

КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМА С ИЗЛУЧЕНИЕМ

Э.И.Алискендеров, А.С.Шумовский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Хо Чунг Зунг

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Дан обзор последних результатов в области резонаторной квантовой электродинамики (РКЭ) — науки о взаимодействиях одиночных атомов или групп атомов, локализованных в ловушках, с полем излучения. В качестве прообраза РКЭ рассматривается модель Джейнса — Каммингса и ее обобщения. Приводятся основные результаты по исследованию эффектов антигруппировки фотонов, субпуассоновской статистики излучения, сжатия квантовых флуктуаций, когерентного пленения населенностей и др. Исследуется проблема квантовых флуктуаций поля.

The review is given of recent results in cavity quantum electrodynamics (cavity QED) — the science of the interaction of single atoms or groups of atoms, localized in traps, with the radiation field. As a prototype of cavity QED the Jaynes — Cummings model and its generalizations are considered. Main results are presented on the study of the effects of photon antibunching, sub-Poissonian radiation statistics, squeezing of quantum fluctuations, coherent trapping of populations and others. The problem of quantum field fluctuations is studied.

1. ВВЕДЕНИЕ

Простейшая модель взаимодействия атома или молекулы с полем электромагнитного излучения связана с представлением о так называемом «двухуровневом атоме», введенном Эйнштейном в знаменитой работе по кинетике излучения [1]. В дальнейшем это представление сыграло важную роль в квантовой механике, в частности в задаче о естественной ширине линии излучения, решенной Вайскопфом и Вигнером [2].

Наиболее очевидной реализацией представления о двухуровневом атоме может служить спин $1/2$ во внешнем магнитном поле В. Гамильтониан такой системы в случае поля, параллельного оси z , имеет вид

$$H = -\hbar\gamma BS^z,$$

где S^z — соответствующая компонента оператора спина и $\gamma = g_s \mu_B$ (g_s — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора) в случае спина электрона или γ является гиромагнитным отношением в случае ядерного спина. Такой гамильтониан имеет только два собственных состояния с энергиями $\pm \hbar\gamma B/2$. Таким образом, здесь действительно реализуется «двухуровневый атом» с частотой перехода, равной зеемановской частоте $\omega_z = \gamma B$. Такая двухуровневая система широко используется в физике ядерного магнитного резонанса [3], в теории мазеров с парамагнитной активной средой [4], в теории сверхизлучения [5—8].

С появлением лазера представление о двухуровневом атоме прочно вошло в обиход оптики [9,10]. Дело в том, что, используя лазеры в качестве источников электромагнитного излучения, можно воздействовать на атом полем с частотой, близкой к частоте перехода между какими-либо парами уровней (оптический резонанс). В этом случае влиянием других уровней можно пренебречь и ограничиться рассмотрением двухуровневого (в общем случае — конечноуровневого) атома [11]. С другой стороны, использование резонаторов высокой добротности приводит к тому, что атом, помещенный в такой резонатор, взаимодействует только с одной или несколькими модами поля, квантованного в объеме резонатора.

Новый импульс в исследовании модели двухуровневого атома дал недавний прогресс в квантовой оптике, приведший к созданию источников электромагнитного поля в «неклассических» состояниях с подавленными квантовыми флуктуациями квадратур поля (явление сжатия) или энергии (явление субпуассоновского излучения) и исследование других принципиально новых квантовых эффектов (разгруппировка фотонов, нарушение классического неравенства Коши — Шварца и т.д.) [12—18]. Нужно подчеркнуть, что излучение «неклассических» состояний фотонов крайне важно, т.к. предоставляет качественно новую информацию о нелинейных явлениях в квантовых полях и открывает перспективы для различных приложений, от неразрушающих квантовых измерений до передачи информации в световодах с минимальным уровнем шумов и создания оптического компьютера. Взаимодействие света в неклассических состояниях с двух- или конечноуровневыми атомами представляет значительный интерес в связи с проблемами генерации таких состояний и усиления их характерных свойств, например, сжатия квантовых флуктуаций.

Другой причиной, обуславливающей важность задачи об одном атоме, взаимодействующем с резонаторным полем, явилось создание радио-

частотных ловушек для ионов, оптических («вязких») ловушек для нейтральных атомов и разработка методов лазерного охлаждения [19,20]. Указанные достижения позволяют экспериментально исследовать взаимодействие резонаторных полей с отдельным атомом или группами с малым (контролируемым) числом атомов, находящихся практически в состоянии покоя (эффективная температура ~ 100 мК). Эти новые экспериментальные возможности имеют принципиальное значение, т.к. позволяют осуществить непосредственную проверку ряда положений квантовой теории, включая дополнительную [21], квантовые скачки [22] и др. Сюда относится также создание одноатомного лазера [23] с использованием микроволновых переходов долгоживущих высоковозбужденных (так называемых ридберговских) атомов в резонаторах высокой добротности, в том числе со сверхпроводящими стенками.

Область квантовой оптики, связанную с исследованием процессов взаимодействия одного или нескольких атомов с одной или несколькими модами квантованного электромагнитного поля, принято называть резонаторной квантовой электродинамикой (РКЭ). Теоретические представления РКЭ связаны в первую очередь с исследованием модели Джейнса — Каммингса (МДК) [24] и ее обобщений. Это обусловлено тем обстоятельством, что указанная модель достаточно адекватно описывает физические процессы и вместе с тем допускает точное решение.

Исследованию МДК посвящено огромное количество работ, в том числе обзоры [25,51,52]. Нужно подчеркнуть, что в рамках указанной модели удалось предсказать и описать ряд новых явлений, таких как коллапс и возобновление квантовых осцилляций Раби, когерентное пленение населенностей [25] и др. Подчеркнем, что МДК имеет разные обобщения, обусловленные включением многомодовых полей [26—30], многофотонных переходов [29—35], многоуровневых атомов [36—39], многоатомных взаимодействий [40—43], конечной добротности резонатора [44—48], зависимости константы связи от интенсивности [49—50] и т.д.

2. МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА — КАММИНГСА

Гамильтониан МДК может быть получен из гамильтониана классической электродинамики стандартным образом [53]. Рассмотрим нерелятивистский электрон, взаимодействующий с потенциальным полем $U(\mathbf{r})$ и электромагнитным полем с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Классический гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (1)$$

где

$$H_A = \frac{p^2}{2m} + U(r), \quad H_F = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \quad H_{AF} = -\frac{e}{mc} \mathbf{p} \mathbf{A} + \frac{e^2}{2mc^2} A^2.$$

Здесь p — импульс электрона, m — его масса, e — заряд. $E = -\frac{1}{c} \partial A / \partial t$,

$\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$ и электромагнитное поле считается чисто поперечным.

В рамках теории возмущений, используемой обычно в квантовой электродинамике [54], первые два члена в (1) рассматриваются как гамильтониан невозмущенной системы, тогда как H_{AF} описывает возмущение. Оператор $H_0 = H_A + H_F$ определен на пространстве состояний

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_F. \quad (2)$$

Пространство \mathcal{H}_A построено из собственных состояний ψ_n оператора H_A :

$$H_A \psi_n = E_n \psi_n. \quad (3)$$

Пространство \mathcal{H}_F образовано фоковскими состояниями мод поля

$$\mathcal{H}_F = \left\{ \prod_k |n_k\rangle_k \right\}.$$

Представление двухуровневого атома связано с предположением о том, что из всей совокупности дискретных состояний ψ_n в (3) мы можем ограничиться лишь двумя состояниями $|e\rangle$ и $|g\rangle$ (возбужденным и основным), переход между которыми соответствует частоте резонаторной моды. В этом случае также следует ограничиться рассмотрением только одной моды поля.

Как известно, состояния атома характеризуются значениями момента и четности, а переходы определяются известными правилами отбора. Обычно в МДК рассматриваются дипольные переходы электрического типа [54], хотя возможно рассмотрение и других переходов.

Теперь задача построения гамильтониана МДК сводится к вычислению матричных элементов оператора H_{AF} в избранном базисе состояний. При этом обычно вкладом последнего слагаемого в H_{AF} пренебрегают. Более детальный учет A^2 -члена приводит к перенормировке массы [55].

В представлении вторичного квантования векторный потенциал имеет вид (для одной моды поля)

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega V}} e (a_k^\dagger e^{-ikr} + a_k e^{ikr}), \quad (4)$$

где e — единичный вектор поляризации рассматриваемой моды, ω — ее частота ($\omega = kc$) и \mathcal{V} — объем квантования. Так как длина волны оптического излучения много больше характерных размеров атома и интегрирование при вычислении матричных элементов по атомным состояниям производится по области пространства, ограниченной размерами атома, вклад от экспонент в (4) может быть учтен в нулевом приближении:

$$e^{\pm ikr} \cong 1.$$

Поэтому для матричных элементов H_{AF} в избранном приближении имеем

$$\langle e | H_{AF} | e \rangle = \langle g | H_{AF} | g \rangle = 0, \quad \langle e | H_{AF} | g \rangle = -\frac{e}{mc} \sqrt{\omega} e \langle e | p | g \rangle.$$

Далее, принимая во внимание соотношение

$$[r, H_A] = i \frac{\hbar}{m} p,$$

можно заменить матричные элементы импульса соответствующими элементами радиуса-вектора. Используя определение дипольного момента $\mathbf{d} = e \mathbf{r}$, получаем, таким образом, гамильтониан в дипольном приближении. Удобно ввести атомные операторы

$$R^z = (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)/2, \quad R^+ = |e\rangle\langle g|, \quad R^- = |g\rangle\langle e|,$$

в терминах которых полный гамильтониан системы атом + поле излучения (1) имеет вид (без учета C -числовых слагаемых):

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (5)$$

где

$$H_A = \hbar \omega_0 R^z, \quad \omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar, \quad H_F = \hbar \omega a^\dagger a, \\ H_{AF} = \hbar g (R^+ + R^-) (a^\dagger + a), \quad g = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega \mathcal{V}}} \omega_0.$$

Последний шаг связан с исключением из H_{AF} в (5) «антирезонансных» членов $R^+ a^\dagger$ и $R^- a$, описывающих виртуальные процессы возбуждения (девозбуждения) атома с одновременным рождением (поглощением) фотона (приближение вращающейся волны [3]).

В результате приходим к МДК (модели взаимодействия двухуровневого атома с модой резонаторного поля в дипольном приближении и приближении вращающейся волны (ПВВ)):

$$H_{JC} = \hbar \omega_0 R^z + \hbar \omega a^\dagger a + \hbar g (R^+ a + a^\dagger R^-). \quad (6)$$

Подчеркнем, что аналогичный по операторной структуре гамильтониан может быть получен с помощью гамильтониана взаимодействия в дипольном приближении $H_{AF} = -\mathbf{dE}$. При этом, однако, получится другое значение константы связи g . Подробное обсуждение указанной проблемы можно найти в обзоре [56].

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА—КАММИНГСА

Как уже отмечалось во введении, квантовая задача с гамильтонианом (6) точно решается и в представлении Шредингера [24,57], и в представлении Гейзенберга [11, 58,59]. Здесь мы воспользуемся подходом, связанным с понятием «одетых» состояний. Этот подход удобен для интерпретации многих физических явлений.

Гамильтониан (6) содержит лишь такие комбинации операторов, которые описывают обмен одним квантом возбуждения между атомом и полем. Например, $R^\dagger a$ уменьшает число фотонов на единицу и одновременно повышает энергию атома путем его перевода в возбужденное состояние. Следовательно, число возбуждений в системе постоянно, а оператор числа возбуждений $R^z + a^\dagger a$ является интегралом движения, что легко проверяется. Поэтому удобно записать H в следующей форме:

$$H = H_I + H_{II}, \quad H_I = \hbar\omega(a^\dagger a + R^z), \quad H_{II} = \hbar\Delta R^z + \hbar g(R^+ a + R^- a^\dagger), \quad (7)$$

где $\Delta = \omega_0 - \omega$. Нетрудно видеть, что H_{II} также является интегралом движения и

$$[H_I, H_{II}] = 0, \quad (8)$$

что приводит к факторизации оператора временной эволюции $U(t)$:

$$U(t) = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) = U_I(t) U_{II}(t), \quad (9)$$

где

$$U_I(t) = \exp\left(\frac{-iH_I t}{\hbar}\right), \quad U_{II}(t) = \exp\left(\frac{-iH_{II} t}{\hbar}\right). \quad (10)$$

Поскольку гамильтониан (6) связывает состояние типа $|e; n\rangle$ только с $|g; n+1\rangle$, эти состояния могут быть использованы в качестве базиса в двухмерном (n)-подпространстве пространства состояний, в котором матричное представление для H_I и H_{II} имеет вид

$$H_I = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})I, \quad H_{II} = \begin{pmatrix} H\Delta/2 & \hbar g\sqrt{n+1} \\ \hbar g\sqrt{n+1} & -\hbar\Delta/2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь I — единичная матрица 2×2 . Теперь можно легко найти собственные значения и собственные состояния для H_{II} :

$$H_{II}|\psi_n^\pm\rangle = \pm \hbar\lambda_n|\psi_n^\pm\rangle, \quad \lambda_n = \sqrt{g^2(n+1) + \Delta^2/4},$$

$$|\psi_n^+\rangle = \left(\frac{\lambda_n - \Delta/2}{2\lambda_n}\right)^{1/2} |n+1; g\rangle + \left(\frac{\lambda_n + \Delta/2}{2\lambda_n}\right)^{1/2} |n; e\rangle,$$

$$|\psi_n^-\rangle = -\left(\frac{\lambda_n + \Delta/2}{2\lambda_n}\right)^{1/2} |n+1; g\rangle + \left(\frac{\lambda_n - \Delta/2}{2\lambda_n}\right)^{1/2} |n; e\rangle, \quad (12)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

и также

$$H_{II}|0; g\rangle = -\frac{\hbar\Delta}{2}|0; g\rangle. \quad (13)$$

С помощью (12) и (13) получаем

$$\exp(-iH_{II}t/\hbar)|n; e\rangle = A_{n,e}(t)|n; e\rangle + B_{n,e}(t)|n+1; g\rangle, \quad (14)$$

$$\exp(-iH_{II}t/\hbar)|n+1; g\rangle = A_{n+1,g}(t)|n+1; g\rangle + B_{n+1,g}(t)|n; e\rangle,$$

где

$$A_{n,e}(t) = \cos \lambda_n t - i \frac{\Delta}{2\lambda_n} \sin \lambda_n t, \quad A_{n+1,g}(t) = \cos \lambda_n t + i \frac{\Delta}{2\lambda_n} \sin \lambda_n t,$$

$$A_{0,g}(t) = \exp\left(\frac{i\Delta t}{2}\right), \quad B_{0,g}(t) = 0, \quad (15)$$

$$B_{n,e}(t) = B_{n+1,g}(t) = -i \frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t.$$

Как было отмечено в [25], естественно интерпретировать оператор $U_I(t)$ как квантово-полевую версию полуклассического унитарного оператора преобразования из лабораторной системы отсчета во вращающую систему отсчета, а оператор $U_{II}(t)$ описывает временную эволюцию системы в последней. Часто бывает удобно опускать $U_I(t)$ вообще и работать в промежуточном «представлении II», предложенном Ию и Эберли [25].

Это представление совпадает с обычным представлением взаимодействия при условии точного резонанса $\Delta = 0$.

Приведенные результаты (14), (15) позволяют легко построить состояние системы атом + поле в любой момент времени t и исследовать временное поведение и статистические свойства наблюдаемых величин при различных начальных условиях.

4. КОЛЛАПС И ВОЗОБНОВЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НАСЕЛЕННОСТИ УРОВНЕЙ

Используя полученное точное решение в МДК, исследуем временную эволюцию разности населенностей (инверсии) атома.

Пусть при $t = 0$ поле находится в произвольном состоянии, описываемом матрицей плотности $\rho_f = \sum_{n,n'} p_{n,n'} |n\rangle \langle n'|$, а атом — на верхнем уровне. Тогда матрица плотности $\rho(0)$ полной системы атом + поле имеет вид

$$\rho(0) = \sum_{n,n'} p_{n,n'} |n; e\rangle \langle n'; e|. \quad (16)$$

Используя (14), получаем для $\rho(t)$ в представлении II следующее выражение:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \exp(-iH_{II}t/\hbar) \rho(0) \exp(iH_{II}t/\hbar) = \\ &= \sum_{n,n'} p_{n,n'} \left[A_{n,e}(t) |n; e\rangle + B_{n,e}(t) |n+1; g\rangle \right] \times \\ &\quad \times \left[A_{n',e}^*(t) \langle n'; e| + B_{n',e}^*(t) \langle n'+1; g| \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь зависящее от времени среднее значение атомной инверсии легко вычисляется:

$$W(t) \equiv 2\langle R^z(t) \rangle = 2\text{Tr} [R^z(0) \rho(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \cos(2gt\sqrt{n+1}). \quad (18)$$

Здесь для простоты предполагается точный резонанс $\Delta = 0$. Сумма (18) играет центральную роль в исследовании явления коллапса и возобновления квантовых осцилляций Раби. При начальном фокковском состоянии поля $|n\rangle$

$$W(t) = \cos(2gt\sqrt{n+1}), \quad (19)$$

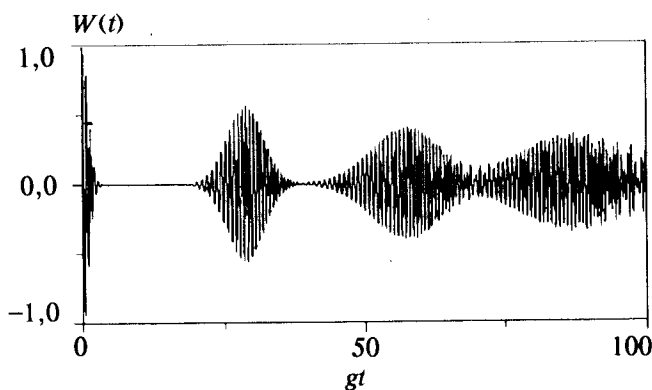


Рис.1. Временная эволюция инверсии населенностей уровней для случая, когда атом первоначально находится на верхнем уровне, а поле — в когерентном состоянии. Среднее число фотонов $\bar{n} = 20$; $\Delta = 0$

что фактически не только качественно, но и количественно идентично полуклассическому результату [11]:

$$W(t) = \cos \left(\frac{2d}{\hbar} \xi_0 t \right), \quad (20)$$

где d — величина матричного элемента дипольного момента, а ξ_0 — амплитуда приложенного поля. Однако, если исходное поле представляло собой вакуум ($n = 0$), то, согласно квантово-электродинамическому решению (19), энергия атома осциллирует с частотой Раби $2g$. С другой стороны, соответствующий нулевому полю полуклассический результат (20) вовсе не является осциллирующим. Квантово-электродинамическое решение еще больше отличается от полуклассического, если поле в начальный момент $t = 0$ находилось в состоянии с некоторым разбросом по числу заполнения. Примером таких состояний могут служить когерентное состояние с весовым фактором

$$p_{nn} = \exp(-\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!}, \quad (21)$$

или хаотическое (тепловое) состояние с весовым фактором

$$p_{nn} = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}, \quad (22)$$

где \bar{n} — среднее число фотонов для данного состояния. Временное поведение атомной инверсии $W(t)$ изображено на рис. 1 для атома, первоначально находящегося на верхнем уровне, а поля — в когерентном состоянии. Как видно из рисунка, эволюция атомной инверсии характеризуется чередованием затуханий и восстановлений осцилляций Раби.

Хотя коллапс квантовых осцилляций Раби был предсказан много лет назад [57,60,61], их возобновление, точнее, серия их последующих коллапсов и возобновлений была обнаружена и исследована недавно [62—64]. Это явление можно объяснить следующим образом. Атомная инверсия (18) состоит из суммы слагаемых, представляющих осцилляции Раби, вызванные определенным числом фотонов n . В начальный момент $t = 0$ система подготовлена во вполне определенном состоянии и все эти процессы коррелированы. При $t > 0$ из-за того, что все слагаемые в (18) осциллируют с разными частотами, между ними набегают значительные фазовые сдвиги, и усреднение вкладов этих слагаемых на фоне плавного распределения p_{nn} приводит к коллапсу квантовых осцилляций Раби. После некоторого времени фазы осцилляций соседних слагаемых в (18) становятся кратными 2π для $n \sim \bar{n}$. При этом начальный временной ход осцилляций Раби инверсии населенностей уровней частично восстанавливается, а затем они вновь коллапсируют. Это соображение позволяет определить интервал T_R между возобновлениями из простого соотношения

$$(2g\sqrt{\bar{n}+1} - 2g\sqrt{\bar{n}})T_R = 2\pi \quad (23)$$

или

$$T_R = \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{g}, \quad (24)$$

что согласуется с результатом аналитического расчета [63,64]. Как было отмечено выше, восстановление осцилляций Раби не полное. При увеличении времени взаимодействия пики возобновлений расползаются и начинают перекрываться и, в конечном итоге, осцилляции Раби приобретают хаотичный характер. Чем больше дисперсия интенсивности поля, тем быстрее наступает хаотический режим.

Аналитическое исследование явления коллапса и возобновления осцилляций Раби проведено в [63—64]. Явление коллапса и возобновления осцилляций Раби было также исследовано для резонаторного поля, первоначально находящегося в хаотическом [65—67], биномиальном [68], сжатом [69], сжатом фоковском [70], смещенном фоковском [71] и др. состояниях. Хотя экспериментально коллапс и возобновление осцилляций Раби наблюдались при начальном хаотическом (тепловом) состоянии резонаторного поля [72], которое не нуждается в специальной подготовке, аналитический расчет для этого случая довольно сложный [67].

В следующем разделе рассматривается влияние начального состояния атома на временное поведение различных динамических величин.

5. ВЛИЯНИЕ АТОМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ НА КОЛЛАПС И ВОЗОБНОВЛЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ РАБИ

Идея подготовить атом в когерентной суперпозиции состояний до включения взаимодействия с полем стала популярной благодаря ее возможному применению для подавления шума коррелированным спонтанным излучением [73], в исследовании квантового биения [74] и для других целей. Найт с соавторами [75—77] показали, что даже спонтанное излучение от соответствующим образом сфазированного атома может проявлять сжатие. Агарвал и Пури [78, 79], Зайхиер и Зубайри [80] обнаружили, что если относительная фаза между атомным диполем и когерентным полем настроена так, чтобы начальное состояние двухуровневого атома являлось собственным состоянием полуклассического гамильтониана [79], инверсия населенностей уровней остается почти неизменной и спектр резонансной флуоресценции имеет асимметричную двухпиковую структуру вместо симметричной трехпиковой.

Более глубокое разъяснение влияния атомной когерентности на осцилляции Раби было дано в [81], где рассмотрено взаимодействие атома с полем в биномиальном состоянии [82]:

$$|p, N\rangle = \sum_{n=0}^N \left[\frac{N! p^n (1-p)^{N-n}}{(N-n)! n!} \right]^{1/2} |n\rangle, \quad 0 < p < 1. \quad (25)$$

Такое состояние превращается в когерентное в пределе $p \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $Np = \text{const}$, и фоковское $|N\rangle$ в пределе $p \rightarrow 1$. Было найдено, что не только амплитуда возобновлений, но и их структура чувствительны к фазе когерентности между атомными уровнями. Когда атом в начальный момент находился в состоянии, которое является собственным состоянием полуклассического гамильтониана, инверсия уровней (корреляционная функция $g^{(2)}(t)$) имеет вид дублета (триплета) вместо синглета (дублета) возобновлений. Однако этот эффект обнаружен в [81] только для поля, находящегося в существенно биномиальном состоянии, т.е., когда $p \neq 0, 1$. Здесь показано [83], что такое изменение в структуре возобновлений также имеет место при начальном когерентном поле.

Пусть при $t = 0$ атом находится в когерентной суперпозиции возбужденного и основного состояний:

$$|\psi_a(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mu|^2}} (|e\rangle + \mu |g\rangle), \quad (26)$$

а резонаторное поле — в когерентном состоянии

$$|\psi_f(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\varphi) |n\rangle, \\ b_n = \exp\left(-\frac{\bar{n}}{2}\right) \left(\frac{\bar{n}}{n!}\right)^{1/2}. \quad (27)$$

Очевидно, весовой фактор p_{nn} равен: $p_{nn} = b_n^2$. Тогда для полной системы атом + поле

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mu|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\varphi) (|n; e\rangle + \mu |n; g\rangle). \quad (28)$$

При точном резонансе вектор состояния системы в момент времени t в представлении взаимодействия легко можно найти с помощью (14) и (15):

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mu|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\varphi) \{ -i \sin(gt\sqrt{n+1}) |n+1; g\rangle +$$

$$+ \cos(gt\sqrt{n+1}) |n; e\rangle + \mu [\cos(gt\sqrt{n}) |n; g\rangle - i \sin(gt\sqrt{n}) |n-1; e\rangle] \}. \quad (29)$$

Тогда для населенности верхнего уровня $P_e(t)$ получаем

$$P_e(t) = \frac{1}{2} + \langle R^z(t) \rangle, \quad (30)$$

где

$$\langle R^z(t) \rangle = \frac{1}{2(1 + |\mu|^2)} \sum_n b_n^2 [\cos(2gt\sqrt{n+1}) - |\mu|^2 \cos(2gt\sqrt{n}) + \\ + 2|\mu| \sin(\varphi + \eta) \left(\frac{\bar{n}}{n+1}\right)^{1/2} \sin(2gt\sqrt{n+1})], \quad (31)$$

и $\mu = |\mu| \exp(i\eta)$. Для $\bar{n} \gg 1$, заменяя сумму в (31) интегралом и интегрируя полученные выражения методом перевала [64], получаем выражение:

$$\langle R^z(t) \rangle \cong \frac{1}{2(1 + |\mu|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \pi^2 k^2)^{1/4}} \times \\ \times \left[I_k + 2|\mu| \sin(\varphi + \eta) \left(1 - \frac{\pi k \epsilon_k}{1 + \pi^2 k^2} \right) J_k \right], \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_k &= \exp(-\bar{n} \Psi_k \varepsilon_k^2) \left[\cos(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k + \beta_k \varepsilon_k) - |\mu|^2 \cos(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k) \right], \\
 J_k &= \exp(-\bar{n} \Psi_k \varepsilon_k^2) \sin(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k + \beta_k \varepsilon_k), \\
 \Psi_k &= \frac{2}{1 + \pi^2 k^2}, \quad \Phi_k = 2 \left(\pi k + 2\varepsilon_k + \frac{\pi k \varepsilon_k^2}{1 + \pi^2 k^2} \right), \\
 \alpha_k &= -\frac{1}{2} \tan^{-1}(\pi k), \quad \beta_k = \frac{2}{1 + \pi^2 k^2},
 \end{aligned} \tag{33}$$

и

$$\varepsilon_k = \tau - k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{34}$$

Здесь ε_k — локальное время около k -й точки перевала. Истинное время t определяется соотношением

$$t = \frac{2\tau \sqrt{\bar{n}}}{g}. \tag{35}$$

Из уравнений (33) видно, что поведение J_k представляет собой синусоидальные осцилляции, огибаемые гауссовской функцией с максимумом в $\varepsilon_k = 0$. Чтобы определить поведение I_k , перепишем эту функцию в виде

$$\begin{aligned}
 I_k &= \exp(-\bar{n} \Psi_k \varepsilon_k^2) \left[(1 - |\mu|^2)^2 + 4|\mu|^2 \sin^2 \left(\frac{\beta_k \varepsilon_k}{2} \right) \right]^{1/2} \times \\
 &\quad \times \sin(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k + \theta_k),
 \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\theta_k = \tan^{-1} \left[\frac{|\mu|^2 - \cos(\beta_k \varepsilon_k)}{\sin(\beta_k \varepsilon_k)} \right]. \tag{37}$$

Так как $\beta_k \ll \bar{n}$, осцилляции I_k вызываются в основном последней синусоидальной функцией в (36). Эти осцилляции имеют огибающую, представляющую собой произведение гауссовской функции и медленно осциллирующей функции. Когда $|\mu| \neq 1$, огибающая функция для I_k имеет один максимум при $\varepsilon_k = 0$. Это также относится к огибающей функции для J_k . Следовательно, $P_e(t)$ демонстрирует в этом случае синглеты возобновлений.

Когда $|\mu| = 1$, имеем из (36)

$$I_k = 2 \exp(-\bar{n} \Psi_k \varepsilon_k^2) \sin\left(\frac{\beta_k \varepsilon_k}{2}\right) \sin(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k + \theta_k). \quad (38)$$

Огибающая функция для I_k теперь обладает двумя максимумами в $\varepsilon_k = \pm 1/(2\bar{n} \Psi_k)^{1/2}$ и равняется нулю при $\varepsilon_k = 0$. Очевидно, если относительная фаза между резонаторным полем и атомным диполем удовлетворяет условиям $\varphi + \eta = 0$, только I_k дает вклад, что приводит к дублетам возобновлений, смещенным от центра k -го возобновления на интервалы $\pm 1/(2\bar{n} \Psi_k)^{1/2}$. Заметим далее, что, поскольку $\bar{n} \gg 1$, максимум огибающей для I_k имеет порядок $(\bar{n})^{-1/2}$ по сравнению с максимумом при $\varepsilon_k = 0$ огибающей для J_k . Поэтому при $\varphi + \eta \neq 0$ вклад от J_k преобладает над вкладом I_k , что приводит к синглетной структуре возобновлений.

Дублеты возобновлений, появляющиеся во временной эволюции $P_e(t)$ при $|\mu| = 1$, $\varphi + \eta = 0$, изображены на рис.2 (кривая *a*) и сравниваются с синглетным поведением возобновлений в случае, когда атом первоначально возбужден (кривая *b*). Когда среднее число фотонов падает, соседние возобновления начинают расползаться во времени и в конечном итоге перекрываются, что приводит к исчезновению структуры возобновлений.

Переходим теперь к вычислению корреляционной функции второго порядка

$$g^{(2)}(t) = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} - 1. \quad (39)$$

Используя вектор состояния (29), получаем

$$\langle a^\dagger a \rangle = \bar{n} + \frac{1}{1 + |\mu|^2} - P_e(t), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle = & \frac{1}{1 + |\mu|^2} \left\{ \bar{n}^2 (1 + |\mu|^2) + \bar{n} (1 - |\mu|^2) + |\mu|^2 - \right. \\ & - \sum_n b_n^2 [n \cos(2gt \sqrt{n+1}) - |\mu|^2 (n-1) \cos(2gt \sqrt{n}) + \\ & \left. + 2|\mu| \sin(\varphi + \eta) n \left(\frac{\bar{n}}{N+1} \right)^{1/2} \sin(2gt \sqrt{n+1}) \right] \}. \end{aligned} \quad (41)$$

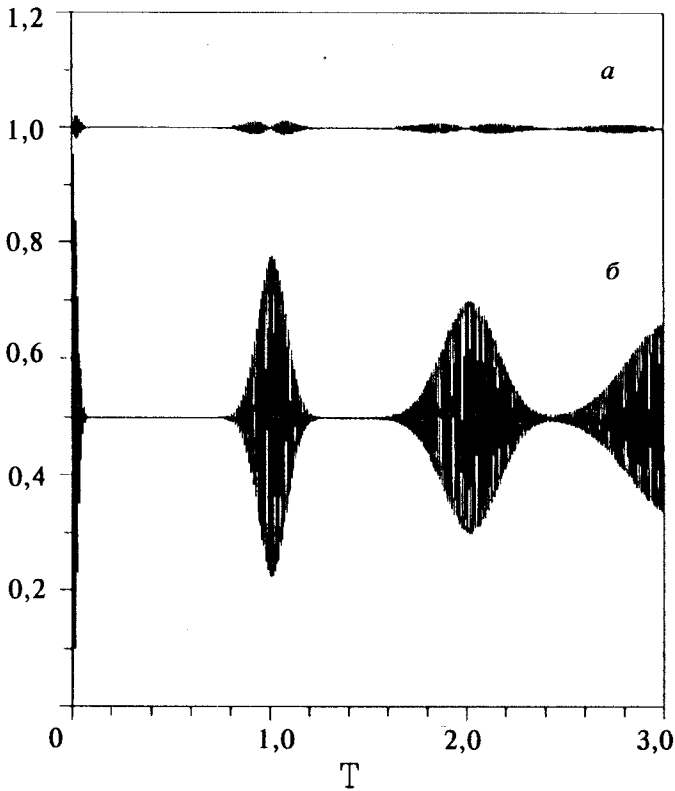


Рис.2. Эволюция вероятности нахождения атома в верхнем состоянии $P_e(t)$ для а) $|\mu| = 1, \eta + \varphi = 0$ [$P_e(t) + 0,5$] и б) $|\mu| = 0$ [$P_e(t)$]

Уравнение (40) может быть получено прямо из того факта, что оператор $\hat{N} = a^\dagger a + |e\rangle\langle e|$ является интегралом движения. Для больших \bar{n} можно записать

$$\frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} \approx \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\bar{n}^2} \left(1 - \frac{1 - |\mu|^2}{\bar{n}(1 + |\mu|^2)} + 2 \frac{\langle R^2 \rangle}{\bar{n}} \right). \quad (42)$$

Подставляя (31) и (41) в (42) и используя метод перевала, получаем

$$\frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} \approx \frac{1}{\bar{n}^2(1 + |\mu|^2)} \left\{ \bar{n}^2(1 + |\mu|^2) + \frac{3|\mu|^2 - 1}{1 + |\mu|^2} - \right.$$

$$- \sum_k \frac{1}{(1 + \pi^2 k^2)^{1/4}} \left[F_k + 2|\mu| \sin(\varphi + \eta) G_k \right] +$$

+ другие члены порядка \bar{n}^0 + члены порядка $(\bar{n})^{-1}$ и ниже }, (43)

где

$$F_k = \exp(-\bar{n} \Psi_k \varepsilon_k^2) \times$$

$$\times \left\{ \frac{2\bar{n}\pi k \varepsilon_k}{1 + \pi^2 k^2} \sqrt{(1 - |\mu|^2)^2 + 4|\mu|^2 \sin^2\left(\frac{\beta_k \varepsilon_k}{2}\right)} \sin(\bar{n}\Phi_k + \alpha_k + \theta_k) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 + |\mu|^2} \left[(1 + |\mu|^2)^2 - 4|\mu|^2(1 - 2|\mu|^2) + 8|\mu|^2(1 - |\mu|^2) \sin^2\left(\frac{\beta_k \varepsilon_k}{2}\right) \right]^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \sin(\bar{n}\Phi_k + \alpha_k + \varphi_k) \right\}, \quad (44)$$

$$G_k = \exp(-\bar{n} \Psi_k \varepsilon_k^2) \frac{2\bar{n} \pi k \varepsilon_k}{1 + \pi^2 k^2} \sin(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k + \beta_k \varepsilon_k), \quad (45)$$

$$\varphi_k = \tan^{-1} \left[\frac{(1 - |\mu|^2) \cos(\beta_k \varepsilon_k) - 2|\mu|^2}{(1 - |\mu|^2) \sin(\beta_k \varepsilon_k)} \right]. \quad (46)$$

Нетрудно видеть, что G_k представляет собой синусоидальные осцилляции с огибающей, обладающей двумя максимумами в точках $\varepsilon_k = \pm 1/(2\bar{n} \Psi_k)^{1/2}$. Величина этих максимумов пропорциональна $(\bar{n})^{1/2}$. Это также относится к первому члену в F_k , когда $|\mu| \neq 1$, в то время как огибающая функция для второго члена в F_k в данной ситуации имеет только один максимум порядка \bar{n}^0 в $\varepsilon_k = 0$. Таким образом, при $|\mu| \neq 1$ вклады в $g^{(2)}(t)$ от G_k и первого члена в F_k преобладают, что приводит к дублетной структуре возобновлений во временном поведении $g^{(2)}(t)$. Это показано на рис.3 (кривая б), где приведена $g^{(2)}(t)$ как функция от эффективного времени

$$T \equiv \frac{t}{T_R} = \frac{gt}{2\pi \sqrt{\bar{n}}} \quad (47)$$

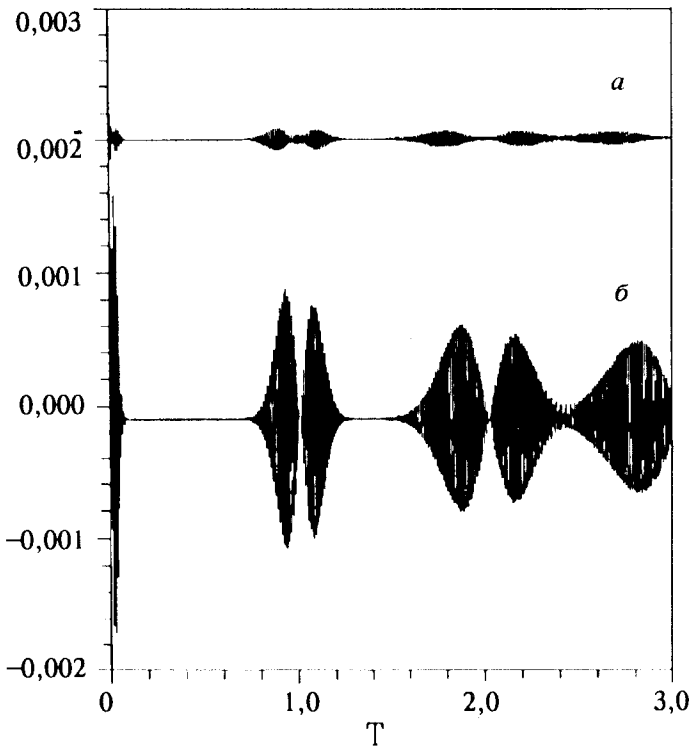


Рис.3. Зависимость корреляционной функции $g^{(2)}(t)$ от безразмерного времени T для а) $|\mu| = 1, \eta + \varphi = 0$ [$g^{(2)}(t) + 0,0018$] и б) $|\mu| = 0$ [$g^{(2)}(t)$]. Среднее число фотонов $\bar{n} = 50$

для атома, находящегося в начальный момент в возбужденном состоянии ($|\mu| = 0$).

При $|\mu| = 1$ выражение (44) для F_k принимает вид

$$F_k = \exp(-\bar{n} \Psi_k \varepsilon_k^2) \times \left\{ \frac{2\bar{n} \pi k \varepsilon_k}{1 + \pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\beta_k \varepsilon_k}{2}\right) \sin(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k + \theta_k) + \sin(\bar{n} \Phi_k + \alpha_k + \varphi_k) \right\}. \quad (48)$$

При $\varepsilon_k = \pm 1/(2\bar{n} \Psi_k)^{1/2}$, поскольку огибающая для первого слагаемого F_k имеет максимум порядка \bar{n}^0 , необходимо учитывать другие члены того же порядка в (43). Однако можно показать, что члены, уже оставленные

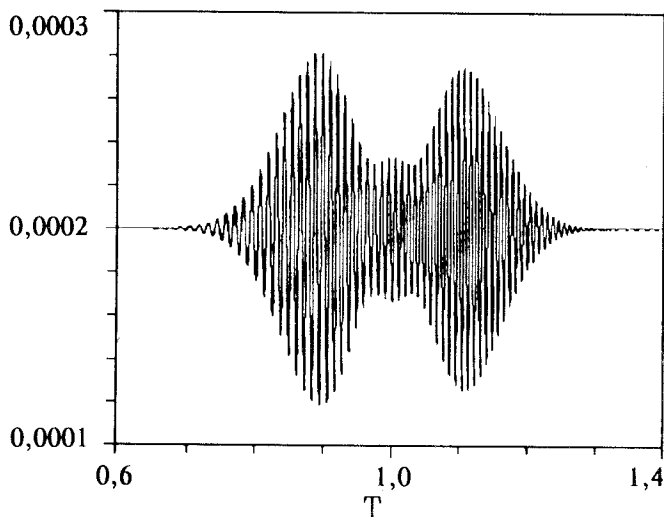


Рис.4. Триплет возобновлений $g^{(2)}(t)$ в увеличенном масштабе при $|\mu| = 1, \eta + \varphi = 0; \bar{n} = 50$

в (43), дают неисчезающий вклад в F_k , в то время как остальные дают вклад порядка $(\bar{n})^{-1}$. Огибающая функция для F_k в данном случае имеет три пика в точках $\varepsilon_k = 0, \varepsilon_k = \pm 1/(2\bar{n}\Psi_k)^{1/2}$. Для $\varphi + \eta = 0$ только F_k дает вклад, и триплетная структура возобновлений проявляется во временной эволюции $g^{(2)}(t)$, как видно из рис.3 (кривая а) и рис.4. На рис.4 возобновление осцилляций $g^{(2)}(t)$, соответствующее $k = 1, |\mu| = 1, \varphi + \eta = 0$, изображено в увеличенной шкале, чтобы показать триплетную структуру возобновлений более наглядно. В ситуации, когда $|\mu| = 1$ и $\varphi + \eta \neq 0$, оба члена — G_k и F_k — дают вклад. Однако, как было сказано выше, вклад от G_k имеет порядок $(\bar{n})^{1/2}$, а вклад от F_k — порядок \bar{n}^0 . Поскольку огибающая функция для G_k обладает двумя максимумами в точках $\varepsilon_k = \pm 1/(2\bar{n}\Psi_k)^{1/2}$ и вклад от G_k преобладает, временное поведение $g^{(2)}(t)$ показывает дублеты возобновлений с центром в точках $\varepsilon_k = 0$ (см. рис.3, кривая б).

6. СЖАТЫЙ СВЕТ В МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА — КАММИНГСА

В последнее время большое внимание уделяется изучению явления сжатия квантовых флуктуаций квадратур электромагнитного поля. Суть явления состоит в том, что в некоторых коррелированных состояниях, возникающих в нелинейных процессах генерации фотонов, квантовые флуктуации одной из квадратур поля имеют значение меньшее, чем в вакуумном состоянии, определяющем предел дробового шума [12—18].

Сжатое когерентное состояние одномодового поля излучения получается из вакуума $|0\rangle$ как [84]

$$|\alpha, z\rangle \equiv D(\alpha)S(z)|0\rangle, \quad (49)$$

где $S(z)$ — оператор сжатия:

$$S(z) = \exp \left[\frac{1}{2} (z^* a^2 - z a^{\dagger 2}) \right], \quad (50)$$

и $D(\alpha)$ — оператор смещения:

$$D(\alpha) = \exp (\alpha a^\dagger - \alpha^* a). \quad (51)$$

При $z = 0$ имеем когерентное состояние; при $\alpha = 0$ — сжатый вакуум. Распределение по фоковским состояниям сжатого когерентного состояния дается выражением [85,86]

$$p_{nn} = |q_n|^2, \quad q_n \equiv \langle n|\alpha, z\rangle = \frac{1}{\sqrt{n! \mu}} \left(\frac{\nu}{2\mu} \right)^{n/2} H_n \left[\frac{\beta}{\sqrt{2\nu\mu}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} |\beta|^2 + \frac{\nu^*}{2\mu} \beta^2 \right), \quad (52)$$

где $\mu = \cosh |z|$, $\nu = (z/|z|) \cosh |z|$, $\beta = \mu\alpha + \nu\alpha^*$ и H_n — полином Эрмита степени n . Отметим, что состояние (49) является собственным состоянием оператора уничтожения «нового» бозе-поля $b = \mu a + \nu a^\dagger$ [87,88], полученного из a и a^\dagger с помощью канонического преобразования Боголюбова [89]:

$$b|\alpha, z\rangle = \beta|\alpha, z\rangle. \quad (53)$$

В дальнейшем будем считать α и z действительными и положительными.

Рассмотрим появление сжатия в модели Джейнса — Каммингса с многофотонными переходами [91]. Эффективный гамильтониан для такой системы имеет следующий вид:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 R^z + \hbar g(R^+ a^m + R^- a^{\dagger m}), \quad (54)$$

где ω и $\omega_0 = m\omega$ (рассматривается случай резонанса) — частоты поля и атома, g — константа связи, m — фотонная мультипликативность перехода, R^\pm и R^\pm — атомные операторы, a^\dagger и a — операторы рождения и уничтожения поля.

Предположим, что атом первоначально находится в основном состоянии $|g\rangle$, а начальное поле в когерентном $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (55)$$

Тогда волновая функция данной системы в представлении взаимодействия имеет вид

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (|g; n\rangle A_-^{(n)}(t) - i|e; n-m\rangle A_+^{(n)}(t)) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2}, \quad (56)$$

где

$$A_-^{(n)}(t) = \cos\left(gt\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}\right), \quad A_+^{(n)}(t) = \sin\left(gt\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}\right). \quad (57)$$

Следовательно, значения чисел фотонов $\langle a^\dagger a \rangle$, фотонных амплитуд $\langle a \rangle$ и квадрата фотонных амплитуд $\langle a^2 \rangle$ легко получаются в виде

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a \rangle &\equiv \sigma_0 = \bar{n} - m \sum_{n=0}^{\infty} p_n A_+^{(n)2}, \\ e^{i\omega t} \langle a \rangle &\equiv \alpha \sigma_1 = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(A_-^{(n)} A_-^{(n+1)} + A_+^{(n)} A_+^{(n+1)} \sqrt{1 - \frac{m}{(n+1)}} \right), \quad (58) \\ e^{2i\omega t} \langle a^2 \rangle &\equiv \alpha^2 \sigma_2 = \\ &= \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(A_-^{(n)} A_-^{(n+2)} + A_+^{(n)} A_+^{(n+2)} \sqrt{\left(1 - \frac{m}{(n+2)}\right) \left(1 - \frac{m}{(n+1)}\right)} \right). \end{aligned}$$

Здесь p_n — распределение Пуассона (21), соответствующее начальному когерентному состоянию поля (55).

Вводим две медленно меняющиеся эрмитовы квадрупольные компоненты поля:

$$a_1 = \frac{1}{2} (ae^{i(\omega t - \theta)} + a^\dagger e^{-i(\omega t - \theta)}), \quad a_2 = \frac{1}{2i} (ae^{i(\omega t - \theta)} - a^\dagger e^{-i(\omega t - \theta)}), \quad (59)$$

где θ — некоторый фазовый угол. Условие сжатия в квадрупольных компонентах можно написать как [12]

$$S_{1,2} < 0, \quad (60)$$

где так называемый фактор сжатия имеет вид

$$S_{1,2} = \frac{(\Delta a_{1,2})^2 - (\Delta a_{1,2})_{\text{vac}}^2}{(\Delta a_{1,2})_{\text{vac}}^2} = 4\langle (a_{1,2} - \langle a_{1,2} \rangle)^2 \rangle - 1. \quad (61)$$

Отметим, что состояния, для которых удовлетворяется условие (60), могут не быть состояниями с минимальной неопределенностью или, иначе говоря, не являются сжатыми когерентными состояниями.

В терминах фотонных операторов легко можно найти, что

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\langle a^\dagger a \rangle + 2\text{Re} \langle a^2 e^{2i(\omega t - \theta)} \rangle - 4(\text{Re} \langle a e^{i(\omega t - \theta)} \rangle)^2, \\ S_2 &= 2\langle a^\dagger a \rangle - 2\text{Re} \langle a^2 e^{2i(\omega t - \theta)} \rangle - 4(\text{Im} \langle a e^{i(\omega t - \theta)} \rangle)^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Из (58) и (62) видно, что значения σ_0 , σ_1 и σ_2 суть реальные числа, и поэтому оптимальный выбор θ для достижения максимального сжатия: $\theta = \varphi$ или $\theta = \varphi + \pi/2$, где φ есть фаза α , т.е. $\alpha = \bar{n}^{1/2} \exp(i\varphi)$. В силу периодичности $S_1(\theta + \pi/2) = S_2(\theta)$ мы будем рассматривать ниже только случай $\theta = \varphi$. Тогда уравнения (62) преобразуются к виду

$$S_1 = 2\sigma_0 + 2\bar{n}\sigma_2 - 4\bar{n}\sigma_1^2, \quad (63)$$

$$S_2 = 2\sigma_0 - 2\bar{n}\sigma_2. \quad (64)$$

Для малых времен $gt \ll 1$, используя разложение в ряд синуса и косинуса, из (63), (57) и (58) находим асимптотические выражения

$$S_1 \cong \begin{cases} -\frac{1}{3}\bar{n}(gt)^4 & \text{в случае } m = 1; \\ -m(m-1)\bar{n}^{m-1}(gt)^2 & \text{в случае } m \geq 2. \end{cases} \quad (65)$$

Эти отрицательные выражения указывают на появление сжатия в a_1 для любой фотонной мультипликативности перехода m и любой начальной ненулевой интенсивности \bar{n} непосредственно после включения взаимодействия атом+поле. Если атом находится на возбужденном уровне [90], тогда такое поведение отсутствует. Аналогично находим асимптоти-

ческие выражения для S_2 при малых временах $gt \ll 1$ из (64), (57) и (58) в следующем виде:

$$S_2 \cong \begin{cases} \frac{1}{3} \bar{n} (gt)^4 & \text{в случае } m = 1; \\ m(m-1) \bar{n}^{m-1} (gt)^2 & \text{в случае } m \geq 2. \end{cases} \quad (66)$$

Положительные выражения указывают на отсутствие сжатия в a_2 при начале взаимодействия для любой фотонной мультипликативности перехода m и любой начальной интенсивности поля \bar{n} . Заметим, что для частного случая $m = 1$ первое выражение в (65) и появление сжатия в компоненте a_1 сразу после включения взаимодействия согласуются с результатами работы [92] для кооперативных систем типа Дикке.

На рис.5—8 показана эволюция во времени фактора сжатия S_1 , численно найденного из (57), (58) и (63), (64) при различных значениях интенсивности начального когерентного поля \bar{n} и фотонных мультипликативностей m . Как видно из графиков, при $t > 0$ мы наблюдаем неклассическое отрицательное значение S_1 . В таблице даны численно найденные максимальные значения сжатия в начале взаимодействия для значений фотонных мультипликативностей от $m = 1$ до $m = 9$ с соответствующими интенсивностями начального поля. Из таблицы видно, что с увеличением m увеличивается требуемая интенсивность начального поля \bar{n} для получения максимального сжатия. Еще можно заметить, что с увеличением мультипликативности перехода до $m = 3$ фактор сжатия увеличивается до 57%, а при дальнейшем увеличении мультипликативности фактор сжатия постепенно уменьшается. С течением времени S_1 начинает осциллировать и достигает положительных значений. Пове-

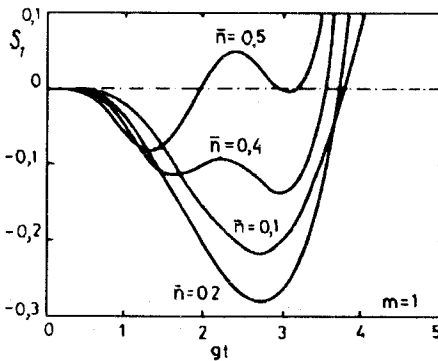


Рис.5. Эволюция S_1 для $m = 1$ при $gt < 5$

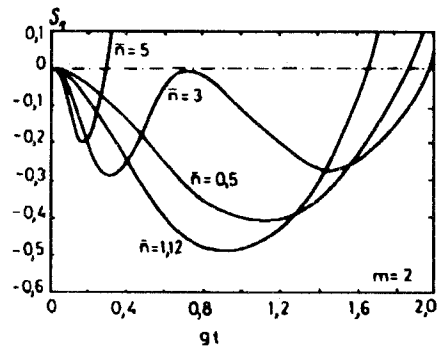


Рис.6. Эволюция S_1 для $m = 2$ при $gt < 2$

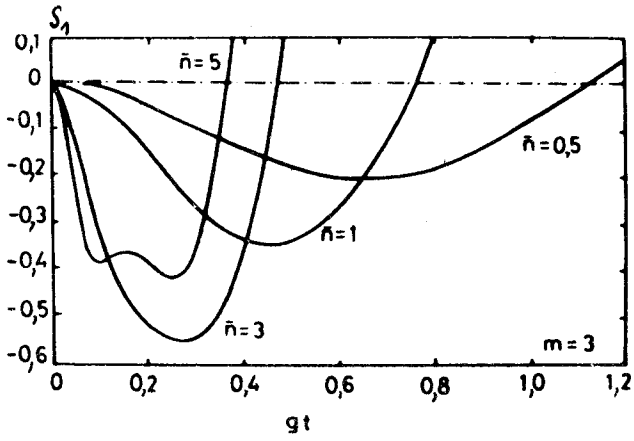


Рис.7. Эволюция S_1 для $m = 3$ при $gt < 1,2$

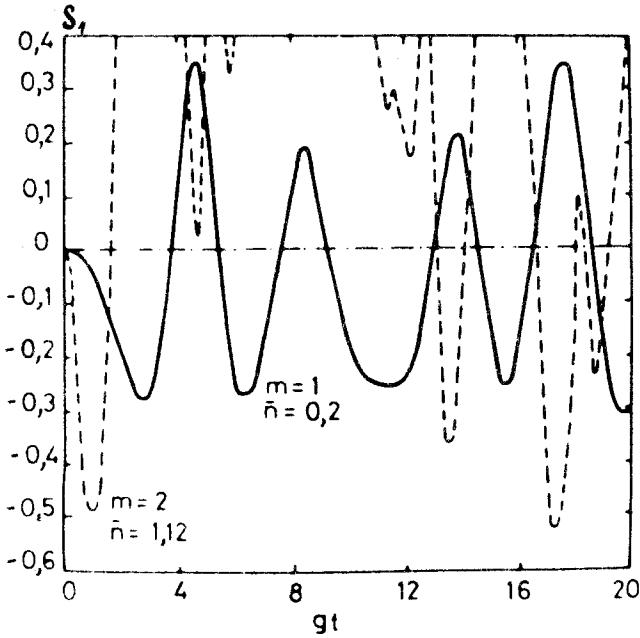


Рис.8. Эволюция S_1 при больших значениях времени для $m = 1, \bar{n} = 0,2$ (сплошная линия) и $m = 2, \bar{n} = 1,12$ (штриховая)

Таблица. Максимальные значения степени сжатия $S_1(m, \bar{n}, gt)$ в области первого сжатия

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\bar{n}	0,2	1,12	3,0	5,4	8,2	11,75	16,1	21,1	23,3
$-S_{\max}^{(1)}$	0,28	0,49	0,5659	0,5498	0,5177	0,4873	0,4614	0,4393	0,4034
gt	2,75	0,92	0,27	0,048	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-5}$	$6,2 \cdot 10^{-6}$	$7,4 \cdot 10^{-7}$

дение S_1 на больших временах характеризуется восстановлением сжатия. Сжатие в a_1 появляется, исчезает и позднее снова появляется (рис.8). Максимальное значение вновь восстановленного сжатия ($\cong 52\%$ для $gt = 17,28$, $\bar{n} = 1,12$, $m = 2$, см. рис.8) больше, чем максимальное значение сжатия в коротком временном интервале ($\cong 49\%$ для $gt = 0,92$). Как показано в [93], при очередных появлениях сжатия можно достичь предельного сжатия до 100% с увеличением начальной интенсивности. Из рисунков видно, что для больших интенсивностей \bar{n} длительность первого сжатия короче (кроме случая перекрывания областей первого и второго сжатия).

Найдено сжатие и в квадратурной компоненте a_2 . При этом сжатие появляется с некоторой временной задержкой.

В работе [90] показана возможность сжатия света в модели Джейнса — Каммингса с начальным когерентным полем. Когда атом находится на верхнем уровне, в системе генерируется сжатый свет через некоторое время после включения взаимодействия; значение фактора сжатия может достичь 20%. Наличие такой временной задержки и низкой степени сжатия обуславливает экспериментальные трудности обнаружения эффекта сжатия в подобных системах. При взаимодействии двухуровневого атома, находящегося в когерентной суперпозиции нижнего и верхнего уровней, с вакуумным полем [77] генерируется свет, проявляющий периодическое сжатие до 25%. Показано, что сжатие отсутствует при начальном вакуумном поле для атома, полностью находящегося в верхнем или нижнем состоянии. Влияние суперпозиционного состояния на генерацию сжатого света изучено в [75] для двух- и трехуровневого атома с начальным сжатым полем. В случае трехуровневого атома рассматриваются взаимодействие с одной или двумя модами резонатора и в последнем случае сжатие в суперпозиции двух мод может достичь 40%. Максимальные значения сжатия в разных обобщениях модели Джейнса — Каммингса с начальным когерентным полем доходит до 42% для двухуровневого двухфотонного случая [94], 31% — для трехуровневого одномодового случая [95], 36% — для четырехуровневого одномодового слу-

чая [96] и 52% — для десятиуровневого одномодового случая [97] (в последней работе речь идет о сжатии для атомного диполя). В [93] показана возможность получения больших степеней сжатия (до 100%) в однофотонной модели Джейнса — Каммингса с начальным когерентным полем большой интенсивности и найдена асимптотическая формула для фактора сжатия при $\bar{n}_0 \rightarrow \infty$. Для нерезонансных случаев значения сжатия больше, чем в резонансном случае. Учет затуханий в резонаторе показывает, что восстановления квантовых осцилляций населенности исчезают раньше, чем сжатие. В [95], [98] исследовано поведение сжатия в трехуровневой одномодовой модели Джейнса — Каммингса с начальным когерентным полем с учетом расстройки от резонанса.

В [92] изучается генерация сжатых состояний при взаимодействии системы двухуровневых атомов типа Дикке с одномодовым когерентным полем. Параллельно рассматриваются случаи, когда атомы первоначально находятся в возбужденных или основных состояниях. При малых временах взаимодействия найдены аналитические выражения для сжатия, а для больших времен сделаны численные расчеты, которые показывают, что когда атомы находятся в нижних состояниях, сжатие появляется сразу после включения взаимодействия, а в другом случае появляется спустя некоторое время после включения взаимодействия.

Для полного представления поведения сжатия в моделях Джейнса — Каммингса ниже приводим результаты работы [98], где более подробно анализируется эволюция сжатия в трехуровневой каскадной модели с одним или двумя модами резонатора. На рис.9 показана зависимость от \bar{n}_2 фактора сжатия $S_1^{(1)}$ для моды 1 и $S_1^{(2)}$ для моды 2 соответственно, при $\bar{n}_1 = 6$ и однофотонном резонансе $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. После взаимодействия $S_1^{(1)}$ и $S_1^{(2)}$ осциллируют и при определенных периодах они становятся меньше нуля, что и означает появление сжатия в соответствующей моде. Максимальное сжатие в обеих модах отличается для разных значений \bar{n}_2 . Изменение моды 2 действует на моду 1 двумя путями; во-первых, изменяются двухфотонные переходы, во-вторых, изменяется расстройка моды 1 из-за расщепления среднего уровня вследствие эффекта Штарка. Когда \bar{n}_2 растет, это ведет к увеличению роли двухфотонных переходов, и сжатие моды 1 немного растёт, пока вклад двухфотонных переходов преобладает над вкладом, связанным с изменением расстройки моды 1. После $\bar{n}_2 = 3$ сжатие в моде 1 уменьшается, что связано с преобладанием вклада от изменения расстройки моды 1. Когда \bar{n}_2 становится достаточно большим, сжатие вообще исчезает, и осцилляции амплитуды $S_1^{(1)}$ стано-

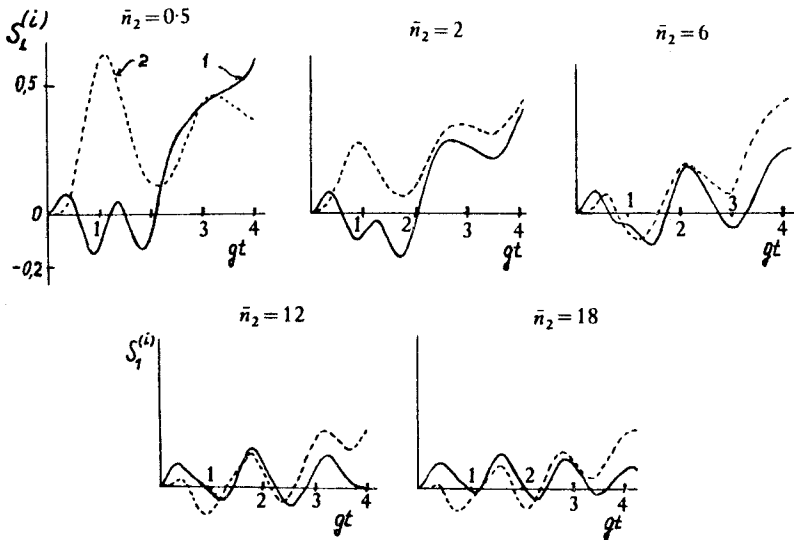


Рис.9. Эволюция S_1 для разных значений \bar{n}_2 , где $\bar{n}_1 = 6$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ для моды 1 (сплошная линия) и моды 2 (штриховая линия)

вятся очень маленькими. С увеличением \bar{n}_2 сжатие в моде 2 появляется при $\bar{n}_2 = 4$, растет до значения $\bar{n}_2 = 8$ и потом уменьшается.

Исследовано влияние расстройки Δ на эволюцию $S_1^{(1)}$ при двухфотонном резонансе $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$. С увеличением расстройки сжатие уменьшается. При $\Delta = 0$ сжатие имеет наибольшее значение. В этом случае вклад в сжатие дают как однофотонные, так и двухфотонные переходы. При $\Delta > 0$ уменьшается вклад однофотонных переходов в сжатие. Даже при очень больших значениях расстройки однофотонного резонанса сжатие не исчезает, так как двухфотонные переходы находятся в резонансе, и это дает соответствующий вклад в сжатие.

При исследовании влияния однофотонной расстройки Δ_2 на $S_1^{(1)}$ при $\Delta_1 = 0$ найдено, что с увеличением Δ_2 сжатие в моде 1 сначала уменьшается, но после $|\Delta_2| = 2$ увеличивается. Увеличение $|\Delta_2|$ уменьшает двухфотонные переходы и приводит к дополнительной расстройке моды 1. Для малых значений $|\Delta_2|$ первое действие больше, чем второе, и увеличение $|\Delta_2|$ уменьшает сжатие до тех пор, пока второе действие не

начинает преобладать над первым. При $\Delta_2 \rightarrow \infty$ одно- и двухфотонные переходы на верхний уровень отсутствуют, действуют только однофотонные переходы между нижним и средним уровнем. Система становится эквивалентной двухуровневой модели Джейнса — Каммингса.

При $\Delta_2 = 0$ с увеличением Δ_1 сжатие в моде 1 монотонно уменьшается и после $|\Delta_2| \geq 4$ сжатие исчезает. Это связано с уменьшением одно- и двухфотонных переходов.

Можно заметить, что в двухмодовом случае наибольшие значения сжатия получаются меньше, чем в двухуровневой одномодовой модели Джейнса — Каммингса [90]. Этот факт говорит о том, что связь между двумя модами неблагоприятно действует на сжатие.

Для одномодового случая изучение поведения $S_1^{(1)}$ показывает, что в данном случае сжатие получается более глубоким, чем в двухмодовом случае. При двухфотонном резонансе $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ и далеко от однофотонного резонанса $|\Delta| \gg 1$ действуют только двухфотонные переходы и сжатие получается вследствие этих переходов. Для больших Δ максимальное сжатие почти не зависит от Δ , так как вклады однофотонных переходов пренебрежимо малы. При однофотонном резонансе ($\Delta_1 = 0$) и далеко от двухфотонного резонанса ($\Delta_2 = 10$) однофотонные переходы преобладают над двухфотонными, и последними можно пренебречь. При больших Δ_2 сжатие обусловлено однофотонными переходами. При $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ вклад в сжатие дают как однофотонные, так и двухфотонные переходы. Это приводит к наибольшему сжатию 32% при $\bar{n} = 6,5$, что больше, чем 19% для двухуровневой модели Джейнса — Каммингса [90].

На рис.10 приведены минимальные значения S_1 для разных \bar{n} . Сжатие отсутствует при $\bar{n} < 3,5$. Когда \bar{n} растет, сжатие сначала резко увеличивается, а потом медленно уменьшается. Максимальное сжатие имеет место при $\bar{n} = 6,5$.

Итак, мы показали возможность генерации сжатого света в многофотонной двухуровневой модели Джейнса — Каммингса и рассмотрели особенности сжатия в трехуровневой модели Джейнса — Каммингса с расстройками от резонанса, когда начальное поле когерентное. Поведение

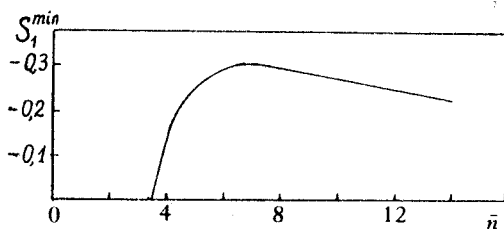


Рис.10. Изменения минимального значения S_1 в зависимости от \bar{n}

фактора сжатия, когда начальное поле находится в сжатых состояниях с минимальной неопределенностью, также представляет большой теоретический и практический интерес. Поведение атомных населенностей для однофотонной модели Джейнса — Каммингса, взаимодействующих со светом в вакуумных сжатых состояниях, обсуждено в работе Мильбурна [69]. В [37] исследованы затухание и восстановление квантовых осциллирующей населенностей в трехуровневом атоме с начальным сжатым полем. Взаимодействие сжатого вакуума с двухфотонной обобщенной моделью Джейнса — Каммингса изучено в [99], где показано, что начальное сжатие исчезает с течением времени и может появиться при поздних временах взаимодействия. Чем больше начальное сжатие, тем регулярнее становятся осцилляции сжатия. Взаимодействие сжатого вакуума с однофотонной моделью Джейнса — Каммингса обсуждено также в работе [100]. Полученные результаты показывают, что, во-первых, отсутствует общая зависимость от разности фаз между атомным диполем и сжатым полем, во-вторых, сжатие быстро исчезает после включения взаимодействия.

Рассмотрим модель Джейнса — Каммингса с начальным сжатым когерентным полем $|\alpha, z\rangle$ и покажем, что сжатие может быть усилено, если атом первоначально находится в когерентной суперпозиции верхнего и нижнего состояний [101]. Хотя чем сильнее начальная степень сжатия, тем незначительнее его усиление. Соответствующий гамильтониан в ПВВ имеет вид (6).

Начальное состояние атома, находящегося в когерентной суперпозиции верхнего и нижнего состояний, есть [77]

$$|\psi_a(0)\rangle = \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) |e\rangle + e^{i\eta} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) |g\rangle \quad (67)$$

((67) является другой формой записи (26), которая более удобна для данной задачи). Предполагаем, что начальное поле находится в сжатом когерентном состоянии

$$|\psi_f(0)\rangle = |\alpha, z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n |n\rangle, \quad (68)$$

где q_n определены в (52).

Используя (6) и (68), нетрудно найти вектор состояния полной системы в момент t в представлении взаимодействия

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left\{ \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \left[\cos(\sqrt{n+1} gt) |n; e\rangle - i \sin(\sqrt{n+1} gt) |n+1; g\rangle \right] + e^{i\eta} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \left[-i \sin(\sqrt{n} gt) |n-1; e\rangle + \cos(\sqrt{n} gt) |n; g\rangle \right] \right\}. \quad (69)$$

Здесь для простоты рассматриваем резонансный случай $\Delta = 0$.

Используя (61) и (69), мы для коротких времен $gt \ll 1$ находим приближенно

$$S_1 = [\exp(-2z) - 1] + g^2 t^2 [\exp(-2z) \cos \xi + 1 - \sin^2 \xi \sin^2 \eta], \quad (70)$$

$$S_2 = [\exp(2z) - 1] + g^2 t^2 [\exp(2z) \cos \xi + 1 - \sin^2 \xi \cos^2 \eta]. \quad (71)$$

Пусть $z > 0$, тогда $S_1(t=0) < 0$, т.е. сжатие первоначально присутствует в первой квадратурной компоненте поля. Для его усиления необходимо, чтобы коэффициент при $g^2 t^2$ был меньше нуля. Можно проверить, что этот коэффициент при $\eta = \pi/2$ и $\cos \xi = -1/2 \exp(-2z)$ принимает минимальное значение. Это является условием для оптимального усиления сжатия. Тогда из (70) получаем

$$S_1 = [\exp(-2z) - 1] - \frac{1}{2} g^2 t^2 \exp(-4z). \quad (72)$$

Фактор сжатия после включения взаимодействия растёт квадратично во времени ($g^2 t^2$) и чем больше начальное сжатие, тем меньше становится относительное увеличение сжатия. Эти свойства остаются в силе и для случая начального вакуумного сжатого состояния, так как в уравнениях (70)–(72) нет никакой зависимости от α . Численные расчеты показали, что самое большое относительное увеличение сжатия после включения взаимодействия достигается именно в случае $\alpha = 0$. Теперь рассмотрим два предельных случая начального состояния атома, когда атом находится либо в полностью возбужденном состоянии, либо в полностью основном состоянии. Для первого случая мы имеем $\xi/2 = 0$ и, следовательно, из (70), (71) получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= [\exp(-2z) - 1] + g^2 t^2 [\exp(-2z) + 1], \\ S_2 &= [\exp(2z) - 1] + g^2 t^2 [\exp(2z) + 1]. \end{aligned} \quad (73)$$

Для второго случая $\xi/2 = \pi/2$, и уравнения (70), (71) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} S_1 &= [\exp(-2z) - 1] + g^2 t^2 [1 - \exp(-2z)], \\ S_2 &= [\exp(2z) - 1] + g^2 t^2 [1 - \exp(2z)]. \end{aligned} \quad (74)$$

Как видно из (73) и (74), во-первых, в обоих случаях зависимость от начальной фазы между уровнями атома отсутствует; во-вторых, фактор сжатия после включения взаимодействия не увеличивается. Эти результаты хорошо согласуются с результатами [98].

Разложения факторов сжатия S_i до четвертого порядка по $gt \ll 1$ имеют довольно сложный вид. В частности, в случае первоначально невозбужденного атома ($\xi = \pi$), выбирая фазу $\eta = \pi/2$, получим, как и прежде,

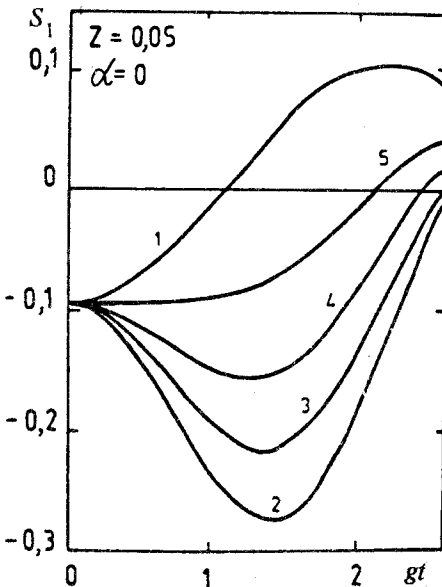
$$S_1 = [\exp(-2z) - 1] (1 - g^2 t^2) + \frac{1}{3} g^4 t^4 \{ | \beta |^2 [3 \exp(-4z) - 4 \exp(-2z)] + \frac{1}{4} [3 \exp(-4z) - 4 \exp(-2z) + 1] \}, \quad (75)$$

$$S_2 = [\exp(2z) - 1] (1 - g^2 t^2) + \frac{1}{3} g^4 t^4 \{ | \beta |^2 + \frac{1}{4} [3 \exp(4z) - 4 \exp(2z) + 1] \}.$$

Теперь в правой части (75) появляется зависимость факторов сжатия S_i от α через параметр β . Для начального когерентного поля (когда $z = 0$) уравнения (75) сильно упрощаются:

$$S_1 = -\frac{1}{3} \bar{n} g^4 t^4, \quad S_2 = \frac{1}{3} \bar{n} g^4 t^4, \quad (76)$$

где \bar{n} — среднее число фотонов. Соотношения (76) совпадают с результатом из работы [94] для случая одиночного атома в резонаторе и с выражениями (65) и (66) для однофотонного перехода [91], которые показывают появление сжатия на начальном этапе временной эволюции первой квадратуры при начальном когерентном поле.



На рис.11 показана временная эволюция фактора сжатия S_1 , определенного с помощью численных расчетов для значений $\cos \xi = -1; -1/2e^{-2z} (\cong -0,45$ для $z = 0,05$); $-0,2; -0,1; 0$. Здесь и в дальнейшем выбирается $\eta = \pi/2$. Очевидно, когда $\cos \xi$ удовлетворяет условию $-\exp(-2z) < \cos \xi < 0$ (тогда коэффициент при $g^2 t^2$ в уравнении

Рис.11. Эволюция S_1 для $\eta = \pi/2$, $z = 0,05$, $\alpha = 0$: 1 — $\cos \xi = -1$, 2 — $\cos \xi = -e^{-2z/2}$, 3 — $\cos \xi = -0,2$, 4 — $\cos \xi = -0,1$, 5 — $\cos \xi = 0$

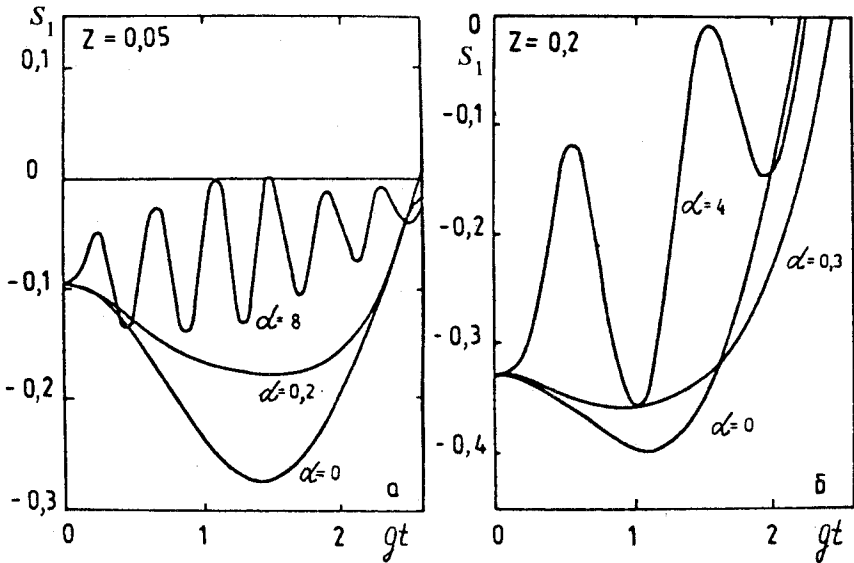


Рис.12. Эволюция S_1 для разных значений α . Начальное значение сжатия и максимальное значение, достигнутое после включения взаимодействия, приблизительно равны: а) 9,5% и 27% при $z = 0,05$; б) 33% и 40% при $z = 0,2$ соответственно

(70) отрицателен) при включении взаимодействия, степень сжатия начинает увеличиваться до некоторого максимального значения. Оптимальное усиление достигается при $\cos \xi = -1/2 \exp(-2z)$.

На рис.12 изображено временное поведение фактора сжатия S_1 для фиксированной величины начальной степени сжатия и разных значений интенсивности поля. Как было отмечено выше, первый минимум флуктуаций поля в первой квадратуре достигает наименьшего значения при $\alpha = 0$, что соответствует сжатию вакуума. Чем больше начальное сжатие, тем труднее его усилить на раннем этапе взаимодействия. С течением времени в поведении S_1 появляется сильная зависимость от α .

Исследования для больших значений времени показывают явно случайный характер зависимости S_1 от времени, обусловленной хаотическими статистическими свойствами сжатого вакуума. Когда α увеличивается, поведение S_1 становится похожим на поведение сжатия в работах [92], [91] и [37] для начального когерентного поля. Большие значения α приводят к сильному сжатию (до 100%) при больших значениях времени взаимодействия.

7. КОГЕРЕНТНОЕ ПЛЕНЕНИЕ НАСЕЛЕННОСТЕЙ

В последние годы большое внимание уделяется изучению явления когерентного пленения населенностей [25, 102—107], которое активно используется в спектроскопии высокого разрешения. При когерентном пленении населенность некоторого уровня остается постоянной, несмотря на существование поля излучения и переходов на другие уровни. Это объясняется интерференцией между различными каналами переходов. До недавнего времени утверждалось, что когерентное пленение населенностей может иметь место только в трех- или более уровневых системах и полностью отсутствует в двухуровневых системах [25]. Однако в недавно появившихся работах [80, 108, 109] найдены случаи проявления когерентного пленения населенностей в двухуровневых системах. Как показано в работах [80, 108, 109], когерентное пленение населенностей может проявиться и для двухуровневых атомов вследствие нахождения атома в когерентной суперпозиции нижнего и верхнего уровней в начальный момент. В этом случае между атомом и полем существует термодинамическое равновесие и интерференция. Для трехуровневого атома когерентное пленение имеет место вследствие интерференции между двумя переходами, что может быть описано в полуклассическом подходе, а в случае двухуровневого атома интерференция происходит между атомным диполем и собственными модами резонатора, т.е. имеет квантовую природу. В работе [80] показано, что если атом находится в когерентной суперпозиции нижнего и верхнего состояний, а начальное поле когерентное, то динамика атома и спектр поля зависят от относительной фазы между атомным диполем и полем резонатора. При определенном выборе этой фазы имеет место когерентное пленение двухуровневого атома, а спектр переходит от трехпиковой картины к асимметричной двухпиковой структуре. Динамика населенностей уровней в двухуровневой модели Джейнса — Каммингса, когда атом первоначально находится в когерентной суперпозиции нижнего и верхнего уровней, исследована в работе [108]. При определенных значениях относительной фазы между атомным диполем и полем атомные населенности остаются почти постоянными и, следовательно, имеет место частичное когерентное пленение населенностей. Если начальное состояние поля является собственным состоянием оператора фазы Саскинд — Глоговера [110], то имеет место точное когерентное пленение населенностей. Степень сжатия сильно зависит от начальной фазы атомного диполя при малых временах, но при больших временах это не наблюдается. При малых интенсивностях поля найдено, что сжатие появляется периодически по времени. При больших интенсивностях поля после исчезновения начального сжатия осцилляции

S_1 переходит в область положительных значений фактора сжатия независимо от начальной фазы поля, что согласуется с результатами [100]. Это связано с тем, что при малых интенсивностях поля атом и поле почти не связаны; атомные диполи и параметры поля осциллируют с частотой Раби. Амплитуды этих осцилляций не очень велики, поэтому после каждой осцилляции начальная ситуация повторяется. А при больших значениях интенсивности начального поля атомный диполь и поле сильно связаны через их фазы, и наличие такой связи приводит к разрушению сжатия поля.

Рассмотрим теперь когерентное пленение населенностей в трехуровневом атоме Λ -типа с многофотонными переходами. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (77)$$

где

$$H_A = \sum_{j=1}^3 \hbar \Omega_j R_{jj}; \quad H_F = \sum_{k=1}^2 \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k; \quad H_{AF} = \hbar \sum_{k=1}^2 g_k (R_{3k} a_k^{m_k} + R_{k3} a_k^{\dagger m_k}).$$

Мы будем называть состояние системы $|\phi\rangle$ состоянием когерентного пленения, если $|\phi\rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

$$|\phi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_F\rangle \quad (78)$$

и

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= \exp(-iHt/\hbar)|\phi\rangle = \\ &= \exp(-iH_A t/\hbar)|\phi_A\rangle \otimes \exp(-iH_F t/\hbar)|\phi_F\rangle, \end{aligned} \quad (79)$$

где $|\phi_A\rangle$ — атомное состояние, состоящее из линейной суперпозиции только нижних уровней 1 и 2, $|\phi_F\rangle = |\phi_{F_1}, \phi_{F_2}\rangle$ — состояние поля, не содержащее фоковских состояний $|n_1, n_2\rangle$ с $n_1 < m_1$ или $n_2 < m_2$.

При многофотонном резонансе, когда

$$\Omega_3 - \Omega_k = m_k \omega_k, \quad k = 1, 2, \quad (80)$$

легко можно показать, что условие (79) эквивалентно следующему уравнению:

$$H_{AF}|\phi\rangle = 0. \quad (81)$$

Так как уровень 3 не входит в $|\phi_A\rangle$, мы можем написать

$$|\phi_A\rangle = u_1 |1\rangle_A - u_2 |2\rangle_A, \quad |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1. \quad (82)$$

Используя уравнения (77), (78) и (82), из (81) получаем

$$g_1 u_1 a_1^{m_1} |\phi_F\rangle = g_2 u_2 a_2^{m_2} |\phi_F\rangle. \quad (83)$$

Уравнение (83) определяет состояния поля $|\phi_F\rangle$ и значения u_1 и u_2 , и таким образом определяет атомные состояния $|\phi_A\rangle$. Решая это уравнение, находим для системы Λ -типа состояния когерентного пленения поля

$$|\phi_F\rangle = |Z_1\rangle_{\text{coh}} \otimes |Z_2\rangle_{\text{coh}}. \quad (84)$$

Здесь $|Z_1\rangle_{\text{coh}}$ и $|Z_2\rangle_{\text{coh}}$ являются глауберовскими когерентными состояниями мод 1 и 2 соответственно. Амплитуды u_1 и u_2 соответствующих атомных состояний когерентного пленения имеют вид

$$u_1 = \frac{g_2 Z_2^{m_2}}{\sqrt{g_1 Z_1^{m_1}|^2 + |g_2 Z_2^{m_2}|^2}}, \quad u_2 = \frac{g_1 Z_1^{m_1}}{\sqrt{g_1 Z_1^{m_1}|^2 + |g_2 Z_2^{m_2}|^2}}. \quad (85)$$

Введем

$$Z_1 = \sqrt{\bar{n}_1} e^{i\theta_1}, \quad Z_2 = \sqrt{\bar{n}_2} e^{i\theta_2}, \quad u_1/u_2 = \sqrt{r_{12}} e^{i\varphi_{12}}. \quad (86)$$

Здесь углы θ_1 и θ_2 являются фазами поля в модах, $\bar{n}_1 = |Z_1|^2$ и $\bar{n}_2 = |Z_2|^2$ — средние числа фотонов в модах, значение r_{12} отражает отношение населенностей плененных уровней, а угол φ_{12} есть разность фаз атомных состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$ в когерентной суперпозиции (82). Применив (85) и (86), получаем

$$r_{12} = g_2^2 \bar{n}_2^{m_2} / g_1^2 \bar{n}_1^{m_1}; \quad \varphi_{12} = m_2 \theta_2 - m_1 \theta_1. \quad (87)$$

Как видно из (87), наличие мультипликативности переходов $m > 1$ приводит к очень сильной зависимости параметра пленения уровней r_{12} от среднего числа фотонов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 и разности атомных фаз от фазы мод поля θ_1 и θ_2 . В частном случае $m_1 = m_2 = m$ соотношения (87) преобразуются к виду

$$r_{12} = (g_2^2/g_1^2) (\bar{n}_2/\bar{n}_1)^m; \quad \varphi_{12} = m (\theta_2 - \theta_1). \quad (88)$$

Это означает, что r_{12} и φ_{12} определяются через отношение чисел фотонов \bar{n}_2/\bar{n}_1 и разности фаз мод поля $\theta_2 - \theta_1$. Для систем каскадного и V-типа состояния когерентного пленения не найдены.

8. АНТИГРУППИРОВКА И СУБПУАССОНОВСКАЯ СТАТИСТИКА ФОТОНОВ

Как известно, статистические свойства электромагнитного поля, например когерентного или теплового света, можно описывать с помощью техники, подобной классической теории вероятностей, разлагая оператор плотности по проекционным операторам $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, где $|\alpha\rangle$ — когерентное состояние поля (P -представление Глаубера — Сударшана [111, 112]):

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha. \quad (89)$$

В P -представлении статистическое среднее любого нормально упорядоченного произведения операторов рождения и уничтожения фотонов типа $(a^\dagger)^n a^m$ сводится к простому среднему от $(\alpha^*)^n \alpha^m$, взятому относительно весовой функции $P(\alpha)$:

$$\text{Sp}[\rho(a^\dagger)^n a^m] = \int P(\alpha) \langle\alpha| (a^\dagger)^n a^m |\alpha\rangle d^2\alpha. \quad (90)$$

Однако весовая функция $P(\alpha)$ может иметь сильную сингулярность и вообще ее нельзя строго рассматривать в качестве распределения плотности вероятности. Если $P(\alpha)$ имеет сингулярности выше, чем δ -функция Дирака, или не является положительно определенной, соответствующее состояние света называется неклассическим.

В качестве примера возьмем состояние света с субпуассоновской статистикой фотонов. По определению это состояние с флуктуациями интенсивности, меньшими, чем в когерентном состоянии,

$$\langle(\Delta n)^2\rangle < \langle n\rangle, \quad (91)$$

имеющем пуассоновскую статистику фотонов с дисперсией $\langle(\Delta n)^2\rangle = \bar{n}$. Перепишем (91) в виде

$$\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 < 0, \quad (92)$$

что в P -представлении означает

$$\begin{aligned} & \int P(\alpha) |\alpha|^4 d^2\alpha - \left[\int P(\alpha) |\alpha|^2 d^2\alpha \right]^2 = \\ & = \frac{1}{2} \int \int d^2\alpha d^2\beta P(\alpha, \beta) (|\alpha|^4 + |\beta|^4 - 2|\alpha|^2 |\beta|^2) < 0, \end{aligned} \quad (93)$$

где $P(\alpha, \beta) \equiv P(\alpha)P(\beta)$. Так как

$$|\alpha|^4 + |\beta|^4 - 2|\alpha|^2 |\beta|^2 \geq 0, \quad (94)$$

то чтобы удовлетворить условию (93), функция $P(\alpha)$ должна иметь и отрицательные значения.

Можно определить неклассичность состояния поля по другим критериям. Как известно, нормированная корреляционная функция второго порядка между двумя пространственно-временными точками светового луча с интенсивностью $I(x)$

$$g^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\langle I(x_1)I(x_2) \rangle}{\langle I(x_1) \rangle \langle I(x_2) \rangle} \quad (95)$$

в полуклассической теории удовлетворяет следующим неравенствам [113—115]:

$$g^{(2)}(x, x) \geq 1, \quad (96)$$

$$g^{(2)}(x_1, x_2) \leq \left[g^{(2)}(x_1, x_1) g^{(2)}(x_2, x_2) \right]^{1/2}. \quad (97)$$

В квантовой теории $\langle :I(x_1)I(x_2): \rangle$ есть средняя скорость счета двухкратных совпадений для идеальных фотодетекторов, находящихся в точках x_1 и x_2 . В случае одномодового поля и чисто временных корреляций квантовый аналог нормированной корреляционной функции второго порядка имеет вид

$$g^{(2)}(t, t + \tau) = \frac{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(t + \tau)a(t + \tau)a(t) \rangle}{\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle \langle a^\dagger(t + \tau)a(t + \tau) \rangle}. \quad (98)$$

Скорость счета совпадений $g^{(2)}(t, t + \tau)$ играет центральную роль в определении явления антигруппировки фотонов. В литературе существуют два определения [115, 116]: 1) $g^{(2)}(t, t + \tau) < 1$ при $\tau = 0$; 2) производная по τ от $g^{(2)}(t, t + \tau)$ в точке $\tau = 0$ положительна. В первом случае нарушается неравенство (96), а во втором — (97). Если под антигруппировкой подразумевать эффект, состоящий в том, что при падении светового пучка на фотодетектор фотоны чаще детектируются порознь, чем в паре, то мы должны использовать второе определение [117].

В этом разделе мы изучим субпуассоновскую статистику и явление антигруппировки фотонов в модели Джейнса — Каммингса [118]. Для исследования антигруппировки используется определение, опирающееся на положительность производной по τ от $g^{(2)}(t, t + \tau)$ при $\tau = 0$. Показано, что субпуассоновская статистика не связана с антигруппировкой фотонов: когда резонаторное поле обладает субпуассоновской статистикой, фотоны могут проявлять или группировку или антигруппировку и наоборот, антигруппировка фотонов может быть сопровождена супер- или субпуассоновской статистикой. Рассматривая влияние начальных атомных условий на временную эволюцию Q -фактора Мандела [119] и

$\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$, покажем, что при точном резонансе, когда атом помещен в резонатор в основном состоянии, начальное когерентное поле на раннем этапе эволюции становится субпуассоновским. Позже, однако, преобладает суперпуассоновское поведение. Напротив, когда атом помещен в резонатор в возбужденном состоянии, поле на раннем этапе эволюции проявляет суперпуассоновское поведение, но затем преобладает субпуассоновский характер. Таким образом, атом в основном состоянии является более эффективным для генерации субпуассоновского света при малых значениях времени, но уступает атому в возбужденном состоянии при больших значениях времени. Также показано, что сразу после включения взаимодействия, в случае, когда атом первоначально возбужден, имеет место антигруппировка фотонов, в то время как в случае первоначально невозбужденного атома антигруппировки нет. Далее, сравнивается временное поведение Q -фактора Манделя и $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ для поля, находящегося в начальный момент в когерентном и в хаотическом состояниях. Найдено, что для обоих начальных полевых состояний возникает антигруппировка фотонов и что, в отличие от сжатия и субпуассоновской статистики фотонов, явление антигруппировки не исчезает при увеличении интенсивности поля в хаотическом состоянии.

Пусть в начальный момент атом и поле не связаны между собой и поле находится в произвольном состоянии $\rho_f = \sum_{n,n'} p_{n,n'} |n\rangle \langle n'|$, тогда матрица плотности полной системы при $t = 0$ равна

$$\rho(0) = \sum_{n,n'} p_{n,n'} |n; e\rangle \langle n'; e| \quad (99)$$

для первоначально возбужденного атома и

$$\rho(0) = \sum_{n,n'} p_{n,n'} |n; g\rangle \langle n'; g| \quad (100)$$

для первоначально невозбужденного атома.

Хорошей мерой нахождения поля в состояниях с субпуассоновской статистикой является Q -фактор:

$$Q \equiv \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{\langle n \rangle} - 1, \quad (101)$$

введенный Манделем [119]. Чем меньше Q в области отрицательных значений, тем больше статистика поля является субпуассоновской. Q -фактор Манделя (101) может быть переписан в виде

$$Q = \frac{\langle a^\dagger(t) a^\dagger(t) a(t) a(t) \rangle - \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle^2}{\langle a^\dagger(t) a(t) \rangle}. \quad (102)$$

Нам необходимо также знать производную по τ от $g^{(2)}(t, t + \tau)$ при $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} [g^{(2)}(t, t + \tau)]'_{\tau|_{\tau=0}} &= \{[\langle a^\dagger(t) a^\dagger(t + \tau) a(t + \tau) a(t) \rangle]\}'_{\tau|_{\tau=0}} \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle - \\ &- \langle a^\dagger(t) a^\dagger(t) a(t) a(t) \rangle [\langle a^\dagger(t + \tau) a(t + \tau) \rangle]'_{\tau|_{\tau=0}} \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle^{-3}. \end{aligned} \quad (103)$$

Используя решения (12)–(15), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle &= \bar{n} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{g^2(n+1)}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n t, \\ \langle a^\dagger(t) a^\dagger(t) a(t) a(t) \rangle &= \bar{n}^2 - \bar{n} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{2g^2(n+1)n}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n t, \\ [\langle a^\dagger(t + \tau) a(t + \tau) \rangle]'_{\tau|_{\tau=0}} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{g^2(n+1)}{\lambda_n} \sin 2\lambda_n t, \end{aligned} \quad (104)$$

$$[\langle a^\dagger(t) a^\dagger(t + \tau) a(t + \tau) a(t) \rangle]'_{\tau|_{\tau=0}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{g^2(n+1)n}{\lambda_n} \sin 2\lambda_n t$$

для начального условия (99) и

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle &= \bar{n} - \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{g^2 n}{\lambda_{n-1}^2} \sin^2 \lambda_{n-1} t, \\ \langle a^\dagger(t) a^\dagger(t) a(t) a(t) \rangle &= \bar{n}^2 - \bar{n} - \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{2g^2 n(n-1)}{\lambda_{n-1}^2} \sin^2 \lambda_{n-1} t, \\ [\langle a^\dagger(t + \tau) a(t + \tau) \rangle]'_{\tau|_{\tau=0}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{g^2 n}{\lambda_{n-1}} \sin 2\lambda_{n-1} t, \end{aligned} \quad (105)$$

$$[\langle a^\dagger(t) a^\dagger(t + \tau) a(t + \tau) a(t) \rangle]'_{\tau|_{\tau=0}} = - \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} \frac{g^2 n(n-1)}{\lambda_{n-1}} \sin 2\lambda_{n-1} t$$

для начального условия (100). Подстановка (104) и (105) в (102) и (103) сразу дает явные выражения для Q -фактора Мандела и

$\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$. Свет, для которого $Q > 0$ (< 0), имеет дисперсию больше (меньше), чем для распределения Пуассона и называется супер-(суб)-пуассоновским; нижняя граница Q равна -1 и соответствует фоковскому состоянию, т.е. состоянию с точно определенным числом фотонов. Признак группировки или антигруппировки фотонов определяется поведением нормированной двухвременной корреляционной функции $g^{(2)}(t, t + \tau)$ в окрестности $\tau = 0$. Если $g^{(2)}(t, t + \tau)$ уменьшается с увеличением τ (отрицательная производная), то имеет место эффект группировки фотонов. Если $g^{(2)}(t, t + \tau)$ возрастает с увеличением τ (положительная производная), то имеет место антигруппировка фотонов.

Ниже для простоты предполагается наличие точного резонанса $\Delta = 0$.

Рассмотрим когерентное состояние поля. Даже после подстановки весового фактора p_{nn} (21) в (102)—(105) в явном виде просуммировать (102) и (103) точно невозможно. Поэтому воспользуемся численными расчетами. Результаты приведены на рис. 13 и 14.

На рис. 13 изображены зависимости Q -фактора Манделля (сплошные линии) и производной $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)$ при $\tau=0$ (штриховые линии) от безразмерного времени gt для первоначально невозбужденного атома и для двух значений среднего числа фотонов $\bar{n} = 1$ (рис. 13, а) и $\bar{n} = 10$ (рис. 13, б). Когда взаимодействие включается, кривые, пред-

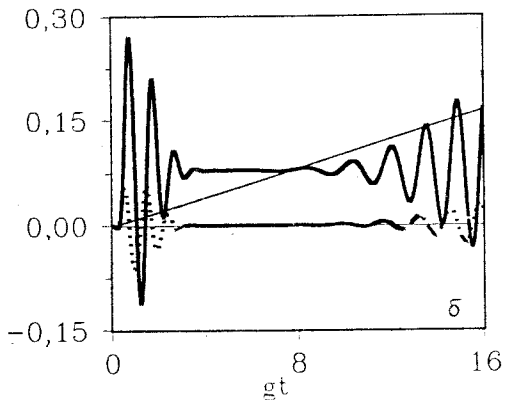
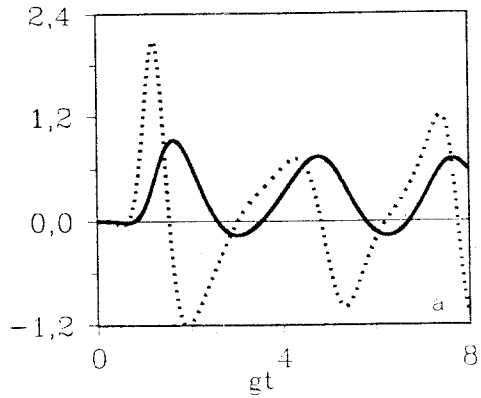


Рис. 13. Эволюция Q (сплошные линии) и $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ (штриховые линии), когда атом в начальный момент находится на нижнем уровне, а поле — в когерентном состоянии, в котором а) $\bar{n} = 1$; б) $\bar{n} = 10$

ставляющие Q -фактор, идут вниз, что означает субпуассоновскую статистику поля. После некоторого времени эти кривые идут вверх и Q достигает положительных значений. Теперь свет имеет суперпуассоновскую статистику. В процессе временной эволюции Q осциллирует вблизи начального нулевого значения, и статистика поля соответственно меняется с субпуассоновской на суперпуассоновскую, и наоборот. Однако, как видно из рисунков, поле в процессе взаимодействия большую часть времени обладает суперпуассоновской статистикой.

Когда интенсивность поля увеличивается, амплитуда осцилляций Q уменьшается. Это согласуется с выводами Хиллери [120] о том, что чем больше интенсивность начального когерентного поля, тем «слабее» субпуассоновская (или суперпуассоновская) статистика.

При включении взаимодействия значение $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ (которое в начальный момент равняется нулю) уменьшается, т.е. имеет место группировка фотонов. С увеличением времени взаимодействия $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$

начинает осциллировать вокруг нуля. Это означает, что группировка и антигруппировка фотонов чередуются по времени. Когда статистика поля является субпуассоновской, фотоны могут проявлять группировку или антигруппировку, и наоборот, антигруппировка фотонов может сопровождаться супер- или субпуассоновской статистикой. Из рисунков также видно, что когда поле большую часть времени имеет су-

пер- или субпуассоновской статистикой. Из рисунков также видно, что когда поле большую часть времени имеет су-

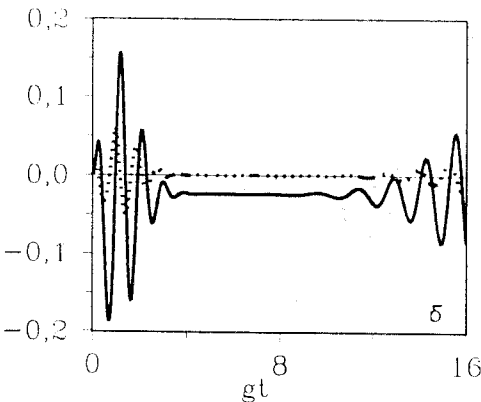
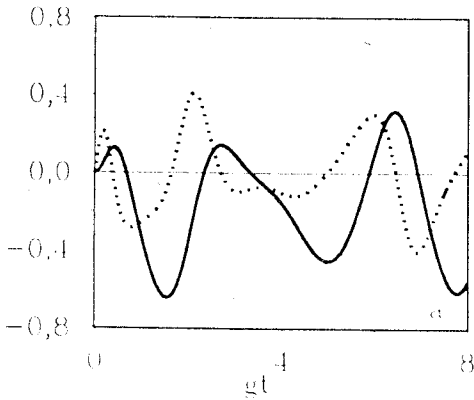


Рис.14. Эволюция Q (сплошные линии) и $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ (штриховые линии), когда атом в начальный момент находится на верхнем уровне, а поле — в когерентном состоянии, в котором а) $\bar{n} = 1$; б) $\bar{n} = 10$

перпуассоновскую статистику, группировка и антигруппировка фотонов не обладают преимуществом относительно друг друга.

Результаты для первоначально возбужденного атома представлены на рис.14. Когда включается взаимодействие атома с полем, Q возрастает с начального нулевого значения. Это равносильно тому, что поле становится суперпуассоновским. Таким образом, в области малых времен невозбужденный атом является более эффективным для генерации поля с субпуассоновской статистикой, чем возбужденный атом. Видно, что поле большую часть времени имеет субпуассоновскую статистику, в отличие от случая первоначально не возбужденного атома.

Как и для первоначально не возбужденного атома, величина $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ часто меняет знак в процессе эволюции. Существенное расхождение возникает вблизи $t = 0$: в случае возбужденного атома имеет место антигруппировка, в то время как в случае невозбужденного атома — группировка фотонов.

Когда интенсивность поля усиливается, коллапсы и возобновления осцилляций Раби [62] проявляются во временном поведении Q и $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$. Учитывая распределения (21) около своего пика в \bar{n} в случае сильной накачки $\bar{n} \gg 1$, находим квазиустойчивое значение для Q , которое достигается в области коллапса:

$$Q_{\text{quasi-steady}} \sim \frac{3}{4\bar{n}} \quad (106)$$

для начального состояния атома $|\psi_a(0)\rangle = |g\rangle$ и

$$Q_{\text{quasi-steady}} \sim -\frac{1}{4\bar{n}} \quad (107)$$

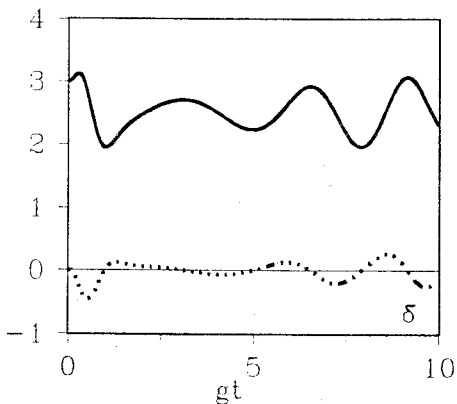
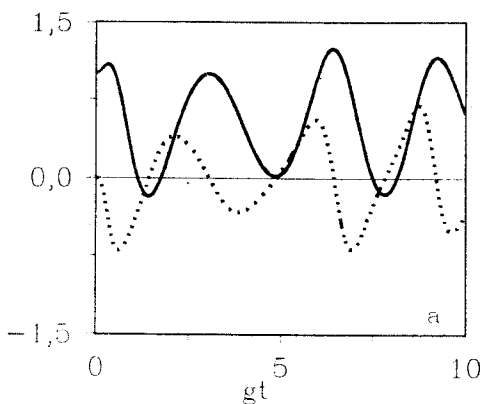
для начального состояния атома $|\psi_a(0)\rangle = |e\rangle$. При этих значениях вре-

мени $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ осциллирует почти с нулевой амплитудой, что означает менее явно выраженный характер эффектов группировки и антигруппировки фотонов. Это вполне понятно, так как в квазиустойчивом режиме среднее число фотонов остается почти неизменным.

Теперь рассмотрим хаотическое состояние поля, которое имеет диагональную матрицу плотности с весовым фактором (22), дисперсией $\langle(\Delta n)^2\rangle = \bar{n}(\bar{n} + 1)$ и Q -фактором Манделя $Q = \bar{n}$. Поскольку $Q > 0$, хаотическое состояние является суперпуассоновским и это свойство усиливается при возрастании среднего числа фотонов. При этом естественно ожидать, что только хаотическое поле с очень маленьким числом

фотонов может стать субпуассоновским благодаря взаимодействию с двухуровневым атомом [121, 120].

На рис.15 изображена временная эволюция Q и $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ для резонаторного поля, первоначально находящегося в хаотическом состоянии, и атома в возбужденном состоянии. Видно, что при $\bar{n} = 1$ (рис.15,а) субпуассоновская статистика еще имеет место, но при $\bar{n} = 3$ (рис.15,б) ее уже нет. Также отметим, что когда субпуассоновское поведение исчезает с увеличением среднего числа фотонов, знак $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ меняется с положительного на отрицательный, это означает, что антигруппировка фотонов переходит в группировку и наоборот. То, что антигруппировка фотонов по-прежнему имеет место несмотря на уширение распределения по фокковским состояниям, во многом следует из использованного определения. Действительно, определяя



антигруппировку фотонов согласно положительности производной $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)$ при $\tau = 0$, нам важно знать, как меняется значение двумерной корреляционной функции $g^{(2)}(t, t + \tau)$ в окрестности $\tau = 0$, а не само значение $g^{(2)}(t, t + \tau)$ в точке $\tau = 0$. Очевидно, что изменение $g^{(2)}(t, t + \tau)$ в зависимости от τ определяется в большей степени атомом, который поглощает и испускает фотоны, а не характеристиками статистики поля. С другой стороны, статистика поля также оказывает влияние на вре-

Рис.15. Эволюция Q (сплошные линии) и $\frac{\partial}{\partial \tau} g^{(2)}(t, t + \tau)|_{\tau=0}$ (штриховые линии), когда атом в начальный момент находится на верхнем уровне, а поле — в когерентном состоянии, в котором а) $\bar{n} = 1$; б) $\bar{n} = 3$

менное поведение $g^{(2)}(t, t + \tau)$. Например, сравнение рис. 14 и 15 (для случая первоначально возбужденного атома) показывает, что после включения взаимодействия для поля в хаотическом состоянии имеет место группировка фотонов, в то время как для когерентного поля имеет место антигруппировка.

9. КОЛЛАПС, ВОЗОБНОВЛЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ РАБИ И ЭВОЛЮЦИЯ ФАЗЫ ПОЛЯ

Хотя квантовая электродинамика возникла сорок лет назад, существуют фундаментальные проблемы, которые до сих пор еще не решены окончательно. К одной из них относится вопрос о существовании эрмитова оператора фазы гармонического осциллятора (или одномодового электромагнитного поля). Классическое электромагнитное поле описывается амплитудой, т.е. квадратным корнем из интенсивности поля, и фазой. В квантовой теории амплитуда поля пропорциональна квадратному корню из оператора числа фотонов, но остается открытым вопрос, как определить оператор фазы. Дирак в своей основополагающей статье [124] по квантованию электромагнитного поля впервые постулировал существование эрмитова оператора фазы $\hat{\phi}$, сопряженного оператору числа фотонов. Он предположил, что оператор числа фотонов и оператор фазы должны удовлетворять каноническому коммутационному соотношению

$$[\hat{N}, \hat{\phi}] = i, \quad (108)$$

и что операторы уничтожения a и рождения a^\dagger одномодового электромагнитного поля можно представить в полярной форме:

$$a = \exp(i\hat{\phi})\sqrt{\hat{N}}, \quad a^\dagger = \sqrt{\hat{N}} \exp(-i\hat{\phi}). \quad (109)$$

Трудности этого подхода, которые осознал впоследствии сам Дирак [125], заключаются в следующем. Во-первых, применяя соотношение неопределенностей Гейзенберга к коммутатору (108), получим

$$\Delta N \Delta \phi \geq \frac{1}{2}. \quad (110)$$

Из (110) видно, что состояние с хорошо определенным числом фотонов будет иметь неопределенность фазы больше, чем 2π . Во-вторых, из коммутатора (108) следует, что матричные элементы оператора $\hat{\phi}$ в базисе состояний с определенным числом фотонов не определены [126]:

$$(n' - n) \langle n' | \hat{\phi} | n \rangle = i \delta_{nn'}. \quad (111)$$

И наконец, экспоненциальный оператор $\exp(i\hat{\phi})$, полученный с помощью этого подхода, не унитарен [127].

Саскинд и Гловер [110] подчеркивали, что главная трудность в правильном определении фазового оператора лежит в ограниченности снизу спектра собственных значений оператора числа фотонов. Существуют два возможных способа преодоления этой трудности. Первый способ — расширение гильбертова пространства нормального гармонического осциллятора путем присоединения к нему состояний с отрицательным числом фотонов, и предположение, что состояния с отрицательной энергией отделены от положительного энергетического основного состояния [128]. Однако было показано, что этот подход не лишен некоторых противоречий, которые возникают из-за неограниченности пространства состояний [128]. Другим способом можно решить проблему полуограниченности спектра гармонического осциллятора, предположив, что спектр гармонического осциллятора ограничен, т.е. рассматривать гильбертово пространство гармонического осциллятора конечной размерности. Это было сделано Гаррисоном и Вонгом в 1970 г. [129], а также Поповым и Яруниным в 1973 г. [130] (см. также [131]). Были построены эрмитов оператор фазы $\hat{\phi}_r$ и соответствующий унитарный экспоненциальный оператор $\hat{U}_r = \exp(i\hat{\phi}_r)$ в конечномерном подпространстве $(L_2)_r$, порождаемом r первыми векторами из базиса $|n\rangle$. Оператор $\hat{\phi}$, получаемый после перехода к пределу $r \rightarrow \infty$, обладает некоторыми свойствами, необходимыми для оператора фазы. Например, коммутатор $[\hat{N}, \hat{\phi}]$ равен i на плотном множестве функций в пространстве с базисом $|n\rangle$. Для $\hat{\phi}$ были найдены собственные значения и собственные векторы. Однако они имеют очень сложную математическую структуру, что затрудняет их применение для изучения фазовых свойств электромагнитного поля.

Далее применяется формализм эрмитова оператора фазы Пегга — Барнетта для исследования динамических свойств фазы когерентного поля, взаимодействующего с двухуровневым атомом в резонаторе [122,123]. Обнаруживается интересная связь между временным поведением фазы поля в резонаторе и коллапсами и возобновлениями осцилляций Раби. Вычисляются также функция распределения и флуктуации фазы в МДК с постоянной взаимодействия, зависящей от интенсивности поля [49].

Прежде всего приведем некоторые основные положения формализма Пегга — Барнетта, необходимые для дальнейшего исследования фазовых свойств поля в резонаторе.

Исходя из существования состояния с точно определенной фазой

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s + 1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta) |n\rangle, \quad (112)$$

Пегг и Барнетт предложили работать сначала в $(s + 1)$ -мерном пространстве Ψ (где s может быть сколь угодно большим) и только после того, как все физические величины вычислены, перейти к пределу $s \rightarrow \infty$. Хотя параметр θ в фазовом состоянии (112) может принимать любое действительное значение, различные фазовые состояния $|\theta\rangle$ существуют для всех значений θ только в заданном интервале $\theta_0 - (\theta_0 + 2\pi)$, где θ_0 — относительная фаза. Нетрудно показать, что состояния со значениями θ , отличающимися друг от друга на величину $2\pi/(s + 1)$, умноженную на целое число, ортогональны. Следовательно, задавая относительное состояние

$$|\theta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{s + 1}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_0) |n\rangle, \quad (113)$$

можно найти полный набор $(s + 1)$ ортонормированных фазовых состояний [132—134]:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s + 1}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_m) |n\rangle, \quad m = 0, 1, \dots, s, \quad (114)$$

где $(s + 1)$ значений θ_m даются выражением

$$\theta_m \equiv \theta_0 + \frac{2\pi m}{s + 1}, \quad m = 0, 1, \dots, s. \quad (115)$$

Набор фазовых состояний $|\theta_m\rangle$ можно использовать как ортонормированный базис в пространстве Ψ .

На основе ортонормированных фазовых состояний (114) можно построить оператор фазы следующим образом:

$$\hat{\phi}_\theta \equiv \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (116)$$

Очевидно, $\hat{\phi}_\theta$ эрмитов и удовлетворяет уравнению

$$\hat{\phi}_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle. \quad (117)$$

Пусть атом в начальный момент находится на нижнем уровне, а поле — в когерентном состоянии (27), фазовые свойства которого хорошо известны [134,135]. Тогда начальное состояние полной системы атом+поле имеет вид

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\varphi} |n; g\rangle. \quad (118)$$

Очевидно, что φ есть среднее значение фазы поля.

Используя решение (14), нетрудно найти вектор состояния системы в момент t в представлении II:

$$|\psi(t)\rangle = U_{II}(t)\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\varphi} [A_{n,g}(t)|n; g\rangle + B_{n,g}(t)|n-1; e\rangle], \quad (119)$$

где $A_{n,g}(t)$, $B_{n,g}(t)$ определены в (15). С помощью разложения (114) фазового состояния в базисе $|n\rangle$, можно прийти к следующему выражению для распределения вероятности фазы:

$$|\langle\theta_m|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \left(1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \{ \cos [(n-k)(\theta_m - \varphi)] \operatorname{Re} U + \right. \\ \left. + \sin [(n-k)(\theta_m - \varphi)] \operatorname{Im} U \} \right), \quad (120)$$

где

$$U \equiv U_{n,k}(t) = A_{n,g}(t) A_{k,g}^*(t) + B_{n,g}(t) B_{k,g}^*(t) = \\ = \cos(\lambda_{n-1}t) \cos(\lambda_{k-1}t) + \frac{g^2 \sqrt{nk} + \Delta^2/4}{\lambda_{n-1} \lambda_{k-1}} \sin(\lambda_{n-1}t) \sin(\lambda_{k-1}t) + \\ + \frac{i\Delta}{2} \left[\frac{1}{\lambda_{n-1}} \sin(\lambda_{n-1}t) \cos(\lambda_{k-1}t) - \frac{1}{\lambda_{k-1}} \sin(\lambda_{k-1}t) \cos(\lambda_{n-1}t) \right]. \quad (121)$$

Выбирая начальную точку фазового окна

$$\theta_0 = \varphi - \frac{\pi s}{s+1}, \quad (122)$$

имеем из уравнения (115) для θ_m :

$$\theta_m \equiv \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1} = \varphi + \frac{\pi\mu}{s+1}, \quad m = 0, 1, \dots, s, \quad (123)$$

где $\mu \equiv m - s/2$ пробегает значения от $-s/2$ до $s/2$ с целым шагом. Распределение фазы (120) тогда становится симметричным по отношению к μ . В пределе, когда s стремится к бесконечности, можно ввести непрерывную фазовую переменную заменой $\mu 2\pi/(s+1)$ на θ и $2\pi/(s+1)$ на $d\theta$ [133], что приводит к непрерывному распределению вероятности фазы

$$P(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \{ \cos[(n-k)\theta] \operatorname{Re} U + \sin[(n-k)\theta] \operatorname{Im} U \} \right) \quad (124)$$

с нормировкой

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(\theta, t) d\theta = 1. \quad (125)$$

Рассмотрим случай точного резонанса $\Delta = 0$. Тогда $\operatorname{Im} U = 0$ и $P(\theta, t)$ приобретает вид

$$P(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] \cos[\sqrt{n-k}gt] \right\}. \quad (126)$$

Заменяя сумму в

$$\langle \psi(t) | \hat{\phi}_\theta | \psi(t) \rangle = \sum_m \theta_m |\langle \theta_m | \psi(t) \rangle|^2 \quad (127)$$

подходящим интегралом и учитывая, что $\theta_m = \theta + \varphi$, находим среднее значение фазы:

$$\langle \psi(t) | \hat{\phi}_\theta | \psi(t) \rangle = \varphi, \quad (128)$$

т.е. среднее значение фазы не меняется во времени, несмотря на взаимодействие атома с полем. Это сразу видно из уравнения (126): в любой момент t распределение вероятностей фазы является четной функцией по отношению к θ , поэтому интегрирование от $-\pi$ до π приводит к нулевому среднему значению θ , следовательно, среднее значение фазы всегда равно значению в начальный момент φ . Отметим, что в более общей ситуации, например, когда $\Delta \neq 0$ или когда атом помещен в резонатор в когерентной суперпозиции основного и возбужденного состояний, $\langle \hat{\phi}_\theta \rangle$ изменится во времени.

Теперь рассмотрим свойства распределения вероятности фазы. Несмотря на очевидную простоту формулы (126), трудно предсказать форму $P(\theta, t)$, но если переписать ее в виде

$$P(\theta, t) = \frac{1}{2} [P_+(\theta, t) + P_-(\theta, t)],$$

$$P_\pm(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos \left[(n-k) \left(\theta \mp \frac{gt}{\sqrt{n+k}} \right) \right] \right\}, \quad (129)$$

то видно, что когда время растет, распределение вероятности фазы расщепляется на две одинаковые части. Если нарисовать их в полярной системе координат (θ — полярный угол и P — радиус), то эти две части вращаются в противоположных направлениях с одинаковой скоростью и все время располагаются симметрично по обеим сторонам линии $\theta = 0$ (см. рис.16). После некоторого интервала времени два противоположно вращающихся распределения «сталкиваются». Они полностью перекры-

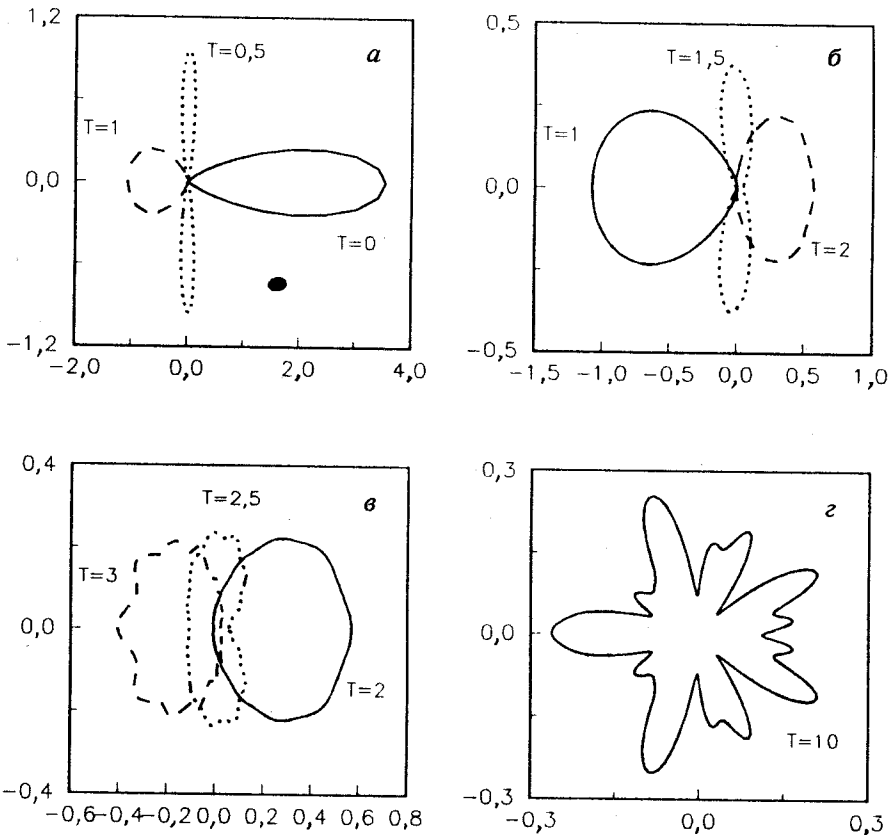


Рис.16. Распределение плотности вероятности фазы $P(\theta, t)$ в полярной форме в разные моменты безразмерного времени $T = gt / (2\pi \sqrt{\bar{n}})$, $\bar{n} = 20$

ваются, когда среднее значение $\langle \hat{\phi}_\theta \rangle_+$ ($\langle \hat{\phi}_\theta \rangle_-$), взятое в соответствии с распределением вероятностей $P_+(\theta, t)$ [$P_-(\theta, t)$], увеличивается на π ($-\pi$). Для сильных когерентных полей, функция распределения по фоковским состояниям которых имеет единственный острый пик в \bar{n} , этот интервал времени приближенно равен

$$t = \frac{2\pi \sqrt{\bar{n}}}{g}, \tag{130}$$

что точно совпадает с периодом возобновлений осцилляций Раби (24). Временное поведение $P(\theta, t)$ проиллюстрировано на рис.16 в полярной системе координат. Масштаб времени изменен в соответствии с

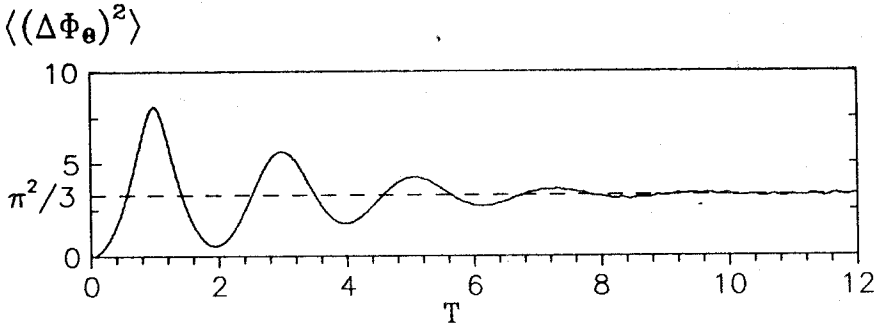


Рис.17. Дисперсия фазы в зависимости от $T, \bar{n} = 20$

$T = gt/(2\pi\sqrt{\bar{n}})$ так, чтобы возобновления осцилляций Раби имели место при $T = 1, 2, 3 \dots$. В начальный момент $T = 0$ распределение вероятности фазы обладает формой удлинённого листа, соответствующей когерентному состоянию поля [134]. Когда взаимодействие включается, распределение вероятности фазы постепенно расщепляется на два листа. В это время осцилляции Раби коллапсируют. Когда два составных распределения фазы отчетливо отделяются друг от друга, имеет место квазистационарный режим, в котором атомная инверсия почти не осциллирует. При $T = 1$ две кривые распределения полностью перемещаются и осцилляции Раби возобновляются в полную силу. После этого распределение вероятности фазы вновь расщепляется на два пика,двигающихся в правую сторону рисунка, где они вновь сталкиваются. В процессе эволюции эти пики расширяются и расщепление вероятности фазы на отдельные части все труднее различить, что соответствует размыванию сигналов возобновлений осцилляций Раби во времени.

Дисперсия фазы

$$\langle(\Delta\hat{\phi}_\theta)^2\rangle = \sum_m (\theta_m - \langle\hat{\phi}_\theta\rangle)^2 |\langle\theta_m|\psi(t)\rangle|^2 \tag{131}$$

наравне с распределением вероятностей фазы несет информацию о коллапсах и возобновлениях осцилляций Раби. Заменяя сумму в (131) на интеграл, с помощью (124) получим

$$\langle(\Delta\hat{\phi}_\theta)^2\rangle = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n>k} b_n b_k \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2} \cos [(\sqrt{n} - \sqrt{k})gt]. \tag{132}$$

Эволюция $\langle(\Delta\hat{\phi}_\theta)^2\rangle$ проиллюстрирована графически на рис.17 для $\bar{n} = 20$. Сначала дисперсия фазы увеличивается и достигает максимума при

$T = 1$. На первый взгляд, может показаться, что это противоречит однопиковой структуре плотности распределения фазы, имеющей место в этот момент (рис. 16, а). Однако, как было показано Пеггом и Барнеттом [134], нужна некоторая осторожность при интерпретации результатов, полученных для определенного значения относительной фазы θ_0 . Здесь θ_0 была выбрана так, чтобы минимизировать флуктуации фазы в начальном когерентном состоянии поля. Такой выбор θ_0 больше не минимизирует флуктуации фазы при $T = 1$. В этот момент плотность распределения $P(\theta, t)$ расщепляется на два симметричных пика, удаленных на π от начала координат. Если переместить фазовое окно на π , дисперсия фазы будет минимизирована вновь. Таким образом, при выборе относительной фазы (122) можно сделать вывод, что и максимумы и минимумы дисперсии фазы соответствуют возобновлениям осцилляций Раби, и чем глубже экстремальные точки, тем более отчетливо видны возобновления. Для больших времен $\langle (\Delta\hat{\phi}_\theta)^2 \rangle$ осциллирует хаотическим образом вокруг $\pi^2/3$ -дисперсии фазы состояния поля со случайно распределенной фазой. Это отражает существование квазиинвертируемости, присущей МДК [62—64].

В МДК из-за квадратного корня, присутствующего в выражениях для собственных значений гамильтониана, коллапс и возобновление осцилляций Раби, а также расщепление распределения вероятности фазы не происходят полностью. Существуют, однако, различные модификации МДК, динамическое поведение которых строго периодически. Одной из таких модификаций является модель с зависящей от интенсивности поля постоянной взаимодействия, предложенная Баком и Шукумаром [49]. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$H^{\text{БШ}} = \hbar\omega(a^\dagger a + R^z) + \hbar g(R^\dagger s + R^- s^\dagger), \quad (133)$$

где $s = a\sqrt{a^\dagger a}$, $s^\dagger = \sqrt{a^\dagger a} a^\dagger$. Интересно сравнить две модели с точки зрения фазовых свойств. Повторяя использованную выше процедуру, можно прийти к следующему выражению для плотности распределения фазы:

$$P^{\text{БШ}}(\theta, t) = \frac{1}{2} [P_+^{\text{БШ}}(\theta, t) + P_-^{\text{БШ}}(\theta, t)],$$

$$P_\pm^{\text{БШ}}(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k}^\infty b_n b_k \cos [(n-k)(\theta \mp gt)] \right\}. \quad (134)$$

Отсюда видно, что, в отличие от стандартного МДК, плотность распределения фазы является периодической функцией времени с периодом, равным $2\pi/g$. Два противоположно вращающихся распределения $P_{\pm}^{\text{БШ}}(\theta, t)$ есть не что иное, как плотность распределения фазы для когерентного состояния поля с заменой фазы θ на $(\theta \mp gt)$ соответственно. Они полностью перекрываются после каждого интервала времени π/g , что точно совпадает с периодом возобновлений осцилляций Раби [49]. Дисперсия фазы имеет вид

$$\langle (\Delta\hat{\phi}_{\theta})^2 \rangle^{\text{БШ}} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n>k} b_n b_k \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2} \cos [(n-k)gt], \quad (135)$$

и осциллирует с тем же периодом, что и плотность распределения фазы. Строгая периодичность фазовых характеристик в МДК с зависящей от интенсивности поля постоянной связи не удивительна, так как в данной модели возобновления осцилляций Раби атомной инверсии точно восстанавливают ее начальное значение [49].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Einstein A. — Phys.Z., 1917, vol.18, p.121.
2. Weiskopf V.F., Wigner E. — Z.Phys., 1930, vol.63, p.54.
3. Абрагам А. — Ядерный магнетизм. М.: Мир, 1963.
4. Карлов Н.В., Маненков А.А. — Квантовые усилители. М.: Наука, 1966.
5. Dicke R.H. — Phys.Rev.A., 1954, vol.93, p.99.
6. Боголюбов Н.Н. (мл), Шумовский А.С. — Сверхизлучение. Лекции для молодых ученых. ОИЯИ, Р17-87-176, Дубна, 1987.
7. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. — Кооперативные явления в оптике. М.: Наука, 1988.
8. Kiselev Yu.F., Shumovsky A.S., Yukalov V.I. — Mod.Phys.Lett.B., 1989, vol.3, p.1149.
9. Пантел Р., Путхов Г. — Основы квантовой электроники. М.: Мир, 1972.
10. Ярив А. — Квантовая электроника. М.: Советское радио, 1980.
11. Аллен Л., Эберли Дж. — Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.
12. Walls D.F. — Nature, 1983, vol.306, p.141.
13. Yamamoto Y., Haus H.A. — Rev.Mod.Phys., 1986, vol.56, p.1001.
14. Loudon R., Knight P.L. — J.Mod.Opt., 1987, vol.34, p.709.
15. Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. — УФН, 1987, т.153, с.233.
16. Быков В.П. — УФН, 1991, т.161, с.145.
17. Боголюбов Н.Н. (мл.), Козеровски М., Чан Куанг, Шумовский А.С. — ЭЧАЯ, 1988, т.19, с.831.
18. Килин С.Я. — Квантовая оптика. Минск: Наука и техника, 1990.
19. Demelt H. — In: Advance in Laser Spectroscopy. Ed. F.T.Arecchi, F.Struma and H.Walther, Plenum, N.Y., 1983.
20. Wineland D.J., Itano W.M., Bergquist J.C., Bollinger J.J., Prestage J.D. — In: Atomic Physics 9, Ed. R.S.Van Dyck, E.N.Fortson. Singapore: World Sci., 1984.
21. Scully M.O., Walther H. — Phys.Rev.A, 1987, vol.39, p.5229.

22. Haroche S., Raimond J.M. — In: *Advances in Atomic and Molecular Physics*. Ed. by D.Bates and B.Bederson. Academic, N.Y., 1985, vol.20, p.350.
23. Meschede D., Walther H., Muller G. — *Phys.Rev.Lett.*, 1985, vol.54, p.551.
24. Jaynes E.T., Cummings F.W. — *Proc. IEEE*, 1963, vol.51, p.89.
25. Yoo H.I., Eberly J.H. — *Phys.Rep.*, 1985, vol.118, p.239.
26. Gerry C.C., Eberly J.H. — *Phys.Rev.A.*, 1990, vol.42, p.6805.
27. Gou S.C. — *Phys.Rev.A*, 1989, vol.40, p.5116.
28. Abdalla M.S., Ahmed M.M.A., Obada A.S.F. — *Physica A.*, 1991, vol.170, p.393.
29. Hadjiagapiou S.A. — *Physica A.*, 1990, vol.163, p.584.
30. Kochetov E. — *J.Phys.A.*, 1987, vol.20, p.2433.
31. Vogel W., Welsch D.-G. — *Phys.Rev.A*, 1989, vol.40, p.7113.
32. Aliskenderov E.I., Fam Le Kien, Nguen Din Vin, Shumovsky A.S. — *J.Phys.A.*, 1986, vol.19, p.3607.
33. Sukumar C.V., Buck B. — *Phys.Lett.A*, 1981, vol.83, p.211.
34. Buck B., Sukumar C.V. — *J.Phys.A*, 1984, vol.17, p.885.
35. Singh S. — *Phys.Rev.A*, 1982, vol.25, p.3206.
36. Kozierowski M., Shumovsky A.S. — *Physica A*, 1987, vol.145, p.290.
37. Abdel-Hafez A.M., Obada A.S.F., Ahmed M.M.A. — *Phys.Rev.A*, 1987, vol.35, p.1634.
38. Abdel-Hafez A.M., Abu-Sitta A.M.M., Obada A.S.F. — *Physica A*, 1987, vol.35, p.1634.
39. Li F.L., Lin D.L., George T.F., Li X.S. — *Phys.Rev. A*, 1989, vol.40, p.1394.
40. Deng Z. — *Opt.Commun.*, 1986, vol.54, p.222.
41. Shumovsky A.S., Aliskenderov E.I., Fam Le Kien — *J.Physique*, 1987, vol.48, p.1933.
42. Kozierowski M., Man'ko V.I., Chumakov S.M. — *Physica A*, 1989, vol.155, p.254.
43. Xu L., Zhang Z.M., Chai J.L. — *J.Opt.Soc.Am.B.*, 1991, vol.8, p.1157.
44. Barnett S.M., Knight P.L. — *Phys.Rev.A.*, 1986, vol.33, p.2444.
45. Puri R.R., Agarwal G.S. — *Phys.Rev.A*, 1986, vol.33, p.3610.
46. Puri R.R., Agarwal G.S. — *Phys.Rev.A*, 1987, vol.35, p.3433.
47. Aliskenderov E.I., Rustamov K.A., Shumovsky A.S., Tran Quang — *J.Phys.A*, 1987, vol.20, p.6265.
48. Bashkirov E.K., Fam Le Kien, Shumovsky A.S. — *Physica A*, 1990, vol.167, p.935.
49. Buck B., Sukumar C.V. — *Phys.Lett.A*, 1981, vol.81, p.132.
50. Buzek V. — *Phys.Lett.A*, 1989, vol.139, p.231.
51. Fam Le Kien, Shumovsky A.S. — *Int.J.Mod.Phys.B*, 1991, vol.5, p.2287.
52. Meschede D. — *Phys.Rep.*, 1992, vol.211, p.201.
53. Давыдов А.С. — *Квантовая механика*. М.: Наука, 1973.
54. Ахмезер А.И., Берестецкий В.Б. — *Квантовая электродинамика*. М.: Наука, 1969.
55. Power E.A. — *Introductory Quantum Electrodynamics*. London, 1964.
56. Leonardi C., Persico F., Verti G. — *Rev.Nuovo Cim*, 1986, vol.9, No.4.
57. Cummings F.W. — *Phys.Rev.A*, 1985, vol.140, p.1051.
58. Knight P.L., Milonni P.W. — *Phys.Rep.*, 1980, vol.66, p.21.
59. Ackerhalt J.R., Rzazewski K. — *Phys.Rev.A*, 1975, vol.12, p.2549.
60. Meystre P., Geneux E., Quatropani A., Faist A. — *Nuovo Cimento B*, 1975, vol.25, p.521.
61. Von Foerster T. — *J.Phys.A*, 1975, vol.8, p.95.
62. Eberly J., Sanchez-Mondragon J.J., Narozhny N.B. — *Phys.Rev.Lett.*, 1980, vol.44, p.1323.
63. Narozhny N.B., Sanchez-Mondragon J.J., Eberly J.H. — *Phys.Rev.A.*, 1981, vol.23, p.236.
64. Yoo H.I., Sanchez-Mondragon J.J., Eberly J.H. — *J.Phys.A*, 1981, vol.14, p.1383.
65. Knight P.L., Radmore P.M. — *Phys.Lett.A*, 1982, vol.90, p.342.
66. Riti C., Verti G. — *Opt.Commun*, 1982, vol.44, p.105.
67. Arroyo-Correa G., Sanchez-Mondragon J.J. — *Quantum Opt.*, 1990, vol.2, p.409.
68. Joshi A., Puri R.R. — *J.Mod.Opt.*, 1987, vol.34, p.1421.

69. Milburn G. — *Opt.Acta*, 1984, vol.31, p.671.
70. Kim M.S., De Oliveira F.A.M., Knight P.L. — *J.Mod.Opt.*, 1990, vol.37, p.659.
71. Buzek V., Jex I., Brisudova M. — *Int.J.Mod.Phys.B*, 1991, vol.5, p.797.
72. Rempel G., Walther H., Klein W. — *Phys.Rev.Lett.*, 1987, vol.58, p.353.
73. Scully M.O. — *Phys.Rev.Lett.*, 1985, vol.55, p.2802; Scully M.O., Zubairy M.S. — *Phys.Rev.A*, 1987, vol.35, p.752; Schleich W., Scully M.O. — *ibid.* 1988, vol.37, p.1261.
74. Chow W.W., Scully M.O., Stoner J. — *Phys.Rev.A.*, 1975, vol.11, p.1380.
75. Wodkiewicz K., Knight P.L., Buckle S.J., Barnett S.M. — *Phys.Rev.A*, 1987, vol.35, p.2567.
76. Barnett S.M., Knight P.L. — *Phys.Scripta*, 1988, vol.T21, p.5.
77. Knight P.L. — *Phys.Scripta*, 1986, vol.T12, p.51.
78. Puri R.R., Agarwal G.S. — *Phys.Rev.A*, 1987, vol.35, p.3433.
79. Agarwal G.S., Puri R.R. — *J.Opt.Soc.Am.B.*, 1988, vol.5, p.1669.
80. Zaheer K., Zubairy M.S. — *Phys.Rev.A*, 1989, vol.39, p.2000.
81. Joshi A., Ruri R.R. — *J.Mod.Opt.*, 1989, vol.36, p.557.
82. Stoler D., Saleh B.E.A., Teich M.C. — *Opt.Acta*, 1985, vol.32, p.345. Miller M.M., Mishkin E.A. — *Phys.Lett.A*, 1967, vol.24, p.188.
83. Ho Trung Dung, Shumovsky A.S. — *Opt.Commun.*, 1991, vol.83, p.220.
84. Caves C.M. — *Phys.Rev.D.*, 1981, vol.23, p.1693.
85. Yuen H.P. — *Phys.Rev.A*, 1976, vol.13, p.2226.
86. Hollenhorst J.N. — *Phys.Rev.D.*, 1979, vol.19, p.1669.
87. Шумовский А.С. ДАН СССР, 1990, т.316, No.2.
88. Шумовский А.С. — ТМФ, 1991, т.89, с.438.
89. Боголюбов Н.Н. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, т.11, с.77.
90. Meystre P., Zubairy M.S. — *Phys.Lett.A.*, 1982, vol.89, p.390.
91. Shumovsky A.S., Fam Le Kien, Aliskenderov E.I. — *Phys.Lett.A.*, 1987, vol.124, p.351.
92. Butler M., Drummond P.D. — *Opt.Acta*, 1986, vol.33, p.1.
93. Kuklinski J.R., Madajczyk J.L. — *Phys.Rev.A.*, 1988, vol.37, p.3175.
94. Compagno G., Peng J.S., Persico F. — *Opt.Commun*, 1986, vol.57, p.415.
95. Zhu S.Y., Liu Z.D., Li X.S. — *Phys.Lett.A*, 1988, vol.128, p.89.
96. Liu Z.D., Zhu S.Y., Li X.S. — *J.Mod.Opt.*, 1988, vol.35, p.833.
97. Li F.L., Li X.S., Lin D.L., George T.F. — *J.Phys.B: At.Mol.Phys.*, 1989, vol.22, p.2977.
98. Zhu S.Y. — *J.Mod.Opt.*, 1989, vol.36, p.499.
99. Gerry C.C. — *Phys.Rev.A*, 1988, vol.37, p.2683.
100. Gea-Banacloche J., Schlicher R.R., Zubairy M.S. — *Phys.Rev.A.*, 1988, vol.38, p.3514.
101. Ho Trung Dung, Fam Le Kien, Aliskenderov E.I., Shumovsky A.S. — *Phys.Lett.A*, 1989, vol.136, p.489.
102. Shumovsky A.S., Aliskenderov E.I., Fam Le Kien — *Phys.Lett.A*, 1987, vol.120, p.401.
103. Radmore P.M. Knight P.L. — *J.Phys.B: At.Mol.Phys.*, 1982, vol.15, p.561.
104. Knight P.L., Lauder M.A., Radmore P.M., Dalton B.J. — *Acta Phys. Aust.*, 1984, vol.56, p.103.
105. Orriols G. — *Nuovo Cimento*, 1979, vol.53B, p.1.
106. Миногин В.Г., Рождественский Ю.И. — ЖЭТФ, 1985, т.88, с.1950.
107. Deng Z. — *Phys.Lett.A*, 1984, vol.105, p.43.
108. Cirac J.I., Sanchez-Soto L.L. — *Phys.Rev.A*, 1990, vol.42, p.2851.
109. Cirac J.I., Sanchez-Soto L.L. — *Phys.Rev.A*, 1991, vol.44, p.3317.
110. Susskind L., Glogower J. — *Physics*, 1964, vol.1, p.49.
111. Glauber R.J. — *Phys.Rev.Lett.*, 1963, vol.10, p.84.
112. Sudarshan E.C.G. — *Phys.Rev.Lett.*, 1963, vol.10, p.277.
113. Loudon R. — *Rep. Prog. Phys.*, 1980, vol.43, p.913.
114. Paul H. — *Rev.Mod.Phys.*, 1982, vol.54, p.1061.

115. Teich M.C., Saleh B.E.A. — In: Progress in Optics. Ed. by E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1988), vol.26, p.1.
116. Jakeman E. — In: Frontiers in Quantum Optics. Ed. E.R. Rike and S.Sarkar (Hilger, Bristol, 1986), p.342.
117. Zou X.T., Mandel L. — Phys.Rev.A, 1990, vol.41, p.475.
118. Ho Trung Dung, Shumovsky A.S., Bogolubov N.N. (Jr.) — Opt.Comm., 1992, vol.90, p.322.
119. Mandel L. — Opt.Lett., 1979, vol.4, p.205.
120. Hillery M. — Phys.Rev.A., 1987, vol.35, p.4186.
121. Aravind P.K., Hu G. — Physica C, 1988, vol.150, p.427.
122. Ho Trung Dung, Tanas R., Shumovsky A.S. — Opt.Comm., 1990, vol.79, p.462.
123. Ho Trung Dung, Tanas R., Shumovsky A.S. — J.Mod.Opt., 1991, vol.38, p.2069.
124. Dirac P.A.M. — Proc.R.Soc.London. Ser. A, 1927, vol.114, p.243.
125. Schweber S.S. — In Relativity, Groups and Topology II, Ed. by B.S. Dewitt and R.Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984), p.62.
126. Louisell W.H. — Phys.Lett., 1963, vol.7, p.60.
127. Carruthers P., Nieto M.M. — Rev.Mod.Phys., 1968, vol.40, p.411 and reference there in.
128. Barnett S.M., Pegg D.T. — J.Phys.A, 1986, vol.19, p.3849.
129. Garrison J.C., Wong J. — J.Math.Phys., 1970, vol.11, p.2242.
130. Попов В.Н., Ярунин В.С. — Вест. ЛГУ, 1973, т.22, с.7.
131. Дамаскинский Е.В., Ярунин В.С. — Изв. вузов, физика, 1978, т.6, с.59.
132. Pegg D.T., Barnett S.M. — Europhys.Lett., 1988, vol.6, p.483.
133. Pegg D.T., Barnett S.M. — Phys.Rev., 1989, vol.A39, p.1665.
134. Barnett S.M., Pegg D.T. — J.Mod.Opt., 1989, vol.36, p.7.
135. Loudon R. — The Quantum Theory of Light. 1st ed. Oxford Univ. Press, Oxford, 1973, p.143.