«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1992, ТОМ 23, ВЫП.5

УДК 530.12:531.51

ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В ТЕОРИЮ ГРАВИТАЦИИ

Н.А.Черников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящается двухсотлетней годовщине со дня рождения Лобачевского. Приведены краткие сведения о великом ученом и об открытии геометрии Лобачевского. Рассмотрено, какого рода перемена происходит от введения геометрии Лобачевского в небесную механику и в теорию гравитации.

The review is devoted to the 200th anniversary of the Lobachevsky birthday. The brief review is presented of the communications of the great scientists and of the discovery of the Lobachevsky geometry. The kind of changes which occur in the celestial mechanics and in the theory of gravity after introducing in it the Lobachevsky geometry is considered.

Первого декабря 1992 года исполняется 200 лет со дня рождения великого геометра, астронома, механика, физика-теоретика Н.И.Лобачевского. Ему принадлежит не только приоритет открытия новой геометрии, но и приоритет введения новой геометрии в астрономию, механику и теорию гравитации.

1. ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

Николай Иванович Лобачевский родился в Нижнем Новгороде 20 ноября (1 декабря) 1792 года. В 1802 г. он был зачислен в Казанскую гимназию. В 1805 г. на базе этой гимназии был открыт Императорский Казанский университет. Лобачевский был зачислен туда студентом по окончании гимназии в феврале 1807 г.

Вся деятельность Лобачевского была связана с Казанским университетом. В 1811 г. он был произведен в магистры, через три года — в адъюнкты. В 1816 г. Лобачевский стал профессором, а в 1827 г. избран ректором Казанского университета. На этот пост Лобачевский избирался шесть раз и занимал его девятнадцать лет подряд.

Выдающиеся заслуги Лобачевского в области университетского образования и на ниве народного просвещения были признаны его современниками. 12 января 1855 г. Императорский Московский университет праздновал свершившееся столетие своего существования, и в этот год советом университета единогласно избран и министром просвещения утвержден в звании почетного члена Московского университета действительный статский советник Николай Иванович Лобачевский [1, с.565].

Но главное в его жизни, неизмеримо большее этих заслуг, — открытие новой геометрии не было понято его современниками. Тем не менее именно этим открытием он достойно отозвался на патриотический призыв Ломоносова [2]:

Дерзайте ныне ободренны
Раченьем вашим показать,
Что может собственных Платонов
И быстрых разумом Невтонов
Российская земля рождать.

Открытие новой геометрии поставило имя Лобачевского в один ряд с именами Архимеда и Ньютона.

Свое первое сочинение по новой геометрии Лобачевский представил для опубликования на физико-математическое отделение Казанского университета 7(19) февраля 1826 г. Через пять дней по этому сочинению он сделал в университете доклад, оказавшийся непонятным для его коллег. Извлечение из этого доклада Лобачевский опубликовал в 1829—1830 гг. в «Казанском Вестнике, издаваемом при Императорском Казанском Университете» под названием «О началах геометрии». Теперь это извлечение нетрудно найти в полном собрании сочинений Лобачевского [3].

Столкнувшись с непониманием, Лобачевский согласился исполнять многотрудную должность ректора, которая давала ему возможность публиковать свои сочинения по собственному усмотрению. Это был шаг предусмотрительный: если бы всякого рода ответственные лица смогли задержать публикацию его трудов на три-четыре года, то Россией приоритет открытия новой геометрии был бы потерян.

Не нашлось никого, кто смог бы понять новую геометрию даже в Императорской Санкт-Петербургской Академии наук. Не удостоившись признания этой академии, Лобачевский стал, однако, членом другой академии, — заграничной: 11(23) ноября 1842 г., по инициативе Гаусса, Лобачевский был избран в члены-корреспонденты Геттингенского Королевского Общества наук.

Но это еще не означало общественного признания новой геометрии. Общественное признание геометрии Лобачевского пришло через двенадцать лет после физической смерти ее создателя.

Умер Н.И.Лобачевский в Казани 12(24) февраля 1856 г. Похоронен там же, на Арском кладбище.

Вот что сказал об открытии новой геометрии профессор Ф.М.Суворов на праздновании в 1893 г. Императорским Казанским университетом столетней годовщины со дня рождения Н.И.Лобачевского:

«В первый раз Николай Иванович сообщил свое новое учение в 1826 году, в заседании Физико-математического отделения нашего Университета, и с тех пор неустанно старался пропагандировать его. Кроме изложения своего учения на лекциях, пред аудиторией избранных студентов, он много раз печатал свои труды.

Я опасаюсь утомить ваше внимание, Мм. Гг., перечислением всех изданных сочинений Н.И.Лобачевского, но чтобы не обвинили его, что он недостаточно озаботился обнародованием своих новых исследований, я скажу только, что он свои исследования, разработанные с различных точек зрения, публиковал четыре раза на русском языке, два раза на французском и один раз на немецком языке. Но несмотря на все эти старания Лобачевского познакомить с новыми исследованиями современный ему ученый мир, этот последний не принял его нового учения, и даже его труды подвергались осмеянию; по преданию, о геометрических исследованиях Лобачевского говорилось, что гора мышь родила, иначе говоря, эти исследования современниками Лобачевского считались ничтожными пред тем научным авторитетом, которым пользовался Лобачевский за его труды по другим отраслям математики.

Насмешливые критические отзывы, очевидно, были крайне обидны для великого математика, вполне понимавшего значение своих исследований, что и видно из его примечания к одной из страниц его воображаемой геометрии. Других же статей, в которых бы критик высказал понимание нового учения, при жизни Н.И.Лобачевского не появлялось, — он умер в глубоком сознании, что его учение несправедливо осмеяно, и в неизвестности, скоро ли можно ожидать справедливую оценку его трудов» [4, с.81—82].

2. СТАРАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Как наука геометрия сложилась в глубокой древности. Причины ее формирования лежат в многосторонней человеческой деятельности. Во все времена работа приводила людей к знакомству с замечательными объемными телами и плоскими фигурами, к необходимости систематического наблюдения за движением небесных тел, совершенствования землемерных работ и астрономических измерений, изображения фигур и тел. В конечном же счете геометрия возникла благодаря пытливости человеческого ума, благодаря присущему человеку стремлению к духовному совершенству.

Результаты работ по геометрии ученых Древнего Мира подытожил Евклид в своем сочинении «Начала». Евклид (330—275 гг. до н.э.) жил и работал в Александрии. На протяжении долгих веков его «Начала» являлись образцом математической строгости. Лучшие учебники геометрии были написаны по образцу евклидовых «Начал». Поэтому старую геометрию называют геометрией Евклида (именно ее мы изучаем в средней школе).

В основу геометрии Евклид положил ряд постулатов. В этом ряду особым является пятый постулат, называемый постулатом Евклида о параллельных прямых линиях. Так называл Евклид две прямые линии, хотя и лежащие в одной плоскости, но одна другую не пересекающие [5, с.14]. Учение о параллельных прямых является самым трудным местом в геометрии Евклида.

Пятый постулат называют также одиннадцатой аксиомой Евклида или просто евклидовым постулатом. Следующие три постулата преподаются в средней школе:

1. Между двумя точками можно провести лишь одну прямую.
2. Прямая линия есть кратчайший путь между двумя точками.
3. Через данную точку на плоскости можно провести лишь одну прямую, не пересекающую данную.

Последний постулат эквивалентен пятому постулату Евклида.

Известно много других предложений, эквивалентных евклидову постулату. Вот, например: «Наклонная и перпендикуляр к одной и той же прямой линии, по достаточном их продолжении, всегда пересекутся» [6]. Эта формулировка взята из книги выдающегося математика В.Я.Буняковского (1804—1889). По этой книге можно судить о состоянии геометрии Евклида непосредственно перед открытием геометрии Лобачевского (поскольку книга [6] является библиографической редкостью, начало ее приведено в Приложении).

В геометрии Евклида выделяется часть, состоящая из предложений, для доказательства которых нет нужды опираться на евклидов постулат. Такие предложения сам Евклид излагал в первую очередь. К их числу относится, например, теорема о том, что две прямые не пересекаются, если они перпендикулярны к некоторой третьей прямой. Эту часть называют абсолютной геометрией. Она целиком переносится в геометрию Лобачевского.

Не входящие в абсолютную часть предложения евклидовой геометрии так или иначе опираются на пятый постулат. Все такие предложения были доказаны условно, в предположении, что верен пятый постулат. Оставалось только доказать сам пятый постулат. Тысячи лет математики пытались это сделать, но не добились успеха. Как сказал Анри Пуанкаре (1854—1912): «Долгое время тщетно искали доказательства аксиомы, известной под именем *постулата Евклида.* Сколько было потрачено сил в этой химерической надежде, положительно не поддается описанию. Наконец в начале прошлого столетия и почти одновременно двое ученых, русский — Лобачевский и венгерский — Больаи установили неопровержимо, что это доказательство невозможно; этим они почти совсем избавили нас от изобретателей Геометрии без постулата Евклида; с тех пор парижская Академия Наук получает не более одного, двух новых доказательств в год» [7, с.46].

Установить невозможность доказательства *постулата Евклида* можно было, только открыв новую, неевклидову геометрию. Первым это сделал Н.И.Лобачевский. Независимо открыл новую геометрию замечательный венгерский математик, военный инженер Янош Бойяи (1802—1860). Свое оригинальное исследование [8] проблемы параллельных он опубликовал в 1832 г. в виде приложения к первому тому большого курса математики, написанного и изданного его отцом Фаркашем Бойяи (1775—1856). Поэтому исследование Я.Бойяи вошло в историю науки под названием «Аппендикс». Первый оттиск «Аппендикса» вышел из печати в 1831 г. В «Аппендиксе» содержится элементарное изложение начал новой геометрии. Это сочинение Я.Бойяи написал на латинском языке, в стиле, напоминающем современную программу для ЭВМ. Для сравнения заметим, что сочинения по геометрии Лобачевский написал в стиле, напоминающем современные работы по теоретической физике. Как видно из полного названия [8], термин «абсолютная геометрия» предложен Бойяи.

Об открытии Лобачевского Я.Бойяи узнал через шестнадцать лет после выхода в свет «Аппендикса». Об открытии Я.Бойяи Лобачевскому не довелось узнать никогда.

Равным образом Лобачевский никогда не узнал об открытии новой геометрии К.Ф.Гауссом. К идее о новой геометрии Гаусс (1777—1855) пришел в конце XVIII века, однако ученый мир узнал об этом лишь после его смерти.

Титаническая работа многих поколений над проблемой параллельных не была такой уж бесплодной, как это казалось тогда. Видимо, к началу XIX века она подходила к концу, но понять это мог только гений.

3. ОТКРЫТИЕ ЛОБАЧЕВСКИМ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Работы Лобачевского по систематическому изложению геометрии начались задолго до 1826 г. По-видимому, проблемой параллельных он занимался с юных лет. В 1823 г. он представил в Казанский университет, для напечатания на казенный счет, написанный им учебник геометрии для студентов. Эта рукопись называлась «Геометрия». Коллеги Лобачевского не дали положительной оценки, и рукопись была направлена на рассмотрение попечителю Казанского учебного округа М.Л.Магницкому. Последний препроводил представленную рукопись академику Н.И.Фуссу (1755—1826) с просьбой дать на нее отзыв. Фусс дал резко отрицательный отзыв, и «Геометрию» Лабочевского не напечатали.

По-видимому, отсюда Лобачевский извлек урок. Если бы ректором был я, как теперь говорят в газетной литературе, то «Геометрию» я смог бы опубликовать, невзирая на лица. Чего доброго, они загубят и погребут не только рукопись «Геометрии», но и новую науку, которая без всяких кавычек так и должна называться: Геометрия Лобачевского. Эту мысль, между прочим, можно прочитать в следующем отрывке из программной «Речи о важнейших проблемах воспитания», которую молодой ректор произнес на торжественном собрании Казанского университета 5 июля 1828 г.: «Вот уже год прошел, любезные мои товарищи, как по избранию вашему, несу я на себе должность, которой почести, важность и трудности служат доказательствами лестной вашей ко мне доверенности. Не смею жаловаться на то, что вы захотели отозвать меня от любимых мною занятий, которым долгое время предавался я по склонности. Вы наложили на меня новые труды и чуждые до того мне заботы; но я не смею роптать, потому что вы предоставили мне и новые средства быть полезным. Я принял ваш вызов, потому что уважал вашим мнением; потому что не хотел противиться общему желанию; потому что сам первый не мог оправдать того, кто на моем месте вздумал бы отказаться. Наконец, выбор ваш утвержден был государем императором, и обязанности нового звания сделались для меня священными» [9, с.16].

Долгое время рукопись «Геометрии» Лобачевского считалась утраченной, но в 1898 г. профессор Н.П.Загоскин открыл ее среди старых дел архива попечительской канцелярии. Благодаря этому рукопись опубликована впервые в 1909 г. [10], затем в 1911 [11], еще раз в 1949 [12], а затем — в 1956 г. [13].

Уже в этом сочинении Лобачевский сильно сомневался в возможности доказать евклидов постулат, который не называл, впрочем, ни постулатом, ни аксиомой: «Измерение плоскостей* основывается на том, что

*То есть площадей плоских фигур. (Прим. ред.) [12, с.70].

две линии сходятся, когда они стоят на третьей по одну сторону и когда одна перпендикулярна, а другая наклонена под острым углом, обращенным к перпендикуляру... Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле Математическими доказательствами».

Более того, он заметил: «Некоторые Математики невозможность определения линий помощию углов хотели принять за основание геометрии, но такое основание недостаточно, потому что разнородные количие* могут быть в зависимости друг от друга».

Значит, уже тогда Лобачевский допускал, что такие разнородные величины, как углы и линии, могут быть в зависимости друг от друга, а это прямо противоречит евклидову постулату (см. Приложение, предложения $3c$ и $3d$, эквивалентные евклидову постулату).

Ко времени написания обсуждаемого сочинения относятся воспоминания Лобачевского, с которых он начинает сочинение [14]: «Всем известно, что в Геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставили меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, Астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки будучи наконец убежден, и почитая затруднительный вопрос решенным вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 году**. Применение новой теории к аналитике находится также в статьях под названием «О началах Геометрии», помещенных в Казанском Вестнике за 1829 и 1830 годы. Главное заключение, к которому пришел я с предположением зависимости линий от углов, допускает существование Геометрии более в обширном смысле, нежели как ее представил нам первый Евклид. В этом пространном виде дал я науке название *Воображаемой Геометрии*, где как частный случай входит *Употребительная Геометрия...*»

К началу 1826 г. решительный шаг был сделан: Лобачевский установил, что в новой геометрии через данную точку на плоскости можно провести не только одну, но бесконечно много прямых, не пересекающих

*Термин «количое» Лобачевский употребляет в том значении, в котором в настоящее время обыкновенно употребляется термин «величина». (Прим. ред.) [12, с.69].

Exposition succinte des princpes de la Géometrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*, читано в заседании Физико-математического Отделения при Казанском Университете 12 февраля 1826 года, но не было нигде напечатано. (Примечание Лобачевского) [14, с.147].

***То есть «Краткое изложение принципов геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». (Прим. ред.) [14, с.455].

данную. В семействе таких прямых имеется пара граничных, называемых прямыми, параллельными данной. Если из начала прямолинейного луча на параллельную ему прямую опустить перпендикуляр, то угол П, образованный лучом и перпендикуляром, в планиметрии Евклида, как известно, равен $\pi/2$. В планиметрии же Лобачевского он меньше $\pi/2$ и зависит от высоты p, с которой опущен перпендикуляр. В эту зависимость входит характерная длина k. Она называется постоянной Лобачевского. Зависимость $\Pi=\Pi(p/k)$ Лобачевский назвал углом параллельности и доказал, что

$$tg\,\frac{1}{2}\,\Pi(x) = e^{-x}. \tag{1}$$

Ключом к доказательству этой формулы явилась внутренняя геометрия орисферы. Так Лобачевский назвал поверхность, ортогональную к связке параллельных прямых, и доказал, что внутренняя геометрия орисферы совпадает с планиметрией Евклида. Здесь стоит поставить восклицательный знак: отбросив пятый постулат Евклида для плоскости, Лобачевский доказал его для орисферы!

Константа k входит во все формулы геометрии Лобачевского в той ее части, где она отличается от геометрии Евклида. Наряду с приведенной выше формулой для зависимости угла параллельности от высоты падения перпендикуляра, рассмотрим формулу для площади треугольника. Как известно, в планиметрии Евклида сумма углов A, B, C всякого треугольника равна π. В геометрии Лобачевского такая сумма меньше, чем π, а площадь треугольника равна

$$F = k^2\,(\pi - A - B - C). \tag{2}$$

Для проверки этой формулы Лобачевский брал наибольшие из доступных ему треугольников, основанием которых служил бы диаметр земной орбиты, а противоположной вершиной была бы «неподвижная» звезда.

Лобачевский создал новую, гиперболическую тригонометрию. Он вывел следующие четыре формулы для произвольного треугольника (в которых a, b, c — стороны треугольника, противоположные его углам A, B, C):

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos C,$$

$$\operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin A = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\sin B,$$

$$\operatorname{ctg} A\sin C + \operatorname{ch}\frac{b}{k}\cos C = \operatorname{cth}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k},$$

$$\cos C + \cos A\cos B = \sin A\sin B\operatorname{ch}\frac{c}{k},$$

и следующие шесть формул для прямоугольного треугольника (в котором $C = \pi/2$):

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}, \qquad \operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos A,$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin A, \qquad \cos A = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin B,$$

$$\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg} A, \qquad \operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B = 1.$$

На основе этих формул можно решить любую тригонометрическую задачу в геометрии Лобачевского.

На базе гиперболической тригонометрии Лобачевский развил аналитическую и дифференциальную геометрию пространства, ранее неведомого.

Различие между геометрическими теориями Лобачевского и Евклида целесообразно поначалу рассмотреть на примере сферы какого-нибудь радиуса ρ. Согласно третьему постулату Евклида: «Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг» [5, с.14]. Это значит, что не в одной только геометрии Евклида, но и в геометрии Лобачевского радиус ρ может принимать всякие значения от нуля до бесконечности. Лобачевский доказал, что внутренняя геометрия сферы не зависит от пятого постулата Евклида. Поэтому как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского мы можем начертить на сфере «параллели» и «меридианы» и ввести полярные координаты θ и φ. Для этого обозначим $2\pi r$ длину «экватора». Расстояние, пройденное по меридиану от «северного полюса» до точки (θ, φ), лежащей на сфере, положим равным θr, а расстояние, пройденное по параллели $\theta = \text{const}$ от нулевого меридиана до этой же точки, положим равным $\varphi r \sin\theta$. Обыкновенным путем получается метрическая форма

$$r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{3}$$

сферы и элемент площади

$$r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{4}$$

на сфере. Площадь же всей сферы равна $4\pi r^2$.

Различие между двумя геометрическими теориями проявляется в конкретном виде зависимости r от ρ: в теории Евклида $r = \rho$, а в теории Лобачевского

$$r = k\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}. \tag{5}$$

При $k \to \infty$ геометрия Лобачевского переходит в геометрию Евклида. Если же $k < \infty$, то в шаре радиуса ρ можно пользоваться геометрией Евклида, коль скоро отношение ρ/k мало.

В обеих геометрических теориях радиус перпендикулярен к сфере. Поэтому метрическая форма пространства в обеих теориях имеет вид

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{6}$$

Элемент объема равен

$$dV = r^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \tag{7}$$

В экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ метрическая форма

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2\, d\varphi^2, \tag{8}$$

а элемент площади

$$d\Sigma = r\, d\rho\, d\varphi. \tag{9}$$

4. ОТНОШЕНИЕ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ

19 августа 1832 г. по инициативе Лобачевского совет Казанского университета направил экземпляр его сочинения «О началах геометрии» в Императорскую Санкт-Петербургскую Академию наук. В свою очередь, 5 сентября того же года Академия передала это сочинение на рассмотрение академику М.В.Остроградскому (1801—1861). Последний 7 ноября 1832 г. ответил, что сочинение не заслуживает внимания Академии [15].

Ответ Остроградского вызвал восторженный крик «беотийцев» (выражение Гаусса: «беотийцы» — это невежественные, злобные и воинственные люди). Беотийцы бросились в бой: в 1834 г. в № 41 журнала «Сын Отечества» была напечатана весьма оскорбительная и совершенно несправедливая критика [16] на то же сочинение. Так вот и получилось, что эти «старатели» предложили вниманию своих читателей то, что, по их же собственному мнению, не заслуживает внимания Академии. Лобачевский послал издателю журнала ответ, но беотийцы любят кричать и не любят слушать. Ответ Лобачевского в «Сыне Отечества» не был напечатан.

В 1835 г. Лобачевский поместил свой ответ на эту критику в «Ученых записках Казанского университета» в сочинении «Воображаемая Геометрия». В этом же сочинении Лобачевский дал достойный ответ Остроградскому. Теперь это сочинение опубликовано в [17].

Однако Остроградский остался при своем мнении, что видно из его рапорта Первому Отделению Императорской Академии наук, поданного 10 июня 1842 г. [18], незадолго до избрания Лобачевского в Геттингенское Королевское Общество наук: «Академия поручила мне рассмотреть мемуар о сходимости рядов и дать о нем отчет. Автор этого мемуара, г-н Лобачевский, ректор Казанского университета, уже известен, по правде говоря, с довольно невыгодной стороны, новой геометрией, которую он называет воображаемой, достаточно объемистым трактатом об алгебре и несколькими диссертациями о различных вопросах математического анализа. Мемуар, представленный моему рассмотрению, не содействует изменению репутации автора...».

Надо думать, отзыв Остроградского помог тому, что геометрия Лобачевского в свое время не была понята Петербургской Академией. Как заметил в 1893 г. профессор А.В.Васильев на праздновании Казанским университетом столетней годовщины со дня рождения Н.И.Лобачевского, даже академик В.Я.Буняковский в своем сочинении «Параллельные линии», напечатанном в 1853 г., не упоминает об исследованиях Лобачевского [4, с.133]. После этого не приходится удивляться тому, как известный революционный демократ Д.И.Писарев (1840—1868) наставлял учителей математики [19]: «Математики могут быть превосходными преподавателями, вовсе не заботясь о тех мелких математических мемуарах, которые представляются каждый год трудолюбивыми учеными в различные европейские академии. Можно сказать наверное, что время великих открытий и радикальных переворотов окончательно миновало для математиков, что теперешнее положение этой науки в существенных чертах своих остается непоколебимо твердым на вечные времена, что мелкие мемуары современных геометров не разрушат в этой науке ничего старого и не построят в ней ничего нового и что вследствие всех этих обстоятельств добросовестный учитель математики ни в каком случае не рискует оказаться отсталым по предмету своей специальности».

В обстановке непонимания Лобачевскому оставалось утешаться признанием заслуг в области преподавания.

Если бы академик Н.Фусс благосклонно отнесся к представленной ему на отзыв попечителем М.Магницким рукописи, то последняя, конечно, была бы напечатана. В таком случае академик М.Остроградский, прочитав «Геометрию», возможно, разобрался бы в сочинении «О началах Геометрии» и написал положительный отзыв. В свою очередь, это привлекло бы к геометрии Лобачевского пристальное внимание академика В.Буняковского. Признание же двух выдающихся академиков (в том числе будущего вице-президента Императорской Санкт-Петербургской Академии наук, каковым с 1864 г. по 1889 г. являлся академик В.Буняковский), несомненно, обеспечило бы избрание Лобачевского в Академию. Однако такой цепочки событий не образовалось и получилось так, что самый заслуженный ученый России не стал российским академиком. Между тем, чтобы читать сочинения Лобачевского в подлиннике, Гаусс старался преодолеть языковой барьер. Ни Остроградскому, ни Буняковскому в данном случае преодолевать барьер не требовалось.

Бесспорно, среди современников Лобачевского Гаусс был самым авторитетным математиком. Рассчитывая на его понимание и поддержку, Лобачевский в 1840 г. опубликовал свое сочинение «Геометрические исследования по теории параллельных линий» на немецком языке [20]. Гаусс настолько высоко оценил эти исследования, что стал изучать русский язык, чтобы читать сочинения Лобачевского, опубликованные на русском языке. Этим объясняется выдвижение Гауссом кандидатуры Лобачевского в Геттингенское Общество.

Теперь сочинение [20] в переводе на русский язык можно найти в полном собрании сочинений [21]. Впервые на русский язык оно было переведено профессором А.В.Летниковым и опубликовано им в 1868 г. [22].

5. ОТРЫВКИ ИЗ ПИСЕМ ГАУССА

Отрывки из писем Гаусса, относящиеся к открытию неевклидовой геометрии, имеют непреходящий интерес. Они были опубликованы после смерти Гаусса. В переводе на русский язык их начал публиковать А.В.Летников [23] в 1868 г. вместе с сочинением Лобачевского [22].

В письме [24] к Герлингу Гаусс сообщает: «Как легко доказать, если евклидова геометрия не есть истинная геометрия, то подобных фигур вовсе не существует; в равностороннем треугольнике угол меняется вместе с величиной стороны, в чем я ничего абсурдного не нахожу. Угол представляет собой в этом случае функцию от стороны, а сторона — функцию от угла, однако, естественно, такую функцию, в состав которой еще входит постоянная линия. Кажется парадоксальным, что возможна прямая линия, как бы заданная a priori; но я не нахожу в этом ничего противоречивого. Было бы даже желательно, чтобы геометрия Евклида не была истинной, потому что мы тогда располагали бы общей мерой a priori» (11 апреля 1816 г.).

В начале 1819 г. Герлинг прислал Гауссу письмо [25], в котором писал: «В прошлом году я узнал, что мой коллега Швейкарт (профессор юриспруденции, а теперь проректор) давно занимается математикой и писал о параллельных линиях... он не перестал заниматься этим предметом и теперь почти убежден, что положение Евклида не может быть доказано без каких-либо дополнительных данных и что ему не представляется невероятным, что наша геометрия является только главой другой, более общей...»

В этом же письме Герлинг изложил просьбу Швейкарта к Гауссу сообщить его мнение о прилагаемой заметке. Фердинанд Карл Швейкарт (1780—1859) в этой заметке утверждает: «Существует двоякая геометрия: геометрия в узком смысле слова — евклидова — и звездное (астральное) учение о величинах.

Треугольники последней геометрии имеют ту особенность, что сумма трех углов не равна двум прямым.

Принимая это, можно строжайшим образом доказать следующее:

а) что сумма трех углов в треугольнике меньше двух прямых;

б) что сумма эта тем меньше, чем больше площадь треугольника;

в) что высота прямоугольного равнобедренного треугольника, постоянно возрастая с возрастанием боковых сторон, не может превзойти некоторую линию, которую я называю константой».

На это в письме [26] к Герлингу Гаусс ответил: «... Заметка г-на проф.Швейкарта доставила мне необыкновенно много удовольствия, и я прошу высказать ему от меня по этому поводу как можно больше хорошего. Почти все это списано из моей души ... Будьте любезны сообщить это г.Швейкарту» (16 марта 1819 г.).

Теперь Гаусс убеждается в необходимости продолжать разработку неевклидовой геометрии и начинает записывать результаты на эту тему. Сам термин «неевклидова геометрия» предложен Гауссом. Впервые этот термин встречается в его письме [27] к Тауринусу: «... Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей (евклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя совершенно удовлетворительно; я имею возможность решить в этой геометрии любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой a priori установлено быть не может. Чем большее значение мы придадим этой постоянной, тем ближе мы подойдем к евклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приводит обе системы к совпадению. Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными; но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы велики ни были его стороны... Если бы неевклидова геометрия была истинна и упомянутая выше постоянная находилась бы в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить a posteriori.

Я поэтому иногда в шутку высказывал желание, чтобы евклидова геометрия не была истинной, потому что мы тогда имели бы a priori абсолютную меру длины ...» (8 ноября 1824 г.).

Как видно, предложенный Гауссом термин «неевклидова геометрия» означает «абсолютная геометрия + отрицание пятого постулата Евклида», а не просто не евклидова геометрия. Как заметили остроумные люди, не евклидовых геометрий много (сферическая, аффинная, проективная, риманова, псевдоевклидова, полуевклидова и т.п.), а неевклидова геометрия (так же, как и евклидова) одна. Встречающийся в книгах термин «неевклидовы геометрии» (см., например, [28]) принадлежит не Гауссу, а авторам этих книг.

В письме [29] к Шумахеру Гаусс сообщает: «В неевклидовой геометрии в фигурах никогда не бывает подобия без равенства. Например, углы равностороннего треугольника не только различны от 2/3 прямого угла, но притом они могут изменяться с величиною сторон, и если стороны возрастают беспредельно, то они могут сделаться сколь угодно малыми. Тут, следовательно, будет противоречие уже в самом желании начертить такой треугольник по подобию посредством треугольника меньшего...

В неевклидовой геометрии полуокружность круга радиуса r имеет величину

$$\frac{1}{2}\pi k\,(e^{r/k} - e^{-r/k}),$$

где k есть постоянное, которое нам опыт указывает чрезвычайно большим по отношению ко всему, что может быть нами измеряемо. В евклидовой геометрии это постоянное делается бесконечностью» (12 июля 1831 г.).

Вскоре после этого Гаусс узнает об «Аппендиксе» Яноша Бойяи. В юности Гаусс и Фаркаш Бойяи (отец Яноша) были друзьями. Оба они занимались основаниями геометрии и делились в то время соображениями по поводу евклидова постулата. Естественно, что отец и сын Бойяи послали Гауссу один из первых экземпляров «Аппендикса». Вот какой отзыв об «Аппендиксе» и его авторе дал Гаусс в письме [30] к Герлингу: «... На днях я получил из Венгрии небольшую брошюру о неевклидовой геометрии, в которой я нахожу все мои собственные идеи и результаты, которые изложены с большим изяществом, хотя и в такой форме, которая, вследствие своей концентрации, не без труда будет воспринята всяким, кому чужд предмет. Автор — очень юный австрийский офицер, сын друга моей юности, с которым я в 1798 году часто говорил об этом предмете, хотя в то время мои идеи были значительно дальше от того развития и зрелости, которое они получили в результате собственных размышлений этого молодого человека. Я считаю этого молодого геометра фон Больаи гением первой величины...» (14 февраля 1832 г.).

Не столь восторженно в письме [31] ответил Гаусс своему старому другу: «... Теперь кое-что о работе твоего сына.

Если я начну с того, *что я эту работу не должен хвалить*, то ты, конечно, на мгновение поразишься, но иначе не могу; хвалить ее значило бы хвалить самого себя: все содержание сочинения, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собственными достижениями, которые частично имеют уже давность в 30—35 лет. Я, действительно, этим в высшей степени поражен. Моим намерением было при жизни ничего не публиковать о моей собственной работе, которая, впрочем, до настоящего времени очень мало нанесена на бумагу. Большинство людей не имеет правильных воззрений на те вопросы, о которых здесь идет речь; я нашел только немногих людей, которые с особым интересом отнеслись к тому, что я им сообщал по этому предмету. Чтобы быть в состоянии это усвоить, нужно, прежде всего, весьма живо прочувствовать то, чего здесь собственно не хватает; а это большинству людей совершенно неясно. Однако я имел намерение со временем изложить все это на бумаге в такой форме, чтобы эти идеи по крайней мере не погибли вместе со мной.

Таким образом, я чрезвычайно поражен, что эта работа с меня снимается, и я в высшей степени рад, что именно сын моего старого друга меня предупредил таким замечательным образом» (6 марта 1832 г.).

Через восемь лет Гаусс узнает о Лобачевском. В письме [32] к Энке он пишет: «...Я начинаю довольно успешно читать по-русски и нахожу в этом большое удовольствие. Г.Кнорре прислал мне небольшой мемуар Лобачевского (в Казани), написанный по-русски, и как этот мемуар, так и небольшая книжка о параллельных линиях на немецком языке (о ней появилась весьма нелепая заметка в «Repertorium» Герсдорфа) возбудили во мне желание узнать больше об этом остроумном математике. Как мне сказал Кнорре, в напечатанных на русском языке «Записках Казанского университета» имеется много его работ» (1 февраля 1841 г.).

Это сочинение Лобачевского Гаусс перечитывал многократно. Пять лет спустя в письме [33] к Шумахеру он сообщает: «... В последнее время я имел повод вновь прочитать небольшое сочинение Лобачевского («Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien», Berlin, 1840, у G.Fincke, 4 печатных листа). Это сочинение содержит в себе основания той геометрии, которая должна была бы иметь место и притом составляла бы строго последовательное целое, если бы евклидова геометрия не была истинной. Некто Швейкарт* дал этой геометрии название

*Прежде в Марбурге, теперь профессор юриспруденции в Кенигсберге (Прим. Гаусса.) (28 ноября 1846 г.)

«Astralgeometrie». Лобачевский называет ее «воображаемой геометрией»; Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашел для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шел я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение...» (28 ноября 1846 г.).

В письме [34] Гаусс рекомендует это сочинение Лобачевского и Фаркашу Бойяи: «Работы русского геометра напечатаны большей частью в русских «Записках Казанского университета». Я думаю, однако, что тебе легче будет достать маленькое превосходное сочинение: «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» von Nicolaus Lobatschewsky, Berlin, 1840, в издательстве Финке...» (20 апреля 1848 г.).

Из этого письма об открытии Лобачевского узнал и Янош Бойяи. К цитированному в нем сочинению он составил замечания, которые были опубликованы, однако, лишь в 1902 г. Если бы свои замечания он направил непосредственно Лобачевскому, то, надо думать, состоялась бы интереснейшая переписка.

Что до Гаусса, то он ни о работе Я.Бойяи, ни о своих собственных идеях ничего Лобачевскому не сообщил. Вообще Гаусс считал, что общественное мнение не готово было к восприятию столь новых идей. Поэтому он не опубликовал своих исследований по неевклидовой геометрии, не дал рекомендации опубликовать заметку Швейкарта и не отозвался публично ни о работе Бойяи, ни о работах Лобачевского. Более того, он не только считал общественное мнение неподготовленным, но и предвидел дурную реакцию на столь уж неожиданные идеи.

Так, в письме [35] к Герлингу от предупреждал: «... Я радуюсь, что Вы имеете мужество высказываться так, как если бы Вы признавали ложность нашей теории параллельных, а вместе с тем и всей нашей геометрии. Но осы, гнездо которых Вы потревожите, полетят Вам на голову...» (25 августа 1818 г.).

А в письме [36] к Бесселю он признавался: «... Еще об одной теме, которая имеет у меня уже 40-летнюю давность, я имею в виду основания геометрии... . Между тем я еще долго не приду к тому, чтобы обработать для опубликования мои весьма обширные исследования по этому вопросу, и, может быть, этого никогда не произойдет в моей жизни, так как я опасаюсь крика беотийцев, если я выскажу мои воззрения целиком» (29 января 1829 г.)

И крик беотийцев, как мы знаем, действительно раздался, так что Гаусс мог убедиться в своей прозорливости. Правда, он не предвидел, что случится это в Петербурге. В письме [37] к Герлингу Гаусс сообщает: «Статья Лобачевского в журнале Крелля помещена в т.17, стр.295 и след. Я нахожу, что она представляет собою только свободный перевод русской статьи «Воображаемой Геометрии», помещенной в «Ученых записках Казанского университета» за 1835 год... Что касается предшествующей статьи... , то это, по-видимому, та же статья, которая упомянута в русском тексте под заголовком «О началах геометрии»; она помещена в «Казанском вестнике» за 1829—1830 гг. К этому сделано указание, что очень резкая критика этой работы помещена в № 41 другого русского журнала, «Сын Отечества», за 1834 год, который, по-видимому, издается в Петербурге; Лобачевский послал возражение против этой критики, которое, однако, до начала 1835 года не было напечатано...» (5 февраля 1844 г.).

6. ОБЩЕСТВЕННОЕ ПРИЗНАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Посмертная публикация переписки Гаусса с его коллегами и учениками привлекла к неевклидовой геометрии серьезное внимание ученого мира. В России первым публичным признанием геометрии Лобачевского явилась публикация [38] А.В.Летникова.

О необыкновенном впечатлении, которое произвело тогда открытие Лобачевского, свидетельствует следующий отрывок из романа «Братья Карамазовы». Вот что сказал Иван Карамазов младшему брату: «Если Бог есть и если Он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал Он ее по евклидовой геометрии, а ум человеческий с понятием лишь о трех измерениях пространства. Между тем находились и находятся даже и теперь геометры и философы, и даже из замечательнейших, которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная или, еще обширнее — все бытие было создано лишь по евклидовой геометрии, осмеливаются даже мечтать, что две параллельные линии, которые по Евклиду ни за что не могут сойтись на земле, может быть и сошлись бы где-нибудь в бесконечности. Я, голубчик, решил так, что если я даже этого не могу понять, то где ж мне про Бога понять. Я смиренно сознаюсь, что у меня нет никаких способностей разрешать такие вопросы, у меня ум евклидовский, земной, а потому, где нам решать о том, что не от мира сего... Пусть даже параллельные линии сойдутся и я это сам увижу: увижу и скажу, что сошлись, а все-таки не приму. Вот моя суть, Алеша, вот мой тезис» [39, с.294—296].

Так, первым в художественной литературе (не только русской, но и вообще мировой) откликнулся Федор Михайлович Достоевский (1821—1881) на открытие Николая Ивановича Лобачевского. Несомненно, это привлекло к новой геометрии и ее творцу внимание многих читателей этого романа.

Открытие новой геометрии благотворно повлияло на развитие физико-математических наук. Естественно, в первую очередь это коснулось взаимных применений Геометрии и Аналитики.

«Новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, — пояснял Лобачевский, — ... открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики» [3, с.209]. Сам Лобачевский на этом поле достиг выдающихся результатов: «Для широкого круга математиков, физиков и инженеров обычно остается неизвестным, что во многих употребляемых ими справочниках и таблицах определенных интегралов содержатся формулы, полученные Лобачевским методами его "воображаемой геометрии». Дело в том, что почти все справочники пользуются в значительной мере материалом из «Таблиц определенных интегралов Биеренс де Хаана», которые явились первым обширным сводным сборником определенных интегралов и в которые вошли многие результаты Лобачевского.

Печатание этих таблиц началось в 1853 г., т.е. еще при жизни Лобачевского, но закончилось только в 1858 г. — через два года после его смерти, — так что Лобачевскому не удалось увидеть свои интегралы включенными в эти таблицы» [40, с.413].

Применяя геометрию Лобачевского, А.Пуанкаре (1854—1912) в 1882 г. создал теорию автоморфных функций. Большую услугу в этом оказала ему идея о конформном отображении полуплоскости Евклида на плоскость Лобачевского. По этому поводу он писал: «Я не могу умолчать о связи предшествующих понятий с неевклидовой геометрией Лобачевского...

Если принять эти переименования, то теоремы *Лобачевского верны*, т.е. к этим новым величинам прилагаются все теоремы обычной геометрии, за исключением тех, которые являются следствием постулата Евклида.

Эта терминология мне оказала большие услуги в моих изысканиях, но я, чтобы избегнуть всякой неясности, не буду ее здесь употреблять» [41, с.306].

Благодаря удачному применению планиметрии Лобачевского, в создании теории автоморфных функций Пуанкаре обогнал сильнейшего своего соперника Ф.Клейна [1849—1925].

Читая книгу [7], можно понять, сколь интенсивно и глубоко изучал Пуанкаре геометрию Лобачевского. Благодаря этому он не только добился успеха в создании теории автоморфных функций, но и построил в 1905 г. строгую теорию группы Лоренца. Однако мы видели выше, как осторожно говорил Пуанкаре о своих симпатиях к геометрии Лобачевского.

По-видимому, не «всякой неясности» он избегал, но, как и Гаусс, опасался «крика беотийцев». Излишняя осторожность его, как и Гаусса же, сильно подвела. В 1910 г. Клейн взял реванш, доказав, что группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространства Лобачевского [42]. Вероятно, Пуанкаре этот результат не показался новым. Введя понятие квадратичной геометрии, он в 1887 г. доказал: «Если основная поверхность — двуполостный гиперболоид, то квадратичная геометрия не отличается от геометрии Лобачевского» [43, с.390].

Все результаты следуют из формул (5) и (6). Действительно, четыре функции

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta, \qquad u = \operatorname{ch}\frac{\rho}{k} \tag{10}$$

сферических координат ρ, θ, φ задают в четырехмерном центроаффинном пространстве [44, с.46] с декартовыми координатами x, y, z, u трехмерную поверхность. Эта поверхность является той полостью гиперболоида

$$k^2u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = k^2, \tag{11}$$

на которой $u > 0$. В декартовых координатах она задается уравнением

$$u = \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)/k^2}. \tag{12}$$

Фактически, мы только что получили взаимно однозначное (или, как теперь говорят, биективное) отображение пространства Лобачевского на эту поверхность. Дифференцируя функции (5) и (10), получаем

$$\begin{gathered} dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \\ k^2du = rd\rho, \qquad dr = ud\rho. \end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда находим, что в координатах x, y, z метрика Лобачевского (6) равна

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - k^2du^2, \tag{14}$$

где du — дифференциал функции (12), так что

$$(k^2 + x^2 + y^2 + z^2)\,k^2du^2 = (xdx + ydy + zdz)^2. \tag{15}$$

Следовательно, внутренняя геометрия поверхности (12) в псевдоевклидовом пространстве с метрикой (14) совпадает с геометрией Лобачевского. Изометрические преобразования пространства Лобачевского представляются линейными преобразованиями координат x, y, z, u, сохраняющими квадратичную форму, стоящую в левой части равенства (11), и не меняющими знака координаты u. По определению Пуанкаре [45, с.54] такие преобразования составляют группу Лоренца.

Мы приходим к понятию пространства скоростей частицы, полагая, что константа Лобачевского k равна скорости света c, а расстояние ρ — быстроте частицы s. В таком случае функции (10) равны компонентам 4-скорости частицы. Компоненты же обычной скорости частицы:

$$v_1 = c \operatorname{th} \frac{s}{c} \sin\theta \cos\varphi, \quad v_2 = c \operatorname{th} \frac{s}{c} \sin\theta \sin\varphi, \quad v_3 = c \operatorname{th} \frac{s}{c} \cos\theta. \qquad (16)$$

В космических лучах наблюдаются, а на современных ускорителях достигаются (например, в ОИЯИ, Дубна, еще бо́льшие — в ИФВЭ, Протвино) быстроты, намного превышающие скорость света. Поэтому в физике высоких энергий обойтись без геометрии Лобачевского невозможно. Применение геометрии Лобачевского к механике столкновений элементарных частиц рассмотрено в обзоре [46].

Однако приходится слышать: «Зачем нам изучать Лобачевского, если мы можем все подсчитать по известным формулам теории относительности?». На это я отвечаю, следуя Ф.Клейну [42, с.144]: «Современный принцип относительности физиков есть то же самое, что и теория группы Лоренца. В свою очередь, группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространства Лобачевского». К этому я обычно добавляю: изучение геометрии Лобачевского окупается сторицей, так как это приводит к глубокому пониманию теории относительности, наделяет ее сильными и неизвестными ей самой методами и устанавливает тесную связь теории относительности с многовековой историей проблемы параллельных [47]. Получается так, что физики, подчас сами того не зная, все-таки пользуются геометрией Лобачевского, но в плохом изложении, т.е. суррогатом. Выгоды же никакой не получается: легче выучить предмет, чем его суррогат.

7. ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МЕХАНИКУ И В ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Лобачевский рассматривал новую геометрию не только в логическом аспекте. Много думал он о ее применениях в физике, астрономии и механике, в результате чего поставил две совершенно новые проблемы: об астрономической проверке геометрии видимого нами мира и об исследовании перемен, которые произойдут от введения новой геометрии в механику. На основе данных о параллаксах звезд он установил, что в шаре, радиус которого равен расстоянию от Земли до этих звезд, начала геометрии Евклида можно «... рассматривать как бы строго доказанными. Между тем нельзя не увлекаться мнением Г.Лапласа, что видимые нами звезды и млечный путь принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобному тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и проч. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже и расстояния нашей земли до неподвижных звезд» [3, с.209].

Допустив возможность реализации новой геометрии в видимом мире, Лобачевский поставил вопрос о механике тел, движущихся в пространстве, дотоле неведомом: «Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику, и не встретится ли здесь принятых уже и несомнительных понятий о природе вещей, но которые принудят нас ограничивать или совсем не допускать зависимости линий и углов. Однако ж можно предвидеть, что перемены в Механике при новых началах Геометрии будут того же рода, какие показал Г.Лаплас (Mécanique céleste. T.I, Liv.I, Ch.II), предполагая возможной всякую зависимость скорости от силы, или — выразимся вернее — предполагая силы, измеряемые всегда скоростию, подчиненными другому закону в соединении, нежели принятому сложению их» [3, с.261].

В следующем сочинении Лобачевский развивает эту мысль: «... в том однако ж нельзя сомневаться, что силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы ... когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть также в зависимости с углами. По крайней мере разнородность одинакова в обоих случаях, которых различие не заключается собственно в понятии, но только в том, что мы познаем одну зависимость из опытов, а другую при недостатке наблюдений должны предполагать умственно, либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений» [14, с.159—160].

Здесь же Лобачевский ставит вопрос *о введении новой геометрии в теорию гравитации*. Он полагал, что силы притяжения слабеют от распространения своего действия по сфере, отчего они должны уменьшаться в отношении к площади сферы, и указал, как эта площадь в новой геометрии зависит от радиуса сферы. Тем самым он ввел новое выражение в закон всемирного тяготения Ньютона.

Вопрос о механике тел, движущихся в пространстве Лобачевского, рассмотрен в обзоре [48]. Там доказано, что при введении геометрии Лобачевского в видимый мир сохраняется принцип кинематической относительности, но теряет свою силу специальный принцип относительности.

Последнее означает, что введение по Ньютону абсолютно покоящегося пространства при ньютоновом же условии абсолютности времени эквивалентно отрицанию евклидова постулата в видимом мире.

8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Как доказано в работе [49], Лобачевский фактически указал фундаментальное решение уравнения Пуассона в пространстве с метрикой (6) при условии (5). (См. об этом также [50] и [51].)

Будем считать, что притягивающий центр в пространстве Лобачевского абсолютно покоится. Для наглядности назовем его Солнцем, а притягиваемое тело — планетой или кометой. Массу Солнца обозначим m. Масса притягиваемого тела считается малой по сравнению с массой Солнца и в уравнение Пуассона не входит. В это уравнение входит единственный параметр, равный $\alpha = \gamma m$, где γ — ньютонова константа тяготения.

В сферических координатах уравнение Пуассона записывается следующим образом:

$$\Delta U = 4\pi\alpha\delta(x)\delta(y)\delta(z), \tag{17}$$

где U — ньютонов потенциал (рассматриваемый в данном случае в пространстве Лобачевского), Δ — оператор Лапласа, равный

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\rho}r^2\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right),$$

δ — обобщенная функция Дирака от аргументов x, y, z, равных (10). Ньютонов потенциал удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho\to\infty} U = 0. \tag{18}$$

В соответствии с замечанием Лобачевского находим, что ковектор силы притяжения имеет следующие компоненты:

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial\rho} = -\alpha/r^2, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0, \quad F_3 = -\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0.$$

Следовательно,

$$U = \frac{\alpha}{k}\left(1 - \operatorname{cth}\frac{\rho}{k}\right). \tag{19}$$

Функция Лагранжа притягиваемого тела равна

$$L = \frac{1}{2} v^2 - U, \tag{20}$$

где согласно (6)

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2), \tag{21}$$

точкой обозначены производные по абсолютному времени t.

9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КЕПЛЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В соответствии с (19)—(21) составим лагранжевы уравнения движения притягиваемого тела:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\dot{\rho} - rr'\,(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) + U' = 0, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\varphi}^2 = 0, \\ \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}) = 0,\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$r' = \operatorname{ch}\frac{\rho}{k}, \quad U' = \alpha/r^2. \tag{23}$$

Так как лагранжева функция (20) не зависит явно от времени, то сохраняется энергия

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) + U, \tag{24}$$

а в силу сферической симметрии сохраняется момент импульса притягиваемого тела с компонентами

$$\begin{aligned} M_1 &= y\dot{z} - z\dot{y} = -r^2(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi} + \sin\varphi\dot{\theta}), \\ M_2 &= z\dot{x} - x\dot{z} = -r^2(\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\dot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\theta}), \\ M_3 &= x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{25}$$

Впрочем, в этом нетрудно убедиться непосредственно, дифференцируя по времени функции (24) и (25).

Сохранение момента импульса в данном случае означает, что притягиваемое тело движется в плоскости Лобачевского, проходящей через центр притяжения. Без ограничения общности можно считать, что это есть экваториальная плоскость $\theta = \pi/2$. При таком выборе $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = M$, где

$$M = r^2\dot{\varphi}, \tag{26}$$

а интеграл энергии принимает вид

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (27), получаем следующее дифференциальное уравнение для радиуса ρ в зависимости от угла φ:

$$E = \frac{M^2}{2r^2}\left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right] + U. \tag{28}$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, обозначим

$$k \,\mathrm{th}\,\frac{\rho}{k} = \frac{1}{w}. \tag{29}$$

Так как

$$dw = -\frac{1}{r^2}\,d\rho, \qquad w^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{k^2},$$

то уравнение (28) преобразуется к виду

$$E = \frac{M^2}{2}\left[\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 + w^2 - \frac{1}{k^2}\right] + \frac{\alpha}{k} - \alpha w. \tag{30}$$

Решение этого уравнения есть

$$w = \frac{\alpha}{M^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{M^2} - \frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2E}{M^2}}\,\cos\varphi. \tag{31}$$

Постоянная интегрирования выбрана так, что наибольшему значению w соответствует угол $\varphi = 0$.

Обозначая

$$p = \frac{M^2}{\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{\left(1 - \frac{p}{k}\right)^2 + \frac{2pE}{\alpha}}, \tag{32}$$

уравнение траектории притягиваемого тела записываем в виде

$$k \,\mathrm{th}\,\frac{\rho}{k} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{33}$$

Из (30) следует, что подкоренное выражение в формуле (32) для ε не может быть отрицательным. Действительно,

$$E \geq \frac{M^2}{2}(w^2 - k^{-2}) + \alpha\,(k^{-1} - w) \geq -\frac{\alpha}{2p}\,(1 - \frac{p}{k})^2.$$

Следовательно, ε — число вещественное.

Рассмотрим детально финитное движение. Притягиваемое тело будем называть планетой, а траекторию планеты — орбитой. Именно к финитному движению относятся классические законы Кеплера.

По определению при финитном движении радиус ρ ограничен при всяком значении угла φ. Согласно (33) это означает, что при всяком значении угла φ при финитном движении должно выполняться неравенство:

$$k > \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,. \tag{34}$$

В частности, полагая здесь $\varphi = \pi/2$, получаем

$$p < k. \tag{35}$$

Полагая же $\varphi = \pi$, получаем

$$p < k\,(1 - \varepsilon). \tag{36}$$

Итак, финитное движение возможно либо в случае

$$\varepsilon = 0, \quad 0 < p < k, \tag{37}$$

либо в случае

$$\varepsilon > 0, \quad p > 0, \quad p + k\varepsilon < k. \tag{38}$$

В первом случае орбита планеты является окружностью, а во втором случае — эллипсом.

10. КРУГОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Условия (37) кругового движения эквивалентны условиям

$$2E = -\alpha^2 M^{-2}\,(1 - \frac{M^2}{\alpha k})^2, \quad 0 < M^2 < \alpha k. \tag{39}$$

Их нетрудно получить непосредственно из уравнений движения (22). В экваториальной плоскости последние сводятся к следующим двум:

$$\frac{d}{dt}\dot{\rho} - ru\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \qquad (40)$$

Из второго уравнения непосредственно следует, что сохраняется момент импульса (26), так что

$$\dot{\varphi} = M\,r^{-2}. \qquad (41)$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений движения (40) и умножая полученный результат на $\dot{\rho}$, приходим к закону сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + M^2 r^{-2}) + U. \qquad (42)$$

Если ρ не зависит от времени (круговое движение), то все сильно упрощается. Согласно первому из уравнений (40), в этом случае

$$\dot{\varphi}^2 = \alpha/(ur^3). \qquad (43)$$

Из (42) тогда следует, что

$$E = \frac{1}{2}M^2\,r^{-2} + U. \qquad (44)$$

Из (41) и (43) находим:

$$M^2 = \frac{\alpha r}{u} = \alpha k\ \mathrm{th}\,\frac{\rho}{k}. \qquad (45)$$

Так как при изменении аргумента x в пределах $0 < x < \infty$ гиперболический тангенс меняется в пределах $0 < \mathrm{th}\ x < 1$, то согласно (45) выполняется второе из условий (39). Первое из условий (39) следует из равенств (5), (19), (44) и (45). Оно означает, что при круговом движении

$$E = \frac{\alpha}{k}\left(1 - \mathrm{cth}\,\frac{2\rho}{k}\right). \qquad (46)$$

Последнюю формулу интересно сравнить с формулой (19).

Заметим, что согласно (41) период обращения планеты по окружности

$$T = \frac{2\pi}{M}r^2. \qquad (47)$$

В соответствии с (45) получаем следующее выражение для квадрата периода:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\alpha}r^3\,u. \qquad (48)$$

11. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Условия (38) эллиптического движения эквивалентны условиям

$$-\alpha^2 M^{-2}\left(1 - \frac{M^2}{\alpha k}\right)^2 < 2E < 0, \qquad 0 < M^2 < \alpha k, \tag{49}$$

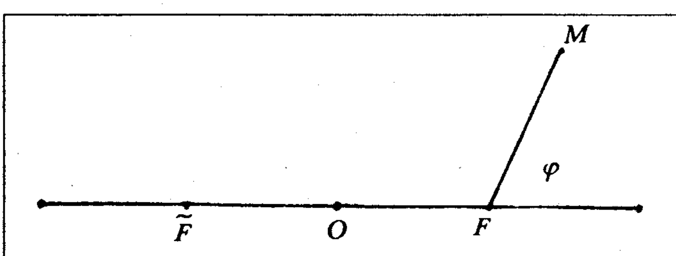
в чем нетрудно убедиться.

Интересно, что орбиту планеты можно определить в абсолютной планиметрии, т.е. на плоскости Лобачевского так же, как и на плоскости Евклида. В случае кругового движения это очевидно. В случае же эллиптического движения планетную орбиту определим как множество точек, от которых до заданных двух точек сумма расстояний задана. Такое множество в абсолютной геометрии назовем эллипсом. Заданные точки назовем фокусами и обозначим F и $\tilde{F}$. Заданную сумму расстояний обозначим $2a$ и назовем длиной большой оси эллипса. Расстояния от точки M, лежащей на эллипсе, до фокусов обозначим ρ и $\tilde{\rho}$, так что $\rho + \tilde{\rho} = 2a$. Расстояние между фокусами обозначим $2c$. Среднюю точку между фокусами обозначим O и назовем центром эллипса. Большая ось эллипса проходит через его фокусы. Малая ось эллипса проходит через его центр перпендикулярно к большой оси. На малой оси $\rho = \tilde{\rho} = a$. Длину малой оси эллипса обозначим $2b$. Подчеркнем еще раз, что при таком определении мы совершенно не принимали во внимание вопрос о параллельности прямых линий.

Теперь рассмотрим этот вопрос.

Из треугольника $M\tilde{F}F$ находим в случае геометрии Евклида

$$(2a - \rho)^2 = (2c)^2 + \rho^2 - 2(2c)\,\rho\cos(\pi - \varphi), \tag{50}$$



Большая ось эллипса, на оси два фокуса и центр. Точка M лежит на эллипсе а в случае геометрии Лобачевского

$$\operatorname{ch}\frac{2a-\rho}{k} = \operatorname{ch}\frac{2c}{k}\operatorname{ch}\frac{\rho}{k} - \operatorname{sh}\frac{2c}{k}\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}\cos(\pi-\varphi). \tag{51}$$

После несложных преобразований в первом случае получаем хорошо известное уравнение

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\varphi}, \tag{52}$$

а во втором — рассмотренное выше уравнение (33), где

$$p\operatorname{sh}\frac{2a}{k} = k\left(\operatorname{ch}\frac{2a}{k} - \operatorname{ch}\frac{2c}{k}\right), \quad \varepsilon\operatorname{sh}\frac{2a}{k} = \operatorname{sh}\frac{2c}{k}. \tag{53}$$

Надо убедиться, что определенные таким образом p и ε удовлетворяют условиям (38). Но, очевидно, что $p > 0$ и что $\varepsilon > 0$. Более того, очевидно, что $\varepsilon < 1$. Остается проверить, что $p/k = \varepsilon - 1 < 0$. Последнее неравенство следует из того, что $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$.

Интересно также отметить следующее. Когда точка M попадает на малую ось, то треугольник $M\tilde{F}F$ становится равнобедренным, а треугольник MOF — прямоугольным. Отсюда находим

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}. \tag{54}$$

Подставляя это равенство в формулу (53) для p, получаем

$$p\operatorname{th}\frac{a}{k} = k\operatorname{th}^2\frac{b}{k}. \tag{55}$$

Интересно, что большая ось эллипса зависит только от энергии планеты. Обозначим ρ_1 и ρ_2 наименьшее и наибольшее расстояния от Солнца до планетной орбиты. Очевидно, они соответствуют углам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Согласно (33)

$$k\operatorname{th}\frac{\rho_1}{k} = \frac{p}{1+\varepsilon}, \quad k\operatorname{th}\frac{\rho_2}{k} = \frac{p}{1-\varepsilon}. \tag{56}$$

Так как $\rho_1 + \rho_2 = 2a$, то отсюда следует, что

$$k\operatorname{th}\frac{2a}{k} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2+p^2/k^2} = \frac{\alpha}{\alpha/k - E}, \tag{57}$$

т.е.

$$E = \frac{\alpha}{k}\left(1 - \operatorname{cth}\frac{2a}{k}\right). \tag{58}$$

Частным случаем только что полученной формулы является (46).

Найдем теперь период обращения планеты по эллипсу. Согласно (26) он равен

$$T = M^{-1}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{59}$$

Подынтегральную функцию находим из (5) и (33):

$$r^2(\varphi) = \frac{p^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2 - p^2/k^2} =$$

$$= \frac{pk}{2}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi - p/k} - \frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi + p/k}\right). \tag{60}$$

Интеграл берется подстановкой $\xi = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Имеем

$$\frac{d\varphi}{m+n\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{m^2-n^2}}\, d\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{m+n\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2-n^2}} \quad \text{при } m > |n|.$$

Следовательно,

$$MT = \pi pk\left(\frac{1}{\sqrt{(1-p/k)^2-\varepsilon^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+p/k)^2-\varepsilon^2}}\right). \tag{61}$$

Подставляя (32) в (61), находим

$$T = \frac{\pi k}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{-E}} - \frac{1}{\sqrt{-E+2\alpha/k}}\right), \tag{62}$$

так что период зависит от энергии, но не зависит от момента M. Подставляя (57) в (62), получаем следующее выражение для квадрата периода:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\alpha}\left(k\operatorname{sh}\frac{a}{k}\right)^3\operatorname{ch}\frac{a}{k}. \tag{63}$$

Подведем итог. Введение геометрии Лобачевского в небесную механику не нарушает первый закон Кеплера и вносит понятные поправки по формуле (26) во второй его закон и по формуле (63) — в третий.

Переходя к заключительной части обзора, заметим, что А.А.Фридман (1888—1925), предложив модель нестационарной Вселенной, применил идею Лобачевского о введении неевклидовой геометрии в теорию гравитации [52]. Правда, это было сделано им в ином плане, не в том, который был задуман самим Лобачевским и который реализован в данном обзоре.

12. О ПРАЗДНОВАНИИ ЮБИЛЕЯ Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

В 1893 г., когда минуло сто лет со дня рождения Н.И.Лобачевского, Императорский Казанский университет почтил это событие трехдневным торжеством. Программа празднования была напечатана на русском и французском языках и разослана, с приглашением принять участие в праздновании, русским и иностранным университетам и другим высшим учебным заведениям, научным обществам, многим ученым как в России, так и за границей, а равно и почетным лицам г.Казани.

«Императорская Академия наук, академии наук в Берлине и Вене, все русские университеты и другие высшие учебные заведения, все русские ученые общества, многие иностранные университеты и общества, гимназии и реальные училища, частные лица, в том числе несколько учеников Лобачевского, благоговейно чтущих его память, откликнулись на призыв Казанского университета, который таким образом имел радость видеть, с каким всеобщим искренним сочувствием было встречено его намерение почтить память великого русского геометра» [4, с.11].

По этому случаю приветствия в Казанский университет прислали Анри Пуанкаре и Феликс Клейн.

Приведу полный текст следующих четырех телеграмм и одного письма, поступивших тогда в Казанский университет.

Телеграмма [4, с.69]

«От Почетного Члена Университета
Профессора Д.И.Менделеева.

Геометрические знания составили основу всей точной науки, а самобытность геометрии Лобачевского — зарю самостоятельного развития наук в России. Посев научный взойдет для жатвы народной!

Менделеев».

Письмо [4, с.61]

«От Русской Тургеневской библиотеки в Париже.

Русская Тургеневская библиотека в Париже за счастие почитает, хотя бы только сим письмом, принять участие в мировом празднике науки и выразить удивление пред гением Н.И.Лобачевского, память которого чествует ныне Казанский университет, а вместе с ним не только читающая, учащая и учащаяся Россия, но и весь ученый мир старого и нового света.

Библиотека от лица своих членов издалека шлет горячие приветствия всем собравшимся в стенах Университета почтить память великого соотечественника, и искренно желает бóльшего и бóльшего процветания Великой Школе, не перестающей выдвигать из среды своих питомцев великих мужей науки.

Заведующий читальней при Тургеневской библиотеке,
Студент-медик Парижского Университета М.Казанский ».

Телеграмма [4, с.36]

«От Профессоров Парижского Университета.

Lobatchefsky a laissé en géométrie une trace glorieuse, impérissable. Tous nous nous asscions a l'honneur rendu à sa mémoire. Nous offrons à cette occasion nos plus cordiales sympathies à l'Université de Kasan et à la science russe.

Hermite, Darboux, Tisserand, Boussinesq, Picard,
Poincaré, Appell, Wolf
Professeurs à la Sorbonne, Paris ».

Телеграмма [4, с.62]

«От Почетного Члена Университета
Профессора Геттингенского Университета Ф.Клейна.

Zur Centennärfeier des grossen Geometers Lobatschewsky sendet der Universität Kasan Gruss und Dank.

Professor Klein».

Телеграмма [4, с.47]

«От Геттингенского Королевского Общества наук.

Zur Centennärfeier Lobatschewsky's, des meisterhaften Reformators der Euklidischen Geometrie, sendet achtungsvollen Gruss die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen».

Как можно было видеть, многократно процитированная здесь книга [4] о праздновании столетней годовщины со дня рождения Н.И.Лобачевского представляет большой интерес. В связи с наступающей двухсотлетней годовщиной эту книгу следовало бы переиздать.

Заметим также, что о нашем времени мечтал Н.И.Лобачевский, произнося в своей «Речи о важнейших предметах воспитания» следующие слова: «Мы все живем втрое, вчетверо менее, нежели сколько назначено природой. Примерами это доказано: некто Екклестон жил 143 года. Генрих Женкинс — 169 лет. Натуралисты, сравнивая время возрастания человека и животных, приходят к тому же заключению: мы должны бы, говорят они, жить около 200 лет. Но увы, напрасно жизненная сила собирает питательные соки; их сожигает огонь страстей, снедают заботы и губит невежество» [9, с.20].

Скоро Лобачевскому будет двести лет. Весь ученый мир готовится достойно встретить это событие. С 18 по 22 августа 1992 г. в Казани проходила Международная геометрическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского. В состав оргкомитета вошли ученые нашей страны и ряда зарубежных стран. Этой же дате был посвящен прошедший в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна) 16—18 мая с.г. V Семинар «Гравитационная энергия и гравитационные волны», на котором были доложены новые результаты [53, 54] по применению геометрии Лобачевского к современной теории гравитации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ
Сочинение академика В.Буняковского
СПб, 1853

«В предлагаемом Опыте я имел в виду познакомить любителей Геометрии с постепенным развитием и современным состоянием основного вопроса о теории параллельных линий, столь важного для науки. Проследив критически более или менее неудовлетворительные попытки прежних геометров по этому предмету, я остановился на новейших исследованиях, ближе соответствующих цели, и подверг их внимательному разбору. Для полноты изложения я привел также собственные изыскания с соображениями по упоминаемой теории, отчасти уже известные по трем отдельным моим мемуарам, а отчасти появляющимся здесь в первый раз.

1. Теория параллельных линий как краеугольный камень Геометрии постоянно обращала на себя внимание геометров. Но, несмотря на все усилия утвердить ее на основании совершенно прочном, придуманные доказательства, от Евклида до наших времен, подают повод к возражениям, которые, по-видимому, не легко могут быть вполне устранены. Евклид в своей Геометрии принял за аксиому (аксиома 11-я), что когда две прямые пересечены третьей, и сумма внутренних углов, по одну сторону секущей, не равна двум прямым углам, то две линии пересекутся. Из этого предложения, которое не имеет степени очевидности, требуемой от аксиомы, выводится уже со всею строгостью вся теория параллельных линий.

Чтобы придать дальнейшему изложению возможную степень ясности, предложим здесь перечень некоторых предложений, из которых каждое может привести, с большею или меньшею простотою, к полному доказательству истин, составляющих учение о параллельных линиях. И, во-первых, условимся в самом их определении. Под *параллельными линиями* мы будем разуметь *прямые линии, перпендикулярные к данной прямой, и заключающиеся с нею в одной плоскости.* Часть этой данной прямой, ограниченную двумя параллельными линиями, для сокращения речи, назовем *основанием* параллельных. В силу такого определения прямо заключаем, что *параллельные линии, как бы далеко не были продолжены, никогда не пересекутся.*

Приведенное определение можно также предложить и в следующем виде: *две прямые линии, лежащие в одной плоскости и составляющие с третьей внутренние углы, которых сумма равна двум прямым углам, называются параллельными,* и заключить потом, что эти линии нигде не встретятся. Очевидно, что оба определения равнозначащи.

Перейдем теперь к основным предложениям, ведущим к строгому доказательству всех свойств параллельных линий; число этих истин очень значительно: ограничимся перечнем главных из них. Характеристические предложения, о которых говорим, могут быть разделены, по сущности своей, на три рода, именно: на предложения, относящиеся 1° к взаимному пересечению прямых линий; 2° к свойствам углов и 3° к свойствам линий в рассуждении определенной их длины.

Предложения 1-го рода.

a) Когда две прямые пересечены третьей, и сумма внутренних углов, по одну сторону секущей, не равна двум прямым углам, то эти две линии пересекаются. В этом свойстве состоит 11-я евклидова аксиома или евклидов постулат.

b) Наклонная и перпендикуляр к одной и той же прямой линии, по достаточном их продолжении, всегда пересекутся.

c) Через данную точку можно провести только одну линию, параллельную данной прямой.

d) Когда прямая линия пересекает одну из двух параллельных между собой прямых, то непременно пересечет и другую.

e) Перпендикуляр, восстановленный из какой ни есть точки одной из двух параллельных между собой прямых линий, непременно пересечет и другую.

f) Через всякую точку, взятую внутри определенного угла, можно провести прямую, пересекающую обе стороны этого самого угла.

Предложения 2-го рода.

a) Секущая, встречающая одну из двух параллельных между собою линий под прямым углом, будет вместе перпендикулярна и к другой.

b) Когда две параллельные линии пересечены косвенно третьей прямою, то из восьми углов, образуемых при этой встрече, 1° четыре острые будут равны между собою; 2° четыре тупые также равны, и 3° каждый острый будет служить дополнением к двум прямым углам.

c) Сумма трех углов какого ни есть прямолинейного треугольника равна двум прямым углам.

d) Можно построить такой треугольник, что сумма углов его будет равна двум прямым углам.

e) Сумма трех углов треугольника постоянная.

f) Существует такая четырехсторонняя прямолинейная фигура, в которой или все четыре угла прямые, или сумма их равна четырем прямым.

g) Два угла треугольника определяют третий.

Предложения 3-го рода.

a) Расстояния между параллельными линиями везде равны между собою, или, что все равно: если из всех точек прямой линии восстановить равные перпендикуляры, то концы их будут находиться также на одной прямой линии.

b) Расстояния между двумя прямыми линиями не может сперва увеличиваться, а потом уменьшаться, и обратно.

c) Пересечение двух прямых линий, или данный прямолинейный угол, не может привести к линии определенной длины.

d) Длина прямой линии не может определить угла.

e) При данном остром угле можно построить такой прямоугольный треугольник, что сторона его, прилежащая к этому углу и к углу прямому, будет как угодно велика.

f) Сторона правильного шестиугольника, вписанного в круг, равна его радиусу.

Обратим также внимание наших читателей на то обстоятельство, что при доказательствах теории параллельных линий обыкновенно представляются два случая, из которых один решается со всею строгостью, а другой, в каком бы виде он не представлялся, всегда подает повод к затруднениям. При внимательном соображении различных ниже изложенных способов усмотрим, что случай, которого доказательство не подлежит возражениям, находится постоянно в зависимости от следующего свойства: *прямая линия А, соединяющая концы двух равных перпендикуляров, восставленных к данной прямой, не может быть меньше линии В, соединяющей их основания;* эта истина доказывается со всею строгостью. Напротив того, доказательство, что *прямая линия А не может быть более линии В,* представляло всегда особенные затруднения. Эти две истины могут быть заменены и другими, равносильными с ними. Так, например, можно доказать с геометрической точностью, что *сумма углов всякого прямолинейного треугольника не может быть больше двух прямых углов;* напротив того, доказательство, что *эта сумма не может быть меньше двух прямых углов,* представляет те же затруднения, как и второе из предложений, относящихся к линиям *А* и *В*.

После этих предварительных объяснений, перейдем к рассмотрению различных доказательств теории параллельных линий. Мы укажем сперва, в коротких словах, на сущность главнейших способов, относящихся к более или менее отдаленному от нас времени. Приемы, о которых будем говорить, судя по оставшимся о них отзывам, считались в свое время вообще удовлетворительными со стороны строгости. Мы увидим, что ни один из них не может выдержать основательного разбора».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Модзалевский Л.Б.** — Материалы для биографии Н.И.Лобачевского. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948.
2. **Ломоносов М.В.** — Избранные произведения. Л.: Советский писатель, 1990, с.128.
3. **Лобачевский Н.И.** — О началах геометрии (1829—1830). Полн. собр. соч., М.-Л.: Гостехиздат, 1946, т.1, с.185.
4. Празднование Казанским университетом столетней годовщины дня рождения Н.И.Лобачевского. Казань. Типо-литография Императорского университета, 1894.
5. Начала Евклида. Книги I—VI. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
6. **Буняковский В.Я.** — Параллельные линии. Напечатано по распоряжению 1-го Отделения Императорской Академии Наук. 9 сентября 1853 года. Непременный секретарь П.Фус. В типографии Императорской Академии Наук.
7. **Пуанкаре А.** — Наука и гипотеза (1902). Предисловие Н.А.Умова. М., 1904.
8. **Больаи Янош.** — Аппендикс. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может); с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга. В кн.: Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956, с.71.
9. **Лобачевский Н.И.** — Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.: Наука, 1976.
10. **Лобачевский Н.И.** — Геометрия. Печатано по определению Совета физико-математического Общества при Императорском Казанском Университете, Казань, 1909.

11. Лобачевский Н.И. — Геометрия. Известия Казанского физ.-мат. общества. Казань, 1911, (2), 17, №12, с.1.
12. Лобачевский Н.И. — Геометрия (1823). Полн. собр. соч., М.-Л.: Гостехиздат, 1949, т.2, с.43.
13. Лобачевский Н.И. — Три сочинения по геометрии. М.: Гостехиздат, 1956, с.33.
14. Лобачевский Н.И. — Новые начала геометрии с полной теорией параллельных (1835—1838). Полн. собр. соч., М.-Л.: Гостехиздат, 1949, т.2, с.147.
15. Остроградский М.В. — Рапорт в Императорскую Академию Наук (1832). В [1], с.332.
16. С.С. — О Началах Геометрии, соч. г.Лобачевского (1834). В [1], с.358.
17. Лобачевский Н.И. — Воображаемая Геометрия (1835). Полн. собр. соч., М.-Л.: Гостехиздат, 1951, т.3, с.139.
18. Остроградский М.В. — В [1], с.446.
19. Писарев Д.И. — Школа и жизнь (1865). Избранные педагогические сочинения. М.: Педагогика, 1984, с.194.
20. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von Nicolaus Lobatschevsky. Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan. Berlin, 1840. In der G.Fincke'schen Buchhandlung. 61 S.
21. Лобачевский Н.И. — Геометрические исследования по теории параллельных линий. В [3], с.79.
22. Лобачевский Н.И. — Геометрические изыскания о теории параллельных линий. В кн.: Математический сборник, издаваемый Московским математическим обществом. М.: Типография А.И.Мамонтова, 1868, т.3, отд.2, с.88.
23. Летников А.В. — Извлечение из переписки Гаусса к Шумахеру. В [22], с.81.
24. Гаусс К.Ф. — Письмо к Герлингу (1816). — В [8], с.102.
25. Герлинг Х.Л. — Письмо к Гауссу (1819). — В [8], с.103.
26. Гаусс К.Ф. — Письмо к Герлингу (1819). — В [8], с.104.
27. Гаусс К.Ф. — Письмо к Тауринусу (1824). — В [8], с.105.
28. Розенфельд Б.А., Яглом И.М. — Неевклидовы геометрии. В кн.: Энциклопедия элементарной математики. Кн.5. Геометрия. М.: Наука, 1966, с.393.
29. Гаусс К.Ф. — Письмо к Шумахеру (1831). В [22], с.86.
30. Гаусс К.Ф. — Письмо к Герлингу (1832). В [8], с.112.
31. Гаусс К.Ф. — Письмо к Ф.Бойяи (1832). В [8], с.113.
32. Гаусс К.Ф. — Письмо к Энке (1841). В [8], с.117.
33. Гаусс К.Ф. — Письмо к Шумахеру (1846). В [8], с.119.
34. Гаусс К.Ф. — Письмо к Ф.Бойяи (1848). В [8], с.120.
35. Гаусс К.Ф. — Письмо к Герлингу (1818). В [8], с.103.
36. Гаусс К.Ф. — Письмо к Бесселю (1829). В [8], с.106.
37. Гаусс К.Ф. — Письмо к Герлингу (1844). В [8], с.118.
38. Летников А.В. — О теории параллельных линий Н.И.Лобачевского. В [22], с.78.
39. Достоевский Ф.М. — Братья Карамазовы. Собр.соч. М.: ГИХЛ. 1958, т.9, с.294.
40. Лаптев Б.Л. — Интегралы Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана. В [17], с.413.
41. Пуанкаре А. — Теория фуксовых групп. В [8], с.303.
42. Клейн Ф. — О геометрических основаниях Лоренцовой группы. (Доклад, прочитанный 10 мая 1910 г. в Геттингенском математическом обществе). Новые идеи в математике. Сб. V. СПб. 1914, с.144.
43. Пуанкаре А. — Об основных гипотезах геометрии (1887). В [8], с.388.
44. Норден А.П. — Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
45. Пуанкаре А. — О динамике электрона (23 июля 1905 года). В кн.: Логунов А.А. К работам Анри Пуанкаре «О динамике электрона». М.: Изд. Московского университета, 1988, с.19.
46. Черников Н.А. — ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.3, с.773.

47. **Черников Н.А.** — В кн.: 150 лет геометрии Лобачевского. Пленарные доклады. М.: ВИНИТИ, 1977, с.146.
48. **Черников Н.А.** — ЭЧАЯ, 1987, т.18, вып.5, с.1000.
49. **Черников Н.А.** — Препринт ОИЯИ Р2-91-381, Дубна, 1991. (Направлено в журнал ТМФ).
50. **Chernikov N.A.** — Communication of JINR E2-91-441, Dubna, 1991.
51. **Chernikov N.A.** — Acta Physica Polonica B, 1992, vol.23, No.2, c.115.
52. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955.
53. **Черников Н.А.** — Сообщение ОИЯИ Р2-92-108, Дубна, 1992.
54. **Черников Н.А.** — Сообщение ОИЯИ Р2-92-102, Дубна, 1992.