

ЯДЕРНО-ПОДОБНЫЕ СОСТОЯНИЯ В SU(2)-МОДЕЛИ СКИРМА

Р.М.Николаева, В.А.Николаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

О.Г.Ткачев

Дальневосточный государственный университет, Владивосток

Обзор посвящен вариационному подходу к решению задачи поиска ядерно-подобных солитонов. Решение этой задачи может стать первым шагом на пути построения ядерной модели киральных солитонов. Обсуждаются структура и некоторые свойства солитонов с квантовыми числами легчайших ядер в оригинальной модели Скирма. Теоретический анализ обнаруживает исключительность каждого отдельного состояния, что проявляется как в структуре классических солитонов, так и в сильной зависимости эффективного квантового гамильтониана от топологического сектора.

The report is devoted to the problem of searching nuclei-like solitons in the variational approach. The solution of this problem could become the first step to the creation of the model of nuclei as chiral solitons. In the framework of the original Skyrme model the structure and some properties of solitons with quantum numbers of light nuclei are discussed. The theoretical analysis reveal the exclusiveness of each separate state, which is manifested in the structure of the classical solitons, as well as in the strong dependence of the effective quantum Hamiltonian on the topological number.

ВВЕДЕНИЕ

В инфракрасной области квантовой хромодинамики, где формируется адронный спектр, эффективные киральные лагранжианы дают в наше распоряжение коллективные степени свободы, являющиеся наблюдаемыми полями, для описания явлений в ограниченной области энергий.

Нелинейные киральные лагранжианы естественным образом приводят к солитонным секторам. Уже классические киральные солитоны очень похожи на адроны. Свойство топологической стабильности передает экспериментально наблюдаемое сохранение барионного заряда. Киральные солитоны — суть протяженные сильновзаимодействующие объекты. Протяженность солитонов соответствует неточности наблю-

даемых частиц, характеризуемых сильными и электрослабыми факторами. Это массивные объекты — их масса существенно больше массы квантовых флуктуаций полей, входящих в лагранжиан в полном соответствии с наблюдаемым большим отношением массы барионов к массе π -мезона.

Именно такие объекты могут служить классическими прообразами нуклонов и ядер. В основе всех свойств этих солитонов лежит киральная симметрия, наличие которой экспериментально подтверждено в большом числе элементарных процессов с участием сильновзаимодействующих частиц.

Мы ограничимся обсуждением модели, передающей киральную $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ -симметрию, нарушенную до векторной $SU(2)_V$ посредством механизма спонтанного нарушения киральной симметрии с появлением безмассовых псевдоскалярных голдстоуновских возбуждений с квантовыми числами пионов.

Эффективный бозонный лагранжиан описывает динамику голдстоуновских бозонов и передает указанные симметрии. Чтобы построить такой лагранжиан, в качестве основных переменных берут элементы U некоторой $SU(2)$ -группы, локальные координаты которых отождествляют с бозонными полями. Левым и правым преобразованиям сопоставляются левые и правые умножения элементов этой группы. Киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -группе преобразований поля U будут соответствовать прямое произведение левых и правых преобразований элементов группы $SU(2)$: $U \rightarrow AUB^+$ с произвольными постоянными $SU(2)$ -матрицами A и B . Обычно плотность кирально-инвариантного действия строится с помощью левоинвариантных форм Картана $L_\mu = U^+ \partial_\mu U$.

Так, $SU(2)$ -модель Скирма определяется следующим лоренцевым скаляром [1]:

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(L_\mu L_\mu) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[L_\mu, L_\nu]^2. \quad (1)$$

Здесь токи L_μ выражены через $SU(2)$ -матрицы

$$U(x) = \exp \left\{ i \frac{2}{F_\pi} \tau^k \pi^k(x) \right\}, \quad (2)$$

определяемые изотриплетом пионных полей $\pi(x)$ и τ -матрицами Паули. Размерная F_π и безразмерная e постоянные — параметры модели. Лагранжиан очевидным образом инвариантен относительно глобальной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ киральной группы преобразований $U(x) \rightarrow AU(x)B^+$ с

любыми постоянными унитарными унимодуляторными матрицами A и B . Этой симметрии отвечает сохранение левого и правого токов.

Успех модели Скирма [1] в описании нуклонов [2—4] и дейтрона [5—15] как квантовых состояний солитонов кирального поля делает естественным применение модели к более тяжелым объектам. К таким объектам относятся, например, легчайшие ядра тяжелее дейтрона. Первый опыт описания ядер в модели Скирма был сделан в потенциальном приближении.

В таком подходе, прежде всего, вычисляется потенциал взаимодействия между скирмионами [9,10], а ядра рассматриваются как связанные состояния скирмионов [15].

Однако потенциальное (адиабатическое) приближение не является единственно возможным подходом к проблеме описания ядер в модели Скирма. Более прямой путь конструирования систем с произвольным барионным зарядом предполагает поиск солитонов классических уравнений для киральных полей с соответствующим топологическим зарядом и квантование солитонных степеней свободы. В таком подходе к теории ядерных состояний следует считать, что сами нуклоны могут рождаться только в окрестности поверхности ядер и, строго говоря, не существуют во внутренней области ядер.

Численные расчеты тороидальных солитонных конфигураций с топологическим зарядом $B = 2 + 4$ были предприняты в [16]. Недавно был достигнут известный успех в поиске нетороидальных солитонов с минимальной массой в секторах с $B \leq 6$ [17] прямыми численными методами. Здесь следует отметить, что для поиска этих шести конфигураций потребовались 170 ч работы центрального процессора суперкомпьютера Крэй-2. Более того, точность расчетов падала с увеличением топологического заряда. Так, при расчете конфигурации с барионным зарядом $B = 6$ было потеряно 0,22 единицы барионного заряда.

В связи с этим представляется необходимой разработка вариационного подхода к решению задачи поиска ядерно-подобных конфигураций. Кроме того, на этом пути обычно легче понять природу найденных решений и перейти к квантованию классических степеней свободы.

Вариационный подход использовался в [16-22]. Исследовались свойства тороидальных конфигураций с барионными числами $B \leq 4$. Было показано, что используемый вариационный анзац удовлетворительно воспроизводит результаты прямых численных расчетов для тороидальных конфигураций. Физически интересные решения подробно описаны в [19].

Поиск нетороидальных решений обусловлен следующими причинами. Во-первых, стабильных тороидальных солитонов с $B \geq 4$ обнаружить

не удалось. Это обстоятельство казалось удручающим, поскольку рост массы солитонов с ростом барионного заряда был почти линейным. С другой стороны, трудно надеяться, что ядерно-подобные солитоны будут иметь исключительно тороидальную форму, хотя сравнение расчетных электромагнитных формфакторов подобных α -частице объектов не противоречит такой версии [23].

Во-вторых, для рассмотренных в [24] квантовых состояний тороидальных солитонов с $k \geq 3$ стройность картины нарушается из-за наличия жесткого квантового условия на третьей проекции спина и изоспина: $kT_3^{b.f} + S_3^{b.f}$ в системе, связанной с телом. Это, в частности, приводит к тому, что для аналога ядра трития в модели нижайшим состоянием будет состояние с квантовыми числами $T = 1/2, S = 3/2$.

Хорошо известно [25,26], что модель Скирма можно рассматривать как «оборванный» ряд, который возникает при разложении некоторого эффективного нелокального лагранжиана по степеням производных пионного поля [27—30]. Сам же эффективный нелокальный лагранжиан имеет своим источником производящую функцию КХД, в которую ввели коллективные псевдоскалярные переменные и проинтегрировали по кварковым и глюонным переменным [31—38]. На первый взгляд, качество описания, даваемое моделью Скирма, могло бы ухудшаться с ростом барионного числа. Так, например, если бы мы имели дело только с конфигурациями Скирма — Виттена, мы бы столкнулись именно с такой ситуацией. Производная от функции профиля увеличивалась бы с ростом барионного заряда приблизительно пропорционально последнему.

Однако если модель Скирма удовлетворительно воспроизводит свойство насыщения ядерных сил, то радиус системы будет увеличиваться с увеличением барионного заряда. Отсюда можно ожидать, что производная пионного поля не будет увеличиваться и потому нет опасности выйти из области применимости модели Скирма. Проведенные расчеты ядерно-подобных состояний [39] убедительно свидетельствуют в пользу такой ситуации.

1. ОБ ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

Тривиальное (кирально-несимметричное) решение $U_0(x) = 1$ определяет вакуумное состояние. Одно из условий, которому должно удовлетворять произвольное решение, требует, чтобы решение $U(x)$ стремилось к вакуумному $U(\infty) = 1$ в асимптотической области. Таким образом, мы имеем дело с отображениями $U(x)$ координатного пространства R^3 с отожд-

дествленными бесконечными точками (которое топологически эквивалентно сфере S^3) в сфере S^3 параметров матрицы U .

Можно построить тривиально сохраняющийся топологический (ненётеровский) ток [1]

$$I_\mu^B = -\frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (L_\nu L_\rho L_\sigma) \quad (3)$$

с зарядом

$$B = \int I_0^B(x) dx, \quad (4)$$

классифицирующим такие отображения. Топологический заряд, являясь гомотопическим инвариантом, сохраняется независимо от динамики системы. В модели Скирма топологический заряд отождествляется с барионным.

Известно, что стационарным решением в секторе с единичным топологическим зарядом является сферически-симметричное решение или конфигурация типа «еж» [40]

$$U(x) = \exp \{i \tau N F(r)\}, \quad (5)$$

где $r = |r|$ — модуль радиуса-вектора r , а $N = \pi/|\pi| = r/|r|$ — единичный изотопический вектор, скоррелированный с пространственным $n = r/|r|$. Эту конфигурацию называют анзацем Скирма — Виттена. Поле изотопического вектора N возьмем в достаточно общей для наших целей форме

$$N = \begin{cases} \sin T(\theta) \cos \Phi(\theta, \varphi); \\ \sin T(\theta) \sin \Phi(\theta, \varphi); \\ \cos T(\theta), \end{cases} \quad (6)$$

где функции Φ и T — некоторые произвольные функции углов θ и φ сферической системы координат, определяющие локальную ориентацию изотопического вектора N .

В [14,20] этот анзац использовался для поиска тороидальных солитонов. Было показано, что такой анзац приводит к серии физически интересных решений не только в барионном, но и в топологически тривиальном секторе [19—20,41—42].

Вычисление лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{F^2}{8} [(\partial_\mu N \cdot \partial_\mu N) \sin^2 F(x) + \partial_\mu F(x) \partial_\mu F(x)] -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4e^2} [(\partial_\mu \mathbf{N} \partial_\mu \mathbf{N})^2 - (\partial_\mu \mathbf{N} \partial_\nu \mathbf{N}) (\partial_\mu \mathbf{N} \partial_\nu \mathbf{N})] \sin^4 F(x) - \\
 & - \frac{1}{4e^2} [(\partial_\mu \mathbf{N} \partial_\mu \mathbf{N}) \partial_\nu F(x) \partial_\nu F(x) - (\partial_\mu \mathbf{N}) (\partial_\nu \mathbf{N}) \partial_\mu F \partial_\nu F] \sin^2 F
 \end{aligned} \tag{7}$$

не содержит принципиальных трудностей. Потому ограничимся здесь лишь несколькими формальными замечаниями. Данное представление верно для любых полей единичного вектора \mathbf{N} и произвольной функции профиля $F(x)$. Постоянные F_π и e рассматриваем как произвольные параметры, хотя F_π в бозонном секторе имеет смысл постоянной пионного распада, а e определяет амплитуду $\rho \rightarrow 2\pi$ -перехода.

Выражение $(\partial_k \mathbf{N}, \partial_k \mathbf{N})$, записанное явно через функции F , T и Φ , приводится к следующему:

$$(\partial_k \mathbf{N}, \partial_k \mathbf{N}) = \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \sin^2 T + \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}, \tag{8}$$

тогда как для квадрата векторного произведения $[\partial_i \mathbf{N} \times \partial_i \mathbf{N}]^2$ имеем

$$[\partial_i \mathbf{N} \times \partial_k \mathbf{N}]^2 = \frac{2}{r^4} \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} (\Phi')^2 (T')^2, \tag{9}$$

и в силу того, что вектор \mathbf{N} не зависит от переменной r ,

$$n_i (\partial_i \mathbf{N}, \partial_k \mathbf{N}) n_k = 0. \tag{10}$$

Таким образом, для лагранжиана статических полевых конфигураций получим

$$\mathcal{L} = \int \mathcal{L}_2 d^3x + \int \mathcal{L}_4 d^3x, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{L}_2 = - \frac{F_\pi^2}{8} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \sin^2 T \right] \frac{\sin^2 F}{r^2} \right\} \tag{12}$$

и

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left\{ \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + \sin^2 T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right\}. \quad (13)$$

Минимизируем приближенно полученный функционал. С этой целью в качестве функций $\Phi(\theta, \varphi)$ будем рассматривать только функции вида

$$\Phi(\theta, \varphi) = k(\theta)\varphi + \text{const}, \quad (14)$$

где

$$k(\theta) = \sum_i k_i \{ \Theta(\theta_{i+1} - \theta) - \Theta(\theta_i - \theta) \}. \quad (15)$$

Здесь Θ — ступенчатая функция Хевисайда. Эти функции, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2 = 0 \quad (16)$$

в областях $\theta_i < \theta < \theta_{i+1}$. Для границ немедленно следует условие

$$T(\theta_i) = \pi l_i, \quad (17)$$

получающиеся из условия обращения в нуль коэффициентов перед сингулярными функциями. Вообще говоря, функция $k(\theta)$ должна удовлетворять условию однозначности определения вектора \mathbf{N} во всем пространстве. Для того чтобы обеспечить однозначность решения $\mathbf{N}(\theta, \varphi)$, необходимо потребовать целочисленность функции $k(\theta)$, за исключением, может быть, точек θ_i , в которых функция $T(\theta)$ кратна π . Точки $T = \pi l_i$ соответствуют южному или северному полюсу сферы изотопической системы координат. В этих точках вектор \mathbf{N} имеет компоненты $\{0, 0, +1\}$ или $\{0, 0, -1\}$, а функция $k(\theta)$ осуществляет поворот вектора \mathbf{N} только вокруг третьей оси. Поэтому $k(\theta)$ в точках θ_i может быть любой. Таким образом, область определения $[0, \pi]$ функций $T(\theta)$ и $k(\theta)$ разбивается на отрезки $[\theta_0, \theta_1), (\theta_1, \theta_2), \dots, (\theta_{l-1}, \theta_l]$, где точки разбиения определяются из условий:

$$T(\theta_i) = \pi l_i, \quad 0 \leq i \leq l; \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_k = \pi. \quad (18)$$

А кусочно-постоянная функция

$$k(\theta) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq \theta < \theta_1; \\ k_2, & \theta_1 < \theta < \theta_2; \\ \dots & \dots \\ k_l, & \theta_{l-1} < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (19)$$

определяется набором целых чисел k_i .

Рассмотрим члены в функционале \mathcal{L} , содержащие величину $(\partial\Phi/\partial\theta)^2$:

$$- \int_0^\pi \sin^2 T(\theta) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)^2 \sin \theta d\theta. \quad (20)$$

Этот интеграл обращается в нуль, если

$$T|_{\theta \rightarrow \theta_i} \sim \pi i + \alpha(\theta_i - \theta)^m, \quad m \geq 1. \quad (21)$$

На каждом из отрезков (θ_{i-1}, θ_i) нетрудно получить уравнения на функции $T_i(\theta)$: отбрасывая в \mathcal{L} члены, пропорциональные интегралу (20), получаем

$$\mathcal{L}_2 = - \frac{F_\pi^2}{8} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \left[k^2(\theta) \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\sin^2 F}{r^2} \right\}; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & - \frac{1}{2e^2} \frac{\sin^2 F}{r^2} \left\{ k^2(\theta) \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\sin^2 F}{r^2} + \right. \\ & \left. + \left[k^2(\theta) \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

для функции $k(\theta)$ вида (19). Интегрируя (22), (23) по объему и переходя к безразмерной переменной $x = F_\pi e r$, получаем массу стационарной конфигурации для конкретного значения числа l :

$$M = \sum_{i=1}^l M_i = \pi \frac{F_\pi}{e} \sum_{i=1}^l (a_i A_i + b_i B_i + C_i). \quad (24)$$

Здесь M_i — вклады в полную классическую массу от энергии, сосредоточенной в пространственной области

$$\{0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, \theta_{i-1} < \theta < \theta_i; i = 1, \dots, l\}.$$

Величины a_i , b_i и A_i , B_i , C_i определяются следующими интегралами:

$$a_i = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left[k_i^2 \frac{\sin^2 T_i}{\sin^2 \theta} + (T'_i)^2 \right] \sin \theta d\theta; \quad (25)$$

$$b_i = k_i^2 \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \frac{\sin^2 T_i}{\sin^2 \theta} (T'_i)^2 \sin \theta d\theta;$$

$$A_i = \int_0^{\infty} \sin^2 F_i \left[\frac{1}{4} + (F'_i)^2 \right] dx,$$

$$B_i = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 F_i}{x^2} dx, \quad (26)$$

$$C_i = \int_0^{\infty} (F'_i x)^2 dx, \quad i = 1, \dots, l, \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_l = \pi.$$

Символ «штрих» использован для обозначения следующих производных:

$$\Phi'_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi}, \quad T'_i = \frac{\partial T_i}{\partial \theta}, \quad F'_i = \frac{\partial F_i}{\partial x}. \quad (27)$$

Из условия конечности классической массы можно заключить, что функции $F_i(x)$ должны удовлетворять условиям

$$F_i(0) = \pi n_i, \quad F_i(\infty) = 0. \quad (28)$$

Таким образом, получаем уравнения на функции F_i и T_i , следующие из минимизации рассматриваемого функционала:

$$\{x^2 + 2a_i \sin^2 F_i\} F''_i + 2xF'_i + \left[a_i (F'_i)^2 - \frac{a_i}{4} - 2b_i \frac{\sin^2 F_i}{x^2} \right] \sin(2F_i) = 0, \quad (29)$$

$$0 \leq x \leq \infty;$$

$$2 \left[A_i + k_i^2 B_i \frac{\sin^2 T_i}{\sin^2 \theta} \right] T''_i - k_i^2 \left[A_i - B_i (T'_i)^2 \right] \frac{\sin(2T_i)}{\sin^2 \theta} + \quad (30)$$

$$+ 2T'_i \operatorname{ctg} \theta \left[A_i - k_i^2 B_i \frac{\sin^2 T_i}{\sin^2 \theta} \right] = 0, \quad \theta_{i-1} < \theta < \theta_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Нетрудно определить поведение функции $F_i(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$, $T_i(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$ и $T_i(\theta)$ при $\theta \rightarrow \pi$. Так, в окрестности начала координат

$$F(x)|_{x \rightarrow 0} \sim \pi n - \alpha x^p, \quad (31)$$

а асимптотическое поведение $F(x)$ полиномиально (для $m_\pi = 0$) [18]:

$F(x)|_{x \rightarrow \infty} \sim \beta/x^{p+1}$ с тем же значением

$$p = \frac{\sqrt{1+2a} - 1}{2}. \quad (32)$$

Для функции $T(\theta)$ в окрестности границ своей области определения имеем

$$T(\theta)|_{\theta \rightarrow 0} \sim \theta^k, \quad T(\theta)|_{\theta \rightarrow \pi} \sim \pi l - (\pi - \theta)^k. \quad (33)$$

Итак, все решения $U_{\{n, k\}, l}(x)$ будут характеризоваться набором целых чисел n_1, \dots, n_l . Вычислим распределение плотности

$$J_0^B(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2 F(r)}{r^2} \frac{\partial F(r)}{\partial r} \frac{\sin T}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \quad (34)$$

барионного заряда.

Для рассматриваемых нами решений немедленно получим

$$J_0^B(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2 F(r)}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} k(\theta) \frac{\sin T(\theta)}{\sin \theta} \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta}. \quad (35)$$

Интегрируя выражение (35) по координатам r, θ, φ , получаем барионный заряд для решений, характеризуемых значением числа l :

$$B = -\sum_{m=1}^l (-1)^m n_m k_m. \quad (36)$$

При выводе последней формулы были использованы граничные условия на функцию $F(r)$ и вид функции $k(\theta)$ (19).

Остановимся более подробно на формуле (36). Для упрощения рассуждений положим $n_m = n$ ($m = 1, \dots, l$):

$$B = -n \sum_{m=1}^l (-1)^m k_m. \quad (37)$$

Очевидно, что при $k_m = k$ ($m = 1, \dots, l$) барионный заряд записывается в виде

$$B = \begin{cases} nk & \text{при нечетном } l, \\ 0 & \text{при четном } l \end{cases} \quad (38)$$

в согласии с [18]. Таким образом, полагая $k_m < 0$ для четных m и $k_m > 0$ для нечетных m , получаем конфигурации с положительным барионным зарядом. Очевидно, в общем случае (36) следует потребовать

$$\begin{aligned} n_m k_m &> 0 \quad \text{для нечетных } l, \\ n_m k_m &< 0 \quad \text{для четных } l. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее, однако, мы будем рассматривать решения только $n_m = 1$ ($m = 1, \dots, l$). Это связано с тем, что нам интересны решения с линейной (или близкой к линейной) зависимостью классической массы от барионного заряда.

2. МАССЫ КЛАССИЧЕСКИХ ЯДЕРНО-ПОДОБНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Как видно из системы уравнений (29), (30), знак величины k не влияет на решения $F_i(x)$ и $T_i(x)$. Таким образом, классические массы полученных солитонных конфигураций будут соответствовать классическим массам солитон-антисолитонных конфигураций из [20,24], в которых все (или некоторые) антисолитоны заменены солитонами. Кроме того, точки разбиения θ_i для классических аналогов ядер в этом случае будут определяться соотношением

$$\theta_i = \pi i / l, \quad i = 1, \dots, l - 1. \quad (40)$$

В общем случае, когда $|k_m| \neq |k_n|$, точки θ_i находить из выражения (40) нельзя. Для их определения можно воспользоваться условием минимума функционала массы, т.е. они должны принимать такие значения, при которых масса классической конфигурации минимальна на решениях системы уравнений (29), (30). Далее, однако, мы не будем находить точные значения точек разбиения и ограничимся только качественными рассуждениями, взяв за первое приближение соотношение (40). В этом случае геометрические формы солитонов изменятся только количественно, но не качественно. К значениям масс классических конфигураций, которые ниже будут приводиться, следует относиться как к оценкам в рамках вариационного анализа. Если же для этих решений $|k_m| = \text{const}$,

для всех $i = 1, \dots, l$ соотношение (40) является точным, и, следовательно, точность значения масс будет определяться только точностью численного интегрирования.

Рассмотрим одно из возможных решений с барионным зарядом $B = 3$. Это решение, характеризуемое следующими числами:

$$n = 1, l = 2 \quad k_1 = 1, k_2 = -2 \quad (\text{или } k_1 = 2, k_2 = -1).$$

В этом случае функция $k(\theta)$ имеет вид

$$k(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta < \theta_1, \\ -2, & \theta_1 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (41)$$

где θ_1 — точка разбиения, которую, как мы договорились, определим из условия (40): $\theta_1 = \pi/2$. В терминологии, принятой в [24], эта конфигурация называется $S2S$. Распределения плотностей барионного заряда в x, y -плоскости для трех конфигураций — $3S, S2S, SSS$ с $B = 3$ приведены на рис.1-3. Массы этих солитонов, рассчитанные по формулам (24) — (26), равны соответственно: $M_{\text{кл}} = 34,585$ для $3S$; $M = 35,947$ для $S2S$; $M_{\text{кл}} = 46,332$ для SSS . В секторе $B = 4$ существует шесть различных возможных форм солитонов. Их классификация и соответствующие им массы приведены в табл.1. На рис.4-9 представлены линии равных значений плотностей барионных зарядов в плоскости (x, z) для всех этих конфигураций.

Конфигурация kS , показанная на рис.4 для $k = 4$, представляет собой диффузный тор. Более сложная конструкция — SkS состоит из одного деформированного солитона с барионным числом $B = 1$ и солитона с тороидальной формой распределения барионного заряда с $B = k$. На рис.5 пред-

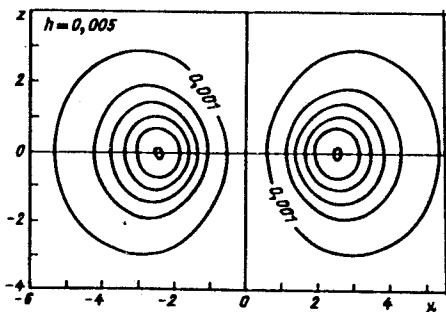


Рис.1. Линии равного значения плотности барионного заряда $3S$ -конфигурации

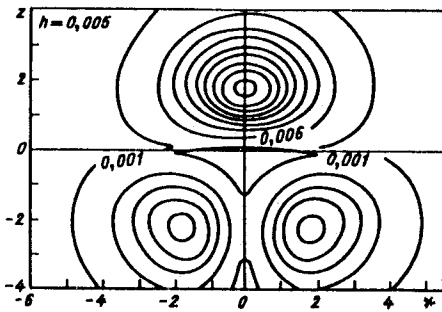


Рис.2. Линии равного значения плотности барионного заряда $S2S$ -конфигурации

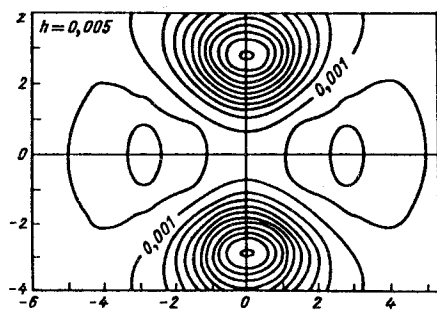


Рис.3. Линии равного значения плотности барионного заряда SSS-конфигурации

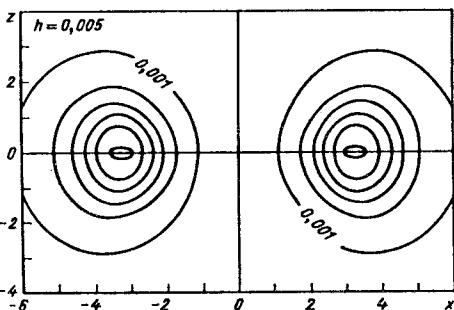


Рис.4. Линии равного значения плотности барионного заряда 4S-конфигурации

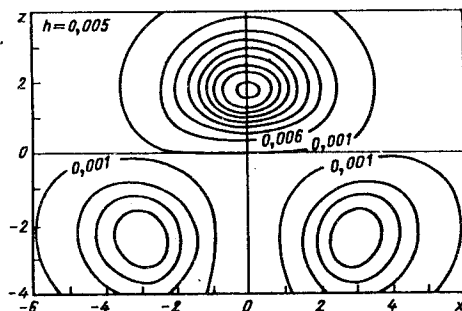


Рис.5. Линии равного значения плотности барионного заряда S3S-конфигурации

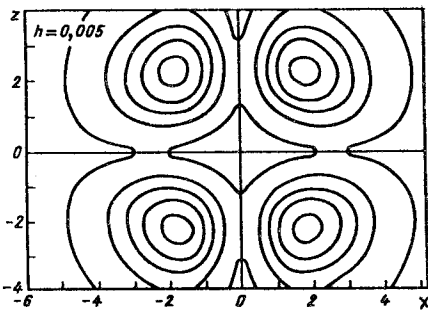


Рис.6. Линии равного значения плотности барионного заряда 2S2S-конфигурации

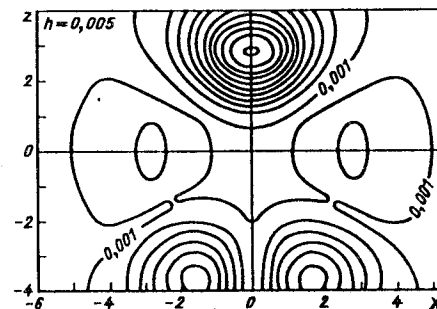


Рис.7. Линии равного значения плотности барионного заряда SS2S-конфигурации

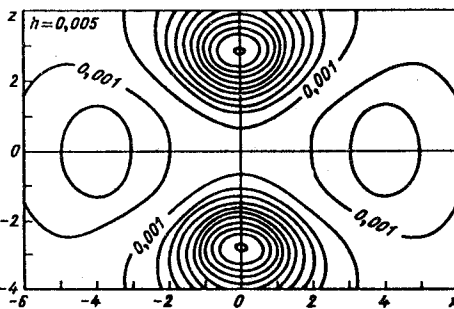


Рис.8. Линии равного значения плотности барионного заряда S2SS-конфигурации

Таблица 1. Классические массы солитонов с топологическим зарядом $B = 4$

Структура	Классификация по числам n, l, k	Классическая масса в единицах $\pi, E_{\pi}/e$
4S	$n=1, l=1, k=4$	47,675
S3S	$n=1, l=2, k=\{1, -3\}$	46,529
2S2S	$n=1, l=2, k=\{2, -2\}$	45,536
SS2S	$n=1, l=3, k=\{1, -1, 2\}$	54,521
S2SS	$n=1, l=3, k=\{1, -2, 1\}$	57,175
SSSS	$n=1, l=4, k=\{1, -1, 1-1\}$	71,169

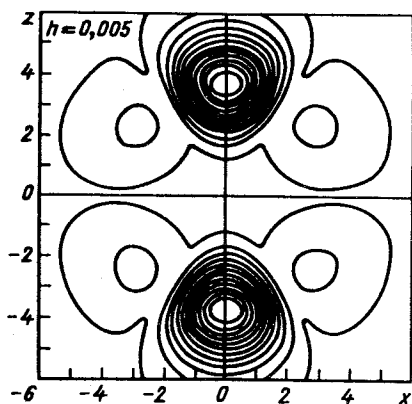


Рис.9. Линии равного значения плотности барионного заряда SSSS-конфигурации

ставлена такая конфигурация для $k = 3$. Как видно из формулы (35), все солитоны в предположении аксиально-симметричны. Все пространство при этом разбивается на области, ограниченные вложенными друг в друга конусами. Распределения барионных зарядов, сконцентрированных во внутренних областях пространства, всегда имеют

форму (деформированного) диффузного тора. Во внешних областях солитоны имеют форму тора только при $k \neq 1$. Так, например, конфигурация SS2S (см. рис.7) в верхней области пространства имеет форму деформированной сферы (S), а в нижней — форму деформированного тора (2S).

Согласно нашим расчетам, массы солитонов с одинаковым топологическим зарядом сильно различаются. Из табл.1 видно, что при $B = 4$ нижайшую массу имеет объект, состоящий из двух диффузных торов 2S2S. Эта конфигурация стабильна относительно развала на составляющие с барионным зарядом $B \leq 3$. Квантовое состояние 2S2S-солитона — возможный кандидат в α -частицы.

Массы стационарных конфигураций, имеющих тороидальную форму в распределении барионного заряда, приведены в табл.2. В табл.3 приво-

Таблица 2. Классические массы тороидальных скирмионов ($\pi F_{\pi}/e$)

B	1	2	3	4	5
M	11,605	22,458	34,585	47,675	61,569

Таблица 3. Наименьшие массы в единицах ($\pi F_{\pi}/e$) и среднеквадратичные радиусы солитонов для топологических секторов с $B \leq 12$ (в единицах $(F_{\pi}e)^{-1}$)

B	1	2	3	4	6	8	9	12
M	11,605	22,458	34,585	45,536	66,701	89,310	103,08	134,45
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	2,12	2,829	3,497	3,841	4,613	5,353	5,610	6,336

дим нижайшие массы скирмионов с барионным зарядом до $B = 12$. Нетрудно видеть, что они представляют почти линейную зависимость классической массы от барионного заряда. Можно думать, что, будучи проквантованными, солитоны, массы которых представлены в табл.2, могут быть интерпретированы как физические ядерные состояния. Некоторое число состояний может иметь изомерные состояния, отличающиеся формой распределения барионного заряда (а также и формой распределения энергии). Представленные в табл.3 среднеквадратичные радиусы обнаруживают рост с увеличением барионного заряда, приближенно передаваемый зависимостью $B^{1/2}$.

3. КЛАСТЕРЫ В ЯДЕРНОЙ МОДЕЛИ КИРАЛЬНЫХ СОЛИТОНОВ

С развитием ускорителей и экспериментальной техники изучения ядер, лежащих далеко от дорожки β -стабильности, открывается все больше возможностей изучения ядер с необычным отношением числа протонов к числу нейтронов. Открываются возможности исследования высоковозбужденных коллективных ядерных состояний, «утопленных» в непрерывный спектр. Способность получать такие нестабильные ядра, разделять, идентифицировать и рассеивать их на стабильных ядрах дает

возможность изучать ядра аномально больших размеров, а также слабо-связанные структуры на их поверхности. Экспериментальные данные о фрагментации налетающих ядер позволяют, вероятно, делать заключение о структуре ядер вообще.

Теоретические подходы к интерпретации этих данных делятся на две категории. В одной из них уже существующие приближения используются для описания экспериментальных данных. В другой — предлагаются новые модели для интерпретации новых данных. Так, есть некоторые указания на то, что традиционные подходы типа модели оболочек не способны воспроизвести эти данные. Эти модели недооценивают ядерные сечения и радиусы, получаемые из измерений на легких мишенях для обогащенных нейтронами ядер [43-45].

В [46, 47] были выполнены микроскопические расчеты ядер ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$ в рамках $\alpha + 2N$ -модели с парными потенциалами, фитируемыми по низкоэнергетическому двухчастичному рассеянию.

Были получены две возможные конфигурации пространственных распределений ядерной плотности. Распределение динуклонного типа соответствует компактной паре нейтронов, расположенной с одной стороны от α -частицы. Другое распределение сигарообразного типа соответствует нейтронам, локализованным по разные стороны от α -частицы.

Среднеквадратичные радиусы нуклонных распределений приблизительно равны 2,6 фм, т.е. воспроизводят данные из [48].

Сформулированный в предыдущем разделе вариационный подход позволяет рассмотреть возможные структуры для скирмионов с $B = 6$.

Анализ показывает, что обнаруженные ранее тороидальные скирмионы с $B \leq 4$ могут быть представлены в структуре более тяжелых скирмионов. Структура же даже легких объектов с $B = 4$ и $B = 6$ оказывается довольно сложной. Подобный α -частице объект с $B = 4$ может состоять, например, из одного тороидального солитона с $B = 2$ и двух солитонов с $B = 1$ (см. рис.7). Эту конфигурацию мы обозначим $U_{13\{1,1,2\}}$. Другая возможная конфигурация $U_{12\{1,3\}}$, которая состоит из одного тороида с $B = 3$ и солитона с $B = 1$ (см. рис.5). Другие три возможные конфигурации суть: $U_{11\{4\}}$ (см. рис.4), состоящая из одного солитона с $B = 4$, $U_{14\{1,1,1,1\}}$, состоящая из двух «яблокоподобных» солитонов и двух тороидальных солитонов — каждая с $B = 1$ (см. рис.9), и $U_{12\{2,2\}}$ с наименьшей массой, состоящая из двух тороидальных солитонов с $B = 2$ (см. рис.6).

Среднеквадратичные радиусы этих конфигураций приведены в табл.4.

Таблица 4. Среднеквадратичные радиусы распределений плотности барионного заряда в единицах $(F_{\pi e})^{-1}$ для конфигураций с $B = 4$

$U_{n\{k(d)\}}$	11{4}	12{1,3}	1,2{2,2}	13{1,1,2}	14{1,1,1,1}
$\langle r^2 \rangle^{1/2} \cdot B^{1/2}$	8,26	8,54	7,68	8,50	8,19

Таблица 5. Расчетные массы солитонов в единицах $(\pi F_{\pi}/e)$ и среднеквадратичные радиусы распределения барионного заряда в единицах $(F_{\pi e})^{-1}$ для солитонов с $B = 4$

$U_{n\{k(d)\}}$	12{3,3}	12{2,4}	13{1,1,4}	13{1,4,1}	14{1,1,2,2}
M_U	66,69	67,41	72,41	82,30	88,88
$\langle r^2 \rangle^{1/2} \cdot B^{1/2}$	11,3	12,00	13,7	13,67	12,45

В структуре шестибарионной системы могут проявить себя около 15 различных конфигураций. Мы рассмотрим только наиболее интересные из них, представленные в табл.5.

Так же, как и для $B = 4$, наиболее компактной является конфигурация, представленная двумя тороидами: $U_{12\{3,3\}}$. Ее среднеквадратичный радиус сильно отличается от радиусов других конфигураций, содержащих нетороидальные солитоны. Следует отметить, что появляются тороидальные солитоны с $B = 1$ во внутренней области мультискирмионов. Особо следует подчеркнуть, что во внутренней структуре объектов с $B = 6$ проявляют себя два вида α -частиц. Один — наиболее компактный из двух тороидов, а другой — «широкий» тороид с $B = 4$.

Размеры конфигурации $U_{13\{1,1,4\}}$ («динуклонного» типа) и $U_{13\{1,4,1\}}$ («сигароподобного» типа) практически не различаются. Их среднеквадратичные радиусы, рассчитанные с постоянными $F_{\pi} = 109,45$ МэВ и $e = 4,138$, существенно ближе к экспериментально измеренным в [48], чем радиус конфигурации $U_{14\{1,1,2,2\}}$. Этот результат можно интерпретировать как свидетельство в пользу того, что α -частица в структуре Li может быть в возбужденном состоянии. Указанные выше значения постоянных F_{π} и e соответствуют значениям, при которых наименьшие массы классических солитонов с $B = 4$ и $B = 12$ соответствуют массам ядер ${}^4\text{He}$ и ${}^{12}\text{C}$.

4. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ЯДЕРНО-ПОДОБНЫХ СОЛИТОНОВ

Получим эффективный квантово-механический гамильтониан методом введения коллективных переменных Боголюбова [49]. Ограничимся конфигурациями с симметричным распределением плотности энергии (массы) относительно плоскости (x, y) . Это означает, что из класса всех рассмотренных решений, характеризуемых числами $n, l, \{k\}_1^l$, мы выберем только решения, удовлетворяющие условию

$$\begin{aligned} k_i &= k_{l+1-i}, \quad i = 1, \dots, (l-1)/2 \quad \text{для нечетных } l; \\ k_i &= -k_{l+1-i}, \quad i = 1, \dots, l/2 \quad \text{для четных } l. \end{aligned} \quad (42)$$

Для таких конфигураций не возникает дополнительных трудностей с выделением движения центра масс. Эти конфигурации исчерпывают почти весь класс ядерно-подобных состояний.

Можно заметить [50], что энергия системы не изменится, если статическое решение $U_0(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) + i(\tau \phi(\mathbf{x}))$ подвергнуть преобразованию

$$U_0(\mathbf{x}) \rightarrow \sigma(\mathbf{x}') + i\tau^i I^{ij} \phi^j(\mathbf{x}'), \quad x'_n = (R^{-1})_{nm} x_m, \quad (43)$$

где I и R — постоянные ортогональные 3×3 -матрицы. Матрица I задает вращения изотопического, а R — координатного пространства. Параметры матриц поворотов I и R могут служить коллективными переменными, описывающими вращательные степени свободы. Таким образом, зависящими от времени полевыми конфигурациями, учитывающими рассмотренные движения, являются следующие конфигурации [51,52]:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, t) &= \sigma(\mathbf{x}') + i\tau^i I^{ij}(t) \phi^j(\mathbf{x}'); \\ x'_n(t) &= (R^{-1})_{nm}(t) x_m. \end{aligned} \quad (44)$$

Несколько менее обоснованным является введение коллективной переменной, соответствующей монополярным вибрациям. Однако уже первые расчеты с включением монополярных вибраций обнаружили весьма существенное влияние последних на свойства барионов [18,24].

Введение коллективной переменной, соответствующей монополярным вибрациям, осуществляется масштабным преобразованием $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \exp \{\lambda(t)\}$ в стационарной полевой конфигурации $U(\mathbf{x})$. Таким образом, более общее предположение о форме решения, зависящего от времени, имеет вид (44), где

$$x'_n(t) = (R^{-1})_{nm}(t) x_m e^{\lambda(t)}. \quad (45)$$

Зависящий от времени скалярный параметр $\lambda(t)$ отвечает за однородные флуктуации плотностей наблюдаемых величин.

Вычислим лагранжиан, в котором теперь временные компоненты токов L_0 играют основную роль:

$$L = -M(\lambda) + \frac{F^2}{16} \int \text{Tr} (L_0 L_0) dt + \frac{1}{16e^2} \int \text{Tr} [L_0, L_k]^2 dt. \quad (46)$$

Часть лагранжиана, не зависящая от временных производных, имеет вид

$$-M(\lambda) = -e^{-\lambda} M_2 - e^{\lambda} M_4, \quad (47)$$

где M_2 и M_4 определяются выражениями (12) и (13).

Для зависящих от времени компонент нетрудно получить выражения (L_0, L_0) и $[L_0 \times L_k]^2$ в терминах полей σ и ϕ :

$$(L_0 \times L_0) = \partial_0 \sigma \partial_0 \sigma + (\partial_0 \phi \cdot \partial_0 \phi); \quad (48)$$

$$[L_0 \times L_k]^2 = \partial_0 \sigma \partial_0 \sigma (\partial_k \phi, \partial_k \phi) + \partial_k \sigma \partial_k \sigma (\partial_0 \phi, \partial_0 \phi) - 2 \partial_0 \sigma \partial_k \sigma (\partial_0 \phi \times \partial_k \phi) + [\partial_0 \phi \times \partial_k \phi]^2. \quad (49)$$

Непосредственно дифференцированием устанавливается:

$$\partial_0 \sigma = iF' \sin F s \dot{\lambda}; \quad (50)$$

$$\partial_0 \phi = -i \{ [N \times \omega] + \bar{\partial}_i N (-\varepsilon_{ijk} \Omega_k + \delta_{ij} \dot{\lambda}) S_j \} \sin F - iF' \cos F N S \dot{\lambda}. \quad (51)$$

Здесь $\bar{\partial}_i = \partial / \partial s_i$, $s_i = (R^{-1})_{ik} x_k e^{\lambda}$, $s = \sqrt{s_i s_i}$, $F' = \partial F / \partial s$, точка обозначает дифференцирование по времени, а частоты изотопических ω^k и пространственных Ω_k вращений определены согласно следующим равенствам:

$$i^{jk} (I^{-1})^{kj} = \varepsilon^{ijk} \omega^k, \quad (\dot{R}^{-1})_{ik} R_{kj} = -\varepsilon_{ijk} \Omega_k. \quad (52)$$

Вычисляя скалярное произведение $(\partial_0 \phi \cdot \partial_0 \phi)$ и подставляя его в формулу (48), получаем

$$(L_0, L_0) = (F')^2 s^2 \dot{\lambda}^2 + \{ [N \times \omega]^2 + ([N \times \omega] \bar{\partial}_i n) \dot{S}_i + \dot{S}_i (\bar{\partial}_i N \bar{\partial}_j N) S_j \} \sin^2 F, \quad (53)$$

где

$$\dot{S}_i = (-\varepsilon_{ijk} \Omega_k + \delta_{ij} \dot{\lambda}) S_j. \quad (54)$$

Несколько более громоздким получается выражение для векторного произведения:

$$\begin{aligned} [L_0 \times L_k]^2 = & -(F')^2 \sin^4 F \{(\bar{\partial}_j N, \bar{\partial}_j N) s^2 \dot{\lambda}^2 + \\ & + 2([N \times \omega], \partial_i N) \dot{S}_i + \dot{S}_i (\partial_i N, \bar{\partial}_j N) S_j\} - \\ - & \{(F')^2 s^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 F + ([N \times \omega]^2 + 2([N \times \omega], \bar{\partial}_i N) \dot{S}_i + \\ & + \dot{S}_i (\bar{\partial}_i N \bar{\partial}_j N) \dot{S}_j) \sin^2 F\} \{(F')^2 + (\bar{\partial}_i N, \bar{\partial}_i N)\} + \\ + & \{([\bar{\partial}_j N \times N] \omega)^2 \sin^2 F + \dot{S}_i (\bar{\partial}_i N \cdot \partial_j N) \sin^2 F + (F')^2 \cos^2 F \dot{\lambda} s_j\}^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Подставляя явный вид изотопического вектора N в последние выражения и интегрируя по всему пространству, после несложных, но достаточно утомительных выкладок можно привести зависящую от времени часть лагранжиана к виду

$$\begin{aligned} L_t = & \frac{\pi}{F_\pi e^3} \dot{\lambda}^2 \int_0^\infty x^4 dx (F')^2 \left\{ \frac{e^{-3\lambda}}{2} + e^{-\lambda} \frac{\sin^2 F}{x^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left(k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right) \right\} + \\ & + \frac{\pi}{2F_\pi e^3} \int_0^\infty x^2 dx \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left\{ \sin^2 F \left[\frac{e^{-3\lambda}}{4} + e^{-\lambda} ((F')^2 + \right. \right. \\ & + \left. \left. \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \otimes (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) (1 + \cos^2 T) + \right. \\ & + 2\bar{\omega}_3^2 \sin^2 T - 4k \bar{\omega}_3 \Omega_3 \sin^2 T + (T')^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \\ & + k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} [(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \cos^2 \theta + 2\Omega_3^2 \sin^2 \theta] \left. \right\} - \\ & - e^{-\lambda} \frac{\sin^4 F}{x^2} \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \{(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) \cos^2 T + 2\bar{\omega}_3^2 \sin^2 T\} + \right. \\ & + (T')^2 (\bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_2^2) - 4k^3 \bar{\omega}_3 \Omega_3 \frac{\sin^4 T}{\sin^2 \theta} + (T')^4 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \\ & \left. + k^4 \frac{\sin^4 T}{\sin^4 \theta} [(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \cos^2 \theta + 2\Omega_3^2 \sin^2 \theta] \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь $\bar{\omega}_i = (I^{-1})_{ij} \omega_j$ и $x = sF_\pi e$ — безразмерная координата. При вычислении интегралов по углу φ сферической системы координат необходимо было вычислять интегралы типа

$$\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & k \neq 1; \\ \pi, & k = 1. \end{cases} \quad (57)$$

Выражение (56) справедливо для конфигураций с $k \neq 1$. Далее будем рассматривать конфигурации с $k \neq 1$.

Разделяя область интегрирования по θ на интервалы, ограниченные точками разбиения θ_i , запишем часть лагранжиана, описывающую вращательные степени свободы, в виде

$$L^{\text{rot}} = \sum_{m=1}^l L_m^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^l [Q_s^m (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + Q_T^m (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) + Q^m (\bar{\omega}_3^2 - 2k_m \bar{\omega}_3 \Omega_3 + k_m^2 \Omega_3^2)]. \quad (58)$$

Моменты инерции Q_s^m , Q_T^m , Q^m определяются формулами

$$Q_T^m(\lambda) = \frac{\pi}{F_\pi e^3} \int_0^\infty x^2 dx \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} \sin \theta d\theta \left\{ -e^{-\lambda} \frac{\sin^4 F}{x^2} \left(k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cos^2 T + (T')^2 \right) + \sin^2 F \left[\frac{e^{-3\lambda}}{4} + e^{-\lambda} \left((F')^2 + \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right] (1 + \cos^2 T) \right\}; \quad (59)$$

$$Q_s^m(\lambda) = \frac{\pi}{F_\pi e^3} \int_0^\infty x^2 dx \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} \sin \theta d\theta \left\{ -e^{-\lambda} \frac{\sin^4 F}{x^2} \left[k^4 \frac{\sin^4 T}{\sin^4 \theta} \cos^2 \theta + (T')^4 \right] + \sin^2 F \left[\frac{e^{-3\lambda}}{4} + e^{-\lambda} \left((F')^2 + \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} \cos^2 \theta + (T')^2 \right) \right\}; \quad (60)$$

$$Q^m(\lambda) = \frac{2\pi}{F_\pi e^3} \int_0^\infty x^2 dx \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} \sin \theta d\theta \left\{ -e^{-\lambda} \frac{\sin^4 F}{x^2} k^2 \frac{\sin^4 T}{\sin^2 \theta} + \sin^2 F \left[\frac{e^{-3\lambda}}{4} + e^{-\lambda} \left((F')^2 + \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \frac{\sin^2 F}{x^2} \right) \right] \sin^2 T \right\}. \quad (61)$$

Формула (58), так же как и формулы (59)-(61), справедлива только для решений с $k \neq 1$.

Используя условие (42), получаем

$$L^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^l [Q_S^m (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + Q_T^m (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) + Q^m (\bar{\omega}_3^2 - 2k_m \bar{\omega}_3 \Omega_3 + k_m^2 \Omega_3^2)]. \quad (62)$$

Приведем импульсы, сопряженные коллективным переменным Ω_i и ω_i :

$$S_i^{\text{b.f}} = \sum_{m=1}^l Q_S^m(\lambda) \Omega_i \quad \text{для } i = 1, 2; \quad (63)$$

$$S_3^{\text{b.f}} = \sum_{m=1}^l k_m Q^m(\lambda) \{k_m \Omega_3 - \omega^3\};$$

$$T_i^{\text{b.f}} = \sum_{m=1}^l Q_T^m(\lambda) \bar{\omega}^i \quad \text{для } i = 1, 2; \quad (64)$$

$$T_3^{\text{b.f}} = \sum_{m=1}^l Q^m(\lambda) \{\bar{\omega}_3 - k_m \Omega_3\}.$$

Вычисляя гамильтониан согласно формулам

$$H = \omega^k \frac{\partial L}{\partial \omega^k} + \dot{\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - L, \quad (65)$$

требуя, чтобы сопряженные импульсы удовлетворяли каноническим коммутационным соотношениям, приходим к выражению

$$\hat{H} = M(\lambda) + \frac{P^2}{2m(\lambda)} + \frac{T^2}{2Q_T(\lambda)} + \frac{S^2}{2Q_S(\lambda)} + H_1, \quad (66)$$

где сопряженный λ импульс P определен каноническим образом:

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = m(\lambda)\dot{\lambda},$$

а для массы $m(\lambda)$ имеем

$$m(\lambda) = \frac{2\pi}{F_\pi e^3} \int_0^\infty (F')^2 \left\{ \frac{e^{-3\lambda}}{2} + e^{-\lambda} \frac{\sin^2 F}{x^2} \int_0^\pi \left[k^2 \frac{\sin^2 T}{\sin^2 \theta} + (T')^2 \right] \sin \theta \, d\theta \right\} x^4 dx. \quad (67)$$

Вращательные моменты инерции Q_T и Q_S представляются выражениями

$$Q_T(\lambda) = \sum_{m=1}^l Q_T^m(\lambda), \quad Q_S(\lambda) = \sum_{m=1}^l k_m^2 Q_S^m(\lambda). \quad (68)$$

Зависящая от внутренних квантовых переменных H_1 -часть лагранжиана равна

$$H_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{Q_1}{Q_1 Q_2 - Q_0^2} - \frac{1}{Q_T} \right] (\hat{T}_3^{\text{b.f.}}) + \frac{1}{2} \left[\frac{Q_1}{Q_1 Q_2 - Q_0^2} - \frac{1}{Q_S} \right] (\hat{S}_3^{\text{b.f.}}) + \frac{Q_0}{Q_1 Q_2 - Q_0^2} T_3^{\text{b.f.}} S_3^{\text{b.f.}} \text{ для нечетных } l \quad (69)$$

и

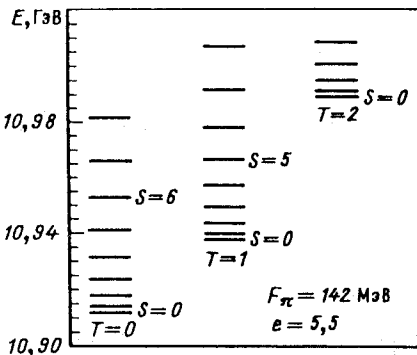
$$H_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_T} \right] (\hat{T}_3^{\text{b.f.}}) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_S} \right] (\hat{S}_3^{\text{b.f.}})^2 \text{ для четных } l. \quad (70)$$

Здесь

$$Q_1(\lambda) = \sum_{m=1}^l k_m^2 Q^m(\lambda), \quad Q_2(\lambda) = \sum_{m=1}^l Q^m(\lambda), \quad Q_3(\lambda) = \sum_{m=1}^l k_m Q^m(\lambda). \quad (71)$$

Следует обратить внимание на тот факт, что теперь третьи компоненты спина и изоспина в системе координат, связанной с телом в общем случае, не связаны между собой.

Результат расчета спектра квантовых состояний для ядра с $B = 12$ (^{12}C) с постоянными $F_\pi = 142$ МэВ и $e = 5,5$ представлен на рис.10.



Ротационная полоса с изоспином, на единицу большим изоспина основного состояния, внедряется в спектр на высоте порядка 40 МэВ.

Рис.10. Спектр квантовых состояний скирмионов с $B = 12$ (^{12}C)

5. СЖИМАЕМОСТЬ СКИРМИОННОЙ МАТЕРИИ

Особый интерес среди различных коллективных ядерных возбуждений вызывают возбуждения монополярной или «дыхательной» моды. Они интересны в связи с открытием гигантских резонансов коллективного типа в неупругом рассеянии электронов и адронов на ядрах. Можно отметить также, что такие возбуждения, вероятно, существенно влияют на одноуклонную структурную функцию ядер, которая определяет ЕМС-эффект [53].

Принято считать, что дыхательная мода соответствует осцилляциям плотности ядерной материи и характеризует ее сжимаемость. В [54] такая интерпретация предложена и для репер-резонанса. В такой версии радиус нуклонного мешка считается динамической переменной, а энергия репер-резонанса соответствует первому возбужденному состоянию квантового радиального движения поверхности. Энергия мешка как функция его радиуса R играет роль потенциальной энергии движения «вдоль» коллективной переменной R . В такой модели несколько большую трудность представляет определение оператора кинетической энергии в соответствующем уравнении Шредингера. Естественно предположить, что этот оператор пропорционален второй производной по радиусу R , действующей на волновую функцию. Последняя определяет амплитуду флуктуаций размера системы. Подобное уравнение может быть получено в приближении Хилла — Уййлера — Гриффина [55], а также вводилось Дираком [56] в теории электрона. Общей трудностью этих подходов является расчет эффективной массы, входящей в оператор кинетической энергии. Обычно эффективная масса — феноменологический параметр модели, который оценивается из эвристических соображений.

Недавно была предложена [51] интерпретация репер-резонанса как возбуждения дыхательной моды солитонов кирального поля в модели Скирма. Замечательным свойством этой модели является единство описания нуклонов и ядер как топологически нетривиальных солитонов. Динамическими переменными, в терминах которых описываются нуклоны и ядра, являются бозонные поля, удовлетворяющие уравнениям Эйлера — Лагранжа, соответствующим кирально-инвариантному лагранжиану. Топологически нетривиальные конфигурации этих полей интерпретируются как барионы. Конфигурации, топологически эквивалентные вакууму, соответствуют мезонам.

Эти рассуждения приводят к идее, что нуклонная дыхательная мода переходит в ядерную дыхательную моду.

Сформулируем нашу цель в более ясной форме, используя упрощенное рассмотрение дыхательной моды куска ядерной материи. Вообще говоря, нет единого определения несжимаемости K конечной системы с

массовым числом A . Несжимаемость может быть определена, например, как вторая производная от энергии, приходящейся на одну частицу, по радиусу R в точке равновесия R_0 :

$$K_A = R_0^2 \left. \frac{\partial^2(E/A)}{\partial R^2} \right|_{R_0}. \quad (72)$$

Чтобы оценить это выражение, однако, необходимо знать зависимость энергии E от радиуса R . С другой стороны, масштабное преобразование $r \rightarrow \lambda r$, примененное к одночастичной волновой функции основного состояния, приводит к так называемой «скейлинг-несжимаемости»

$$K_A = \left. \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1}. \quad (73)$$

Плотность кинетической энергии в окрестности точки r дается выражением

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \dot{R}^2, \quad (74)$$

если считать, что дыхательная мода сохраняет однородность системы. Тогда полная кинетическая энергия системы с плотностью распределения частиц

$$\rho(r) = \frac{3A}{4\pi R^3} \theta(R-r), \quad (75)$$

содержащей A частиц, равна

$$T = \int \rho(r) T(r) d^3r = \frac{1}{2} \dot{R}^2 \frac{3}{5} m_N A. \quad (76)$$

Последнее уравнение соответствует эффективной массе

$$m_{\text{eff}} = \frac{3}{5} m_N A. \quad (77)$$

Здесь m_N — масса нуклона. Именно величина (77) при $A = 1$ была принята как приближение к эффективной массе нуклонной дыхательной моды в [54].

Для энергии монополярных вибраций имеем

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{K}{m_{\text{eff}}}} = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{K_\infty}{(3/5) m_N}} = \frac{1}{r_0 A^{1/3}} \sqrt{\frac{K_\infty}{(3/5) m_N}}. \quad (78)$$

Для упрощения рассуждений можно опустить вклад вращений как вклад порядка $1/N_c$ в сравнении с членами порядка N_c для классической массы и N_c^0 (для вибрации). Ограничимся только скейлинг-преобразованием $U(r) \rightarrow U(re^{\lambda(t)})$ для поля U в лагранжиане Скирмы. Это преобразование не меняет барионный заряд, но отвечает изменению размера системы. Теперь упрощенный лагранжиан принимает форму [51,52]

$$L = \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-3\lambda} Q_2 + \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda} Q_4 - M_2 e^{-\lambda} - M_4 e^{\lambda}. \quad (79)$$

После канонического преобразования и процедуры квантования получаем квантовый гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2(Q_2 + Q_4)} + \frac{1}{2} \lambda^2 (M_2 + M_4) + M_2 + M_4. \quad (80)$$

Определение несжимаемости K солитона дает

$$K = M_2 + M_4 = M, \quad (81)$$

что равно массе солитона.

Частоты $\hbar\omega$ дыхательной моды в легких системах с барионным зарядом B даны в табл.6 [57] (в единицах eF_π).

Как следствие линейной зависимости массы классических солитонов от барионного заряда B мы можем легко определить несжимаемость солитона

$$K = M \cong M' B. \quad (82)$$

Из наших расчетов мы имеем $M' \cong M|_{B=1}$. Для ядерной несжимаемости, следуя определению (82), получаем

$$K_A = K/B = M' \cong M|_{B=1} = K_{B=1}. \quad (83)$$

Расчет дает для K_A значение 800 МэВ. Это находится в согласии с идеей, что ядерная несжимаемость порядка нуклонной, которая, в свою очередь, порядка нуклонной массы.

Таблица 6. Частоты $\hbar\omega$ дыхательной моды в легких системах

B	1	2	3	4	6	8	9	12
$\hbar\omega$	0,31	0,27	0,24	0,23	0,20	0,18	0,17	0,15

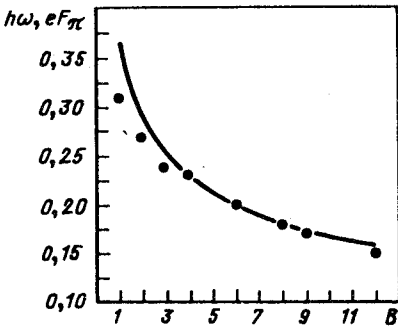


Рис. 11. Зависимость частот $\hbar\omega$ дыхательной моды солитона от его барионного заряда. Точками отмечен настоящий расчет. Сплошная линия — аппроксимация $B^{-1/3}$

Из нашего рассмотрения следует, что нуклонная дыхательная мода преобразуется в ядерную дыхательную моду. Другими словами, эти два явления имеют одну и ту же природу. Кажется, модель Скирма пока единственная модель, в которой реализуется эта идея.

Хотя полученные частоты следуют зависимости $\hbar\omega \sim B^{-1/3}$, они лежат существенно выше, чем энергия гигантских монополюсных резонансов, рассчитанных в традиционных подходах. Например, в методе гиперсферических функций [58] энергии ГМР лежат в районе от 20 до 35 МэВ для массовых чисел $4 \leq A \leq 16$.

В принципе в тяжелых ядрах должны существовать две 0^+ -вибрационные моды, так как, по крайней мере, два размерных параметра имеют отношение к данной задаче. Речь идет о радиусе ядра R и параметре диффузности b . Различны сжимаемости и, следовательно, частоты, соответствующие изменениям R и b во времени. Эти две моды, конечно, не ортогональны друг другу, но это не важно для нашего обсуждения.

В легких ядрах можно было бы также ожидать наличия жесткой и мягкой дыхательных мод. Однако именно в легких ядрах один из размерных параметров, на первый взгляд, теряет смысл. Но именно в легких ядрах неточность нуклонов становится важным обстоятельством. Мы опять имеем два размерных параметра — радиус ядра и размер нуклона, которые становятся сравнимыми в этой области массовых чисел.

Метод гиперсферических функций описывает, на наш взгляд, вибрации положений точечных нуклонов и охватывает, таким образом, только мягкую моду. Скейлинг-преобразование в модели Скирма изменяет не только положение нуклонов, но и их размер. Таким образом, модель Скирма описывает лежащую выше более жесткую моду, которая может быть проявлением нуклонного размера в легких ядрах.

Некоторые указания на существование узких 0^+ -резонансов в легких ядрах в области энергий около 45 МэВ получены в экспериментах по рассеянию нейтронов и дейтронов на ядрах гелия [59,60].

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Попробуем суммировать результаты, представленные в этом обзоре. В низкоэнергетической области квантовой хромодинамики эффективные киральные лагранжианы предлагают в распоряжение теоретиков «удобные» бесцветные степени свободы — бозонные поля для описания событий в физике сильных взаимодействий. Хотя применение киральных лагранжианов обычно ограничивается полуклассическим приближением, успех модели Скирма, достигнутый в последние несколько лет, в описании нуклонов как квантовых состояний киральных солитонов делает оправданным применение ее или ее обобщений в физике ядра.

Представляется актуальной разработка ядерной модели киральных солитонов, использующей аппарат и, что более важно, переменные, общие с используемыми в современной нелинейной полевой теории нуклонов.

Построение ядерной модели киральных солитонов актуально также в связи с действующими и планируемыми экспериментальными программами по исследованию структуры легких ядер, удаленных от дорожки β -стабильности. Модель Скирма подчеркивает уникальность структуры каждого отдельного ядра, в отличие от потенциальных моделей. В модели Скирма в новом свете обсуждаются такие проблемы, как существование ядерных компаунд-состояний, включающих антинуклоны в свою структуру, изомеров формы, а также высоколежащих 0^+ -вибраций в легких ядрах.

Актуальна и разработка вариационных подходов к решению возникающих нелинейных задач. Вариационный подход, вскрывая физику явлений, требует существенно меньше время на проведение численных расчетов, чем прямой поиск решений даже на суперкомпьютерах. Исключительность каждого отдельного состояния в модели киральных солитонов подчеркивается и сильной зависимостью эффективного квантового гамильтониана от топологического сектора. От барионного заряда зависят не только инерционные параметры эффективного гамильтониана, являющиеся функционалами решений в данном секторе, но и сам вид эффективного гамильтониана. Здесь уместно отметить и трудность с пересвязанностью состояний, с квантовыми числами легчайших ядер. Следует отметить также, что воспроизведение деталей электромагнитных форм-факторов, очевидно, требует работы с некоторыми обобщениями модели Скирма, включающими дополнительные скалярные (дилатонные) и калибровочные векторные поля скрытой симметрии, хотя уже модель Скирма качественно воспроизводит известные экспериментальные данные по таким «тонким» величинам, как тензор поляризации дейтронов в электрон-дейтронном рассеянии.

Нам представляется, что модель солитонов кирального поля будет полезным инструментом в будущей теории легких ядер, позволяя взглянуть на известные проблемы теории малочастичных систем под абсолютно новым углом зрения. Новая же постановка задач предполагает и новые решения.

Авторы выражают благодарность В.Б.Беляеву, М.К.Волкову, В.Н.Первушину, Л.Мюнхову, В.Вайзе, Г.Хольцварту, В.Плессасу за полезные обсуждения затронутых в обзоре вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skyrme T.H.R. — Nucl.Phys., 1962, vol.31, p.556—559.
2. Adkins G.S., Nappi C.R., Witten E. — Nucl.Phys., 1983, vol.B228, № 3, p.552—566.
3. Meissner U.G., Kaiser N., Weise W. — Nucl. Phys., 1987, vol.A466, № 3,4, p.685—723.
4. Braaten E., Tse S.M., Wilcox Ch. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.1482—1487.
5. Braaten E., Carson L. — Phys. Rev., 1989, vol.D38, № 11, p.3525—3539.
6. Кожвников И.Р., Рыбаков Ю.П., Фомин М.Б. — ТМФ, 1989, т.75, с.353—359.
7. Manton N.S. — Phys. Lett., 1987, vol.B192, p.177—179.
8. Verbaarschot J.J.M. — Phys. Lett., 1987, vol.B195, № 2, p.235—239.
9. Jakson A., Jakson A.D., Pasquier V. — Nucl. Phys., 1985, vol.432, № 3, p.567—609.
10. Vinh Mau R., Lacombe M., Loiseau V. et al. — Phys. Lett., 1985, vol.B150, № 4, p.259—264.
11. Nyman E.M., Riska D.O. — Preprint HU-TFT-88-2 Research Institute for Theoretical Physics, University of Helsinki.
12. Nyman E.M., Riska D.O. — Nucl. Phys., 1986, vol.A454, p.498.
13. Weigel H., Schwesinger B., Holzwarth G. — Phys. Lett., 1986, vol.B168, № 4, p.321—325.
14. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. — Contributed Paper from 12 International Conference on Few Body Problems in Physics. TRI-89-2, p.F25. Vancouver, 1989.
15. Дьяконов Д.И. — ЯФ, 1987, т.45, вып.6, с.1592—1594.
16. Копелиович В.Б., Штерн Б.Е. — Письма в ЖЭТФ, 1987, т.45, вып.4, с.165—168.
17. Braaten E., Townsend S., Carson L. — Phys. Lett., 1990, vol.B235, № 1,2, p.147—152.
18. Николаев В.А. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.2, с.401—439.
19. Николаев В.А., Ткачев О.Г. — Изв. АН СССР, 1990, т.54, № 9, с.1850—1858.
20. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. — JINR Preprint E4-89-56, Dubna, 1989.
21. Kurihara T., Kanada H., Otofujii T., Saito S. — Contributed Papers from 12 International Conference on Few Body Problems in Physics TRI-89-2, p.F31. Vancouver, 1989.
22. Kurihara T., Kanada H., Otofujii T., Saito S. — Progr. Theoret. Phys., 1989, vol.81, № 4, p.858—865.
23. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. — Compt. Rend. Acad. Bulg. Sciences, 1990, vol.43, № 6, p.41—48.
24. Николаев В.А., Ткачев О.Г. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, вып.6, с.1500—1538.
25. Slavnov A.A. — Nucl. Phys., 1971, vol.B31, p.301—315.
26. Aitchison I.J.R. — Acta Physica Polonica, 1987, vol.B18, p.191—206.
27. Volkov M.K., Ebert D. — Proc. of the IX Intern. Conf. on the Problems of Quantum Field Theory, Dubna, 1990, p.6—21.
28. Волков М.К. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.2, с.434—471.
29. Бельков А.А., Первушин В.Н., Эберт Д. — ЭЧАЯ, 1991, т.22, вып.1, с.5—62.
30. Kalinovsky Yu., Kaschlun L., Pervushin V. — Phys. Lett., 1989, vol.B231, p.288—292.

31. Карчев Н.И., Славнов А.А. — ТМФ, 1985, т.65, с.192—200.
32. Дьяконов Д., Эйдес М. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.358—360.
33. Андрианов А.А. и др. — ТМФ, 1987, т.70, с.63—75; Phys. Lett., 1987, vol.B186, p.401—404.
34. Balog J. — Phys. Lett., 1984, vol.B149, p.197—200.
35. Goldman T., Naymaker R.W. — Phys. Rev., 1981, vol.D24, p.724—742; Филиппов А.Т. — ЭЧАЯ, 1980, т.11, с.735—801.
36. Meissner Ulf.-G. — Phys. Rep., 1988, vol.161, p.213—362.
37. Praschifka J., Cahill R.T., Roberts C.D. — Intern. Journ. Mod. Phys., 1989, vol.A4, p.4939—4960.
38. Simic P. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.1903—1915.
39. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. — Proc. of the IX Intern. Conf. on Problem of Quantum Field Theory. Dubna, 1990, p.171—177.
40. Rybakov Y.P., Sanyuk V.J. — Preprint NBJ-HE-81-49, Copenhagen, 1981.
41. Nikolaev V.A., Tkachev O.G. — JINR Rapid Communication, № 4[37]-89, Dubna, 1989, p.18—23.
42. Николаев В.А., Ткачев О.Г. — Краткие сообщения ОИЯИ № 1[34]-89, Дубна, 1989, с.28—36.
43. Saito H., Okuhara Y. — Phys. Rev., 1986, vol.C34, p.2171—2179.
44. Hoshino T., Sagawa H., Arima A. — Nucl. Phys., 1990, vol.A506, p.271—292.
45. Chung H.S., Myers W.D. — Nucl. Phys., 1990, vol.A513, p.283—290.
46. Данилин Б.В. и др. — ЯФ, 1988, т.48, с.1208—1210.
47. Данилин Б.В. и др. — ЯФ, 1989, т.49, с.360—366.
48. Tanihata I. et al. — Phys. Rev., 1985, vol.55, p.2676.
49. Боголюбов Н.Н. — УМН, 1956, т.2, № 2, с.3—18.
50. Pauli W., Dancoff S.M. — Phys. Rev., 1942, vol.62, p.85—108.
51. Biedenharn L.C., Dothan Y., Tarlini M. — Phys. Rev., 1985, vol.D31, p.649—651.
52. Николаев В.А., Рока Э. — Краткие сообщения ОИЯИ № 1[4]-86, Дубна, 1986, с.28—32.
53. Antonov A.N., Kaptari L.P., Nikolaev V.A., Umnikov A.Yu. — JINR Rapid Communications, № 2[41]-90, Дубна, 1990, p.14.
54. Brown G.E., Durso I.W., Johnson M.B. — Nucl. Phys., 1983, vol.A397, p.447—468.
55. Griffin J.J., Wheeler J.A. — Phys. Rev., 1957, vol.108, p.311—327.
56. Dirac P.A.M. — Proc. Roy. Soc., 1962, vol.268, p.57—67.
57. Nikolaeva R.M., Nikolaev V.A., Shitikova K.V., Tkachev O.G. — JINR Preprint E4-90-375, Dubna, 1990.
58. Шитикова К.В. — ЭЧАЯ, 1985, т.16, с.824—874.
59. Филиппов Г.Ф., Василевский В.С., Бруно М. и др. — ЯФ, 1990, т.51, с.1551—1560.
60. Busse W., Efken B., Hilscher D. et al. — Nucl. Phys., 1972, vol.A187, p.21—24.