

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТОРОИДАЛЬНЫХ СОЛЕНОИДОВ

*Г.Н.Афанасьев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассмотрены основные свойства тороидальных и цилиндрических соленоидов. Затронуты следующие вопросы: электромагнитные поля соленоидов с постоянным и переменными токами, с различными намагниченностями; мультипольное разложение электромагнитного поля тороидальных соленоидов, связь тороидальных моментов с традиционными; взаимодействие соленоидов с внешним электромагнитным полем и друг с другом. Получено электромагнитное поле вращающегося тороидального соленоида. Указаны возможные применения соленоидов в физике и технике.

There are reviewed main properties of the cylindrical and toroidal solenoids. The following subjects were treated: electromagnetic field of solenoids with constant and alternate currents, with different magnetizations; the multipole expansion of the toroidal solenoid electromagnetic field, the relation of toroidal moments to the traditional ones; the interaction of solenoids with an external electromagnetic field and with each other. The electromagnetic field of the rotating toroidal solenoid is obtained and its properties are studied. There are given possible applications of solenoids in physics and technics.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

К топологическим эффектам мы относим эффекты Ааронова — Бома [1—3], эффект Ааронова — Кашера [4], существование анионов [5] (частиц с дробной статистикой) и т.д. Существование топологических эффектов связано с нетривиальной топологической структурой пространства, с наличием в нем многосвязных областей. Простейшими физическими реализациями этих многосвязных областей являются непроницаемые соленоиды. Например, экспериментальная проверка [2] эффекта Ааронова — Бома осуществлялась с помощью рассеяния электронов на непроницаемом тороидальном соленоиде (ТС). Существование эффекта Ааронова — Кашера было подтверждено [6] анализом интерференции нейтронов в поле заряженной нити. Далее, анионы могут быть реализованы как связанная система заряженной частицы и соленоида [5]. ТС — уникальный объект, обладающий рядом замечательных

свойств. Упомянем только некоторые из них. В зависимости от направления тока на поверхности ТС магнитное поле  $H$  может исчезать как внутри, так и вне соленоида [7—10]. Малые утечки электромагнитного поля (ЭМП) из ТС благоприятствуют его применению в управляемом термоядерном синтезе, в установках типа токамак (см., напр., [11]). Как накопитель электромагнитной энергии ТС является составным компонентом космического оружия (программа СОИ). По этой тематике регулярно проводятся симпозиумы, конференции и т.д. Отчеты о них публикуются в трудах Института радиоинженеров (США) по физике плазмы и магнетизму (см., например, выпуски [12,13], специально посвященные этим вопросам). Известно, что при полоидальном (определение этого термина см. в разд.3) токе, текущем по поверхности ТС, магнитное поле  $H$  не выходит за его пределы. Это остается справедливым при равномерном движении ТС в вакууме. Однако при равномерном движении ТС в среде с  $\epsilon\mu \neq 1$  ЭМП выходит за его пределы. Этот удивительный факт был открыт в работе [14]. Ток, текущий по поверхности ТС, характеризуется новым типом мультипольных моментов. Мы имеем в виду так называемые анапольные [15] или тороидные [16] моменты, которые в настоящее время являются объектом экспериментального и теоретического исследования [17]. Далее, тороидальный соленоид и связанный с ним заряд представляют собой пример трехмерного аниона [18]. Это открывает возможность существования истинно трехмерного дробного эффекта Холла. По утверждению автора книги [19] существует специальная конфигурация переменных тороидальных токов, обладающая тем замечательным свойством, что ЭМП не выходит за пределы конечной области пространства. Это открывает возможность принципиального создания электрического соленоида (в отличие от магнитного) с помощью физических токов (в отличие от реализации с помощью тока монополей, предложенной в работе [20]). Этот список можно продолжить, но и перечисленных доводов достаточно, чтобы оценить значение соленоидов в современной физике. Ввиду этого мы решили разбить весь материал, касающийся топологических эффектов в физике, на несколько более или менее самостоятельных частей. В данном обзоре мы рассмотрим электромагнитные свойства ТС. Будем придерживаться следующего плана изложения. Разделы 2, 3 носят педагогический характер. На примере цилиндрических соленоидов (ЦС) показано, как меняется ЭМП соленоида в зависимости от ориентации тока на его поверхности. Изучается ЭМП ЦС с переменным током и ЭМП ЦС, движущегося равномерно в среде. Раздел 4 посвящен изучению свойств ТС с постоянным током. Выясняется, каким должно быть распределение тока на поверхности ТС, чтобы магнитное поле исчезало внутри него. Получены объемные распределения полоидальных токов, отвечающих исчезновению

магнитного поля вне ТС. В разд.5, 6 рассматриваются свойства ТС с переменным током. В разд.7 дано мультипольное разложение вектор-потенциала (ВП) для периодически меняющихся полоидальных токов. В разд.8 в явном виде вычисляются тороидные формфакторы и моменты, устанавливается их связь с соответствующими величинами, полученными в разд.7. В разд.9 анализируется, как ТС взаимодействует с внешним ЭМП и как ТС взаимодействуют между собой. Известно, что ток, текущий в проводнике, можно представить как движение отрицательных зарядов (электронов) относительно положительных (узлов решетки). В разд.10 найдено зарядовое распределение, обладающее тем свойством, что относительное движение одной его части относительно другой имитирует полоидальный ток ТС. В разд.11 рассматривается вращение ТС с полоидальным током, построенным в предыдущем разделе. Показано, что ЭМП выходит за пределы соленоида. В результате возникает взаимодействие падающих частиц с ЭМП вращающегося непроницаемого ТС.

В следующем обзоре мы рассмотрим физические приложения соленоидов. Вот примерный перечень вопросов, которые мы намереваемся затронуть:

- 1) интерпретация измерений ЭМП ТС с переменным током, описанных в [19, 21];
- 2) теоретическая интерпретация прекрасных экспериментов Тономуры [2] по проверке существования эффекта Ааронова — Бома;
- 3) обзор работ по эффекту Ааронова — Кашера, по цилиндрическим и тороидальным анионам.

## 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ СОЛЕНОИД С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

**Основные факты.** Рассмотрим цилиндр с осью симметрии, направленной вдоль оси  $z$ :  $\rho = R$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ . Пусть по его поверхности течет ток (назовем его поперечным), у которого отлична от нуля только  $\varphi$ -компонента:

$$\mathbf{j} = \mathbf{n}_\varphi j \delta(\rho - R). \quad (1)$$

Этому току соответствует магнитное поле  $H$ , равное нулю вне соленоида. Внутри соленоида отлична от нуля только  $z$ -компонента  $H$ :  $H_z =$

$= 4\pi j/c$ . Магнитный поток равен  $\Phi = \int H_z \rho d\rho d\varphi = \frac{4\pi^2 R^2}{c} j$ . В кулоновской калибровке ( $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ) единственная компонента (ВП), отлич-

ная от нуля, равна  $A_\varphi = \Phi/2\pi\rho$  вне соленоида и  $A_\varphi = \Phi\rho/2\pi R^2$  внутри него.

Пусть теперь по поверхности цилиндра течет ток параллельно оси симметрии (назовем этот ток продольным):  $\mathbf{j} = j \mathbf{n}_z \delta(\rho - R)$ . Этому току соответствует магнитное поле  $H$ , равное нулю внутри соленоида. Вне соленоида отлична от нуля только  $\varphi$ -компонента  $H$ :  $H_\varphi = 4\pi Rj/c\rho$ . В кулоновской калибровке единственной отличной от нуля компонентой ВП является  $A_z$ , равная константе (назовем ее  $\alpha$ ) внутри соленоида, и  $A_z = \alpha - \frac{4\pi R}{c} \ln \frac{\rho}{R}$  вне его. Без ограничения общности константа  $\alpha$  может быть положена равной нулю. Мы заключаем: в зависимости от направления тока в цилиндрическом соленоиде можно добиться исчезновения магнитного поля как вне, так и внутри соленоида [8, 9]. Это важно для практических целей, когда необходимо сосредоточить магнитное поле в той или иной области пространства [10].

**Модель поперечного тока.** Известно, что ток, протекающий в проводнике, обязан движению отрицательных зарядов (электронов) относительно положительных (ионов решетки). Попытаемся построить явную реализацию широтного тока (1). Считаем, что зарядовое распределение состоит из нескольких заряженных слоев. Потребуем выполнения следующих условий: 1) полный заряд должен быть равен нулю; 2) электростатический потенциал равен нулю вне зарядового распределения; 3) при равномерном вращении одного из заряженных слоев должно получаться магнитное поле обычного цилиндрического соленоида ( $H = 0$  вне соленоида,  $H_z = \text{const}$ ,  $H_\varphi = H_\rho = 0$  внутри). Попробуем построить такое зарядовое распределение из двух противоположно заряженных слоев:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \sigma_0 \left[ \frac{1}{R_1} \delta(\rho - R_1) - \frac{1}{R_2} \delta(\rho - R_2) \right], \quad R_1 < R_2.$$

Равное нулю при  $\rho > R_2$  решение уравнения Пуассона  $\Delta\varphi = -4\pi\sigma$  в области  $R_1 < \rho < R_2$  имеет вид  $\varphi = C \ln \rho/R_2$ . Константа  $C$  получается приравниванием при  $\rho = R_2$  скачка первой производной потенциала  $\varphi$  величине  $2\sigma_0/R_2$ . Это дает  $\varphi = -2\sigma_0 \ln \rho/R_2$ . Тогда внутри цилиндра ( $\rho < R_1$ ) получаем ненулевое решение  $\varphi = -2\sigma_0 \ln R_1/R_2$ . Таким образом, при двух заряженных слоях добиться выполнения условий 1—3 не удастся.

Пусть теперь зарядовое распределение состоит из трех слоев:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sigma_1}{R_1} \delta(\rho - R_1) + \frac{\sigma_2}{R_2} \delta(\rho - R_2) + \frac{\sigma_3}{R_3} \delta(\rho - R_3) \right] \quad (2)$$

$$(R_1 < R_3 < R_2).$$

Упомянутые условия выполняются при следующем соотношении между  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ :

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{R_{23}}{R_{31}}, \quad \sigma_3 = -\sigma_2 \frac{R_{21}}{R_{31}}, \quad R_{ij} = \ln \frac{R_i}{R_j}.$$

Поскольку  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ , то полный заряд равен нулю и первое условие выполнено. Электростатический потенциал, соответствующий зарядовому распределению (2), равен нулю как вне ( $\rho > R_2$ ), так и внутри ( $\rho < R_1$ ) цилиндра. Между заряженными слоями имеем  $\varphi = 2\sigma_2 \ln \rho / R_2$  при  $R_3 < \rho < R_2$  и  $\varphi = -2\sigma_1 \ln \rho / R_1$  при  $R_1 < \rho < R_3$ . Таким образом, второе условие также выполнено. Пусть теперь один из заряженных слоев, например второй, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Тогда возникает ток  $j_\varphi^\omega = \frac{1}{2\pi} \omega \sigma_2 \delta(\rho - R_2)$ , который генерирует вектор-потенциал цилиндрического соленоида:  $A_\varphi^\omega = \omega \sigma_2 \rho / c$ ,  $H_z = 2\omega \sigma_2 / c$  внутри соленоида ( $\rho < R_1$ ) и  $A_\varphi^\omega = \omega \sigma_2 R_2^2 / \rho c$ ,  $H = 0$  вне соленоида ( $\rho > R_2$ ).

Электромагнитное поле вращающегося цилиндрического соленоида. В предыдущем пункте мы построили явную реализацию тока, протекающего по поверхности соленоида. Что произойдет при вращении такого соленоида в вакууме с постоянной угловой скоростью?

С первого взгляда кажется, что электромагнитное поле за пределы соленоида не выйдет. В самом деле, пусть соленоид вначале покоится (система отсчета  $S$ ). Перейдем в неинерциальную систему координат  $S'$ , вращающуюся вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Вычислим в этой системе электромагнитное поле с помощью преобразования Лоренца (заметьте, что ускоренное движение  $S'$  относительно  $S$  не препятствует применению преобразования Лоренца (см., например, [22])). Поскольку в лабораторной системе  $S$  поля  $E$ ,  $H$  вне соленоида равны нулю, то они равны и в  $S'$ . Относительное движение наблюдателя и соленоида в обоих случаях (соленоид вращается, наблюдатель покоится и наоборот) одно и то же. Отсюда делается вывод, что при вращении соленоида поля не выйдут за его пределы. Ошибочность этих рассуждений состоит в том, что одинаковость относительных движений наблюдателя и соленоида еще не

гарантирует эквивалентности физических ситуаций. Для вращающейся заряженной сферы этот парадокс изучался Шиффом [23]. С современной точки зрения эти вопросы (заряженная сфера и цилиндр) рассматривались в работах [24]. Ввиду отсутствия эквивалентности вопрос о том, выходят ли поля за пределы соленоида при его вращении, должен решаться на основе конкретных вычислений. Это и составляет содержание данного пункта.

При вращении зарядового распределения (2) как целого с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  возникает ток

$$j_{\varphi}^{\Omega} = \Omega \rho \sigma = \frac{1}{2\pi} \Omega \sigma_2 \left[ \delta(\rho - R_2) + \frac{R_{23}}{R_{31}} \delta(\rho - R_1) - \frac{R_{21}}{R_{31}} \delta(\rho - R_3) \right].$$

Отличная от нуля компонента вектор-потенциала  $A_{\varphi}^{\Omega}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 A_{\varphi}^{\Omega}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_{\varphi}^{\Omega}}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} A_{\varphi}^{\Omega} = -\frac{4\pi}{c} j_{\varphi}^{\Omega}. \quad (3)$$

Конечные решения этого уравнения ищем в виде  $A_{\varphi}^{\Omega} = C_1 \rho$  внутри соленоида ( $\rho < R_1$ ) и  $A_{\varphi}^{\Omega} = C_2/\rho$  вне его ( $\rho > R_2$ ). Внутри зарядового слоя имеем  $A_{\varphi}^{\Omega} = B_{13}\rho + C_{13}/\rho$  при  $\rho_1 < \rho < \rho_3$  и  $A_{\varphi}^{\Omega} = B_{23}\rho + C_{23}/\rho$  при  $\rho_3 < \rho < \rho_2$ . Константы  $B, C$ , входящие в эти выражения, определяются непрерывностью  $A_{\varphi}^{\Omega}$  при  $\rho = R_1, R_2, R_3$  и значениями скачков производных  $dA_{\varphi}^{\Omega}/d\rho$  при тех же значениях  $\rho$ . Эти скачки равны коэффициентам при  $\delta$ -функциях в правой части (3). В результате получаем

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{c} \sigma_2 \Omega \left( R_2^2 + R_1^2 \frac{R_{23}}{R_{31}} - R_3^2 \frac{R_{21}}{R_{31}} \right),$$

$$B_{13} = -\frac{1}{c} \sigma_2 \Omega \frac{R_{23}}{R_{31}}, \quad B_{23} = \frac{1}{c} \Omega \sigma_2,$$

$$C_{13} = \frac{1}{c} \Omega \sigma_2 R_1^2 \frac{R_{23}}{R_{31}}, \quad C_{23} = \frac{1}{c} \Omega \sigma_2 \left( R_1^2 \frac{R_{23}}{R_{31}} - R_2^2 \frac{R_{21}}{R_{31}} \right).$$

Таким образом, вращение зарядового распределения как целого приводит к возникновению вектор-потенциала, отличного от нуля вне цилиндра. Ему соответствует равное нулю магнитное поле  $H$ . Если теперь вращение цилиндра как целого (угловая скорость  $\Omega$ ) накладыва-

ется на вращение заряженного слоя 2 (угловая скорость  $\omega$ ), то для полученного таким образом вращающегося цилиндрического соленоида получаем:  $A_\varphi = A_\varphi^\omega = \omega \rho \sigma_2 / c$ ,  $H_z = 2\omega \sigma_2 / c$  внутри соленоида ( $\rho < R_1$ ) и  $A_\varphi = A_\varphi^{\Omega} + A_\varphi^\omega = (C_2 + \omega \sigma_2 R_2^2 / c) / \rho$ ,  $H = 0$  вне соленоида ( $\rho > R_2$ ). Мы заключаем: при вращении цилиндрического соленоида с постоянной угловой скоростью его магнитное поле  $H$  не меняется и, в частности, не выходит за пределы соленоида.

Электромагнитное поле цилиндрического соленоида, равномерно движущегося в среде\*. Ранее мы видели, что магнитное поле цилиндрического соленоида отлично от нуля только внутри него (при широтном направлении тока). Это же справедливо для соленоида, покоящегося в среде. Что случится, если соленоид будет двигаться в среде с постоянной скоростью? С первого взгляда кажется, что магнитное поле не выйдет за пределы соленоида. В самом деле, с помощью преобразования Лоренца можно перейти в систему покоя соленоида. Однако в этой системе отсчета среда находится в движении относительно соленоида и наблюдателя, что приводит к ситуации, не эквивалентной исходной (при которой соленоид и наблюдатель покоились относительно среды). Ввиду этого необходимы конкретные вычисления.

Пусть цилиндрический соленоид движется в среде с проницаемостями  $\epsilon$ ,  $\mu$  вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ . Тогда в системе покоя среды (назовем эту систему отсчета лабораторной системой — л.с.) с помощью преобразований Лоренца находим следующие выражения для плотности тока и заряда:

$$J_x = -\frac{\gamma y j}{R} \delta(\rho' - R), \quad J_y = \frac{\gamma(x - vt)j}{R} \delta(\rho' - R), \quad \rho = -\frac{\gamma \beta y j \delta(\rho' - R)}{c R}.$$

Здесь

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \rho' = [(x - vt)^2 \gamma^2 + y^2]^{1/2}.$$

Запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

\*Для бесконечно малого тороидального соленоида эта задача была рассмотрена в весьма интересной работе [14]. Случай цилиндрического соленоида, обладая большей наглядностью и простотой, может служить иллюстрацией идей, изложенных в [14].

В однородной среде ( $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ) скалярный и векторный потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \varphi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{J}. \quad (4)$$

При этом  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  связаны калибровочным условием Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Правые части этих уравнений содержат  $x$  и  $t$  в комбинации  $x - vt$ .

Положим  $\tilde{x} = (x - vt) \tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\gamma} = (1 - \epsilon \mu \beta^2)^{-1/2}$ \*

Тогда

$$\tilde{\Delta} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{J}, \quad \tilde{\Delta} \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \quad (\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}).$$

Введем эллиптические координаты  $\nu$ ,  $\theta$ :

$$\tilde{x} = a \operatorname{ch} \nu \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sh} \nu \sin \theta, \quad (a = \frac{R}{\operatorname{sh} \nu_0}, \quad \operatorname{th} \nu_0 = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}).$$

Дельта-функция в правой части (4) приводится к виду

$$\delta(\rho' - R) = \frac{2}{R} \frac{\operatorname{ch} \nu_0 \operatorname{sh} \nu_0}{\operatorname{ch} 2\nu_0 - \cos 2\theta} \delta(\nu - \nu_0).$$

В координатах  $\nu$ ,  $\theta$  точкам, лежащим вне и внутри соленоида, отвечают значения  $\nu > \nu_0$  и  $\nu < \nu_0$  соответственно. В итоге для плотности заряда и тока получаем

$$\rho = -\frac{2\gamma\beta j}{cR} \frac{\operatorname{sh} \nu_0 \operatorname{ch} \nu_0 \sin \theta}{\operatorname{ch} 2\nu_0 - \cos 2\theta} \delta(\nu - \nu_0),$$

$$J_y = \frac{2j}{R} \frac{\operatorname{ch} \nu_0 \operatorname{sh} \nu_0 \cos \theta}{\operatorname{ch} 2\nu_0 - \cos 2\theta} \delta(\nu - \nu_0),$$

$$J_x = -\frac{2\gamma j}{R} \frac{\operatorname{ch} \nu_0 \operatorname{sh} \nu_0 \sin \theta}{\operatorname{ch} 2\nu_0 - \cos 2\theta} \delta(\nu - \nu_0).$$

Уравнения (4) перепишем в эллиптических координатах:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\alpha \beta \gamma}{\epsilon} \operatorname{cth} \nu_0 \sin \theta \delta(\nu - \nu_0),$$

\*Чтобы избежать осложнений, связанных с излучением Вавилова — Черенкова, мы рассматриваем случай  $\epsilon \mu \beta^2 < 1$ . Для тороидального соленоида излучение Вавилова — Черенкова рассматривалось в [14]



$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial \theta^2} = \alpha \mu \operatorname{cth} v_0 \sin \theta \delta(v - v_0),$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial \theta^2} = -\alpha \mu \operatorname{cth} v_0 \cos \theta \delta(v - v_0), \quad (\alpha = \frac{4\pi R j}{c}).$$

Решениями этих уравнений являются

$$\varphi = \sin \theta \frac{\alpha \beta \gamma}{\varepsilon} \operatorname{cth} v_0 f(v, v_0),$$

$$A_x = -\alpha \mu \operatorname{cth} v_0 \sin \theta f(v, v_0),$$

$$A_y = \alpha \mu \operatorname{cth} v_0 \cos \theta f(v, v_0).$$

Функция  $f$  определена следующим образом:

$$f(v, v_0) = \begin{cases} \exp(-v) \operatorname{sh} v_0 & \text{при } v > v_0, \\ \exp(-v_0) \operatorname{sh} v & \text{при } v < v_0. \end{cases}$$

Вычислим теперь напряженности электромагнитного поля (ЭМП), соответствующие потенциалам  $\varphi$ ,  $A$ . Вне соленоида ( $v > v_0$ ) имеем

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\alpha \mu \operatorname{ch} v_0 \operatorname{sh} v_0}{R} (\tilde{\gamma} - \gamma) \frac{\exp(-2v) - \cos 2\theta}{\operatorname{ch} 2v - \cos 2\theta},$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\gamma \tilde{\gamma} \operatorname{sh} v_0 \operatorname{ch} v_0 \alpha \beta}{R} \left(\mu - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\sin 2\theta}{\operatorname{ch} 2v - \cos 2\theta},$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\alpha \beta \operatorname{sh} v_0 \operatorname{ch} v_0}{R} \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} - \tilde{\gamma} \mu\right) \frac{\cos 2\theta - \exp(-2v)}{\operatorname{ch} 2v - \cos 2\theta}.$$

Таким образом, при движении соленоида в среде напряженности ЭМП выходят за пределы соленоида при  $\varepsilon \mu \neq 1$  и остаются заключенными в соленоиде при  $\varepsilon \mu = 1$ .

### 3. ЭМП ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОЛЕНОИДА С ПЕРЕМЕННЫМ ТОКОМ

ЭМП соленоидов с переменным током получено в работах [25]. Качественные выводы обсуждены в [9].

Рассмотрим бесконечный цилиндрический соленоид радиуса  $R$  с осью симметрии, направленной вдоль оси  $z$ . Пусть по его обмотке протекает ток

$$\mathbf{j} = \delta(\rho - R) \mathbf{n}_\varphi j(t),$$

причем  $j(t) = 0$  при  $t < 0$ . Тогда согласно [7] имеем для вектор-потенциала при  $t > 0$  следующее выражение:

$$A = A_\varphi n_\varphi, \quad A_\varphi = \frac{2R}{c} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{t-d/c} \frac{j(\tau) d\tau}{[(t-\tau)^2 - d^2/c^2]^{1/2}}.$$

Здесь  $d^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \varphi$ ,  $c$  — скорость света. Рассмотрим простейшие зависимости  $j(t)$  при  $t > 0$ .

$$a) j(t) = j_0 \theta(t) \quad (\theta(x) = 0 \text{ при } x < 0 \text{ и } \theta(x) = 1 \text{ при } x > 0).$$

Тогда

$$A_\varphi = j_0 t \sqrt{\frac{R}{2\rho}} F(\rho, t). \quad (5)$$

Функция  $F(\rho, t)$  равна нулю при  $|\rho - R| > ct$ . Физически это означает, что до точки  $P$ , находящейся на расстоянии  $\rho$  от оси соленоида, еще не дошло воздействие от ближайшей точки соленоида. На фронте волны (который мы условно определим условием  $|\rho - R| < ct < \rho + R$ , что означает, что в точку  $P$  пришло действие от ближайшей точки соленоида, но еще не достигло действие от наиболее удаленной точки соленоида, лежащей в той же плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , что и  $P$ ):

$$F(\rho, t) = 2 \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \varphi_1)^{1/2} (\operatorname{ch} \mu - \cos \varphi)},$$

$$(\cos \varphi_1 = \frac{\rho^2 + R^2 - c^2 t^2}{2\rho R}, \quad \operatorname{ch} \mu = \frac{\rho^2 + R^2}{2\rho R}, \quad 0 < \varphi_1 < \pi).$$

Наконец, в области за фронтом волны ( $\rho + R < ct$ )

$$F(\rho, t) = -2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\mu n) [Q_{n-3/2}(\operatorname{ch} \mu_1) - Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \mu_1)]$$

$$(\operatorname{ch} \mu_1 = (c^2 t^2 - R^2 - \rho^2)/2\rho R)$$

( $Q_\nu(x)$  — функция Лежандра второго рода). В дальнейшем мы будем интересоваться исключительно областью за фронтом волны. При  $ct \gg R$  и  $ct \gg \rho$  из (5) получаем обычный статический вектор-потенциал цилиндрического соленоида:

$$A_\varphi = \frac{2\pi j_0}{c} \begin{cases} R^2/\rho & \text{— вне соленоида,} \\ \rho & \text{— внутри соленоида.} \end{cases}$$

Рассмотрим случай тонкого соленоида ( $R \ll \rho$ ). Тогда

$$A_{\varphi} = 2j_0 t \left(\frac{R}{\rho}\right)^{3/2} Q_{-1/2} \left(\frac{c^2 t^2 - \rho^2 - R^2}{2\rho R}\right).$$

Если к тому же  $c^2 t^2 - \rho^2 \gg \rho R$ , то вне соленоида

$$A_{\varphi} = \frac{2\pi j_0 R^2 \gamma}{\rho c}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{\rho^2}{c^2 t^2}\right)^{-1/2}.$$

Приведем неисчезающие компоненты напряженностей электрического и магнитного поля:

$$E_{\varphi} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} = \frac{2\pi j_0 R^2 \rho}{c^4 t^3} \gamma^3,$$

$$H_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\varphi}) = \frac{2\pi j_0 R^2}{c^3 t^2} \gamma^3.$$

Поток энергии электромагнитного поля направлен по радиусу от соленоида:

$$S_{\rho} = \frac{1}{4\pi c} E_{\varphi} H_z = \frac{\pi j_0^2 R^4 \rho}{c^8 t^5} \gamma^6.$$

Таким образом, имеем следующую физическую картину. После включения тока (при  $t = 0$ ) в обмотке соленоида все поля в точке  $P$  равны нулю до тех пор, пока до нее не дойдет действие от ближайшей к  $P$  точки соленоида. После прохождения фронта волны напряженности  $E$ ,  $H$  убывают со временем сравнительно медленно ( $E_{\varphi} \sim t^{-3}$ ,  $H_z \sim t^{-2}$ ), что является следствием двумерности рассматриваемой задачи. Поток энергии поля направлен по радиусу от соленоида и убывает как  $t^{-5}$ .

б) Пусть  $j(t) = 0$  при  $t < 0$  и линейно растет при  $t > 0$ :  $j(t) = j_1 t \theta(t)$ .

Тогда при  $t > (R + \rho)/c$  имеем вне тонкого соленоида

$$A_{\varphi} = \frac{2\pi R^2 j_1 t}{\rho c} \gamma^{-1}, \quad E_{\varphi} = -\frac{2\pi R^2 j_1}{\rho c^2} \gamma,$$

$$H_z = -\frac{2\pi R^2 j_1}{c^3 t} \gamma, \quad S_{\rho} = \frac{\pi j_1^2 R^4 \gamma^2}{\rho c^6 t}.$$

В итоге  $E_{\varphi}$  при  $t \gg (R + \rho)/c$  стремится к постоянной величине, а  $H_z$  убывает пропорционально  $t^{-1}$ . Поток энергии вне соленоида убывает обрат-

но пропорционально времени и направлен по радиусу от соленоида. Странным является то обстоятельство, что несмотря на линейный рост тока в обмотке соленоида поток, излучаемый соленоидом в окружающее пространство, убывает с течением времени. Посмотрим, что происходит внутри соленоида конечного радиуса  $R$ . При больших значениях  $t$  имеем

$$A_\varphi \approx \frac{2\pi j_1 t}{c} \rho, \quad E_\varphi = -\frac{2\pi j_1 \rho}{c^2}, \quad H_z = \frac{4\pi j_1 t}{c}, \quad S_\rho = -\frac{2\pi j_1^2 t \rho}{c^4}.$$

Итак, при линейно растущем токе поток энергии внутри соленоида также линейно растет со временем. При этом он концентрируется вблизи его поверхности, направлен по радиусу к оси соленоида и стремится, таким образом, стянуть соленоид в направленную вдоль его оси нить.

в) Пусть  $j(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $j(t) = j_2 t^2$  при  $t > 0$ .

Тогда при  $t > (R + \rho)/c$  получаем вне тонкого соленоида

$$A_\varphi = \frac{2\pi R^2 j_2}{c} \left( \frac{t^2}{\rho\gamma} - \frac{\rho}{c^2} \operatorname{arcch} \frac{ct}{\rho} \right), \quad H_z = -\frac{4\pi R^2 j_2}{c^3} \operatorname{arcch} \frac{ct}{\rho},$$

$$E_\varphi = -\frac{4\pi R^2 j_2 t}{c^2 \rho\gamma}, \quad S_\rho = \frac{4\pi R^4 j_2^2 t}{c^6 \rho\gamma} \operatorname{arcch} \frac{ct}{\rho}.$$

Заметим, что в этом случае магнитное поле вне соленоида не исчезает при  $t \rightarrow \infty$ . Более того, оно логарифмически растет:

$$H_z \approx -\frac{4\pi R^2}{c^3} j_2 \ln \frac{2ct}{\rho}.$$

Эти логарифмически расходящиеся со временем члены отсутствуют в качественном анализе работы [9].

г) Пусть по обмотке соленоида радиуса  $R$  течет ток, являющийся периодической функцией времени:

$$j = j n_\varphi \delta(\rho - R) \cos \omega t.$$

Тогда для вектор-потенциала находим частное (синфазное) решение:

$$A = n_\varphi A_\varphi.$$

$$A_\varphi = -\frac{2\pi^2 j R}{c} \cos \omega t \begin{cases} Y_1(kR) J_1(k\rho) & \text{при } \rho < R \\ J_1(kR) Y_1(k\rho) & \text{при } \rho > R \end{cases}$$

( $k = \omega/c$ ,  $J_\nu$  и  $Y_\nu$  — соответственно функции Бесселя и Неймана). Напряженности поля равны

$$E_{\varphi} = -\frac{2\pi^2 jR\omega}{c^2} \sin \omega t \begin{cases} Y_1(kR) J_1(k\rho) & \text{при } \rho < R \\ J_1(kR) Y_1(k\rho) & \text{при } \rho > R, \end{cases}$$

$$H_z = -\frac{2\pi^2 jR\omega}{c^2} \cos \omega t \begin{cases} Y_1(kR) J_0(k\rho) & \text{при } \rho < R \\ J_1(kR) Y_0(k\rho) & \text{при } \rho > R. \end{cases}$$

Поток электромагнитного поля направлен по радиусу:

$$S_{\rho} = \frac{\pi^3 j^2 R^2 \omega^2}{2c^5} \sin 2\omega t \begin{cases} Y_1^2(kR) J_0(k\rho) J_1(k\rho) & \text{при } \rho < R \\ J_1^2(kR) Y_0(k\rho) Y_1(k\rho) & \text{при } \rho > R. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае поток не является положительно определенной величиной. В самом деле, в данной точке пространства ( $\rho = \text{const}$ )  $S_{\rho}$  меняет знак с течением времени. С другой стороны, в данный момент времени  $S_{\rho}$  имеет разные знаки в различных областях пространства. Конечность радиуса соленоида  $R$  приводит к любопытным следствиям. Если  $\omega$  и  $R$  таковы, что  $J_1(kR) = 0$ , то векторный потенциал отличен от нуля только внутри соленоида. Отсюда следует, что трансформатор, вторичная обмотка которого находится поверх первичной (по которой протекает ток  $j$ ), должен перестать работать при таких  $R$  и  $\omega$  (поскольку равна нулю эдс, наводимая во вторичной обмотке). Если в качестве  $\omega$  взять стандартную частоту ( $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}$ ), то наименьшее значение  $R$ , при котором вектор-потенциал исчезает во внешней области,  $\approx 3700 \text{ км}$  (взяв первый нуль функции Бесселя  $J_1$ ). Таким образом, в обычных условиях можно не беспокоиться о снижении эффективности трансформаторов. Если  $\omega$  и  $R$  таковы, что  $Y_1(kR) = 0$ , то векторный потенциал отличен от нуля только вне соленоида. В этом случае, чтобы трансформатор работал, вторичная обмотка должна быть внешней.

д) Пусть ток в соленоиде экспоненциально нарастает или спадает со временем:

$$j = n_{\varphi} j \delta(\rho - R) \exp(\pm \omega t), \quad t > 0.$$

Неисчезающая компонента вектор-потенциала равна

$$A_{\varphi} = \frac{4\pi j R}{c} \exp(\pm \omega t) \begin{cases} I_1(kR) K_1(k\rho) & \text{при } \rho > R \\ K_1(kR) I_1(k\rho) & \text{при } \rho < R \end{cases}$$

( $I_{\nu}(x)$  и  $K_{\nu}(x)$  — модифицированные функции Бесселя). Приведем также напряженности поля и вектор Пойнтинга:

$$E_{\varphi} = \mp \frac{4\pi R j \omega}{c^2} \exp(\pm \omega t) \begin{cases} I_1(kR) K_1(k\rho) & \text{при } \rho > R \\ K_1(kR) I_1(k\rho) & \text{при } \rho < R, \end{cases}$$

$$H_z = \frac{4\pi R j \omega}{c^2} \exp(\pm \omega t) \begin{cases} -I_1(kR) K_0(k\rho) & \text{при } \rho > R \\ K_1(kR) I_0(k\rho) & \text{при } \rho < R, \end{cases}$$

$$S_{\rho} = \pm \frac{4\pi R^2 j^2 \omega^2}{c^5} \exp(\pm 2\omega t) \begin{cases} I_1^2(kR) K_0(k\rho) K_1(k\rho) & \text{при } \rho > R \\ -K_1^2(kR) I_0(k\rho) I_1(k\rho) & \text{при } \rho < R. \end{cases}$$

Отметим, что энергия «вытекает» из соленоида, если ток растет, и «втекает» в него в противном случае.

#### 4. ТОРОИДАЛЬНЫЙ СОЛЕНОИД (ТС) С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Основные сведения. Пусть обмотка соленоида намотана на торе (рис.1):

$$(\rho - d)^2 + z^2 = R^2. \tag{6}$$

Введем координаты  $\tilde{R}$ ,  $\psi$ :

$$\rho = d + \tilde{R} \cos \psi, \quad z = \tilde{R} \sin \psi.$$

Значение  $\tilde{R} = R$  соответствует тору (6). Элементы объема и поверхности тора в этих координатах имеют следующий вид:

$$dV = \tilde{R} (d + \tilde{R} \cos \psi) d\tilde{R} d\psi d\varphi, \\ dS = R (d + R \cos \psi) d\psi d\varphi.$$

С другой стороны, мы часто будем пользоваться тороидальными координатами. Они вводятся следующим образом:

$$x = \frac{\text{sh } \mu \cos \varphi}{\text{ch } \mu - \cos \theta}, \quad y = a \frac{\text{sh } \mu \sin \varphi}{\text{ch } \mu - \cos \theta}, \quad z = a \frac{\sin \theta}{\text{ch } \mu - \cos \theta} \tag{7}$$

$$(0 < \mu < \infty, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi).$$

При фиксированном  $\mu$  точки  $P(x, y, z)$  заполняют поверх-

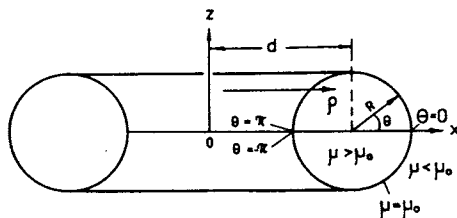


Рис.1. Основные параметры тороидального соленоида

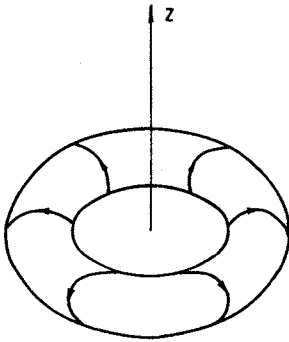


Рис. 2. Полоидальный ток на поверхности тороидального соленоида и сопутствующий ему тороидальный момент

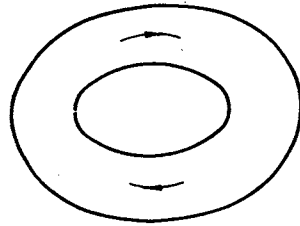


Рис. 3. Тороидальный ток на поверхности соленоида

ность тора с параметрами  $d = a \operatorname{cth} \mu$ ,  $R = a / \operatorname{sh} \mu$ . Пусть  $\mu = \mu_0$  соответствует тору  $T$ . Тогда при  $\mu > \mu_0$  ( $\mu < \mu_0$ ) точка  $P(x, y, z)$  (где  $x, y, z$  определены соотношениями (7)) лежит внутри (вне) тора  $T$ . В тороидальных координатах элементы объема и поверхности:

$$dV = a^3 \frac{\operatorname{sh} \mu \, d\mu \, d\theta \, d\varphi}{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^3}, \quad dS = a^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \, d\theta \, d\varphi}{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^2}.$$

Мы будем различать две разновидности направления тока на поверхности соленоида. Во-первых, когда каждый отдельный виток лежит в плоскости  $\varphi = \operatorname{const}$ . Такая обмотка называется полоидальной (рис.2). Во-вторых, когда каждый отдельный виток лежит в плоскости  $z = \operatorname{const}$ . Такая обмотка называется тороидальной (рис.3). Мы рассмотрим эти случаи по отдельности.

**Полоидальный ток.** В координатах  $\tilde{R}$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  плотность тока, текущего по поверхности тора (б), определяется выражением

$$\mathbf{j}_0 = -\frac{gc}{4\pi} \frac{\delta(\tilde{R} - R)}{d + R \cos \psi} \mathbf{n}_\psi. \quad (8)$$

Здесь  $g = 2NI/c$ ,  $N$  — полное число витков в обмотке соленоида,  $I$  — ток в отдельном витке;  $\mathbf{n}_\psi$  — единичный вектор, касательный к поверхности тора (б), лежащий в плоскости  $\varphi = \operatorname{const}$ :

$$\mathbf{n}_\psi = \mathbf{n}_z \cos \psi - (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \sin \psi.$$

Эти же величины в тороидальных координатах выглядят следующим образом:

$$\mathbf{j}_0 = -\frac{gc}{4\pi a^2} \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\text{sh } \mu_0} (\text{ch } \mu_0 - \cos \theta)^2 \mathbf{n}_\theta, \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_\theta = [(\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \text{sh } \mu \sin \theta + \mathbf{n}_z (1 - \text{ch } \mu \cos \theta)] (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{-1}.$$

Здесь  $\mathbf{n}_\theta$  — тот же вектор, что и  $\mathbf{n}_\psi$ , но в тороидальных координатах. В стационарном случае напряженность магнитного поля равна нулю вне соленоида. Внутри него отлична от нуля только одна компонента ( $H_\varphi$ ). Она равна  $g/\rho$ . Здесь  $\rho$  — расстояние от оси симметрии до текущей точки (рис.1) внутри соленоида ( $\rho = d + \tilde{R} \cos \psi = a \text{sh } \mu (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{-1}$ ). Константа  $g$  может быть также выражена через магнитный поток  $\Phi$ , протекающий через поперечное сечение соленоида:  $g = \Phi [2\pi(d - \sqrt{d^2 - R^2})]^{-1}$ . Вектор-потенциалы для ТС были получены в работе [26], а их свойства рассмотрены в [3,7]. В интегральной форме неисчезающие цилиндрические компоненты ВП имеют вид

$$A_z = \frac{g\sqrt{R}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d - \rho \cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{3/4}} Q_{1/2}(\text{ch } \nu),$$

$$A_\rho = \frac{g\sqrt{R}}{2\pi} z \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{3/4}} Q_{1/2}(\text{ch } \nu), \quad (10)$$

$$\text{ch } \nu = \frac{r^2 + d^2 + R^2 - 2d\rho \cos \varphi}{2R [(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{1/2}}, \quad r^2 = \rho^2 + z^2,$$

$Q_\nu(x)$  — функция Лежандра второго рода.

Для бесконечно тонкого соленоида ( $R \ll d$ ) эти интегралы берутся в замкнутом виде:

$$A_z = \frac{R^2}{2(d\rho)^{3/2} \text{sh } \mu_1} [\rho Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1) - d Q_{-1/2}^1(\text{ch } \mu_1)],$$

$$A_\rho = -\frac{R^2 z}{2(d\rho)^{3/2} \text{sh } \mu_1} Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1), \quad \text{ch } \mu_1 = \frac{r^2 + d^2}{2d\rho}. \quad (11)$$

(Здесь и в дальнейшем:  $P_\nu^\lambda(x)$ ,  $Q_\nu^\lambda(x)$  — присоединенные функции Лежандра.) На больших расстояниях ВП убывает как  $r^{-3}$ :

$$A_z \sim \frac{\pi g d R^2}{8} \frac{1 + 3 \cos 2\theta_s}{r^3}, \quad A_\rho \sim \frac{3}{8} \frac{\pi g d R^2 \sin 2\theta_s}{r^3} \quad (12)$$

( $r$ ,  $\theta_s$  — обычные сферические координаты).



Выбору полоидального тока в виде (8) или (9) отвечает равное нулю магнитное поле вне соленоида. Возникает вопрос: является ли такой выбор единственным? Легко видеть, что это не так. Более общее распределение тока, обладающего тем же свойством, имеет вид

$$j_0 = - \frac{f(\mu) \theta(\mu - \mu_0) (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^2}{\operatorname{sh} \mu} n_\theta. \quad (13)$$

Здесь  $f(\mu)$  — произвольная непрерывная функция. В этом выражении неявно предполагается, что токи сосредоточены внутри соленоида радиуса  $a/\operatorname{sh} \mu_0$ . Току (13) отвечает ВП, равный

$$A_z = \frac{8\sqrt{2}a^2}{c} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} P_{n-1/2} \int_{\mu_0}^{\infty} d\mu f(\mu) Q_{n-1/2} \times \\ \times [(n + 1/2) Q_{n+1/2} - (n - 1/2) Q_{n-3/2}],$$

$$A_\rho = - \frac{8\sqrt{2}a^2}{c} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum \sin n\theta P_{n-1/2}^1 \int_{\mu_0}^{\infty} d\mu f(\mu) Q_{n-1/2} \times \\ \times (Q_{n+1/2} - Q_{n-3/2})$$

вне соленоида ( $\mu < \mu_0$ ) и

$$A_z = \frac{8\sqrt{2}a^2}{c} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} \times \\ \times \left\{ Q_{n-1/2} \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu f(\mu) P_{n-1/2} [(n + 1/2) Q_{n+1/2} - (n - 1/2) Q_{n-3/2}] + \right. \\ \left. + P_{n-1/2} \int_{\mu}^{\infty} d\mu f(\mu) Q_{n-1/2} [(n + 1/2) Q_{n+1/2} - (n - 1/2) Q_{n-3/2}] \right\},$$

$$A_\rho = - \frac{8\sqrt{2}a^2}{c} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum \sin n\theta \times \\ \times [P_{n-1/2}^1 \int_{\mu}^{\infty} d\mu f(\mu) Q_{n-1/2} (Q_{n+1/2} - Q_{n-3/2}) + \\ + Q_{n-1/2}^1 \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu f(\mu) P_{n-1/2} (Q_{n+1/2} - Q_{n-3/2})]$$

внутри него ( $\mu > \mu_0$ ). Здесь и в дальнейшем мы не указываем аргумент функций Лежандра, если он равен  $\operatorname{ch} \mu$ . На больших расстояниях ВП убывает как  $r^{-3}$ :

$$A_{\rho} \sim \frac{3}{2} \frac{\pi^2 a^5}{r^3 c} \sin 2\theta_s \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu \operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh}^3 \mu} f(\mu),$$

$$A_z \sim \frac{\pi^2 a^5}{2r^3 c} (1 + 3 \cos 2\theta_s) \int_{\mu_0}^{\infty} d\mu f(\mu) \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh}^3 \mu}.$$

Внутри ТС ( $\mu > \mu_0$ ) отлична от нуля только  $\varphi$ -компонента магнитного поля:

$$H_{\varphi} \sim \frac{4\pi a}{c} \frac{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}{\operatorname{sh} \mu} \int_{\mu_0}^{\mu} f(\mu) d\mu.$$

Магнитный поток через поперечное сечение ТС равен

$$\Phi = \int H_{\varphi} dS = \frac{8\pi^2 a^3}{c} \int_{\mu_0}^{\infty} (\operatorname{cth} \mu - 1) f(\mu) d\mu.$$

Найденный в [26] ВП получается при следующем выборе функций  $f$ :

$$f = \frac{gc}{4\pi a^2} \delta(\mu - \mu_0).$$

Приведем также выражения для тока, магнитного поля и потока магнитного поля в координатах  $\bar{R}$ ,  $\psi$ :

$$\mathbf{j}_0 = - \frac{f_1(\bar{R}) \theta (R - \bar{R})}{d + \bar{R} \cos \psi} \mathbf{n}_{\psi}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{n}_{\varphi} \frac{4\pi}{c} \frac{\theta (R - \bar{R})}{d + \bar{R} \cos \psi} \int_{\bar{R}}^R f_1(x) dx,$$

$$\Phi = \frac{8\pi^2}{c} \int_0^R (d - \sqrt{d^2 - x^2}) f_1(x) dx.$$

Здесь  $f_1$  — произвольная непрерывная функция, задающая распределение тока внутри соленоида в направлении радиуса  $\bar{R}$ .

**Торондальный ток.** Определим вклад отдельного витка, лежащего на поверхности соленоида в плоскости  $z = \text{const}$  (или  $\psi = \text{const}$ ), в вектор-потенциал:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} j \oint \frac{d\varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{n}_{\varphi'}.$$

Здесь  $j$  — ток в отдельном витке,  $\mathbf{n}_{\varphi}$  — единичный вектор, определяющий направление тока в этом витке ( $\mathbf{n}_{\varphi} = \mathbf{n}_y \cos \varphi - \mathbf{n}_x \sin \varphi$ ). Единственной отличной от нуля компонентой ВП является

$$A_{\varphi}(\rho, z) = \frac{2j}{c\sqrt{\rho}} Q_{1/2}\left(\frac{t^2}{2\rho s}\right), \quad (14)$$

где

$$s = d + R \cos \psi, \quad t^2 = \rho^2 + (d + R \cos \psi)^2 + (z - R \sin \psi)^2.$$

Интегрируя (14) по  $\psi$ , получаем ВП соленоида с тороидальным направлением тока:

$$A_{\varphi} = \frac{2j}{c\sqrt{\rho}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{s}} Q_{1/2}\left(\frac{t^2}{2\rho s}\right). \quad (15)$$

На больших расстояниях  $A_{\varphi}$  убывает как  $r^{-2}$ :

$$A_{\varphi} \sim \frac{2\pi^2 j d \sin \theta_s}{c r^2}.$$

При получении (15) неявно предполагалось равномерное распределение витков на поверхности соленоида (более точно: плотность витков в плоскости  $\varphi = \text{const}$  выбрана не зависящей от  $\psi$ ). Плотность тока, соответствующая ВП (15), получается действием на него лапласиана ( $\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j$ ). Это дает

$$j = n_{\varphi} \frac{\delta \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2 - R}}{R(d + R \cos \psi)} = n_{\varphi} \frac{(\text{ch } \mu_0 - \cos \theta)^2}{a^3} \delta(\mu - \mu_0)$$

$$(R = a/\text{sh } \mu_0, \quad d = a \text{cth } \mu_0).$$

Удобно ВП (15) представить в тороидальных координатах:

$$A_{\varphi} = -\frac{8\sqrt{2}}{ca} j \text{sh } \mu_0 (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} \frac{f_n(\mu, \mu_0)}{n^2 - 1/4} Q_{n-1/2}(0), \quad (16)$$

где функция  $f_n(\mu, \mu_0)$  равна  $P_{n-1/2}^1(0) Q_{n-1/2}^1$  внутри соленоида ( $\mu > \mu_0$ ) и  $Q_{n+1/2}^1(0) P_{n-1/2}^1$  вне его ( $\mu < \mu_0$ ),

$$P_{\nu}^{\lambda}(0) \equiv P_{\nu}^{\lambda}(\text{ch } \mu_0), \quad Q_{\nu}^{\lambda}(0) \equiv Q_{\nu}^{\lambda}(\text{ch } \mu_0).$$

Из (15) или (16) сразу следует, что магнитное поле не исчезает внутри ТС.

**Об исчезновении магнитного поля внутри ТС.** Часто встречается утверждение (см., напр., [9, 10]), что магнитное поле исчезает внутри соленоида, если на его поверхности ток течет в тороидальном направлении. Здесь мы уточним условия, при которых это имеет место. Для этого

запишем уравнения  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = 0$  в тороидальных координатах (имея в виду, что только  $\varphi$ -компонента ВП отлична от нуля):

$$H_\mu = \frac{(\text{ch } \mu - \cos \theta)^2}{a \text{ sh } \mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\text{sh } \mu A_\varphi}{\text{ch } \mu - \cos \theta} \right) = 0,$$

$$H_\theta = \frac{(\text{ch } \mu - \cos \theta)^2}{a \text{ sh } \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\text{sh } \mu A_\varphi}{\text{ch } \mu - \cos \theta} \right) = 0, \quad H_\varphi = 0.$$

Отсюда сразу следует, что  $H = 0$  внутри ( $\mu > \mu_0$ ) ТС, если

$$A_\varphi = C_0 \frac{\text{ch } \mu - \cos \theta}{\text{sh } \mu} \quad (C_0 = \text{const}). \quad (17)$$

Вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta \mathbf{A} = - \frac{4\pi}{c} \delta(\mu - \mu_0) j(\theta) \mathbf{n}_\varphi. \quad (18)$$

Здесь  $j(\theta)$  — однозначная функция угла  $\theta$ , которая будет определена позднее. Конечными решениями этого уравнения являются

$$A_\varphi = (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum D_n \frac{1}{1 + \delta_{n0}} P_{n-1/2}^1 \cos n\theta \quad (19)$$

вне соленоида ( $\mu < \mu_0$ ) и

$$A_\varphi = (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum F_n \frac{1}{1 + \delta_{n0}} Q_{n-1/2}^1 \cos n\theta \quad (20)$$

внутри него ( $\mu > \mu_0$ ). Физический ВП везде непрерывен и, в частности, при  $\mu = \mu_0$ . Это приводит к следующему соотношению между  $F$ ,  $D$ :

$$F_n = D_n \frac{P_{n-1/2}^1(0)}{Q_{n-1/2}^1(0)}.$$

Далее, внутри соленоида ( $\mu > \mu_0$ ) ВП (20) должен совпадать с (17). Это определяет коэффициент  $F$ :

$$F_n = C_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1/4}.$$

Таким образом, ВП равен:

$$A_{\varphi} = C_0 \frac{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}{\operatorname{sh} \mu} = \\ = C_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} \frac{1}{n^2 - 1/4} Q_{n-1/2}^1$$

внутри соленоида и

$$A_{\varphi} = C_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} \frac{Q_{n-1/2}^1(0)}{P_{n-1/2}^1(0)} \frac{1}{n^2 - 1/4} P_{n-1/2}^1$$

вне его. На больших расстояниях ВП убывает как  $r^{-2}$ :

$$A_{\varphi} \sim \frac{2a^2}{\pi r^2} C_0 \sin \theta_s \sum \frac{1}{1 + \delta_{n0}} \frac{Q_{n-1/2}^1(0)}{P_{n-1/2}^1(0)}$$

В соответствии с (18) скачок  $\partial A_{\varphi} / \partial \mu$  при  $\mu = \mu_0$  определяет функцию  $j(\theta)$ :

$$j(\theta) = - \frac{cC_0}{2\sqrt{2}\pi^2 a^2} \frac{(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^{5/2}}{\operatorname{sh} \mu_0} \sum \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} [P_{n-1/2}^1(0)]^{-1}. \quad (21)$$

Этой плотности тока соответствует плотность числа витков, пропорциональная

$$(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^{1/2} \sum \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} [P_{n-1/2}^1(0)]^{-1}. \quad (22)$$

Мы заключаем: исчезновение магнитного поля  $H$  внутри ТС имеет место (для тороидального направления тока на поверхности соленоида) при весьма специальной плотности тока (21) или плотности числа витков (22).

## 5. ТОРОИДАЛЬНЫЙ СОЛЕНОИД С МЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПОЛОИДАЛЬНЫМ ТОКОМ

Вернемся теперь к выражению для полоидального тока (8). Пусть теперь константа  $g$  зависит от времени. Заметим, что в отличие от рассмотренного в разд.3 случая цилиндрического соленоида электромагнитное поле тороидального соленоида не обладает свойством последствия. Это означает, что в данной точке  $P$  переходные эффекты (обязанные включению в момент времени  $t = 0$  тока в соленоиде) кончаются, как только точки  $P$  достигнет действие от наиболее удаленной точки соленоида. Рассмотрим несколько конкретных зависимостей  $g(t)$ .

а) Пусть  $g(t) = j_0 \theta(t)$ .

После момента времени  $t_1 = \frac{\sqrt{(\rho + d)^2 + z^2} + R}{c}$  имеем в точке  $P(\rho, z)$ :

$$A_z = j_0 A_z^{(0)}, \quad A_\rho = j_0 A_\rho^{(0)},$$

где

$$A_z^{(0)} = \frac{\sqrt{R}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d - \rho \cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{3/4}} Q_{1/2}(\text{ch } \mu), \quad (23)$$

$$A_\rho^{(0)} = \frac{\sqrt{R}}{2\pi} z \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{3/4}} Q_{1/2}(\text{ch } \mu)$$

$$(\text{ch } \mu = \frac{r^2 + d^2 + R^2 - 2d\rho \cos \varphi}{2R [(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{1/2}}, \quad r^2 = \rho^2 + z^2).$$

Эти выражения совпадают с выражениями для векторных потенциалов тороидального соленоида [26], по обмотке которого протекает постоянный ток ( $g = 1$ ).

Таким образом, имеем следующую физическую картину. В заданный момент времени напряженности поля и вектор Пойнтинга отличны от нуля только внутри слоя:

$$[(ct - R)^2 - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} - d \sin \theta \leq r \leq [(ct + R) - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} + d \sin \theta.$$

Толщина этого слоя равна  $\approx 2R$  вдоль оси  $z$  и  $2(d + R)$  вдоль оси  $x$  или  $y$ . Скорость его расширения равна скорости света. Перед этим слоем

$$(r > [(ct + R) - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} + d \sin \theta)$$

все компоненты вектор-потенциала равны нулю. За слоем

$$(0 < r < [(ct - R)^2 - d^2 \cos^2 \theta]^{1/2} - d \sin \theta)$$

они определяются соотношениями (23).

б) Пусть  $g(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $g = j_1 t$  при  $t > 0$ .

Тогда при  $t > t_1$  имеем  $A_\rho = j_1 t A_\rho^{(0)}$ ,  $A_z = j_1 t A_z^{(0)}$ , где  $A_\rho^{(0)}$  и  $A_z^{(0)}$  по-прежнему определяются соотношениями (23). Вне соленоида отличны от нуля только напряженности электрического поля:  $E_\rho = -\frac{1}{c} j_1 A_\rho^{(0)}$ ,  $E_z = -\frac{1}{c} j_1 A_z^{(0)}$ .

Таким образом, при линейно растущем со временем токе поток электромагнитной энергии наружу отсутствует. Он концентрируется внутри соленоида, стремясь сжать его в нить:  $\rho = d, z = 0$ . Докажем это утверждение для тонкого соленоида. Внутри соленоида имеем [7, 26 ]:

$$A_\rho \approx j_1 t \exp(-\mu) \sin \theta, \quad A_z \approx -j_1 t \exp(-\mu) \cos \theta, \quad (24)$$

где  $\mu, \theta$  — тороидальные координаты ( $\rho = \frac{a \operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}$ ,  $z = \frac{a \sin \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}$ ). Из (24) следует, что внутри тонкого соленоида отлична от нуля только  $A_\theta = -j_1 t \exp(-\mu)$ . Неисчезающие компоненты напряженностей

$$E_\theta = \frac{1}{c} j_1 \exp(-\mu), \quad H_\varphi = j_1 t / \rho.$$

Вектор Пойнтинга направлен перпендикулярно осевой линии ( $\rho = d, z = 0$ ) соленоида

$$\mathbf{S} = S \mathbf{e}_\mu, \quad S = \frac{j_1^2 t}{4\pi \rho c^2} \exp(-\mu)$$

( $\exp(-\mu) = [(\rho - d)^2 + z^2]^{1/2} / 2d$  — для тонкого соленоида).

в) Пусть  $g = j_2 t^2 \theta(t)$ .

Тогда

$$A_\rho = j_2 t^2 A_\rho^{(0)} + \frac{1}{c^2} j_2 A_\rho^{(2)}, \quad A_z = j_2 t^2 A_z^{(0)} + \frac{1}{c^2} j_2 A_z^{(2)}.$$

Здесь  $A_\rho^{(0)}, A_z^{(0)}$  определены соотношениями (23),

$$A_z^{(2)} = \frac{1}{4\pi} R^{3/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d - \rho \cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{1/4}} [Q_{3/2}(\operatorname{ch} \mu) - Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \mu)],$$

$$A_\rho^{(2)} = \frac{R^{3/2} z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{[(\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2]^{1/4}} [Q_{3/2}(\operatorname{ch} \mu) - Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \mu)]. \quad (25)$$

На больших расстояниях  $A_z^{(2)}$  и  $A_\rho^{(2)}$  убывают как  $r^{-1}$ :

$$A_z^{(2)} \sim -\frac{\pi R^2 d}{8r} (3 + \cos 2\theta_s), \quad A_\rho^{(2)} \sim -\frac{\pi R^2 d}{8r} \sin 2\theta_s.$$

Далее,  $A_\rho^{(2)} = 0$  на оси  $z$  и в плоскости  $z = 0$ . На оси  $z$

$$A_z^{(2)}(\rho = 0, z) = \frac{R^{3/2}d}{2(d^2 + z^2)^{1/4}} [Q_{3/2}(\text{ch } \mu_0) - Q_{-1/2}(\text{ch } \mu_0)]$$

$$(\text{ch } \mu_0 = \frac{z^2 + d^2 + R^2}{2R \sqrt{d^2 + z^2}}).$$

Для тонкого соленоида выражения (25) упрощаются:

$$A_z^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{(d\rho)^{1/2}} [d Q_{-1/2}(\text{ch } \mu_1) - \rho Q_{1/2}(\text{ch } \mu_1)],$$

$$A_\rho^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{R^2 z}{(d\rho)^{1/2}} Q_{1/2}(\text{ch } \mu_1), \quad \text{ch } \mu_1 = \frac{r^2 + d^2}{2d\rho}.$$

В результате вне соленоида отличны от нуля следующие напряженности поля:

$$E_\rho = \frac{R^2 j_2 z t}{c (d\rho)^{3/2}} \frac{1}{\text{sh } \mu_1} Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1),$$

$$E_z = -\frac{R^2 j_2 t}{c (d\rho)^{3/2}} \frac{1}{\text{sh } \mu_1} [\rho Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1) - d Q_{-1/2}^1(\text{ch } \mu_1)],$$

$$H_\varphi = -\frac{R^2}{c^2} \frac{j_2}{(d\rho)^{1/2}} Q_{1/2}^1(\text{ch } \mu_1).$$

Таким образом, вне соленоида возникает не зависящее от времени магнитное поле. При  $r \rightarrow \infty$  имеем

$$E_\rho = -\frac{3\pi d R^2 j_2 t}{4c r^3} \sin 2\theta_s,$$

$$E_z = -\frac{\pi d R^2 j_2 t}{4c r^3} (1 + 3 \cos 2\theta_s),$$

$$H_\varphi = -\frac{\pi d R^2 j_2 \sin \theta_s}{2c^2 r^2}$$

( $r, \theta_s$  — сферические координаты).

Поток энергии через сферу достаточно большого радиуса  $r$  направлен от соленоида:

$$S_r = \frac{1}{4\pi c} E_\theta H_\varphi = \frac{\pi d^2 R^2 j_2^2 t \sin^2 \theta_s}{16c^4 r^5}.$$



г) Пусть  $g(t) = j_3 t^3 \theta(t)$ .

Тогда при  $t > t_1$  имеем

$$A_\rho = j_3 t^3 A_\rho^{(0)} + \frac{3}{c^2} j_3 t A_\rho^{(2)},$$

$$A_z = j_3 t^3 A_z^{(0)} + \frac{3}{c^2} j_3 t A_z^{(2)} + \frac{\pi R^2 dj_3}{c^3}.$$

Выпишем исчезающие напряженности электромагнитного поля:

$$E_\rho = -\frac{3j_3 t^2}{c} A_\rho^{(0)} - \frac{3j_3}{c^3} A_\rho^{(2)},$$

$$E_z = -\frac{3j_3 t^2}{c} A_z^{(0)} - \frac{3j_3}{c^3} A_z^{(2)},$$

$$H_\varphi = -\frac{3j_3 R^2 t}{c^2 (d\rho)^{1/2}} Q_{1/2}(\text{ch } \mu_1).$$

На больших расстояниях

$$E_\theta \sim -\frac{3j_3}{4c^3 r} \pi d R^2 \sin \theta_s \left(1 + \frac{c^2 t^2}{r^2}\right),$$

$$H_\varphi \sim -\frac{3j_3 \pi t d R^2}{2c^2 r^2} \sin \theta_s.$$

Радиальная компонента вектора Пойнтинга направлена от соленоида:

$$S_r = \frac{9j_3^2 \pi t d^2 R^4 \sin^2 \theta_s}{32c^6 r^3} \left(1 + \frac{c^2 t^2}{r^2}\right).$$

Вернемся снова к случаю тока, линейно зависящего от времени. Пусть цилиндрический или тороидальный соленоид охвачен замкнутым витком проводника  $C$  (в последнем случае виток проходит через отверстие соленоида). Постоянное вихревое электрическое поле  $E$  вызывает в витке  $C$  ток  $j = \sigma E$  ( $\sigma$ -проводимость), что приводит к выделению в проводнике  $C$  джоулева тепла. Поскольку вектор Пойнтинга убывает со временем ( $\sim t^{-1}$ ) для цилиндрического соленоида и в точности равен нулю (при  $t > t_1$ ) для тороидального соленоида, то непонятно, с помощью какого механизма перекачивается энергия электромагнитного поля в виток проводника. Возможный ответ был указан в работе [27]. Индуцируемый в проводнике  $C$  ток приводит к появлению магнитного поля  $H$ , силовые линии которого имеют вид концентрических окружностей,

охватывающих  $C$ . В результате возникает вектор Пойнтинга  $EH/4\pi c$ , который направлен перпендикулярно проводнику  $C$  и, таким образом, «втекает» в него. Или иначе: ток в витке  $C$  создает сам себе вектор Пойнтинга.

Анализ следующего мысленного эксперимента, как нам кажется, весьма поучителен. Пусть, как и прежде, виток провода  $C$  охватывает тороидальный соленоид, проходя через его отверстие. Включим этот виток в мост сопротивлений с внешним источником тока таким образом, чтобы скомпенсировать эдс, наводимую в  $C$ . Пусть ток в соленоиде линейно растет во времени. Известно, что сопротивление проводника, пронизываемого магнитным потоком, является периодической функцией величины этого потока (см., напр., [28]). Ввиду этого равновесие моста сопротивлений периодически нарушается, что может привести к срабатыванию спускового устройства. Возникает вопрос: как передается энергия от соленоида к этому устройству? Следуя логике работы [27], рассуждаем следующим образом. Изменение потока внутри соленоида приводит к изменению сопротивления витка  $C$ , охватывающего соленоид. В  $C$  возникает нескомпенсированный ток, который создает вокруг  $C$  магнитное поле  $H$ . Вектор Пойнтинга, образованный из исходного вихревого электрического поля  $E$  и индуцируемого магнитного поля  $H$ , направлен перпендикулярно к  $C$  и является возможным кандидатом переноса энергии. Передача энергии от соленоида к заряженной частице, возникающая при включении соленоида, неявно учитывается при рассмотрении эффекта Ааронова — Бома [29].

## 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОРОИДАЛЬНОГО СОЛЕНОИДА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ТОКОМ

Пусть периодически меняющийся во времени полоидальный ток течет по обмотке ТС. Плотность такого тока

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos \omega t, \quad (26)$$

где  $\mathbf{j}_0$  определяется выражениями (8) или (9). В кулоновской калибровке отличны от нуля две сферические компоненты ВП:

$$A_r = \frac{Rdg \cos \theta}{4\pi} \iint \frac{d\psi d\varphi}{qR_{01}} \cos \psi \cos (kR_{01} - \omega t),$$

$$A_\theta = \frac{Rdg}{4\pi} \iint \frac{d\psi d\varphi}{qR_{01}} \cos \varphi \cos \psi \cos (kR_{01} - \omega t),$$

$$(R_{01}^2 = p^2 - 2qR \cos \psi, \quad p^2 = r^2 + d^2 - 2dp \cos \varphi,$$

$$q^2 = (\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2, \quad k = \frac{\omega}{c}).$$

Для тонкого соленоида ( $R \ll d$ ) эти выражения упрощаются:

$$A_r = \frac{1}{4} Rdg \cos \theta (\cos \omega t \int F d\varphi + \sin \omega t \int G d\varphi),$$

$$A_\theta = \frac{1}{4} Rgr (\cos \omega t \int F \cos \varphi d\varphi + \sin \omega t \int G \cos \varphi d\varphi) - \operatorname{tg} \theta A_r.$$

Здесь

$$F = \frac{R}{p^3} \cos kp \cdot (J_0 - J_2) + \frac{2}{pq} \sin kp \cdot J_1,$$

$$G = \frac{R}{p^3} \sin kp \cdot (J_0 - J_2) - \frac{2}{pq} \cos kp \cdot J_1.$$

Встречающиеся в этих выражениях функции Бесселя зависят от аргумента  $x = kRq/p$ . Если  $kR \ll 1$ , то

$$A_r = \frac{1}{4} R^2 dg \cos \theta (\cos \omega t \int f d\varphi + \sin \omega t \int g d\varphi), \quad (27)$$

$$A_\theta = \frac{1}{4} R^2 gr (\cos \omega t \int f \cos \varphi d\varphi + \sin \omega t \int g \cos \varphi d\varphi) - \operatorname{tg} \theta A_r$$

$$(f = \frac{\cos kp}{p^3} + \frac{k}{p^2} \sin kp, \quad g = \frac{\sin kp}{p^3} - \frac{k}{p^2} \cos kp).$$

При наложении дополнительных условий  $d \ll r$  и  $kd^2 \ll r$  мы получаем

$$A_r = \frac{\Lambda d \cos \theta}{2r^3} [(\cos \Omega + kr \sin \Omega) J_0 + \frac{d \sin \theta}{r} (3 \sin \Omega - 2kr \cos \Omega) J_1],$$

$$A_\theta = \frac{\Lambda \cos \Omega}{4r^3} [d \sin \theta (J_0 - 3J_2) - 2kr^2 J_1] + \frac{\Lambda}{2r^2} \sin \Omega (J_1 - kd \sin \theta J_2) \quad (28)$$

( $\Omega = kr - \omega t$ ,  $\Lambda = \pi R^2 g$ ). Аргументом функций Бесселя в этих выражениях является  $kd \sin \theta$ . Неисчезающие компоненты напряженностей ЭМП:

$$\begin{aligned}
 H_{\varphi} &= \frac{\Lambda}{2r^3} [(k^2 r^2 - 1) \sin \Omega + kr \cos \Omega] J_1 + \frac{\Lambda kd}{4r^3} \sin \theta \sin \Omega J_0, \\
 E_{\theta} &= \frac{\Lambda k}{2r^2} \cos \Omega (J_1 - kd \sin \theta J_2) - \frac{\Lambda k}{4r^3} \sin \Omega [d \sin \theta (J_0 - 3J_2) - 2kr^2 J_1], \\
 E_r &= -\frac{\Lambda kd \cos \theta}{2r^3} (\sin \Omega - kr \cos \Omega) J_0 + \\
 &+ \frac{\Lambda kd^2 \sin \theta \cos \theta}{2r^4} (3 \cos \Omega + 2kr \sin \Omega) J_1.
 \end{aligned} \tag{29}$$

В волновой зоне ( $kr \gg 1$ ) имеем

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = \frac{\Lambda k^2 \sin \Omega}{2r} J_1, \quad E_r = \frac{\Lambda k^2 d}{2r^2} \cos \theta \cos \Omega J_0.$$

Радиальная компонента вектора Пойнтинга определена выражением

$$S_r = \frac{1}{4\pi c} E_{\theta} H_{\varphi} = \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\Lambda k^2 \sin \Omega}{2r} \right)^2 [J_1 (kd \sin \theta)]^2.$$

Интегральный поток энергии (усредненный по периоду) через сферу достаточно большого радиуса выражается формулой

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \int S_r dS = \frac{1}{4c} \left( \frac{\Lambda k^2}{2} \right)^2 \int_0^{\pi} [J_1 (kd \sin \theta)]^2 \sin \theta d\theta.$$

Отнеся эту величину к квадрату полного тока ( $NI$ ), мы получаем так называемое сопротивление излучения [30]:

$$\frac{\pi^2 k^4 R^4}{4c^3} \int_0^{\pi} (J_1)^2 \sin \theta d\theta.$$

Этот интеграл берется в конечном виде при малых и больших значениях  $kd$ :

$$\int_0^{\pi} (J_1)^2 \sin \theta d\theta = \begin{cases} (kd)^2/3 & \text{при } kd \ll 1 \\ (kd)^{-1} & \text{при } kd \gg 1. \end{cases}$$

Экспериментальные исследования ЭМП тороидальных соленоидов с периодически меняющимся током были выполнены почти полвека назад. Их описание можно найти в прекрасной книге [21]. Типичная частота, использованная в этих экспериментах, порядка 1 МГц. Параметры соленоида:  $d \approx 5$  см,  $R \approx 1$  см. Это дает  $R/d \approx 0,2$ ,  $kR \approx 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $kd \approx 10^{-3}$ . Таким образом, полученные выше формулы пригодны для описания упо-

мянутых экспериментов. Мы их обсудим в следующем обзоре, посвященном общезначимым приложениям ТС.

## 7. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОРОИДАЛЬНОГО СОЛЕНОИДА

Разложение по сферическим функциям. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим выражением для полоидального тока в соленоиде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \exp(-i\omega t) \quad (30)$$

(здесь  $\mathbf{j}_0$  определено соотношением (8)). Поскольку все компоненты ВП и напряженностей поля содержат один и тот же временной множитель  $\exp(-i\omega t)$ , то мы опустим его во всех промежуточных выражениях. О нем следует вспоминать при дифференцировании и усреднении по времени. Этот множитель должен быть восстановлен в окончательных выражениях, от которых должна быть взята реальная часть. Введем сферические компоненты ВП, имеющие определенные проекции орбитального углового момента:

$$A_0 = A_z, \quad A_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x \pm iA_y). \quad (31)$$

Разлагаем эти компоненты по состояниям с определенным угловым моментом:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{2} i\pi g k R \sum V_l^0 F_l^0, \\ A_1 &= -\frac{i\pi g k R}{2\sqrt{2}} \exp(i\varphi) \sum V_l^1 F_l^1. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $V_l^m = h_l(kr) P_l^m$ ,  $h_l$  — сферическая функция Ханкеля, ( $h_l(x) = H_{l+1/2}^{(1)}(x)/\sqrt{x}$ ) — нормированная ( $\int [P_l^m(x)]^2 dx = 1$ ) функция Лежандра. Коэффициенты  $F_l$  определяются плотностью тока

$$F_l^0 = \int d\psi \cos \psi g_l P_l, \quad F_l^1 = \int d\psi \sin \psi g_l P_l^1, \quad (33)$$

где  $g_l$  — сферическая функция Бесселя ( $g_l(x) = J_{l+1/2}(x)/\sqrt{x}$ ) аргумента  $k\rho$  ( $\rho = (d^2 + R^2 + 2d \cos \psi)^{1/2}$ ). Полиномы Лежандра в этом выражении имеют в качестве аргумента  $R \sin \psi / \rho$ . Из (32) легко находим цилиндрические компоненты ВП:

$$A_z = A_0, \quad A_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} i\pi g k R \sum V_l^1 F_l^1, \quad A_\varphi = 0.$$

Из (33) тотчас же следует, что отличны от нуля только коэффициенты, отвечающие четным значениям  $l$ . В качестве иллюстрации приведем  $F_l^0$  и  $F_l^1$  ( $l = 0, 2$ ) для бесконечно тонкого соленоида:

$$\begin{aligned}
 F_0^0 &= \pi \sqrt{2} [g_{-1} J_1 - \frac{1}{2} \varepsilon g_0 (J_0 - J_2)], \\
 F_2^0 &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} [g_{-3} {}^2J_1 - \varepsilon (J_0 - J_2) (3g_2 - 3g_{-2} - g_0)], \\
 F_2^1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{15} \pi \varepsilon [g_2 (J_0 + J_2) - \frac{\varepsilon}{\delta} (J_1 + J_3) (6 \frac{\cos \delta}{\delta^2} - \cos \delta + \frac{9}{2} \frac{\sin \delta}{\delta}) + \\
 &\quad + \frac{3\varepsilon^2}{2\delta} (J_0 - J_4) (5 \frac{\sin \delta}{\delta^2} - \frac{1}{2} \sin \delta - \frac{3 \cos \delta}{\delta})], \quad \varepsilon = \frac{R}{d}.
 \end{aligned}$$

В этом выражении сферические функции Бесселя зависят от аргумента  $\delta = kd$ , а функции Бесселя с целочисленным индексом — от  $kR$ . При  $k \rightarrow 0$  получаем следующее асимптотическое поведение  $F_n$  и  $F_n^1$  (для бесконечно тонкого соленоида):

$$\begin{aligned}
 F_{2n} &\sim \pi \frac{(-1)^n}{2^{4n+1}} \binom{2n}{n} (4n+1)^{1/2} \frac{\varepsilon \delta^{2n}}{\Gamma(2n+3/2)} (2n - \frac{n+1}{4n+3} \delta^2), \\
 F_{2n}^1 &\sim -\pi \frac{(-1)^n}{2^{4n+1/2}} \frac{\varepsilon \delta^{2n}}{\Gamma(2n+3/2)} \left[ \frac{(4n+1)(2n+1)}{n} \right]^{1/2} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} (1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{4n+3}).
 \end{aligned}$$

Выражения (32) для ВП тороидального соленоида  $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$  справедливы вне сферы радиуса  $r = d + R$ . При  $r < d - R$  можно пользоваться теми же формулами (32), в которых функции  $f_l$  и  $g_l$  поменялись местами. В статическом пределе выражения (32) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= -gR \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{1}{2l+1} P_l(\cos \theta) f_l^0, \\
 A_1 &= -\frac{1}{2} gR \exp(i\varphi) \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{1}{2l+1} P_l^1 f_l^1.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь мы положили

$$\begin{aligned}
 f_l^0 &= \int d\psi \cos \psi \rho^l P_l(R \sin \psi / \rho), \\
 f_l^1 &= \int d\psi \sin \psi \rho^l P_l^1(R \sin \psi / \rho), \quad (\rho^2 = d^2 + R^2 + 2dR \cos \psi).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Для бесконечно тонкого соленоида  $f_l^{0,1}$  выражаются в явном виде, и мы получаем

$$A_0 = \pi g R^2 \sum \frac{2n+1}{2^{2n+1/2}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+5}} \binom{2n}{n} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+3}} P_{2n+2}(\cos \theta), \quad (36)$$

$$A_1 = -\pi g R^2 \exp(i\varphi) \sum \frac{2n+1}{2^{2n+1/2}} (-1)^n \sqrt{\frac{2n+3}{(n+1)(4n+5)}} \binom{2n}{n} \times$$

$$\times \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+3}} P_{2n+2}^1(\cos \theta).$$

Или, в цилиндрических координатах,

$$A_z = A_0, \quad (37)$$

$$A_\rho = \pi g R^2 \sum \frac{2n+1}{2^{2n+1/2}} \sqrt{\frac{2n+3}{(n+1)(4n+5)}} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+3}} P_{2n+2}^1(\cos \theta).$$

Ради полноты рассмотрим теперь случай, когда ток в обмотке соленоида экспоненциально нарастает или убывает ( $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \exp(\pm \omega t)$ ). Неисчезающие цилиндрические компоненты ВП:

$$A_\rho = \frac{gkR}{\sqrt{r}} \exp(\pm \omega t) \sum K_{l+1/2}(kr) P_l^1(\cos \theta) \int \frac{d\psi}{\sqrt{\rho}} \sin \psi \times \quad (38)$$

$$\times I_{l+1/2}(k\rho) P_l^1\left(\frac{R \sin \psi}{\rho}\right),$$

$$A_z = -\frac{gkR}{\sqrt{r}} \exp(\pm \omega t) \sum K_{l+1/2}(kr) P_l(\cos \theta) \int \frac{d\psi}{\sqrt{\rho}} \cos \psi \times$$

$$\times I_{l+1/2}(k\rho) P_l\left(\frac{R \sin \psi}{\rho}\right),$$

где  $I_\nu$  и  $K_\nu$  — модифицированные цилиндрические функции Бесселя и Макдональда. Под знаком интеграла  $\rho = (d^2 + R^2 + dR 2\cos \psi)^{1/2}$ . Эти соотношения справедливы при  $r > d + R$ . При  $r < d - R$  функции  $K$  и  $I$  в (38) следует поменять местами. Выражения, подобные (38), были использованы [31] для описания замкнутых вихрей Абрикосова [32] в сверхпроводниках 2-го рода.

Разложение по векторным сферическим гармоникам [33—37]. Для векторного поля (каковым является ЭМП) полный угловой момент является суммой орбитального углового момента ( $\mathbf{L} = -i \mathbf{r} \times \nabla$ ) и спиновой векторной матрицы  $\mathbf{S}$ :  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Приведем декартовы компоненты  $\mathbf{S}$ :

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторные гармоники определяются как векторно-связанные величины сферических функций  $Y_l^m$  и единичных сферических векторов ( $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_z$ ,  $\mathbf{n}_{\pm 1} = \mp (\mathbf{n}_x \pm i \mathbf{n}_y)/\sqrt{2}$ ):

$$\mathbf{Y}_{l\Lambda}^m = \sum_m C(1, \Lambda, l; -\mu, m + \mu) Y_{\Lambda}^{m+\mu} \mathbf{n}_{-\mu}$$

(мы придерживаемся обозначений, принятых в [35]). Векторные гармоники являются собственными функциями  $J^2$ ,  $L^2$  и  $J_0$ :

$$J_0 \mathbf{Y}_{l\Lambda}^m = m \mathbf{Y}_{l\Lambda}^m, \quad L^2 \mathbf{Y}_{l\Lambda}^m = \Lambda(\Lambda + 1) \mathbf{Y}_{l\Lambda}^m, \quad J^2 \mathbf{Y}_{l\Lambda}^m = (l + 1)l \mathbf{Y}_{l\Lambda}^m.$$

Эти гармоники ортонормированы:

$$\int \mathbf{Y}_{l\Lambda}^{m*} \mathbf{Y}_{l'\Lambda'}^{m'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{\Lambda\Lambda'} \delta_{mm'}.$$

Для построения решений уравнения Гельмгольца для ВП к векторной гармонике  $\mathbf{Y}_{l\Lambda}^m$  следует присоединить радиальную функцию ( $g_l$  или  $h_l$ ).

Удобно ввести следующие линейные комбинации векторных гармоник:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_l^m(L) &= \frac{1}{k} \nabla h_l Y_l^m = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} h_{l+1} \mathbf{Y}_{l, l+1}^m + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} h_{l-1} \mathbf{Y}_{l, l-1}^m, \\ \mathbf{V}_l^m(M) &= h_l \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} L Y_l^m = -h_l \mathbf{Y}_{ll}^m, \\ \mathbf{V}_l^m(E) &= -\frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) h_l Y_l^m = \\ &= -\sqrt{\frac{l}{2l+1}} h_{l+1} \mathbf{Y}_{l, l+1}^m + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} h_{l-1} \mathbf{Y}_{l, l-1}^m. \end{aligned} \quad (39)$$

Векторы  $\mathbf{V}_l^m(\tau)$  являются собственными функциями  $J^2$  и  $J_0$ . Они ортогональны на единичной сфере. Значения  $\tau = E, M$  и  $L$  отвечают электрическим, магнитным и продольным мультиполям. Магнитный ВП, генерируемый полоидальным током (30), может быть разложен в ряд по полной системе векторных функций (39):

$$\mathbf{A} = \frac{2\pi^2 ik}{c} \sum_{lm\tau} a_l^m(\tau) \mathbf{V}_l^m(\tau, \mathbf{r}). \quad (40)$$

Коэффициенты  $a_l^m(\tau)$  определяются конкретным выбором плотности тока:

$$a_l^m(\tau) = \int \mathbf{A}_l^{m*}(\tau, \mathbf{r}) \mathbf{j}_0(\tau) dV. \quad (41)$$



Векторные функции  $A_l^m(\tau, r)$  получаются из  $B_l^m(\tau, r)$  заменой сферических функций Ханкеля  $h_l$  соответствующими бесселевыми функциями  $g_l$ . Коэффициенты  $a_l^m(\tau)$  в физической литературе называются по-разному: мультипольными коэффициентами [36], амплитудами мультипольного излучения [34], формфакторами [16]. Мы будем придерживаться последнего названия. Таким образом,  $a_l^m(\tau)$  при  $\tau = E, M, L$  соответствуют электрические (ЭФФ), магнитные (МФФ) и продольные (ПФФ) формфакторы. В дальнейшем нам понадобятся и их явные выражения:

$$\begin{aligned} a_l^m(M) &= -J_{ll}^m, \\ a_l^m(L) &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} J_{l,l+1}^m + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} J_{l,l-1}^m, \\ a_l^m(E) &= -\sqrt{\frac{l}{2l+1}} J_{l,l+1}^m + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} J_{l,l-1}^m \\ (J_{l\lambda}^m &= \int g_\lambda(kr) Y_{l\lambda}^{m*} j_0 dV). \end{aligned} \quad (42)$$

Как и в случае разложения (32) ВП по обычным сферическим функциям, разложение (40) справедливо при  $r > d + R$ . В области  $r < d - R$  сферические функции Ханкеля должны быть заменены соответствующими функциями Бесселя (или, что то же самое, должны поменяться местами векторы  $A_l^m$  и  $B_l^m$ ).

Представление ВП в виде (40) с формфакторами, определенными соотношениями (41), предполагает (см. ниже), что ВП удовлетворяет калибровочному условию Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (43)$$

Здесь  $\varphi$  — скалярный потенциал:

$$\varphi = \exp(-i\omega t) \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_0(\mathbf{r}') dV'. \quad (44)$$

(При этом предполагается, что зарядовая плотность  $\rho$  также периодически меняется со временем:  $\rho = \rho_0 \exp(-i\omega t)$ .) В отсутствие зарядовой плотности ( $\rho_0 = 0$ ) ВП (40) удовлетворяет калибровочному условию  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . В этом случае ПФФ равны нулю. Чтобы убедиться в

этом, действуем на (40) оператором дивергенции. Из определений (39) сразу следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_l^m(E) = \operatorname{div} \mathbf{B}_l^m(M) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_l^m(L) = -kh_l Y_l^m.$$

В итоге получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{2\pi^2 ik^2}{c} \sum a_l^m(L) h_l Y_l^m. \quad (45)$$

Поскольку отдельные члены этой суммы линейно независимы, то отсюда следует, что  $a_l^m(L) = 0$  при  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Поучительно убедиться в этом непосредственно, исходя из определения  $a_l^m$ :

$$a_l^m(L) = \int \mathbf{A}_l^{m*}(L) \mathbf{j}_0 dV.$$

Подставляем сюда определение  $A_l^m(L)$ :

$$a_l^m(L) = \frac{1}{k} \int \nabla (g_l Y_l^{m*}) \mathbf{j}_0 dV.$$

Интегрируем это соотношение по частям:

$$a_l^m(L) = \frac{1}{k} \int \operatorname{div} (g_l Y_l^{m*} \mathbf{j}_0) dV - \frac{1}{k} \int g_l Y_l^{m*} \operatorname{div} \mathbf{j}_0 dV. \quad (46)$$

Первый член в правой части (46) исчезает, если распределение тока занимает конечную область пространства. Из условия сохранения заряда ( $\operatorname{div} \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$ ) получаем для случая зарядовой плотности, периодически меняющейся со временем ( $\rho = \rho_0 \exp(-i\omega t)$ ):

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_0 = i\omega \rho_0, \quad a_l^m(L) = -icq_l^m. \quad (47)$$

Здесь  $q_l^m = \int g_l Y_l^{m*} \rho_0 dV$ . Подставляя (47) в (45), приходим к (43) с

$$\varphi = 2\pi^2 ik \exp(-i\omega t) \sum h_l Y_l^m q_l^m,$$

что совпадает с определением  $\varphi$  (44). Из (47) сразу следует, что  $a_m^l(L) = 0$  для исчезающей зарядовой плотности ( $q_l^m = 0$ ). Условие исчезновения продольных формфакторов (см. (42)) приводит к следующему соотношению:

$$J_{l, l-1}^m = -\sqrt{\frac{l+1}{l}} J_{l, l+1}^m \quad (l \geq 1). \quad (48)$$

Подставляя это в выражение для  $a_l^m(E)$ , получаем

$$a_l^m(E) = -\sqrt{\frac{2l+1}{l}} J_{l, l+1}^m. \quad (49)$$

Легко убедиться, что для полоидального тока (30) МФФ равны нулю, а электрические отличны от нуля только при  $m = 0$ :  $a_l^m(E) = \delta_{m0} a_l(E)$ . Выполним интегрирование в (49) по  $\tilde{R}$  и  $\varphi$ . Тогда

$$a_l(E) = -\frac{gR}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} (\sqrt{l+1} F_{l+1}^0 - \sqrt{l+2} F_{l+1}^1) \quad (50)$$

( $F_l^{0,1}$  определены соотношениями (33)). Из того факта, что при  $k \rightarrow 0$

$$F_l^{0,1} \sim \frac{k^l}{\Gamma(l+3/2)} \frac{1}{2^{l+1/2}} f_l^{0,1} \quad (51)$$

( $f_l^{0,1}$  даются выражениями (35)), вытекает следующее асимптотическое поведение (при  $k \rightarrow 0$ )  $a_l(E)$ :

$$a_l(E) = -\frac{gR}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} \frac{k^{l+1}}{\Gamma(l+5/2)} (\sqrt{l+1} f_{l+1}^0 - \sqrt{l+2} f_{l+1}^1). \quad (52)$$

Запишем теперь в явном виде условие (48) исчезновения ПФФ:

$$\sqrt{l} F_{l-1}^0 + \sqrt{l-1} F_{l-1}^1 = \left(\frac{l+1}{l} \frac{2l-1}{2l+3}\right)^{1/2} (\sqrt{l+1} F_{l+1}^0 - \sqrt{l+2} F_{l+1}^1). \quad (53)$$

С учетом асимптотического поведения  $F_l^{0,1}$  (см. (51)) создается впечатление, что обе части (53) ведут себя по-разному при  $k \rightarrow 0$ . Подставим (51) в (53) и разделим обе части на  $k^{l-1}$ :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{l}{2l-1}} (\sqrt{l} f_{l-1}^0 + \sqrt{l-1} f_{l-1}^1) = \\ & = \frac{k^2}{2l+1} \frac{1}{2l+3} \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} (\sqrt{l+1} f_{l+1}^0 - \sqrt{l+2} f_{l+1}^1). \end{aligned} \quad (54)$$

Левая часть этого выражения не зависит от  $k$ , тогда как правая убывает при  $k \rightarrow 0$  как  $k^2$ . Это означает, что левая часть (54) исчезает тождественно:

$$\sqrt{l} f_{l-1}^0 + \sqrt{l-1} f_{l-1}^1 = 0 \text{ или } f_{l-1}^1 = -\sqrt{\frac{l}{l-1}} f_{l-1}^0.$$

Подставляем это соотношение в (52):

$$a_l(E) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{k^{l+1}}{\Gamma(l+3/2)} \frac{Rg}{2^{l+2}} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} f_{l+1}^0. \quad (55)$$

Из (55) следует, что  $a_l(E)$  убывает как  $k^{l+1}$  при  $k \rightarrow 0$ . С другой стороны, из общих соотношений (42) следует, что  $a_l(E)$  ведет себя как

$k^{l-1}$  при малых  $k$ . Причина этого различия состоит в том, что условие исчезновения  $a_l(L)$  в случае исчезающей зарядовой плотности меняет асимптотику  $a_l(E)$ . Этот факт будет использован нами в дальнейшем. Коэффициент при первой неисчезающей степени  $k$  в разложении того или иного мультипольного формфактора обычно называется мультипольным моментом (электрическим, магнитным, продольным). Соответственно этому коэффициент при  $k^{l+1}$  в (55) — электрический мультипольный момент  $l$ . С учетом всего этого вектор-потенциал (40) в статическом пределе выражается формулой

$$A = Rg \sqrt{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \frac{1}{r^{l+2}} f_{l+1}^0 Y_{l, l+1}^0. \quad (56)$$

Легко убедиться, что отдельные компоненты (56) в точности совпадают с (32). Из (56), принимая во внимание опущенный фактор  $\exp(-i\omega t)$ , получаем для напряженностей ЭМП

$$H = \frac{2\pi^2 k^2}{c} \sum a_l(E) B_l(M), \quad E = -\frac{2\pi^2 k^2}{c} \sum a_l(E) B_l(E). \quad (57)$$

Приведем неисчезающие сферические компоненты напряженностей:

$$H_{\varphi} = \frac{i\sqrt{2}\pi^{3/2}k^2}{c} \sum h_l P_l^1 a_l(E), \quad (58)$$

$$E_{\theta} = \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}k^2}{c} \sum \frac{1}{2l+1} [(l+1)h_{l-1} - lh_{l+1}] P_l^1 a_l(E),$$

$$E_r = -\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}k^2}{c} \sum \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1} (h_{l+1} + h_{l-1}) P_l^1 a_l(E),$$

а также вектор Пойнтинга, усредненный по периоду и проинтегрированный по сфере достаточно большого радиуса:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi c} \int E_{\theta} H_{\varphi}^* dS = \frac{\pi^3 k^2}{c^3} \sum a_l^2(E). \quad (59)$$

Множитель  $1/2$  в левой части (59) учитывает различие временных зависимостей в (26) и (30).

Возникает вопрос: зачем мы представляли ВП тороидального соленоида тремя различными способами: (28), (32), (40)? Для этого имеются веские причины. Поскольку выражение (28) содержит все мультиполи в замкнутом виде, с ним легче работать практически. Далее, каждый из членов разложения (32) стремится к конечной величине при  $k \rightarrow 0$ , тогда как в разложении (40) члены, отвечающие порознь электрическим и про-

дольным мультиполям, расходятся в том же пределе (см. разд.8). Поскольку разложение (40) является тривиальным следствием (32), то можно ожидать, что после перегруппировки членов, входящих в электрические и магнитные мультиполи, мы избавимся от расходимостей. Этот факт будет использован ниже.

## 8. ТОРОИДАЛЬНЫЕ ФОРМФАКТОРЫ И ТОРОИДАЛЬНЫЕ МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

В работах [16] были введены так называемые тороидальные формфакторы (ТФФ) и тороидальные мультипольные моменты (ТММ). Выясним, как они выглядят для рассматриваемого случая (то есть в отсутствие зарядовой плотности и для плотности тока (30)). Чтобы понять происхождение ТФФ и ТММ, мы должны сначала рассмотреть более общий случай, когда отличны от нуля как зарядовая, так и токовая плотности. Вектор-потенциал определяется тем же выражением (40), но ПФФ теперь отличны от нуля. Точнее, имеем следующее соотношение (см. (47)):

$$q_l^m = \frac{i}{c} a_l^m(L). \quad (60)$$

(Предполагается, что токовая и зарядовая плотности гармонически меняются во времени.) Здесь следует упомянуть о некоторых тонкостях, касающихся последнего соотношения. Выпишем в явном виде входящие в (60) величины:

$$q_l^m = \int g_l Y_l^{m*} \rho_0 dV, \quad (61)$$

$$a_l^m(L) = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} J_{l,l+1}^m + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} J_{l,l-1}^m,$$

$$J_{l\Lambda}^m = \int g_\Lambda Y_{l\Lambda}^{m*} j_0 dV.$$

Разлагая бесселевы функции в обеих частях (60) по степеням  $k$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ , получаем соотношения, которым при исчезающей зарядовой плотности нельзя удовлетворить ни при какой степени  $k$ . Причина состоит в том, что  $\rho_0$  и  $j_0$ , входящие в (60), (61), не являются независимыми, но связаны уравнением непрерывности  $\text{div } j_0 = i\omega\rho_0$ . Поэтому соотношение (60) мы рассматриваем как определение  $q_l^m$ . Зависимость  $q_l^m$  от  $k$  определяется бесселевыми функциями в правой части (60).

Для исчезающей зарядовой плотности разлагаем правую часть (60) по степеням  $k$ . Условие исчезновения коэффициента при  $k^{l-1+2n}$  приводит к соотношению

$$\sqrt{l} (l + n + \frac{1}{2}) \int r^{l-1+2n} Y_{l, l-1}^{m*} j_0 dV = n \sqrt{l+1} \int r^{l-1+2n} Y_{l, l+1}^{m*} j_0 dV.$$

При  $n = 1$  получаем следующее полезное тождество:

$$\sqrt{l} (l + \frac{3}{2}) \int r^{l+1} Y_{l, l-1}^{m*} j_0 dV = \sqrt{l+1} \int r^{l+1} Y_{l, l+1}^{m*} j_0 dV. \quad (62)$$

Представим теперь выражение (40) в слегка расширенной форме:

$$\begin{aligned} A = & \frac{2\pi^2 ik}{c} \sum_{lm} [-a_l^m(M) h_l Y_{ll}^m + \\ & + a_l^m(L) (\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} h_{l+1} Y_{l, l+1}^m + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} h_{l-1} Y_{l, l-1}^m) + \\ & + a_l^m(E) (-\sqrt{\frac{l}{2l+1}} h_{l+1} Y_{l, l+1}^m + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} h_{l-1} Y_{l, l-1}^m)]. \quad (63) \end{aligned}$$

Легко убедиться, что члены, соответствующие ПФФ и ЭФФ (вторая и третья строки в (63)), расходятся в длинноволновом приближении при  $\rho_0 \neq 0$ . В самом деле (см. (42)),  $a_l^m(E)$  и  $a_l^m(L)$  убывают как  $k^{l-1}$  при  $k \rightarrow 0$ , тогда как  $V_l^m(E)$  и  $V_l^m(L)$  растут как  $k^{-l-2}$  (см. (39)) в том же приближении. С учетом общего множителя  $k$  в (63) это приводит к  $k^{-2}$ -расходимости для электрических и продольных мультипольных членов, взятых по отдельности. Этот недостаток отсутствует при исчезающей зарядовой плотности. В этом случае условие  $a_l^m(L) = 0$  приводит к изменению асимптотического поведения формфактора  $a_l^m(E)$ , который убывает теперь как  $k^{l+1}$  (см. (55)). Ввиду этого члены, отвечающие отдельным мультиполям в (63), не содержат расходимостей при отсутствии зарядовой плотности. Возникает вопрос: как бороться с расходимостями в (63) при  $\rho_0 \neq 0$ ? Отметим, что разложение ВП (32) по обычным сферическим функциям не содержит расходящихся членов. С другой стороны, разложение ВП (63) по векторным сферическим гармоникам, являющееся тривиальным следствием (32), содержит расходимости. Отсюда следует, что расходимости в (63), отвечающие электрическим и магнитным мультиполям, должны взаимно компенсироваться. Это проверяется подстановкой  $a_l^m(\tau)$  в (63):

$$A = \frac{2\pi^2 ik}{c} \sum (h_l Y_{ll}^m J_{ll}^m + h_{l+1} Y_{l, l+1}^m J_{l, l+1}^m + h_{l-1} Y_{l, l-1}^m J_{l, l-1}^m).$$

Легко убедиться, что это выражение не содержит расходящихся членов.

Иной способ устранения сингулярности в (63) был предложен в работах В.М.Дубовика и др. [16]. Идея состоит в том, чтобы выделить вклад сингулярностей в ЭФФ. Комбинируя соотношения (42) и (60), получаем

$$a_l^m(E) = -ic \sqrt{\frac{l+1}{l}} q_l^m - \sqrt{\frac{2l+1}{l}} J_{l, l+1}^m. \quad (64)$$

Представим это соотношение в виде

$$a_l^m(E) = a_l^m(E, T) - ic \sqrt{\frac{l+1}{l}} q_l^m(0). \quad (65)$$

Здесь мы положили:

$$q_l^m(0) = \lim_{k \rightarrow 0} q_l^m(k) = \frac{i}{c} \frac{k^{l-1}}{2^{l-1/2}} \frac{1}{\Gamma(l+1/2)} \int r^{l-1} Y_{l, l-1}^{m*} \mathbf{j}_0 dV, \quad (66)$$

$$a_l^m(E, T) = -ic \sqrt{\frac{l+1}{l}} [q_l^m - q_l^m(0)] - \sqrt{\frac{2l+1}{l}} J_{l, l+1}^m.$$

При подстановке (65) в (63) сингулярность второго члена в правой части (65) в точности компенсирует сингулярность продольных мультипольных членов. Поскольку  $a_l^m(E, T)$  (то есть первый член в правой части (65)) убывает при  $k \rightarrow 0$  как  $k^{l+1}$ , то он не приводит к сингулярностям при подстановке в (63). Отношение

$$T_l^m(k) = a_l^m(E, T)/k^{l+1}$$

называется тороидальным формфактором (ТФФ). Разлагая  $q_l^m$  и  $J_{l, l+1}^m$  в правой части (66) по степеням  $k$ , убеждаемся, что при  $k \rightarrow 0$   $T_l^m(k)$  стремится к конечной величине

$$T_l^m(0) = -\frac{1}{\Gamma(l+3/2)} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \frac{1}{2^{l+3/2}} \times$$

$$\times \left( \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{1}{l+3/2} \int r^{l+1} Y_{l, l+1}^m \mathbf{j}_0 dV + \int r^{l+1} Y_{l, l-1}^m \mathbf{j}_0 dV \right). \quad (67)$$

Эта величина называется тороидальным мультипольным моментом (ТММ) [16]. При исчезающей зарядовой плотности мы должны положить  $q_l^m = 0$  в (64)–(66). В этом случае мы получаем

$$a_l^m(E) = a_l^m(E, T) = -\sqrt{\frac{2l+1}{l}} J_{l, l+1}^m. \quad (68)$$

Поэтому

$$T_l^m(k) = a_l^m(E)/k^{l+1}. \quad (69)$$

При  $k \rightarrow 0$  это отношение стремится к конечной величине

$$T_l^m(0) = -\sqrt{\frac{2l+1}{l}} \frac{1}{\Gamma(l+5/2)} \frac{1}{2^{l+3/2}} \int r^{l+1} Y_{l,l+1}^{m*} j_0 dV. \quad (70)$$

Используя соотношения (50) и (55), последние два выражения перепишем в виде

$$\begin{aligned} T_l^m(k) &= -\delta_{0,m} \frac{gR}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^{l+1}} \frac{1}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} (\sqrt{l+1} F_{l+1}^0 - \sqrt{l+2} F_{l+1}^1), \\ T_l^m(0) &= -\delta_{0,m} \frac{gR}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(l+3/2)} \frac{1}{2^{l+2}} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} F_{l+1}^0. \end{aligned} \quad (71)$$

Выражения (67) и (70) для  $T_l^m(0)$  существенно различны. Они были получены двумя различными путями. Соотношение (70) непосредственно вытекает из (64) — (66), если положить в них  $q_l^m = 0$ . С другой стороны, при получении (67) мы использовали в (65) разложение  $q_l^m$  по степеням  $k$  в качестве промежуточного шага. Очевидно, выражения (67) и (70) должны совпадать при исчезающей зарядовой плотности. Поскольку соотношение (70) не содержит никаких следов зарядовой плотности, то с первого взгляда можно усмотреть противоречие между (67) и (70). Это противоречие снимается, если принять во внимание полученное ранее тождество (62). Наличие этого тождества приводит к тому, что в случае исчезающей зарядовой плотности  $T_l^m(0)$  можно представить в нескольких эквивалентных формах. В дополнение к выражениям (67) и (70) приведем еще одно:

$$T_l^m(0) = -\sqrt{\frac{2l+1}{l+1}} \frac{1}{\Gamma(l+3/2)} \frac{1}{2^{l+3/2}} \int r^{l+1} Y_{l,l-1}^{m*} j_0 dV. \quad (72)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим тороидальный дипольный момент ( $l = 1$ ). В декартовых компонентах он обычно записывается в следующем виде [16]:

$$T_i = \frac{1}{10} \int [x_i(rJ) - 2r^2 J_i] dV. \quad (73)$$

Покажем, что это выражение с точностью до несущественного множителя сводится к (72). Для этого мы воспользуемся тождеством (учтем, что  $\text{div } \mathbf{J} = 0$  при  $\rho = 0$ ):

$$\text{div}(x_i x_k x_l J) = x_k x_l J_i + x_i x_l J_k + x_i x_k J_l.$$



Интегрируя это выражение по трехмерному объему и затем сворачивая по индексам  $k, l$ , получаем

$$\int [r^2 J_i + 2x_i(rJ)] dV.$$

Подставляем это тождество в (73):

$$T_i = -\frac{1}{4} \int r^2 J_i dV. \quad (74)$$

Это выражение эквивалентно (72) при  $l = 1$ , а следовательно, и электрическим мультипольным моментам, определенным соотношениями (52)—(55). Мы заключаем [38]: для полоидального тока (36) при исчезающей зарядовой плотности тороидальные мультипольные формфакторы и моменты пропорциональны электрическим.

## 9. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОРОИДАЛЬНОГО СОЛЕНОИДА С ВНЕШНИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Взаимодействие тока  $\mathbf{j}$  с внешним магнитным полем определяется выражением

$$U = -\frac{1}{c} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV, \quad (75)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  ( $\mathbf{H}_{\text{ext}} = \text{rot } \mathbf{A}$ ). Пусть расстояние между источником магнитного поля и током  $\mathbf{j}$ , текущим в обмотке соленоида, значительно превышает размеры соленоида. Тогда в окрестности соленоида вектор-потенциал может быть разложен в ряд:

$$A_i(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{a}) + \frac{\partial A_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} x_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_i(\mathbf{a})}{\partial x_k \partial x_l} x_k x_l \quad (76)$$

(предполагается, что ВП меняется достаточно медленно в окрестности соленоида). Здесь вектор  $\mathbf{a}$  определяет некоторую точку в окрестности соленоида (например, для тора  $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$  в качестве вектора  $\mathbf{a}$  можно взять начало координат);  $\mathbf{r}$  определяет положение отдельного элемента тока соленоида относительно  $\mathbf{a}$ . Подставляем разложение (76) в выражение (75) для энергии взаимодействия:

$$U = -\mu_d \mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{a}) - \frac{1}{3} \mu_t \text{rot } \mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{a}). \quad (77)$$

Здесь  $\mu_d$  — обычный дипольный момент:  $\mu_d = \int \mathbf{M} dV$ ,

$$\mu_t = \int \mathbf{r} \times \mathbf{M} dV, \quad (78)$$

$M$  — плотность магнитного момента ( $M = \frac{1}{2c} r \times j$ ). Для полоидального тока (8) неисчезающими декартовыми компонентами  $M$  являются

$$\begin{aligned} M_x &= -M \sin \varphi, \\ M_y &= M \cos \varphi, \\ M &= \frac{g}{8\pi} \delta (\tilde{R} - R) \frac{R + d \cos \psi}{d + R \cos \psi}. \end{aligned} \quad (79)$$

Это означает, что только  $\varphi$ -компонента  $M$  отлична от нуля ( $M_\varphi = M$ ). Из (79) сразу следует, что  $\mu_d = 0$  для полоидального тока (8), то есть магнитный дипольный момент равен нулю для тороидального соленоида. Для тороидального соленоида  $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$  единственной неисчезающей компонентой  $\mu_t$  является

$$\mu_{tz} = \int (xM_y - yM_x) dV = \frac{3}{4} \pi g d R^2.$$

При произвольной ориентации ТС все три компоненты  $\mu_t$  отличны от нуля. Расписываем в явном виде двойное векторное произведение в (78):

$$\mu_{ti} = \frac{1}{2c} \int [x_i(rj) - r^2 j_i] dV = -\frac{3}{4c} \int r^2 j_i dV. \quad (80)$$

Сравнивая это выражение с (74), убеждаемся в совпадении  $\mu_t$  с ТММ, а следовательно, и ЭММ (для равной нулю зарядовой плотности и для плотности тока, определенной соотношением (8)). Поскольку дипольный момент  $\mu_d$  исчезает для полоидального тока, то взаимодействие ТС с внешним полем можно представить в виде

$$U = -\frac{1}{3} \mu_t \operatorname{rot} H (r = a). \quad (81)$$

Используя уравнение Максвелла  $\operatorname{rot} H_{\text{ext}} = \frac{1}{c} \dot{E}_{\text{ext}} + \frac{4\pi}{c} j_{\text{ext}}$  (точка над  $E$  означает дифференцирование по времени) и учитывая, что разложение (76) справедливо на достаточно больших расстояниях от источника поля, где  $j_{\text{ext}} = 0$ , мы можем переписать (77) в виде [15,16,39]:

$$U = -\frac{1}{3c} \mu_t \dot{E}_{\text{ext}}. \quad (82)$$

Отсюда следует, что ТС взаимодействует с внешним ЭМП, если электрическое поле имеет неисчезающую и меняющуюся во времени компоненту вдоль оси симметрии соленоида. Это утверждение существ-

венно основывается на том факте, что размеры соленоида малы по сравнению с расстоянием до источника внешнего ЭМП. Ситуация меняется, если последнее условие не выполнено (то есть, когда размеры ТС сравнимы с расстоянием до источника внешнего ЭМП). Чтобы убедиться в этом, введем вместо тока  $\mathbf{j}$  намагничение  $\vec{\mathfrak{M}}$ :

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{M}}. \quad (83)$$

Намагничение, соответствующее рассматриваемому полоидальному току, равно

$$\vec{\mathfrak{M}} = \vec{\mathfrak{M}}_p \mathbf{n}_\varphi, \quad \vec{\mathfrak{M}} = \frac{g}{4\pi} \frac{\theta (R - \vec{R})}{d + R \cos \psi}. \quad (84)$$

Поскольку формализм намагничения полностью эквивалентен токовому формализму [36, 40], то теперь можно забыть о токе, протекающем по обмотке соленоида, и рассматривать ТС как намагниченное кольцо с намагничением, определенным соотношением (84). Физическая реализация такого соленоида — ферромагнитное кольцо с не зависящим от внешнего поля намагничением — использовалась для проверки существования эффекта Ааронова — Бома в замечательных экспериментах Тономуры [2]. Подставляем (83) в выражение для энергии взаимодействия (75):

$$U = - \int \mathbf{A} \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{M}} dV.$$

Или, интегрируя по частям,

$$U = - \int \mathbf{H}_{\text{ext}} \vec{\mathfrak{M}} dV. \quad (85)$$

Отсюда следует, что ТС взаимодействует с внешним магнитным полем, если оно имеет ненулевое перекрытие с намагничением соленоида. В качестве иллюстрации рассмотрим взаимодействие линейного проводника с током (рис.4) с ТС, намагничение которого определено выражением (84). Вычисления показывают, что взаимодействие отсутствует, если линейный проводник проходит вне отверстия соленоида. Если же этот проводник проходит через отверстие соленоида, то взаимодействие равно

$4\pi I g / c$ . Здесь  $I$  — ток в линейном проводнике. Если, как рассматривалось и в начале этого раздела, источник ЭММ находится на достаточно большом удалении от соленоида, то

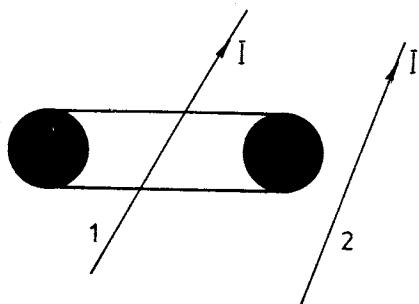


Рис. 4. Взаимодействие постоянного линейного тока  $I$  с тороидальным соленоидом имеет место, если ток  $I$  проходит через отверстие соленоида (позиция 1). В противном случае (2) взаимодействие отсутствует

магнитное поле можно представить вблизи соленоида в виде ряда

$$H_i(\mathbf{r}) = H_i(\mathbf{a}) + \frac{\partial H_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} x_k.$$

Подставим это разложение в (85):

$$U = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r} = \mathbf{a}) \int \mathbf{r} \times \vec{\mathfrak{M}} dV. \quad (86)$$

Это выражение является аналогом (81). Все выводы, полученные в этом разделе справедливы и при более общем распределении тока (13). При этом следует вместо намагничения (84) использовать  $\vec{\mathfrak{M}} = \mathbf{n}_\varphi \mathfrak{M}$ , где

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{c} \frac{\theta(R - \bar{R})}{d + \bar{R} \cos \psi} \int_R^R f_1(x) dx \quad (87)$$

в координатах  $\bar{R}$ ,  $\psi$  и

$$\mathfrak{M} = \frac{a}{c} \frac{\theta(\mu - \mu_0)}{\operatorname{sh} \mu} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta) \int_{\mu_0}^{\mu} f(\mu) d\mu \quad (88)$$

в тороидальных координатах.

Функции  $f$  и  $f_1$  задаются распределениями тока (13) и последующих.

Ради полноты выясним, как цилиндрический соленоид (ЦС) взаимодействует с внешним магнитным полем. В отличие от ТС дипольный момент для ЦС не равен нулю и направлен вдоль оси симметрии соленоида. Для тока (1) он равен  $\mu_d = n_z \pi R^2 j / c = n_z \Phi / 4\pi$ . Взаимодействие ЦС с внешним магнитным полем описывается первым членом в (77):  $U = -\mu_d \mathbf{H}_{\text{ext}}$ . Таким образом, как и для обычного дипольного магнитного момента, ось симметрии соленоида стремится расположиться вдоль  $\mathbf{H}$ .

О взаимодействии двух тороидальных соленоидов. Рассмотрим два ТС с постоянными токами в их обмотках. Взаимодействуют ли такие соленоиды? (Этот вопрос был поднят Я.А.Смородинским [41]). Их взаимодействие описывается выражением

$$-\frac{1}{c} \int A_1(\mathbf{r}_2) \mathbf{j}_2(\mathbf{r}_2) dV_2,$$

где  $A_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_1$  — вектор-потенциал, генерируемый током  $\mathbf{j}_1$  в месте нахождения  $\mathbf{j}_2$ . Вводя намагничение  $\mathbf{j}_2 = c \operatorname{rot} \vec{\mathfrak{M}}_2$  и интегрируя по частям, получаем

$$-\int \mathbf{H}_1(\mathbf{r}_2) \vec{\mathfrak{M}}_2(\mathbf{r}_2) dV_2, \quad (89)$$

где  $\mathbf{H}_1(\mathbf{r}_2)$  — напряженность магнитного поля, производимая током  $\mathbf{j}_1$  в месте нахождения намагничения  $\vec{\mathfrak{M}}_2$ . Отсюда следует, что два неперекры-

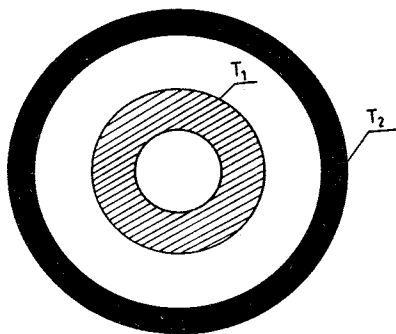


Рис. 5. Тороидальные соленоиды, экваториальные плоскости (или оси симметрии) которых параллельны, взаимодействуют, если по крайней мере в одном из них (например,  $T_1$ ) течет переменный ток

вающихся тороидальных соленоида с постоянными токами не взаимодействуют (поскольку напряженности и намагничения таких соленоидов не выходят за их границы). Иное дело, если в обмотках соленоидов течет переменный ток. Рассмотрим два ТС, имеющих общую ось симметрии и общую экваториальную плоскость (рис.5). Пусть ток в обмотке внутреннего соленоида  $T_1$  меняется периодически во времени, а ток внешнего соленоида  $T_2$  постоянен во времени.  $T_2$  можно рассматривать как ферромагнитное кольцо с намагничением (84). Ради простоты будем считать соленоид  $T_2$  бесконечно тонким (при конечном магнитном потоке  $\Phi_2$ ). Тогда намагничение (84) имеет вид  $\vec{\mathfrak{M}}_2 = \mathfrak{M}_2 \mathbf{n}_\varphi$ , где

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{\Phi_2}{4\pi} \delta(\rho - d_2) \delta(z) = \frac{\Phi_2}{4\pi d_2} \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \delta(r - d_2). \quad (90)$$

Магнитное поле, генерируемое соленоидом  $T_1$ , определяется первым из соотношений (58). Подставляя (58) и (90) в (89) и интегрируя, получаем

$$U = - \frac{i\sqrt{\pi}\Phi_2 k^2 d_2}{2\sqrt{2}c} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}^1(0) a_{2n+1}(E) h_{2n+1}(kd_2), \quad (91)$$

где

$$a_l(E) = - \frac{g_l R_1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{l}} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} (\sqrt{l+1} F_{l+1}^0 - \sqrt{l+2} F_{l+1}^1),$$

$$F_l^0 = \int d\psi \cos \psi g_l P_l, \quad F_l^1 = \int d\psi \sin \psi g_l P_l^1,$$

$$g_l = g_l(k\rho_1), \quad P_l^{0,1} = P_l^{0,1}(R_1 \sin \psi / \rho_1),$$

$$\rho_1 = (d_1^2 + R_1^2 + 2d_1 R_1 \cos \psi_1)^{1/2}, \quad g_l = \Phi_1 / 2\pi (d_1 - \sqrt{d_1^2 - R_1^2}).$$

Окончательный ответ получается после умножения (91) на  $\exp(-i\omega t)$  и взятия реальной части. Таким образом, имеется взаимодействие между тороидальными соленоидами с переменным током. Рассмотрим теперь

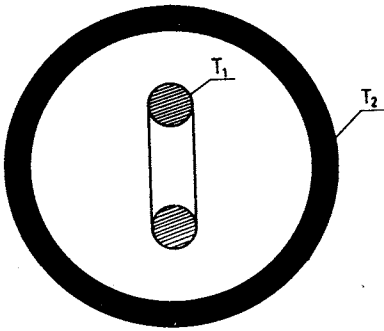


Рис. 6. Энергия взаимодействия тороидальных соленоидов обращается в нуль, если их экваториальные плоскости (или оси симметрии) перпендикулярны

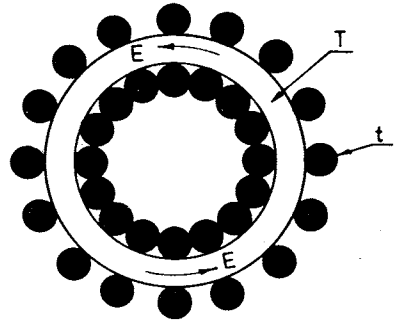


Рис. 7. На тор  $T$  нанизаны тороидальные соленоиды  $t$  с полоидальной обмоткой, по которой течет переменный ток. В пределе бесконечно тонких соленоидов  $t$  электромагнитное поле оказывается сосредоточенным внутри тора  $T$  [19]

случай, когда оси симметрии соленоидов  $T_1$  и  $T_2$  перпендикулярны (рис.6). В этом случае магнитное поле, генерируемое  $T_1$ , перпендикулярно намагничению соленоида  $T_2$ . Поэтому энергия взаимодействия (89) обращается в нуль. Мы заключаем: взаимодействие между тороидальными соленоидами произвольной ориентации пропорционально косинусу угла между осями симметрии соленоидов (или между тороидными моментами). Или иначе: тороидальные соленоиды с переменным током стремятся выстроиться так, чтобы их тороидные моменты были параллельны. Аналогичная ситуация имеет место для цилиндрических соленоидов с переменным током. Именно ЦС стремятся выстроиться так, чтобы их дипольные моменты (или оси симметрии) были параллельны.

Взаимодействие ТС с переменным током изучалось экспериментально. Описание экспериментов можно найти в книгах [19,21]. Почти все наблюдаемые проявления ЭМП соленоидов с переменным током качественно правильно описываются развитым выше формализмом. Мы детально обсудим их в следующем обзоре, который будет посвящен конкретным физическим приложениям ТС. Имеется, однако, замечательный опытный факт, о котором нельзя здесь не упомянуть. Рассмотрим тор  $T$  (рис.7). Нанижем на него (вместо полоидальных витков) тороидальные соленоиды с переменным током. Тогда оказывается [19], что для достаточно тонких ТС результирующее ЭМП (вне соленоидов) оказывается отличным от нуля только внутри тора  $T$ . Именно внутри отлична от нуля только  $\varphi$ -компонента электрического поля. Если это действительно так,

то мы получаем физическую реализацию электрического соленоида. В предельном случае бесконечно малых размеров тора  $T$  мы получаем так называемый электрический тороидальный момент. Возможность существования таких моментов обсуждалась в интересной работе [20], в которой электрические тороидальные моменты конструировались с помощью тока магнитных монополей. Имеются экспериментальные данные (так называемый «аромагнетизм» [42]), которые интерпретируются [43] в терминах электрических тороидальных моментов. В заключение мы еще раз подчеркнем исключительно важное значение конфигурации токов, изображенной на рис. 7. Это означает существование конфигурации переменных токов, обладающей конечными размерами и тем замечательным свойством, что ЭМП не выходит за пределы этой конфигурации. До сих пор были известны только точечные объекты, обладающие этим свойством [8]. У автора обзора остаются некоторые сомнения [44], действительно ли конфигурация, изображенная на рис. 7, обладает свойством самоэкранировки. В любом случае мы должны помнить слова Р. Тагора: «Если мы закроем дверь перед заблуждением, как же тогда войдет Истина?»

## 10. МОДЕЛЬ ПОЛОИДАЛЬНОГО ТОКА ТОРОИДАЛЬНОГО СОЛЕНОИДА [38]

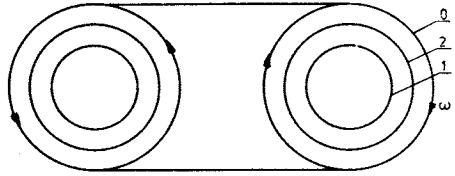
Рассмотрим снова постоянный полоидальный ток, текущий по обмотке ТС. Попытаемся представить себе этот ток как относительное движение одного из заряженных слоев относительно других. Как и для цилиндрического соленоида, потребуем выполнения следующих условий: 1) полный заряд должен быть равен нулю; 2) электростатический потенциал должен быть равен нулю как внутри тора, так и вне его; 3) при вращении каждого элемента одного из заряженных слоев в плоскости  $\varphi = \text{const}$  должно возникать распределение тока вида (9), а следовательно, должны воспроизводиться вектор-потенциалы работы [26]. В тороидальных координатах одно из возможных зарядовых распределений, удовлетворяющих этим требованиям, имеет вид\*:

$$\sigma = \sigma_1 \delta(\mu - \mu_1) + \sigma_2 \delta(\mu - \mu_2) + \sigma_0 \delta(\mu - \mu_0). \quad (92)$$

---

\*Как и в случае цилиндрического соленоида, не удастся построить зарядовое распределение с двумя заряженными поверхностями, удовлетворяющее условиям 1—3.

Рис. 8. Модель полоидального тока на поверхности тора. Зарядовое распределение состоит из трех заряженных оболочек (0, 1, 2). Электростатический потенциал оказывается отличным от нуля только внутри зарядового распределения. Равномерное вращение внешней оболочки 0 в направлении, указанном стрелкой, имитирует полоидальный ток



Ради определенности примем, что  $\mu_0 < \mu_2 < \mu_1$ . Это означает, что зарядовое распределение состоит из трех вложенных друг в друга тороидальных поверхностей, причем заряженная поверхность, отвечающая  $\mu = \mu_0$ , внешняя, а  $\mu = \mu_1$  — внутренняя (рис.8).

Итак, мы должны найти уравнения Пуассона для потенциала

$$\Delta\Phi = -4\pi\sigma \tag{93}$$

при дополнительном условии, что  $\Phi = 0$  вне и внутри соленоида. Это означает, что

$$\Phi = 0 \text{ при } \begin{cases} \mu < \mu_0 & (\text{область вне соленоида}), \\ \mu > \mu_1 & (\text{область внутри соленоида}). \end{cases} \tag{94}$$

Таким образом, зарядовому распределению  $\sigma$  отвечает следующий интервал значений  $\mu$ :  $\mu_0 < \mu < \mu_1$ ; входящие в (92) величины  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_0$  являются пока что неизвестными функциями тороидального угла  $\theta$ . Пусть каждый из элементов внешнего зарядового слоя ( $\mu = \mu_0$ ) вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в той плоскости  $\varphi = \text{const}$ , в которой он лежит. Подберем  $\sigma_0$  таким образом, чтобы получилась соленоидальная плотность тока (9). Тогда имеем

$$\sigma_0 \omega R_0 = -\frac{gc}{4\pi a^2} \frac{(\text{ch } \mu_0 - \cos \theta)^2}{\text{sh } \mu_0}, \tag{95}$$

где  $R_0 = a/\text{sh } \mu_0$  — радиус поперечного сечения соленоида. Предыдущее соотношение перепишем в несколько ином виде:

$$\sigma_0(\theta) = f \frac{(\text{ch } \mu_0 - \cos \theta)^2}{\text{sh } \mu_0}, \quad f = -\frac{gc \text{ sh } \mu_0}{4\pi\omega a^3}. \tag{96}$$

Итак, необходимо найти  $\Phi, \sigma_1, \sigma_2$  при дополнительных условиях (94) и (96). Перепишем  $\Delta\Phi$  в тороидальных координатах:



$$\Delta\Phi = \frac{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^3}{a^2 \operatorname{sh} \mu_0} \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\operatorname{sh} \mu}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{1}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right).$$

Этот лапласиан после подстановки  $\Phi = \sqrt{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} F$  принимает вид:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{5/2} \left( \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \operatorname{sh} \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} F \right).$$

Из-за аксиальной симметрии  $\Phi$  не зависит от азимутального угла  $\varphi$ . Вне заряженных поверхностей  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Его решения выглядят следующим образом:

$$\Phi = (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum (C_n P_{n-1/2} + D_n Q_{n-1/2}) \cos n\theta. \quad (97)$$

Потребуем обращения  $\Phi$  в нуль при  $\mu = \mu_0$ . Это дает

$$C_n P_{n-1/2}(0) + D_n Q_{n-1/2}(0) = 0.$$

Здесь и в дальнейшем мы полагаем  $P_\nu^\lambda(i) \equiv P_\nu^\lambda(\operatorname{ch} \mu_i)$ ,  $Q_\nu^\lambda(i) \equiv Q_\nu^\lambda(\operatorname{ch} \mu_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Тогда при  $\mu_0 < \mu < \mu_2$

$$\Phi = (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum A_n \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} [P_{n-1/2}(0) Q_{n-1/2} - \\ - Q_{n-1/2}(0) P_{n-1/2}]. \quad (98)$$

Скачок первой производной  $\Phi$  при  $\mu = \mu_0$  определяется коэффициентом при  $\delta(\mu - \mu_0)$  в правой части (93):

$$(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^{5/2} \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} \mu_0 \times \\ \times \sum A_n \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} [P_{n-1/2}(0) \dot{Q}_{n-1/2}(0) - Q_{n-1/2}(0) \dot{P}_{n-1/2}(0)] = \\ = - \frac{4\pi f}{\operatorname{sh} \mu_0} (\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^2,$$

или

$$\sum A_n \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}} = \frac{4\pi f a^2}{(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^{1/2}}.$$

Отсюда

$$A_n = 8\sqrt{2} f a^2 Q_{n-1/2}(0).$$

В итоге при  $\mu_0 < \mu < \mu_2$

$$\Phi = (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} 8\sqrt{2} f a^2 \times \\ \times \sum \frac{\cos n\theta}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(0) [P_{n-1/2}(0) Q_{n-1/2} - Q_{n-1/2}(0) P_{n-1/2}]. \quad (99)$$

Решение, обращающееся в нуль при  $\mu > \mu_1$ , в интервале  $\mu_2 < \mu < \mu_1$  выглядит следующим образом:

$$\Phi = (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \times \\ \times \sum B_n \frac{\cos n\theta}{1+\delta_{n0}} [P_{n-1/2}(1) Q_{n-1/2} - Q_{n-1/2}(1) P_{n-1/2}]. \quad (100)$$

Поскольку потенциал непрерывен при всех значениях, то выражения (99) и (100) должны совпадать при  $\mu = \mu_2$ . Отсюда находим коэффициенты

$$B_n = 8\sqrt{2} f a^2 Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(0, 2)}{r_n(1, 2)}.$$

Здесь и в дальнейшем мы принимаем обозначения

$$r_n(i, j) = P_{n-1/2}(i) Q_{n-1/2}(j) - Q_{n-1/2}(i) P_{n-1/2}(j).$$

Итак, при  $\mu_2 < \mu < \mu_1$

$$\Phi = 8\sqrt{2} f a^2 (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \times \\ \times \sum \frac{\cos n\theta}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(0, 2)}{r_n(1, 2)} [P_{n-1/2}(1) Q_{n-1/2} - Q_{n-1/2}(1) P_{n-1/2}]. \quad (101)$$

Скачок первых производных от  $\Phi$  при  $\mu = \mu_1$  и  $\mu = \mu_2$  определяет  $\sigma_1(\theta)$  и  $\sigma_2(\theta)$ . При  $\mu = \mu_1$  имеем

$$8\sqrt{2} f (\operatorname{ch} \mu_1 - \cos \theta)^{5/2} \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_1} \sum \frac{\cos n\theta}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(0, 2)}{r_n(1, 2)} = -4\pi\sigma_1.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} f \frac{(\operatorname{ch} \mu_1 - \cos \theta)^{5/2}}{\operatorname{sh} \mu_1} \sum \frac{\cos n\theta}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(0, 2)}{r_n(1, 2)}. \quad (102)$$

Аналогично при  $\mu = \mu_2$

$$8\sqrt{2} f (\operatorname{ch} \mu_2 - \cos \theta)^{5/2} \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_2} \sum \frac{\cos n\theta}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(1, 0)}{r_n(1, 2)} = -4\pi\sigma_2$$

или

$$\sigma_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} f \frac{(\operatorname{ch} \mu_2 - \cos \theta)^{5/2}}{\operatorname{sh} \mu_2} \sum \frac{\cos n\theta}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(1, 0)}{r_n(1, 2)}. \quad (103)$$

Константа  $f$  определяет величины зарядов на каждой из заряженных поверхностей:

$$e_0 = \int \sigma_0 \delta(\mu - \mu_0) dV = 4\pi^2 f a^3 / \operatorname{sh} \mu_0,$$

$$e_1 = \int \sigma_1 \delta(\mu - \mu_1) dV = -16fa^3 \sum \frac{1}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(1) Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(0, 2)}{r_n(1, 2)},$$

$$e_2 = \int \sigma_2 \delta(\mu - \mu_2) dV = -16fa^3 \sum \frac{1}{1+\delta_{n0}} Q_{n-1/2}(2) Q_{n-1/2}(0) \frac{r_n(1, 0)}{r_n(1, 2)}.$$

Складывая заряды, получаем  $e_0 + e_1 + e_2 = 0$ , т.е. рассматриваемое зарядовое распределение в целом нейтрально.

Итак, при поверхностном распределении заряда, определяемом соотношениями (92), (96), (102), (103), электростатический потенциал равен нулю вне и внутри соленоида. Внутри зарядового распределения ( $\mu_0 < \mu < \mu_1$ ) он определен соотношениями (99), (101). При вращении каждого элемента слоя 0 (в той плоскости  $\varphi = \text{const}$ , в которой он лежит) с постоянной угловой скоростью  $\omega$  возникает поверхностный ток (9). Этот ток генерирует вектор-потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона:

$$\Delta A_\omega = -\frac{4\pi}{c} j_0. \quad (104)$$

Константа  $g$ , входящая в определение  $j_0$  (см. (9)), следующим образом выражается через  $e_0$ ,  $\omega$ :

$$g = -\frac{\omega e_0}{\pi c}. \quad (105)$$

Таким образом, можно пользоваться всеми выражениями для вектор-потенциалов, полученными в [26] при условии, что константа  $g$  определяется соотношением (105).

## 11. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТОРОИДАЛЬНОГО СОЛЕНОИДА

Пусть теперь весь соленоид вращается как целое вокруг оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (рис.9). Тогда, в дополнение к меридиональному току (9), возникает ток, текущий в широтном направлении:

$$\mathbf{j}_t = j \mathbf{n}_\varphi, \quad j = \sigma v_\varphi = \Omega r \sigma. \quad (106)$$

Здесь плотность  $\sigma$  определена соотношением (92),  $\rho$  ( $= a \frac{\text{sh } \mu}{\text{ch } \mu - \cos \theta}$ ) — расстояние от оси  $z$  до элементов заряженных поверхностей. Ток (106) генерирует вектор-потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона  $\Delta A_\Omega = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_t$ . Единственной неисчезающей компонентой вектор-потенциала оказывается  $A_\varphi^\Omega$ . Записав ее в виде  $A_\varphi^\Omega = (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{1/2} \tilde{A}_\varphi$ , имеем для  $\tilde{A}_\varphi$  следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{A}_\varphi}{\partial \mu^2} + \text{cth } \mu \frac{\partial \tilde{A}_\varphi}{\partial \mu} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\text{sh}^2 \mu} \right) \tilde{A}_\varphi + \frac{\partial^2 \tilde{A}_\varphi}{\partial \theta^2} = \\ = - \frac{4\pi\sigma\Omega a^3 \text{sh } \mu}{c (\text{ch } \mu - \cos \theta)^{7/2}}. \end{aligned} \quad (107)$$

Представим  $\tilde{A}_\varphi$  в виде ряда по  $\cos n\theta$ :

$$\tilde{A}_\varphi = \sum \frac{1}{1 + \delta_{n0}} A_n(\mu) \cos n\theta.$$

Подставляя это выражение в (107), разлагая правую часть в ряд по  $\cos n\theta$  и собирая коэффициенты при  $\cos n\theta$ , получаем для  $A_n$  обыкновенное дифференциальное уравнение:

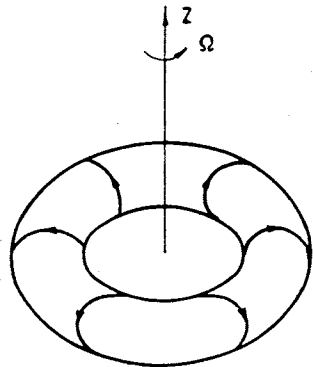


Рис. 9. Равномерное вращение тороидального соленоида вокруг оси симметрии приводит к появлению магнитного поля вне соленоида

$$\frac{d^2 A_n}{d\mu^2} + \operatorname{cth} \mu \frac{dA_n}{d\mu} + A_n \left( \frac{1}{4} - n^2 - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu} \right) =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} f a^3}{c} \left[ \frac{\delta(\mu - \mu_1)}{\operatorname{sh} \mu_1} C_{1n} + \frac{\delta(\mu - \mu_2)}{\operatorname{sh} \mu_2} C_{2n} + \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\operatorname{sh} \mu_0} C_{0n} \right]. \quad (108)$$

Константы  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$ ,  $C_{0n}$  зависят только от геометрических параметров зарядового распределения:

$$C_{0n} = 2Q_{n-1/2}^1(0) = - \sum_m \frac{1}{1 + \delta_{m0}} Q_{m-1/2}(0) f_{mn}(0),$$

$$C_{1n} = \sum_m \frac{1}{1 + \delta_{m0}} Q_{m-1/2}(0) \frac{r_m(0, 2)}{r_m(1, 2)} f_{mn}(1),$$

$$C_{2n} = \sum_m \frac{1}{1 + \delta_{m0}} Q_{m-1/2}(0) \frac{r_m(1, 0)}{r_m(1, 2)} f_{mn}(2),$$

где

$$f_{mn}(i) = \exp[-\mu_i(m+n)] - \exp(-\mu_i|m-n|).$$

Вне заряженных поверхностей линейно-независимыми решениями (108) являются  $P_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu)$  и  $Q_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu)$ . Поскольку физические решения должны быть всегда ограниченными, то имеем

$$A_n = B_n P_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu) \text{ при } 0 < \mu < \mu_0 \text{ (вне соленоида),}$$

$$A_n = C_n Q_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu) \text{ при } \mu_1 < \mu < \infty \text{ (внутри соленоида),}$$

$$A_n = D_n P_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu) + E_n Q_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu) \text{ между слоями 0 и 2,}$$

$$A_n = F_n P_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu) + G_n Q_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu) \text{ между слоями 2 и 1,}$$

где  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $F_n$  и  $G_n$  — константы. Поскольку вектор-потенциал непрерывен во всех точках, то мы должны сшить эти решения при  $\mu = \mu_0, \mu_1, \mu_2$ . С другой стороны, первые производные по  $\mu$  терпят разрыв в этих точках. Величины скачков первых производных равны коэффициентам при соответствующих  $\delta$ -функциях в правой части (108). В итоге мы приходим к следующим выражениям. Вне соленоида ( $\mu < \mu_0$ ):

$$A_n = \frac{8\sqrt{2} fa^3 \Omega}{c(n^2 - 1/4)} [C_{0n} Q_{n-1/2}^1(0) + C_{1n} Q_{n-1/2}^1(1) + C_{2n} Q_{n-1/2}^1(2)] P_{n-1/2}^1 \quad (109)$$

Внутри соленоида ( $\mu > \mu_1$ ):

$$A_n = \frac{8\sqrt{2} fa^3 \Omega}{c(n^2 - 1/4)} [C_{0n} P_{n-1/2}^1(0) + C_{1n} P_{n-1/2}^1(1) + C_{2n} P_{n-1/2}^1(2)] Q_{n-1/2}^1 \quad (110)$$

Ради полноты приведем также  $A_n$  внутри зарядового распределения.

Между слоями 0 и 2:

$$A_n = \frac{8\sqrt{2} fa^3 \Omega}{c(n^2 - 1/4)} \{ [C_{1n} Q_{n-1/2}^1(1) + C_{2n} Q_{n-1/2}^1(2)] P_{n-1/2}^1 + C_{0n} P_{n-1/2}^1(0) Q_{n-1/2}^1 \} \quad (111)$$

Между слоями 2 и 1:

$$A_n = \frac{8\sqrt{2} fa^3 \Omega}{c(n^2 - 1/4)} \{ [C_{2n} P_{n-1/2}^1(2) + C_{0n} P_{n-1/2}^1(0)] Q_{n-1/2}^1 + C_{1n} Q_{n-1/2}^1(1) P_{n-1/2}^1 \} \quad (112)$$

В итоге вектор-потенциал вращающегося зарядового распределения (92) имеет вид

$$A_\Omega = A_\varphi^\Omega \mathbf{n}_\varphi, \quad A_\varphi^\Omega = (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2} \sum A_n(\mu) \frac{\cos n\theta}{1 + \delta_{n0}}, \quad (113)$$

где  $A_n(\mu)$  определены соотношениями (109) — (112).

На больших расстояниях  $A_\varphi^\Omega$  убывает как  $r^{-2}$ :

$$A_\varphi^\Omega \sim \alpha \sin \theta_s / r^2. \quad (114)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{16\sqrt{2} fa^3 \Omega}{c} \sum \frac{1}{1 + \delta_{0n}} [C_{0n} Q_{n-1/2}^1(0) + C_{1n} Q_{n-1/2}^1(1) + C_{2n} Q_{n-1/2}^1(2)].$$

Напряженность магнитного поля убывает как  $r^{-3}$ :

$$H_r \sim 2\Omega \alpha \cos \theta_s r^{-3}, \quad H_\theta \sim \Omega \alpha \sin \theta_s r^{-3}. \quad (115)$$

Эти выражения упрощаются при малой толщине зарядового слоя ( $\mu_1 = \mu_0 + \Delta_1, \mu_2 = \mu_0 + \Delta_2, \Delta_1 \ll \mu_0, \Delta_2 \ll \mu_0$ ). Тогда имеем

$$A_n = \frac{8\sqrt{2} f a^3 \Omega}{c(n^2 - 1/4)} \operatorname{cth} \mu_0 (\Delta_1 + \Delta_2) [Q_{n-1/2}^1(0)]^2 P_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu)$$

вне соленоида и

$$A_n = \frac{8\sqrt{2} f a^3 \Omega}{c(n^2 - 1/4)} \operatorname{cth} \mu_0 (\Delta_1 + \Delta_2) P_{n-1/2}^1(0) Q_{n-1/2}^1(0) Q_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu)$$

внутри него. При этом константа  $\alpha$ , входящая в (114), (115), выражается формулой

$$\alpha = \frac{e_0}{2\sqrt{2}c} \operatorname{cth} \mu_0 (\Delta_1 + \Delta_2) \Omega \left(1 + \frac{6}{x_0} + \frac{6}{x_0^2}\right), \quad x_0 = \exp(2\mu_0) - 1.$$

Полный вектор-потенциал вращающегося соленоида равен сумме  $A_\omega$  (см. разд.10) и  $A_\Omega$  (см. (113)).

Пусть теперь соленоид вращается как целое вокруг оси  $z$  с линейно растущей во времени скоростью:  $v = \Omega_1 t \rho$ . Тогда для вектор-потенциала получаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\omega + (tA_\varphi^\Omega - \frac{1}{c}\beta) \mathbf{n}_\varphi,$$

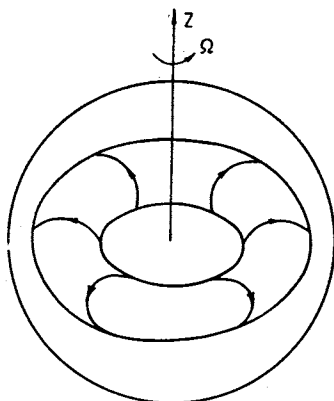
где  $A_\omega$  и  $A_\varphi^\Omega$  определены выражениями (104) и (113). Константа  $\beta$  равна

$$\begin{aligned} \beta = 32a^4 f \Omega & \left[ \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_1} \sum \frac{1}{1 + \delta_{n0}} Q_{n-1/2}^1(1) Q_{n-1/2}^1(0) \frac{r_n(0, 2)}{r_n(1, 2)} + \right. \\ & + \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_2} \sum \frac{1}{1 + \delta_{n0}} Q_{n-1/2}^1(2) Q_{n-1/2}^1(0) \frac{r_n(1, 0)}{r_n(1, 2)} - \\ & \left. - \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_0} \sum \frac{1}{1 + \delta_{n0}} Q_{n-1/2}^1(0) Q_{n-1/2}^1(0) \right]. \end{aligned}$$

В результате вне соленоида возникает постоянное во времени электрическое поле  $E_\varphi = -(1/c) A_\varphi^\Omega$  и линейно растущее магнитное поле  $\mathbf{H} = t \operatorname{rot} (A_\varphi^\Omega \mathbf{n}_\varphi)$ . На больших расстояниях имеем:

$$E_\varphi = -\frac{\alpha \sin \theta_s}{cr^2}, \quad H_r = \frac{2\alpha t \cos \theta_s}{r^3}, \quad H_\theta = \frac{\alpha t \sin \theta_s}{r^3}.$$

Рис. 10. Тороидальный соленоид, окруженный непроницаемой сферой. Электрическое поле налетающей заряженной частицы в комбинации с магнитным полем соленоида приводит к ненулевому моменту, который стремится повернуть соленоид. В результате вне сферы возникает магнитное поле, воздействующее на заряженную частицу



Радиальная компонента вектора Пойнтинга направлена от соленоида:

$$S_r = -\frac{E_\varphi H_\theta}{4\pi c} = t \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta_s}{4\pi c^2 r^5}.$$

Необходима следующая оговорка. В этом разделе мы рассматривали вращение ТС с зарядовой плотностью, определенной соотношением (92). Эта плотность состоит из трех зарядовых оболочек, вложенных одна в другую. Это означает, что ЭМП, генерируемое вращением такого соленоида, будет отличаться от ЭМП, генерируемого вращением намагниченного кольца с намагничением, определенным соотношениями (84), (87), (88). (Такому намагничению соответствует равная нулю зарядовая плотность.)

Окружим теперь ТС с постоянным тороидальным током непроницаемой (для наблюдателя, но не для ЭМП) сферой  $S$  (рис.10). Возможно ли установить существование тока в обмотке соленоида? Мы видели, что ЭМП выходит за пределы соленоида (и сферы), если всю конструкцию (соленоид и сферу) привести во вращение. Следующие соображения [41] указывают, что заряженные частицы должны рассеиваться на непроницаемом (для частиц) ТС. Из-за эффектов отдачи соленоид приобретает конечное ускорение. В результате вне соленоида возникает ЭМП, которое изменит (из-за силы Лоренца) траектории рассеиваемых частиц. Имеются две различные причины для возникновения эффекта отдачи. Первая тривиальна. Она связана со столкновением падающих частиц с поверхностью непроницаемого соленоида (или окружающей его сферы  $S$ ). От нее можно избавиться, сделав сферу достаточно массивной. Вторая причина [41] связана с тем, что внутри соленоида отличны от нуля как электрическое, так и магнитное поле. Электрическое поле — это поле налетающей заряженной частицы, магнитное поле — поле



соленоида. В результате появляются ненулевые импульсы  $\int \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') dV'$  и момент импульса  $\int \mathbf{r}' \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV'$ , которые стремятся сместить и повернуть соленоид. Это, в свою очередь, приводит к возникновению ЭМП вне соленоида и к рассеянию заряженных частиц на этом поле.

\* \* \*

Мы рассмотрели основные свойства соленоидов, которые необходимы для изучения топологических эффектов, упомянутых во введении, интерпретации экспериментов с тороидальными соленоидами [19, 21], построения объектов с дробной статистикой (анионов) [5, 18]. Эти вопросы составят содержание следующего обзора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aharonov Y., Bohm D. — Phys. Rev., 1958, vol.115, p.485.
2. Peshkin M., Topomura A. — The Aharonov — Bohm Effect. Springer, Berlin, 1989.
3. Скаржинский В.Д. — Труды ФИАН, М., 1986, т.167, с.139;  
Афанасьев Г.Н. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.172.
4. Aharonov Y., Casher A. — Phys. Rev. Lett., 1984, vol.53, p.319.
5. Wilczek F. — Phys. Rev. Lett., 1982, vol.48, p.1144.
6. Cimmino A., Opat G.L., Klein A.G. et al. — Phys. Rev. Lett., 1989, vol.63, p.380.
7. Afanasiev G.N. — J. Phys. A., 1990, vol.23, p.5755.
8. Миллер М.А. — Известия вузов. Радиофизика, 1986, т.29, с.991.
9. Миллер М.А. — УФН, 1984, т.142, с.147.
10. Saledin D.R. — IEEE Trans. Mag., 1984, vol. Mag.20, p.381.
11. Status Report on Controlled Thermonuclear Fusion, IAEA, Vienna, 1990.
12. IEEE Transactions on Plasma Science, 1989, v.17, N3.
13. IEEE Transactions on Magnetics, 1989, vol.25, No.1; 1991, vol.27, No.1.
14. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. — ЖЭТФ, 1985, т.88, с.84.
15. Зельдович Я.Б. — ЖЭТФ, 1957, т.33, с.1531.
16. Дубовик В.М., Чешков А.А. — ЭЧАЯ, 1974, т.5, с.791;  
Дубовик В.М., Тосунян Л.А. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.1193;  
Dubovik V.M., Tugushev V.V. — Phys. Rep., 1990, vol.187, p.145.
17. Musolf M.J., Holstein B.R. — Phys. Rev., 1991, vol.D43, p.2956;  
Costescu A., Radescu E.E. — Ann. Phys. (N.Y.), 1991, vol.209, p.13;  
Семенко С.Ф. — ЯФ, 1981, т.34, с.639;  
Назмитдинов Р.Г. — ЯФ, 1990, т.52, с.679.
18. Afanasiev G.N. — J. Phys. A., 1991, vol.24, p.2517.
19. Рязанов Г.А. — Электрическое моделирование с применением вихревых полей. М.: Наука, 1969, с.79.
20. Дубовик В.М., Тосунян Л.А., Тугушев В.В. — ЖЭТФ, 1986, т.90, с.591.
21. Миткевич В.Ф. — Магнитный поток и его преобразования. Изд. М.—Л.: АН СССР, 1946.
22. Меллер К. — Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975;  
Логунов А.А. — Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1987.

23. Schiff L.I. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1939, vol.25., p.391.
24. Corum J.E. — J. Math. Phys., 1978, vol.18, p.770;  
1980, vol.21, p.2360.
25. Abbott T.A., Griffiths D.J. — Amer. J. Phys., 1985, vol.53, p.1203;  
Афанасьев Г.Н. — Препринт ОИЯИ Р4-89-96, Дубна, 1989.
26. Afanasiev G.N. — J. Comput. Phys., 1987, vol.69, p.196.
27. Heald M.A. — Amer. J. Phys., 1988, vol.56, p.540.
28. Альтшулер Б.Л., Аронов А.Г., Спивак Б.З., Шарвин Д.Ю., Шарвин Ю.В. — Письма в ЖЭТФ, 1982, т.3,5, с.476.
29. Frolov V.P., Skarzhinsky V.D. — Nuovo Cimento, 1983, vol.В76, p.32.
30. Стрэттон Дж. — Теория электромагнетизма. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
31. Козлов В.А., Самохвалов А.В. — Письма в ЖЭТФ, 1991, т.53, с.150.
32. Абрикосов А.А. — Основы теории металлов. М.: Наука, 1987.
33. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. — Квантовая электродинамика, М.: Физматгиз, 1959.
34. Блатт Дж.М., Вайскопф В.Ф. — Теоретическая ядерная физика, М.: ИЛ, 1954.
35. Роуз М. — Поля мультиполей. М.: ИЛ, 1957.
36. Jackson J.D. — Classical Electrodynamics. John Wiley, New York, 1975.
37. Barrera R.G., Estevez G.A., Giraldo J. — Eur. J. Phys., 1985, vol.6, p.287.
38. Afanasiev G.N., Dubovik V.M. — J.Phys.A., 1992, vol.25, p.4869.
39. Хриплович И.Б. — Несохранение четности в атомных явлениях. М.: Наука, 1988.
40. Carrascal B., Estevez G.A., Lorenzo V. — Amer. J. Phys., 1991, vol.59, p.233.
41. Смородинский Я.А. — УФН, 1990, т.160, с.168.
42. Толстой Н.А., Спартаков А.А. — Письма в ЖЭТФ, 1990, т.52, с.796.
43. Марценюк М.А., Марценюк Н.М. — Письма в ЖЭТФ, 1991, т.53, с.229.
44. Afanasiev G.N. — JINR Preprint E2-92-132, Dubna, 1992.