 1988; Тр. Международного семинара «Кварки—88». Тбилиси, 1988. С. 26—48.
77. Иванов С. В., Корчемский Г. П.//Тр. Международного семинара «Кварки—84». Тбилиси, 1984. М.: Изд-во ИЯИ АН СССР, 1985. С. 145—155.
78. Frenkel J., Gathral J.G.M., Taylor J.C.//Nucl. Phys. 1983. Vol. B228. P. 529—536.
79. Berends F. A., Kleiss A., De Causmaecker P., Gastmans R., Wu T. T. (CALCUL Collab.)//Phys. Lett. 1981. Vol. 103B. P. 124—128.
80. Ellis R. K., Sexton J.//Nucl. Phys. 1986. Vol. 269. P. 445—484.
81. Parke S. J., Taylor T. A.//Phys. Lett. 1985. Vol. 157B. P. 81—84.
82. Strubbe H. Manual for SCHOONSCHIP a CDC 600/700 Program for Symbolic Evaluation of algebraic Expressions//Comput. Phys. Commun. 1974. Vol. 8. P. 1—30.

83. Hearn A. C. REDUCE User's Manual. Version 3.2. Rand Publ. CP78 (7/85). 1985.
84. Боголюбовская А. А., Жидкова И. Е., Ростовцев В. А. Система программирования REDUCE ОИЯИ. Б1, 11-83-512. Дубна, 1983; Еднерал В. Ф., Крюков А. П., Родионов А. Я., Язык аналитических вычислений РЕДЬЮС. М.: Изд-во МГУ, 1989; Гурин Н. И., Скомоухов А. Г. Аналитические вычисления в системе РЕДЬЮС. Минск: Наука и техника, 1989.
85. Hearn A. C. REDUCE User's Manual. Version 3.3. Rand Publ. CP78 (7/87). 1987.
86. Vermaseren J.A.M.//FORM User's Manual. Version 1. November, 1989.
87. Antoniou N. G., Argyres E. N., Contogouris A. P. e.a.//Phys. Rev. 1984. Vol. D29. P. 1354—1361.
88. Contogouris A. P., Mebarki N.//Mod. Phys. Lett. 1987. Vol. A2. P. 735.
89. Дарбайдзе Я. З., Меребашвили З. В., Ростовцев В. А. Препринт ОИЯИ P2-88-769. Дубна, 1988//Fortschr. Phys. 1990. Vol. 18. N 9.
90. Boos E. E., Dubinin M. N., Edneral V. F.e.a.//Computer Interactive System for Calculation of Particle Collision Characteristics at High Energies. In Ref. [95]. P. 25.
91. Barton D., Fitch J. P.//Repts. Prog. Phys. 1972. Vol. 35. P. 235—314; Гердт В. П., Тарасов О. В., Ширков Д. В.//УФН. 1980. Т. 130. С. 113—148.
92. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Дубна. Сентябрь, 1979. ОИЯИ Д11-80-13. Дубна, 1980.
93. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Дубна. Сентябрь, 1982. ОИЯИ Д11-83-511. Дубна, 1983.
94. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Дубна. Сентябрь, 1985. ОИЯИ Д11-85-791. Дубна, 1985.
95. IV Международное совещание по аналитическим вычислениям на ЭВМ в физических исследованиях (сборник аннотаций). Дубна, Май, 1990. ОИЯИ Е11-90-204. Дубна, 1990.
96. McCarthy J.e.a. LISP 1.5. Programmers Manual. M.I.T.P. 1965; Лавров С. С., Силагадзе Г. С. Автоматическая обработка данных; Язык ЛИСП и его реализация. М.: Наука, 1978; Маурер У. Введение в программирование на языке ЛИСП: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
97. Gorishny S. G., Larin S. A., Surguladze L. R., Tkachov F. V.//Comp Phys. Commun. 1989. Vol. 55. P. 381—408.
98. Chetirkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.//Nucl. Phys. 1980. Vol. B174. P. 345—377.
99. Уинстон П. Искусственный интеллект: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
100. Давенпорт Дж. Интегрирование алгебраических функций: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
101. Компьютерная алгебра/Под. ред. Б. Бухбергера: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
102. Davenport J., Siret Y., Tournier G. Computer Algebra. Lond.: Academic Press, 1988.
103. Möhring H.J., Schiller A.//Ref. [92] P. 127—133; Грозин А. Г.//См. [93]. С. 226—231; Грозин А. Г. Решение физических задач на языке REDUCE. Препринты 88-115, 88-136, 88-140. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1988.
104. Grisar M. T., Pendleton H. N.//Nucl. Phys. 1977. Vol. B124. P. 81—92; Grisar M. T., Pendleton H. N., Van Nieuwenhuizen P.//Phys. Rev. 1977. Vol. D13. P. 996—1007.
105. Matveev V. R., Muradian R. M., Tavkheldize A. N.//Lett. Nuovo cimento. 1973. Vol. 7. P. 719—723.
106. Brodsky S. J., Farrar G. R.//Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31. P. 1153—1156.
107. Farrar G. A., Neri F.//Phys. Lett. 1983. Vol. 130B. P. 109—112; Errata. Phys. Lett. 1985. Vol. 152B. P. 443.
108. Parke S. J., Taylor T. A.//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2459—2460; Mangano M., Parke S. J., Xu Z.//Nucl. Phys. 1988. Vol. B298. P. 653—672.
109. Berends F. A., Gielle W.//Nucl. Phys. 1987. Vol. B294. P. 700—732.

110. Подгорецкий М. И.//ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 629—668.
111. Berends F. A., Kleiss R., De Causmaecker P.e.a. (CALCUL Collab.)//Nucl. Phys. 1982. Vol. B206. P. 61—89.
112. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
113. Radyushkin A. V.//Phys. Lett. 1977. Vol. 69B. P. 245—248.
114. Ellis R. K., Georgi H., Machacek M., Politzer H. D.//Nucl. Phys. 1979. Vol. B152. P. 285—329.
115. Amati D., Veneziano G.//Phys. Lett. 1979. Vol. 83B. P. 87—92.
116. Andersson B., Gustafson G., Ingelman G., Sjostrand T.//Phys. Rep. 1983. Vol. 97. P. 31—146.
117. Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Петров В. А.//ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 493—557.
118. Соловьев Л. Д., Шелкачев А. В.//ЭЧАЯ. 1975. Т. 6. С. 571—620.
119. Дренск С. Б., Мавродиев С. Ш.//ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 95—120.
120. Gorishny S. G., Kataev A. L., Larin S. A.//Phys. Lett. 1988. Vol. B212. P. 238—244.
121. Contogouris A. P., Mebarki N.//Phys. Rev. 1989. Vol. D39. P. 1464—1466.
122. Denisov S. P., Donskov S. V., Gorin Yu. P.e.a.//Nucl. Phys. 1973. Vol. B65. P. 1—28.
123. Carrol A. S., Chiang I. H., Kycia T. F. e.a.//Phys. Lett. 1979. Vol. B80. P. 423—427; Ambrosio M., Ansivino G., Barbalino G. e.a.//Phys. Lett. 1982. Vol. B115. P. 495—502.
124. Jenkovsky L. L.//Rev. Nuovo cimento. 1987. Vol. 10, N 12. P. 1—108.
125. Landshoff P. V., Donnachie A.//Nucl. Phys. 1986. Vol. B267. P. 690—701.
126. Качественная теория динамических систем второго порядка/А. А. Андронов, Е. А. Леонтевич, И. И. Гордон, А. Г. Майер. М.: Наука, 1966; Теория бифуркации динамических систем на плоскости/А. А. Андронов, Е. А. Леонтевич, И. И. Гордон, А. Г. Майер. М.: Наука, 1967.
127. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984; Shirkov D. V.//Nucl. Phys. 1973. Vol. B62. P. 194—202.
128. Матвеев В. А., Сисакян А. Н., Слепченко Л. А.//ЯФ. 1986: Т. 23. С. 432—437.
129. Дарбаидзе Я. З., Тевзадзе Ю. В., Слепченко Л. А.//Сообщение АН ГССР. 1983. Т. III. С. 497—500.
130. Slattery P.//Phys. Rev. 1973. Vol. D7. P. 2073—2079.
131. Malthus T. R. An Essay on the Principle of Population. Lond: Johnson, 1798.
132. Verhulst P. F.//Nuov. Mem. Acad. Roy. Bruxelles. 1845. Vol. 18. P. 1.
133. Ernst W., Schmitt I.//Nuovo cimento. 1976. Vol. 33A. P. 195—204.
134. Kovacic J. J.//J. Symb. Comp. 1986. Vol. 2.P.3.
135. Zharkov A. Yu. Preprint JINR E11-87-455. Dubna, 1987.
136. Беркович Л. М.//ПММ. 1979. Т. 43. С. 629—640.
137. Дарбаидзе Я. З., Махалдиани Н. В., Слепченко Л. А.//Тр. ТГУ. 1978. Т. 203. С. 40—47. Дарбаидзе Я. З.//Тр. ТГУ. 1979. Т. 208. С. 5—9.
138. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стеган. М.: Наука, 1979.
139. Arnison G., Astbury G. A., Auberg B.e.a. Preprint CERN-EP/82-134. 1982.
140. Kocak H. Differential and Difference Equations through Computer Experiments, PHASER: An Animator/Simulator for Dynamical Systems for IBM Personal Computers. N.Y., Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer Verlag, 1986.
141. Tarasov O. V., Vladimirov A. A., Zharkov A. Yu.//Phys. Lett. 1980. Vol. 93B. P. 429—432.