«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1993, ТОМ 24, ВЫП.2

УДК 538.941

К ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕЙ БОЗЕ-ЖИДКОСТИ

В.В.Красильников, С.В.Пелетминский

Харьковский физико-технический институт, Харьков, Украина

На основе обобщения ферми-жидкостного подхода к теории сверхтекучести построена самосогласованная теория сверхтекучей бозе-жидкости. Полуфеноменологическая теория сверхтекучей бозе-жидкости, развитая в настоящей работе, базируется на задании энергии системы как функционала конденсатных амплитуд квазичастиц, а также нормальных и аномальных корреляционных функций надконденсатных квазичастиц. С помощью найденного выражения для энтропии из вариационного принципа получены уравнения самосогласования для равновесных корреляционных функций и конденсатных амплитуд квазичастиц. Сформулированы бесстолкновительные кинетические уравнения для нормальных и аномальных корреляционных функций и конденсатных амплитуд. На основе этих уравнений рассмотрены колебания пространственно-однородной бозе-жидкости в условиях, когда все частицы находятся в конденсате. Прослежена связь развитого формализма с результатами, полученными Н.Н.Боголюбовым для слабонеидеального бозе-газа, построены уравнения двухжидкостной идеальной гидродинамики без предположения о галилеевой инвариантности функционала энергии.

The self-consistent theory of superfluid Bose liquid is constructed on the base of generalization of the Fermi liquid approach to the theory of superfluidity. The half-phenomenological theory of superfluid Bose liquid developed in the present work is based on the making up a system energy as a functional of both the quasiparticle condensate amplitudes and the normal and abnormal correlation functions of the above-condensate quasiparticles. The self-consistent equations for the equilibrium correlation functions and the condensate amplitudes of quasiparticles are obtained by the found entropy expression from the variation principle. The collisionless kinetic equations for the normal and abnormal correlation functions and the condensate amplitudes are formulated. On the base of these equations, the oscillations of the spatially homogeneous Bose liquid are considered on condition that all particles are in the condensate. Link of the developed formalism with the N.N.Bogolubov weak-nonideal Bose gas results is established and the two-liquid ideal hydrodynamics equations are constructed without assuming the Galilean invariance of the energy functional.

ВВЕДЕНИЕ

Открытие П.Л.Капицей [1] в 1938 г. сверхтекучей фазы ^{4}He оказало существенное влияние на развитие таких важных разделов науки, как физика квантовых жидкостей (^{3}He, ^{4}He), физика твердого тела, ядерная физика, астрофизика и космология. В последнее время интерес к сверхтекучести возрос в связи с исследованиями по высокотемпературной сверхпроводимости.

В 1941 г. Л.Д.Ландау [2] в феноменологическом подходе построил уравнения двухжидкостной идеальной гидродинамики сверхтекучей жидкости (учет диссипативных процессов был произведен в работах [3,4]) и сформулировал представления о спектре элементарных возбуждений в сверхтекучей фазе ^{4}Не (представления о фонон-ротонном газе).

В 1947 г. Н.Н.Боголюбовым [5] явление сверхтекучести было связано с явлением бозе-конденсации и в модели слабонеидеального бозе-газа в микроскопическом подходе выведен спектр элементарных возбуждений. В 1954 г. Р.П.Фейнман [6] связал энергетический спектр элементарных возбуждений со структурным фактором системы и показал, что фононы и ротоны представляют собой одну ветвь элементарных возбуждений, но в разных областях волновых векторов.

Эксперименты подтверждают, что сверхтекучесть жидкого ^{4}Не связана с явлением бозе-конденсации. П.К.Хоэнберг и П.М.Платцман [7] предложили исследовать распределение частиц по импульсам в жидком ^{4}Не методом глубоконеупругого рассеяния нейтронов. Их основная идея заключалась в том, что энергия и импульс, переданные от нейтрона к атому гелия в жидкости, очень велики по сравнению с характерными энергиями и импульсами атомов гелия, вследствие чего нейтрон взаимодействует только с одним атомом гелия мишени. Эксперименты показали, что присутствует ярко выраженный конденсатный пик в спектре неупругого рассеяния нейтронов в сверхтекучей фазе жидкого ^{4}Не, причем оказалось, что концентрация бозе-конденсата, определяющая количество атомов ^{4}Не с импульсом, равным нулю, составляет около 10% при абсолютном нуле температур [8,9]. Следует отметить, что экспериментальное обнаружение бозе-конденсата в сверхтекучем ^{4}Не представляет сложную проблему. Результаты работы [10] дают в настоящее время наиболее полную систему данных для относительной плотности бозе-конденсата в достаточно широком интервале температур 4,2÷0,4 K.

Сверхтекучими свойствами могут обладать системы, состоящие не только из бозонов, но и из фермионов. Так как фермионы обычно являются заряженными частицами, то для них сверхтекучесть проявляется как сверхпроводимость. Теоретическое объяснение явления сверхпроводимости дано Бардиным, Купером, Шриффером [11] и независимо Боголюбовым [12,13]. Примерами нейтральных ферми-систем, обладающих свойством сверхтекучести, являются различные фазы ^{3}Не (A- и B-фазы), для которых, в отличие от электронов металла, осуществляется не синглетное (по спинам), а триплетное спаривание фермионов.

Исследования по физике сверхтекучего состояния получили свое применение в ядерной физике. На сверхтекучесть ядерной материи было указано Н.Н.Боголюбовым в 1958 г. [14]. Учет возможности фазового перехода в сверхтекучее состояние в атомных ядрах позволил в хорошем согласии с экспериментом рассчитать моменты ядер [15], а также энергии связи, зарядовые распределения и другие физические величины для магических ядер и ядер с развитым спариванием [16]. Обзор работ по исследованию сверхпроводящих парных корреляций в атомных ядрах дан в [17].

С явлением сверхтекучести тесно связано изучение объектов астрофизики и космологии. На основе исследования уравнения состояния нейтронной жидкости А.Б.Мигдал [15] в 1959 г. указал на возможность существования сверхтекучей фазы в нейтронных звездах (пульсарах). У пульсаров обнаружено скачкообразное увеличение угловой скорости вращения и последующая медленная релаксация, что свидетельствует о наличии в структуре нейтронных звезд сверхтекучей компоненты. В [18] А.Б.Мигдалом показано, что при большой плотности нуклонной среды возможен фазовый переход, приводящий к образованию пионного конденсата. В центре пульсара возникает ядро, содержащее π-конденсат. Последний существенно влияет на важнейшие параметры нейтронных звезд: их массу, радиус и момент инерции (см. в этой связи обзор [19]).

В последнее время идеи, связанные со спонтанным нарушением симметрии и фазовыми переходами, в частности с фазовыми переходами, соответствующими бозе-конденсации, широко используются в космологии (см. в этой связи монографию [20]).

Остановимся теперь кратко на обзоре различных теоретических методов, используемых в теории сверхтекучего состояния. В работе [21] метод коллективных переменных был применен для изучения слабонеидеального бозе-газа. Этот метод был усовершенствован в [22], что позволило выразить различные характеристики ^{4}He (такие как свободная энергия, количество бозе-конденсата, спектр квазичастиц) в терминах структурного фактора жидкости.

В хорошо известной работе Н.Н.Боголюбова «Квазисредние в заданах статистической механики» [23] сформулирована концепция квазисредних, широко используемая в теории сверхтекучего состояния, сформулирована теорема об особенностях типа $1/q^2$ (которая независимо была предложена Голдстоуном [24]). Кроме того, в этой работе на основе метода квазисредних в самом общем виде обоснована модель с выделенным конденсатом.

Важную роль в квантовой теории поля и статистической физике играет метод функций Грина и связанная с этим методом диаграммная техника. Функции Грина при исследовании явления сверхпроводимости в ферми-системах использовались во многих работах (см. например, [25—27], а также обзор [28]). Обобщение метода температурных функций Грина и соответствующей диаграммной техники на системы, содержащие бозе-конденсат, проведено в [29,30]. Диаграммная техника широко используется при изучении конкретных явлений в квантовых жидкостях, а также при исследовании сверхтекучих свойств ядерной материи. В указанных работах [25—30] при построении диаграммной техники вводятся, наряду с нормальными функциями Грина, также и аномальные функции Грина. Формализм двухвременных функций Грина применялся для исследования корреляционных функций и спектров элементарных возбуждений сверхтекучих систем [31,32].

Эффективным и гибким математическим методом является метод континуального интегрирования. Этот метод использовался при исследовании высокочастотных ($\omega\tau \gg 1$) ветвей спектра сверхтекучих бозе- и ферми-систем (см. [33,34], а также [35]).

В ряде работ [36—39] предлагался другой математически возможный механизм фазового перехода бозе-систем в сверхпроводящее состояние, не связанный с явлением обычной бозе-конденсации. В них явление сверхтекучести в бозе-системах объяснялось механизмом, сходным с механизмом образования куперовских пар в теории сверхпроводимости (теории четного бозе-конденсата). В частности, в работе [39] высказана идея о том, что переход в сверхтекучее состояние в этом случае может иметь характер фазового перехода не второго, а первого рода.

Значительный интерес представляют вопросы, связанные с выводом уравнений двухжидкостной гидродинамики, а также с исследованием гидродинамических (низкочастотных) асимптотик функций Грина. Микроскопический вывод уравнений идеальной двухжидкостной гидродинамики, основанный на гипотезе о локальном равновесии сверхтекучей жидкости, впервые сделан Н.Н.Боголюбовым [44]. В этой же работе исследована низкочастотная асимптотика нормальной $<\psi^{+}\psi>$ и аномальной $<\psi\psi>$ двухвременных функций Грина. В [45,46] на основе идеи о сокращенном описании макроскопических систем дан микроскопический вывод уравнений двухжидкостной гидродинамики при наличии диссипативных процессов. В работах [47,48] выведены уравнения двухжидкостной идеальной гидродинамики без предположения о галилеевой инвариантности гамильтониана системы (в частном случае из этих уравнений при наличии галилеевой инвариантности следуют уравнения двухжидкостной гидродинамики Ландау, а при наличии лоренцевской инвариантности — уравнения двухжидкостной релятивистской гидродинамики); изучена низкочастотная асимптотика произвольных двухвременных функций Грина в условиях, когда нормальная и сверхтекучая компоненты находятся в движении.

Другим перспективным методом в теории конденсированного состояния и, в частности, в теории сверхтекучих ферми-систем является полуфеноменологический подход, основанный на идеях ферми-жидкости.

Теория нормальной ферми-жидкости для жидкого ^{3}He была развита Л.Д.Ландау [49] в 1956 г. В.П.Силин в 1957 г. развил теорию ферми-жидкости применительно к электронам нормальных металлов [50].

В этих теориях, однако, не учитывалось то, что ферми-жидкость может находиться в сверхтекучем состоянии. Построение теории, описывающей с единой точки зрения как нормальную, так и сверхтекучую ферми-жидкость, выполнено в работе [51], в которой на равных правах вводились как ферми-жидкостные амплитуды нормального состояния, так и ферми-жидкостные амплитуды сверхтекучего состояния. Кроме того, в этой работе показано, что теорию сверхтекучей ферми-жидкости можно строить вообще без явного использования ферми-жидкостных амплитуд, на основе только общего выражения для функционала энергии системы.

Ферми-жидкостный подход показал свою эффективность при рассмотрении термодинамических и кинетических свойств как нормальных систем (электронный газ в металлах, жидкий ^{3}He), так и сверхтекучих систем (сверхпроводящие системы, сверхтекучий ^{3}He). Он позволяет относительно просто рассмотреть фазовые переходы и термодинамические и кинетические свойства магнитоупорядоченных систем, изучить высокочастотные колебания в них. В настоящее время не исключено, что ферми-жидкостный подход может лежать в основе объяснения явления высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) [40], хотя для понимания самого механизма ВТСП необходима микроскопическая теория.

Успехи в развитии ферми-жидкостного подхода и его применений к конденсированным средам показывают, что представляет интерес распространение этого подхода на бозе-системы.

Одной из причин, по которой теория ферми-жидкости не обобщалась на бозе-системы [49], было то, что в области низких температур бозе-система всегда находится в сверхтекучем состоянии, и поэтому необходимо сразу строить теорию сверхтекучей бозе-жидкости.

В этом обзоре будет представлена полуфеноменологическая теория сверхтекучей бозе-жидкости, в основе которой (так же, как в теории ферми-жидкости) лежит задание энергии системы как функционала конденсатных амплитуд квазичастиц, а также нормальных и аномальных корреляционных функций надконденсатных квазичастиц.

Отметим, что в силу своего полуфеноменологического характера эта теория не позволяет сделать какие-либо предсказания о плотности бозе-конденсата или рассчитать распределение частиц по импульсам в сверхтекучем состоянии. Наоборот, знание из эксперимента этих величин позволяет получить информацию о таких феноменологических характеристиках, лежащих в основе теории сверхтекучей бозе-жидкости, как амплитуды взаимодействия квазичастиц. Однако теория сверхтекучей бозе-жидкости в силу простоты лежащих в ее основе принципов позволяет с единой точки зрения рассматривать как кинетические, так и термодинамические свойства сверхтекучих бозе-систем (см. ниже).

Укажем еще на одну актуальную проблему, связанную с физикой сверхтекучести. В последние годы в связи с исследованиями ВТСП были выдвинуты идеи, состоящие в том, что явление куперовского спаривания электронов может сопровождаться одновременной бозе-конденсацией связанных состояний электронов (представляющих собой бозоны), которые могут существовать и выше точки сверхтекучего перехода [41, 43]. Для изучения таких довольно сложных систем адекватным является применение полуфеноменологического подхода, связанного с построением теории взаимодействующих ферми- и бозе-жидкостей (см. в этой связи [42]).

Ниже на основе найденного выражения для энтропии из вариационного принципа будут получены уравнения самосогласования для равновесных корреляционных функций и конденсатных амплитуд квазичастиц бозе-жидкости. Будут сформулированы бесстолкновительные кинетические уравнения для нормальных и аномальных корреляционных функций и конденсатных амплитуд. Также будут рассмотрены приложения теории, связанные с построением уравнений идеальной гидродинамики. Наконец, будет детально прослежена связь развитого формализма с теорией слабонеидеального бозе-газа [5].

1. ЭНТРОПИЯ СВЕРХТЕКУЧЕЙ БОЗЕ-ЖИДКОСТИ

Состояние сверхтекучей бозе-жидкости, в отличие от ферми-жидкости [51], описывается, кроме нормальной $f_{21} = \mathrm{Sp}\,\rho a_1^+ a_2$ $(f^+ = f)$ и аномальных $g_{21} = \mathrm{Sp}\,\rho a_1 a_2$, $g_{21}^+ = \mathrm{Sp}\,\rho a_1^+ a_2^+$ $(\tilde{g} = g)$ бозонных функций распределения, еще и средними значениями операторов рождения a_1^+ и уничтожения a_1: $b_1 = \mathrm{Sp}\,\rho a_1$, $b_1^* = \mathrm{Sp}\,\rho a_1^+$, которые мы будем называть конденсатными амплитудами квазичастиц. Здесь ρ — неравновесный статистический оператор, $1 \equiv \mathrm{p}_1, \mathrm{s}_1$, $2 \equiv \mathrm{p}_2, \mathrm{s}_2$ (p, s — импульсная и спиновая переменные соответственно; тильда означает операцию транспонирования), Sp — след в пространстве состояний всей системы.

Состояние идеального неравновесного бозе-газа квазичастиц при наличии аномальных средних определяется неравновесным статистическим оператором

$$\underline{\varrho}^{(0)} = \exp\{\underline{\Omega} - \hat{\mathfrak{F}}\},$$

$$\hat{\mathfrak{F}} = \sum_{12}(a_1^+ A_{12} a_2 + \frac{1}{2} a_1 B_{12} a_2 + \frac{1}{2} a_1^+ B_{12}^* a_2) + \sum_1 (a_1^+ C_1 + C_1^* a_1) \equiv \tag{1}$$

$$\equiv a^+ A a + \frac{1}{2}(aBa + a^+ B^* a^+) + a^+ C + C^* a,$$

где матрицы A_{12}, B_{12}, B_{12}^* и векторы C_1, C_1^* связаны с нормальными и аномальными функциями распределения f, g, g^+ и конденсатными амплитудами b, b^* соотношениями

$$\mathrm{Sp}\,\underline{\varrho}^{(0)} a_1^+ a_2 = f_{21},\quad \mathrm{Sp}\,\underline{\varrho}^{(0)} a_1 a_2 = g_{21},\quad \mathrm{Sp}\,\underline{\varrho}^{(0)} a_1 = b_1.$$

Так как $\hat{\mathfrak{F}}^+ = \hat{\mathfrak{F}}$, то матрица A эрмитова, $A^+ = A$, а так как $[a_1, a_2] = 0$, то матрицу B можно считать симметричной: $\tilde{B} = B$. Средние $\mathrm{Sp}\,\underline{\varrho}^{(0)} a_1^+ a_2^+ \ldots a_n$ можно вычислять по правилам, аналогичным правилам Вика, в которых в качестве связей используются нормальные f_{21} и аномальные g_{21}, b_1 средние.

Произведем над операторами a, a^+ унитарное преобразование c-числового сдвига:

$$\underline{U} a \underline{U}^+ = a + b,\quad \underline{U} a^+ \underline{U}^+ = a^+ + b^*. \tag{2}$$

Здесь b, b^* являются не вторично квантованными, а обычными функциями в импульсном и спиновом пространствах. Тогда согласно (1)

$$\underline{U}\,\hat{\mathfrak{F}}\,\underline{U}^+ = \hat{F} + R,$$

где

$$\hat{F} = a^+ A a + \frac{1}{2} aBa + \frac{1}{2} a^+ B^* a^+ \tag{3}$$

и

$$R = a(\tilde{A} b^* + Bb + C^*) + a^+(Ab + B^* b^* + C) +$$

$$+ b^* A b + \frac{1}{2} bBb + \frac{1}{2} b^* B^* b^* + b^* C + C^* b.$$

Потребуем, чтобы в R члены с операторами a и a^+ обращались в нуль, т.е. чтобы выполнялись соотношения

$$\tilde{A}b^* + Bb + C^* = 0, \quad Ab + B^*b^* + C = 0, \quad A^+ = A,$$

связывающие между собой функции b, b^*, определяющие унитарное преобразование $\underline{U}$ с функциями C, C^*. Исключая с помощью этих соотношений величины C, C^* из R, получим

$$R = -b^*Ab - \frac{1}{2}bBb - \frac{1}{2}b^*B^*b^*. \tag{4}$$

Таким образом, при преобразовании (2) статистический оператор, согласно формуле (3), приобретает вид

$$\rho^{(0)} \equiv \underline{U}\underline{\rho}^{(0)}\underline{U}^+ = \exp(\Omega - \hat{F}), \quad \Omega = \underline{\Omega} - R, \tag{5}$$

где $\hat{F}$ и R определяются формулами (3) и (4) соответственно ($\rho^{(0)}$ уже не содержит в экспоненте членов, линейных по операторам a, a^+).

Так как оператор $\hat{F}$ (см. (3)) содержит только квадратичные слагаемые по a, a^+, то $\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}a = 0$. Поэтому, согласно (2),

$$\mathrm{Sp}\,\underline{\rho}^{(0)}a_1 = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(a_1 + b_1) = b_1 \neq 0, \tag{6}$$

что свидетельствует о наличии конденсата в сверхтекучей бозе-жидкости, причем величины b, b^* совпадают с конденсатными амплитудами. Выразим теперь функции распределения бозевских квазичастиц через конденсатные амплитуды b, b^* и корреляционные функции f^c, g^c:

$$f_{21} = \mathrm{Sp}\,\underline{\rho}^{(0)}a_1^+a_2 = b_1^*b_2 + f_{21}^c, \quad g_{21} = \mathrm{Sp}\,\underline{\rho}^{(0)}a_1a_2 = b_1b_2 + g_{21}^c, \tag{7}$$

где

$$f_{21}^c = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}a_1^+a_2, \quad g_{21}^c = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}a_1a_2. \tag{8}$$

С помощью соотношений (8) можно величины A, B, B^*, входящие в $\rho^{(0)}$ через $\hat{F}$ (см. (3), (5)), выразить через f^c и g^c, g^{c^+}. Отсюда следует, что $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(f^c, g^c, g^{c^+})$, и, следовательно, энтропия бозе-системы $S = -\mathrm{Sp}\,\underline{\rho}^{(0)}\ln\underline{\rho}^{(0)} = -\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\ln\rho^{(0)}$ также является функционалом только корреляционных функций, но не конденсатных амплитуд частиц b, b^*, $S = S\,(f^c, g^c, g^{c^+})$.

Введем унитарное преобразование Боголюбова для операторов рождения и уничтожения:

$$\hat{U}^+ a_1 \hat{U} = u_{12} a_2 + v_{12} a_2^+ \equiv c_1, \quad \hat{U}^+ a_1^+ \hat{U}^+ = a_2^+ u_{21}^+ + a_2 v_{21}^+ \equiv c_1^+, \tag{9}$$

где c, c^+ — новые бозевские операторы уничтожения и рождения квазичастиц (коммутационные соотношения для операторов c, c^+ остаются бозевскими, по индексу 2 предполагается суммирование). Это преобразование имеет вид

$$\hat{U}^+ \hat{\psi} \hat{U} = U\hat{\psi}, \quad \hat{U}^+ \hat{\psi}^+ \hat{U} = \hat{\psi}^+ U^+, \tag{10}$$

где

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi}^+ = (a^+, a), \quad U = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из коммутационных соотношений для операторов c: $[c, c] = 0$, $[c, c^+] = 1$ и формул (9) следуют условия

$$u\tilde{v} - v\tilde{u} = 0, \quad uu^+ - vv^+ = 1, \tag{12}$$

которые можно записать с помощью матриц (11) и матрицы 2×2 $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в виде

$$UU^{\dagger} = 1, \quad U^{\dagger} \equiv \tau_3 U^+ \tau_3, \quad U^+ = \begin{pmatrix} u^+ & \tilde{v} \\ v^+ & \tilde{u} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где символ «+», как обычно, означает операцию эрмитова сопряжения. Из (13) следует, что

$$U^{\dagger} U = 1. \tag{14}$$

Поэтому условия (12) могут быть записаны иначе, а именно

$$u^+ v - \tilde{v} u^* = 0, \quad u^+ u - \tilde{v} v^* = 1. \tag{15}$$

Определим скалярное произведение в пространстве векторов ψ формулой

$$\langle \psi', \psi \rangle \equiv (\psi', \tau_3 \psi) = (\tau_3 \psi', \psi), \tag{16}$$

где (... , ...) означает обычное скалярное произведение. В этой метрике, являющейся индефинитной для произвольного оператора A, эрмитово-сопряженным является оператор $A^{\dagger} \equiv \tau_3 A^+ \tau_3$, так как согласно (16) выполняется соотношение

$$\langle \psi', A\psi \rangle \equiv \langle A^{\dagger}\psi', \psi \rangle. \tag{17}$$

Для нахождения энтропии неравновесного идеального бозе-газа квазичастиц представим оператор $\hat{F}$ (см. (3)) в виде

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\hat{\psi}^+ Q\hat{\psi} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,A, \quad Q = \begin{pmatrix} A & B^+ \\ B & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

(tr — след по одночастичным состояниям) или

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\hat{\bar{\psi}}\bar{Q}\hat{\psi} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,A, \tag{18}$$

где

$$\hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^+\tau_3, \quad \bar{Q} = \tau_3 Q = \begin{pmatrix} A & B^+ \\ -B & -\tilde{A} \end{pmatrix}$$

(так как $Q = Q^+$, то и $\bar{Q} = \bar{Q}^{\dagger}$, т.е. оператор $\bar{Q}$ — эрмитов в метрике (17)). Легко видеть, что

$$\hat{U}^+\hat{F}\hat{U} = \frac{1}{2}\hat{\bar{\psi}}U^{\dagger}\bar{Q}U\hat{\psi} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,A.$$

Поэтому статистический оператор (5) запишется в виде

$$\rho_0^{(0)} = \hat{U}^+\rho^{(0)}\hat{U} = \exp\{\Omega - \frac{1}{2}\hat{\bar{\psi}}\bar{Q}_0\hat{\psi} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,A\}, \tag{19}$$

где

$$\bar{Q}_0 = U^{\dagger}\bar{Q}U.$$

Так как унитарное преобразование U сохраняет структуру оператора $\bar{Q}$:

$$U^{\dagger}\bar{Q}U = \bar{Q}' = \begin{pmatrix} A' & B'^+ \\ -B' & -\tilde{A}' \end{pmatrix}, \quad A'^+ = A', \quad \tilde{B}' = B',$$

то можно выбрать преобразование U, определяемое (11), так, чтобы оператор $\bar{Q}_0$ стал квазидиагональным ($B_0 = 0$):

$$\bar{Q}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & -\tilde{A}_0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В этом случае

$$\rho_0^{(0)} = \exp\{\Omega - a^+ A_0 a\}. \tag{21}$$

Заметим, что в соответствии с определением (11) и формулами (8)

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\hat{\bar{\psi}} \times \hat{\psi} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(a^+, -a) \times \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}a^+a & -\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}aa \\ \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}a^+a^+ & -\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}aa^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^c & -g^c \\ g^{c+} & -1-\tilde{f}^c \end{pmatrix} \equiv \hat{f}^c,\ f^{c+} = f^c,\ \tilde{g}^c = g^c. \tag{22}$$

Легко видеть, что матрица $\hat{f}$ эрмитова: $\hat{f}^{\dagger} = \hat{f}$, а унитарное преобразование U сохраняет ее структуру:

$$U^{\dagger}\hat{f}U = \begin{pmatrix} f' & -g' \\ g'^+ & -1-\tilde{f}' \end{pmatrix},\ f'^+ = f',\ \ \tilde{g}' = g'. \tag{23}$$

Замечая, что

$$\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\,\hat{\bar{\psi}} \times \hat{\psi} = \mathrm{Sp}\,\rho_0^{(0)}\hat{U}^+\hat{\bar{\psi}}\hat{U} \times \hat{U}^+\hat{\psi}\hat{U} = \ \mathrm{Sp}\,\rho_0^{(0)}\hat{\bar{\psi}}U^{\dagger} \times U\hat{\psi},$$

и используя (21), имеем

$$\hat{f} = U\hat{f}_0 U^{\dagger}, \tag{24}$$

где

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f & -g \\ g^+ & -1-\tilde{f} \end{pmatrix},\ \hat{f}_0 = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & -1-\tilde{f}_0 \end{pmatrix},\ f_0 = (e^{A_0} - 1) \equiv \mathrm{Sp}\,\rho_0^{(0)}a^+a. \tag{25}$$

Так как энтропию $S = -\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\ln\rho^{(0)}$ можно представить в виде $S = -\mathrm{Sp}\,\rho_0^{(0)}\ln\rho_0^{(0)}$, то, согласно (21):

$$S = -\mathrm{tr}\,(f_0\ln f_0 - (1+f_0)\ln(1+f_0)) = -\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}_0\ln\hat{f}_0. \tag{26}$$

(Знак Re (реальная часть) стоит здесь потому, что в матрице (25) имеется знак «−» в правом нижнем углу.) Отсюда, используя (24), имеем

$$S = -\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}^c\ln\hat{f}^c. \tag{27}$$

Это выражение и определяет энтропию сверхтекучей бозе-жидкости в терминах нормальной f^c и аномальной g^c корреляционных функций.

Получим теперь формулу для вариации энтропии в терминах вариаций корреляционных функций. Из формул (26), (20) следует

$$\delta S = \operatorname{tr} \delta f_0 \ln \frac{1 + f_0}{f_0} = \operatorname{tr} \delta f_0 A_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \delta \hat{f}_0 \overline{Q}_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} U \delta \hat{f}_0 U^{\dagger} \overline{Q}.$$

Но, согласно (13),

$$U \delta \hat{f}_0 U^{\dagger} = \delta \hat{f} - \delta U U^{\dagger} \hat{f} + \hat{f} \delta U U^{\dagger} = \delta \hat{f} + [\hat{f}, \delta U U^{\dagger}]$$

(здесь учтено, что $U \delta U^{\dagger} = -\delta U U^{\dagger}$). Так как $[\hat{f}, \overline{Q}] = 0$, то

$$\delta S = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \delta \hat{f} \overline{Q}. \tag{28}$$

Замечая, что $\delta \hat{f} = \begin{pmatrix} \delta f & -\delta g \\ \delta g^{+} & -\delta \tilde{f} \end{pmatrix}$ и используя (28), найдем связь между энтропией и элементами матрицы $\overline{Q}$ (см. (18)):

$$\frac{\partial S}{\partial f_{21}} = A_{12}, \quad \frac{\partial S}{\partial g_{21}} = \frac{1}{2} B_{12}, \quad \frac{\partial S}{\partial g_{21}^{+}} = \frac{1}{2} B_{12}^{+}.$$

2. ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ И ЕГО СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Будем задавать плотность энергии бозе-системы в виде функционала корреляционных функций f^c, g^c и конденсатных амплитуд b (см. (7)):

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}; f^c, g^c, b) \equiv \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}^c, \beta), \tag{29}$$

где

$$\hat{f}^c = \begin{pmatrix} f^c & -g^c \\ g^{c+} & -1 - \tilde{f}^c \end{pmatrix}, \quad \hat{f}^{c\dagger} = \hat{f}^c, \quad \beta = \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}.$$

Полная энергия бозе-жидкости определяется формулой

$$E(\hat{f}^c, \beta) = \int_V d^3 x \, \mathcal{E}(\mathbf{x}; \hat{f}^c, \beta)$$

(V — объем системы).

Сформулируем свойства симметрии функционала $\mathcal{E}(x; \hat{f}^c, \beta)$ (а следовательно, и $E(\hat{f}^c, \beta)$) относительно фазовых и спиновых преобразований, а также относительно преобразований пространственных трансляций.

Среднее значение некоторой физической величины a, относящейся к бозевской квазичастице, представим в виде

$$a(\hat{f}^c, \beta) \equiv \operatorname{tr} fa = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}^c\hat{a} + \frac{1}{2}\langle\beta, \hat{a}\beta\rangle, \tag{30}$$

где

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\tilde{a}\end{pmatrix}, \quad \langle\beta, \hat{a}\beta\rangle \equiv (\beta, \tau_3\hat{a}\beta)$$

(мы пренебрегаем слагаемым $\operatorname{tr} a$, не зависящим от $\hat{f}^c$ и β, которое не дает вклада в изменение величины $a(\hat{f}^c, \beta)$). Так как операторами числа частиц, спина и импульса бозона являются операторы 1, s_i, $\underline{p}_i$, то соответствующие операторы для бозе-жидкости имеют вид

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \hat{s}_i = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & -\tilde{s}_i\end{pmatrix}, \quad \hat{p}_i = \begin{pmatrix} \underline{p}_i & 0 \\ 0 & -\underline{p}_i\end{pmatrix}.$$

Оператор τ_3 представляет собой генератор фазового унитарного преобразования:

$$U_\varphi = \exp(i\varphi\tau_3),$$

$\hat{s}_i$ — генератор спиновых вращений:

$$U_\omega = \exp(\mathrm{i}\,\omega_k\hat{s}_k),$$

наконец, оператор $\hat{p}_i$ — генератор пространственных трансляций:

$$U_y = \exp(\mathrm{i}y_k\hat{p}_k).$$

В соответствии с (23) при этих преобразованиях величины f^c, g^c, b преобразуются по формулам:

$$f^c \to f^c_\varphi = f^c, \quad g^c \to g^c_\varphi = e^{2\mathrm{i}\varphi} g^c, \quad b \to b_\varphi = e^{\mathrm{i}\varphi} b,$$

$$f^c \to f^c_\omega = e^{\mathrm{i}\omega_k s_k} f^c e^{-\mathrm{i}\omega_k s_k}, \quad g^c \to g^c_\omega = e^{\mathrm{i}\omega_k s_k} g^c e^{\mathrm{i}\omega_k \tilde{s}_k}, \quad b \to b_\omega = e^{\mathrm{i}\omega_k s_k} b,$$

$$f^c \to f^c_y = e^{\mathrm{i}y_k\underline{p}_k} f^c e^{-\mathrm{i}y_k\underline{p}_k}, \quad g^c \to g^c_y = e^{\mathrm{i}y_k\underline{p}_k} g^c e^{\mathrm{i}y_k\tilde{\underline{p}}_k}, \quad b \to b_y = e^{\mathrm{i}y_k\underline{p}_k} b. \tag{31}$$

Будем предполагать, что функционал $\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$ всегда инвариантен относительно фазовых преобразований:

$$\mathcal{E}(\mathrm{x}; U_\varphi \hat{f}^c U^\dagger_\varphi, U_\varphi\beta) = \mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta). \tag{32}$$

В пренебрежении релятивистскими взаимодействиями функционал $\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$ инвариантен относительно спиновых вращений:

$$\mathcal{E}\,(\mathrm{x}; U_\omega \hat{f}^c, U_\omega^+, U_\omega \beta) = \mathcal{E}\,(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta). \tag{33}$$

Наконец, в отсутствие внешних неоднородных полей функционал инвариантен относительно пространственных трансляций:

$$\mathcal{E}\,(\mathrm{x} - \mathrm{y}; U_y \hat{f}^c U_y^+, U_y \beta) = \mathcal{E}\,(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta). \tag{34}$$

Получим теперь инфинитезимальную форму соотношений (32)—(34). Для этого заметим, что вариацию функционала $\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$ можно представить в виде

$$\delta\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) = \delta_{f^c}\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) + \delta_\beta\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta),$$

$$\delta_{f^c}\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\delta\hat{f}^c\,\hat{\varepsilon}\,(\mathrm{x}), \quad \delta_\beta\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) = \langle\, \eta(\mathrm{x}), \delta\beta\,\rangle, \tag{35}$$

где

$$\hat{\varepsilon}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathrm{x}) & \Delta(\mathrm{x}) \\ -\Delta^+(\mathrm{x}) & -\tilde{\varepsilon}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}, \quad \hat{\eta}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \eta^*(\mathrm{x}) \\ -\eta(\mathrm{x}) \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12}(\mathrm{x}) = \frac{\partial\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)}{\partial f_{21}^c}, \quad \Delta_{12}(x) = 2\frac{\partial\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)}{\partial g_{21}^{c*}}, \quad \eta_1(\mathrm{x}) = \frac{\partial\mathcal{E}\,(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)}{\partial b_1}. \tag{36}$$

Оператор $\hat{\varepsilon}(\mathrm{x})$ мы будем называть оператором плотности энергии квазичастицы (см. (44)).

Варьируя соотношения (32)—(34) по φ, ω, y и используя (35), получим в случае фазовых преобразований:

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{Sp}\,[\tau_3, \hat{f}^c\,]\,\hat{\varepsilon}(\mathrm{x}) + \mathrm{i}\,\langle\, \hat{\eta}(\mathrm{x}), \tau_3\beta\,\rangle = 0, \tag{37}$$

в случае спиновых вращений:

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{Sp}\,[\hat{\varepsilon}(\mathrm{x}), \hat{s}_k]\,\hat{f}^c + \mathrm{i}\langle\, \hat{\eta}(\mathrm{x}), \hat{s}_k\beta\,\rangle = 0 \tag{38}$$

и в случае пространственных трансляций:

$$\frac{\partial\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)}{\partial x_k} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{Sp}\,\hat{f}^c[\hat{\varepsilon}(\mathrm{x}), \hat{p}_k] + \mathrm{i}\,\langle\, \hat{\eta}(\mathrm{x}), \hat{p}_k\beta\,\rangle. \tag{39}$$

Эти формулы мы используем далее при построении выражений для плотностей потоков соответствующих физических величин в терминах $\hat{f}^c$ и β.

Варьируя соотношения (32)—(34) по оператору $\hat{f}^c$ и величине β и используя (36), найдем трансформационные свойства величин $\hat{\varepsilon}(\mathrm{x})$ и $\hat{\eta}(\mathrm{x})$:

$$U_\varphi^\dagger \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; U_\varphi \hat{f}^c U_\varphi^\dagger, U_\varphi \beta) U_\varphi = \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta),$$

$$U_\varphi^\dagger \hat{\eta}(\mathrm{x}; U_\varphi \hat{f}^c U_\varphi^\dagger, U_\varphi \beta) = \hat{\eta}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta),$$

$$U_\omega^\dagger \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; U_\omega \hat{f}^c U_\omega^\dagger, U_\omega \beta) U_\omega = \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta), \tag{40}$$

$$U_\omega^\dagger \hat{\eta}(\mathrm{x}; U_\omega \hat{f}^c U_\omega^\dagger, U_\omega \beta) = \hat{\eta}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta),$$

$$U_\mathrm{y}^\dagger \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}-\mathrm{y}; U_\mathrm{y} \hat{f}^c U_\mathrm{y}^\dagger, U_\mathrm{y} \beta) U_\mathrm{y} = \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta),$$

$$U_\mathrm{y}^\dagger \hat{\eta}(\mathrm{x}-\mathrm{y}; U_\mathrm{y} \hat{f}^c U_\mathrm{y}^\dagger, U_\mathrm{y} \beta) = \hat{\eta}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta).$$

Рассмотрим, наконец, вопрос об инвариантности теории по отношению к преобразованиям Галилея. Будем считать, что функционал плотности энергии инвариантен относительно преобразования Галилея, если выполняется соотношение

$$\mathcal{E}(\mathrm{x}; U_\mathrm{v} \hat{f}^c U_\mathrm{v}^\dagger, U_\mathrm{v} \beta) =$$

$$= \mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) + v_i \pi_i(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) + \frac{mv^2}{2} \rho(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta), \tag{41}$$

где унитарный оператор U_v определяется формулой

$$U_\mathrm{v} = \exp \mathrm{i} m v_i \hat{x}_i$$

и $\pi_i(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$, $\rho(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$ (см. (51), (55)) — средние значения плотности импульса и плотности числа частиц (см. (30). Варьируя это соотношение по v_i, получим

$$\frac{1}{2} \mathrm{i}\, \mathrm{Sp} \hat{f}^c [\hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta), \hat{x}_i] + \langle \hat{\eta}(\mathrm{x}), \hat{x}_i \beta \rangle = \frac{1}{m} \pi_i(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta).$$

Варьируя же соотношение (41) по $\hat{f}^c$ и β, найдем трансформационные свойства величин $\hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$, $\hat{\eta}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$ при преобразованиях Галилея:

$$U_\mathrm{v}^\dagger \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; U_\mathrm{v} \hat{f}^c U_\mathrm{v}^\dagger, U_\mathrm{v} \beta) U_\mathrm{v} = \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) + v_i \hat{\pi}_i(\mathrm{x}) + \frac{mv^2}{2} \hat{\rho}(\mathrm{x}),$$

$$U_\mathrm{v}^\dagger \hat{\eta}(\mathrm{x}; U_\mathrm{v} \hat{f}^c U_\mathrm{v}^\dagger, U_\mathrm{v} \beta) = \hat{\eta}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) + v_i \hat{\pi}_i(\mathrm{x}) \beta + \frac{mv^2}{2} \hat{\rho}(\mathrm{x}) \beta.$$

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим состояние статистического равновесия сверхтекучей бозе-жидкости. Равновесный статистический оператор $\hat{f}^c$, а также аномальные средние β, характеризующие наличие бозе-конденсата (см. (8), (6)), будем находить из требования максимума энтропии при фиксированных интегралах движения (полной энергии $E = E(\hat{f}^c, \beta)$, полного импульса $\mathcal{P}_i = \operatorname{tr} f p_i$, числа частиц $N = \operatorname{tr} f$). Вводя множители Лагранжа Y, соответствующие этим величинам, придем к задаче нахождения безусловного экстремума (минимума) функционала Ω:

$$\Omega = -S(\hat{f}^c) + Y_0 E(\hat{f}^c, \beta) + Y_i \mathcal{P}_i + Y_4 N. \tag{42}$$

Считая вариации $\delta\hat{f}^c$, $\delta\beta$ независимыми и используя (28) и (8), найдем вариацию потенциала Ω:

$$\delta\Omega = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\delta\hat{f}^c(-\overline{Q} + Y_i\hat{p}_i + Y_4\hat{\tau}_3 + Y_0\hat{\varepsilon}) + $$
$$+ \langle \delta\beta,\ Y_0\hat{\eta} + (Y_i\hat{p}_i + Y_4\hat{\tau}_3)\beta \rangle, \tag{43}$$

где

$$\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta) = \int_V d^3x\, \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ -\Delta^+ & -\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \hat{\eta} = \int_V d^3x\, \hat{\eta}(\mathrm{x}),$$

$$\Delta(\hat{f}^c, \beta) = \int_V d^3x\, \Delta(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta), \quad \varepsilon(\hat{f}^c, \beta) = \int_V d^3x\, \varepsilon(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$$

(см. (36)). Здесь $\hat{\varepsilon}$ — оператор энергии надконденсатных квазичастиц, являющийся эрмитовым в индефинитной метрике (17): $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{\dagger}$. Полагая $\delta\Omega = 0$, получим

$$\overline{Q} = Y_0\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta) + Y_i\hat{p}_i + Y_4\hat{\tau}_3,$$
$$Y_0\hat{\eta} + (Y_i\hat{p}_i + Y_4\hat{\tau}_3)\beta = 0.$$

Таким образом, согласно (30), мы приходим к системе нелинейных уравнений самосогласования

$$\hat{f}^c = \{\exp(Y_0\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta) + Y_i\hat{p}_i + Y_4\hat{\tau}_3) - 1\}^{-1},$$
$$Y_0\hat{\eta} + (Y_i\hat{p}_i + Y_4\hat{\tau}_3)\beta = 0. \tag{44}$$

Здесь $Y_0^{-1} = T$ представляет собой температуру системы, а $-Y_0^{-1}Y_4 = \mu$ и $-Y_0^{-1}Y_i = \nu_i$ — химический потенциал и скорость нормальной компоненты сверхтекучей жидкости соответственно.

Как известно [52], для пространственно-однородных состояний бозе-жидкости при наличии движущегося с импульсом q конденсата справедливы соотношения

$$f^c_{\mathrm{p,p'}} = f^c_{\mathrm{p}}\,\delta_{\mathrm{p,p'}}, \quad g^c_{\mathrm{pp'}} = g^c_{\mathrm{p}}\delta_{\mathrm{p,p'-q}}, \quad b_{\mathrm{p}} = b_{\mathrm{q}}\delta_{\mathrm{pq}},$$

которые в терминах величин $\hat{f}^c$ и β можно переписать в виде

$$[\hat{p}_i - q_i\hat{\tau}_3, \hat{f}^c] = 0, \quad (\hat{p}_i - q_i\hat{\tau}_3)\,\beta = 0 \tag{45}$$

(мы будем называть формулы (45) условием пространственной однородности бозе-жидкости).

Для равновесных пространственно-однородных состояний бозе-жидкости решение уравнения (44) нужно искать совместно с решением уравнений (45) (в силу (34) уравнения (44), (45) совместны, если отсутствуют внешние неоднородные поля). Таким образом, новый термодинамический параметр q (сверхтекучий импульс) вводится в теорию посредством отбора решений уравнений (44), удовлетворяющих условиям симметрии (34). Легко видеть, что существуют решения $g^c = b = 0$. Эти решения соответствуют нормальной бозе-жидкости.

4. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БОЗЕ-ЖИДКОСТИ

Перейдем к рассмотрению кинетических уравнений для $\hat{f}^c$ и β. В феноменологическом подходе к теории сверхтекучей бозе-жидкости, интерпретируя $\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta)$ как энергию бозевской надконденсатной квазичастицы, будем считать, что кинетические уравнения для $\hat{f}^c$ и β в пренебрежении столкновениями между квазичастицами имеют вид

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \hat{f}^c}{\partial t} = [\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta), \hat{f}^c], \quad \mathrm{i}\,\frac{\partial \beta}{\partial t} = \hat{\eta}(\hat{f}^c, \beta). \tag{46}$$

В микроскопической теории второму из уравнений (46) соответствует уравнение $\mathrm{i}\,\dfrac{\partial a}{\partial t} = [a, \mathcal{H}] = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial a^+}$, где $\mathcal{H}$ — гамильтониан бозе-системы, a — оператор уничтожения бозе-частицы. Покажем, как получаются кинетические уравнения (46) бозе-жидкости в теории возмущений.

Кинетический этап эволюции описывается в главном приближении теории возмущений по взаимодействию между квазичастицами и статистическим оператором $\underline{\rho}^{(0)}(f^c, g^c, b) = \underline{U}^+(b)\rho^{(0)}(f^c, g^c)\underline{U}(b)$ (см. (5)), который является функционалом корреляционных функций f^c, g^c, g^{+c} и величин b, b^*. Из уравнения движения для статистического оператора $\mathrm{i}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho]$ имеем в главном приближении по взаимодействию:

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial f_{21}}{\partial t} = \mathrm{Sp}\,\underline{\rho}^{(0)}\,[\mathcal{H}, a_1^+a_2] = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\underline{U}(b)[\mathcal{H}, a_1^+a_2]\underline{U}(b)^+ =$$

$$= \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}[\mathcal{H}(b), a_1^+a_2] + b_1^*\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}[\mathcal{H}(b), a_2] + b_2\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}[\mathcal{H}(b), a_1^+],$$

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial g_{21}}{\partial t} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}[\mathcal{H}(b), a_1a_2] + b_1\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}[\mathcal{H}(b), a_2] + b_2\,\mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}[\mathcal{H}(b), a_1],$$

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial b_1}{\partial t} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}[\mathcal{H}(b), a_1], \quad \mathrm{Sp}\,\underline{\rho}^{(0)}a_1 = b_1, \tag{47}$$

где $\mathcal{H}(b) = \underline{U}(b)\mathcal{H}\underline{U}(b)^+$, $\mathcal{H}$ — гамильтониан системы. Согласно (7) имеем

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial f_{21}}{\partial t} = \mathrm{i}\frac{\partial f_{21}^c}{\partial t} + \mathrm{i}\,\frac{\partial b_1^*}{\partial t}b_2 + \mathrm{i}b_1^*\,\frac{\partial b_2}{\partial t},$$

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial g_{21}}{\partial t} = \mathrm{i}\frac{\partial g_{21}^c}{\partial t} + \mathrm{i}\,\frac{\partial b_1}{\partial t}b_2 + \mathrm{i}\,\frac{\partial b_2}{\partial t}b_1.$$

Поэтому уравнения (47) можно представить в виде

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial f^c}{\partial t} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\,[\mathcal{H}(b), a^+a], \quad \mathrm{i}\,\frac{\partial g^c}{\partial t} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\,[\mathcal{H}(b), aa],$$

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial b}{\partial t} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\,[\mathcal{H}(b), a], \quad \mathrm{i}\,\frac{\partial b^*}{\partial t} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}\,[\mathcal{H}(b), a^+]. \tag{48}$$

Введем функционал энергии

$$E(\hat{f}^c, \beta) = \mathrm{Sp}\,\underline{\rho}^{(0)}(\hat{f}^c, \beta)\mathcal{H} = \mathrm{Sp}\,\rho^{(0)}(\hat{f}^c)\mathcal{H}(b)$$

и величины

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial f_{21}^c}, \quad \Delta_{12} = 2\frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial g_{21}^{c*}}, \quad \eta_1 = \frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial b_1^*}.$$

Вычисляя средние (в состоянии $\rho^{(0)}(\hat{f}^c)$), стоящие справа в уравнениях (48), по правилам Вика, в которых в качестве связей фигурируют нормальные и аномальные средние:

$$\underbrace{a_1^+ a_2} = \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\hat{f}^c) a_1^+ a_2 = f_{21}^c,$$
$$\underbrace{a_1 a_2} = \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\hat{f}^c) a_1 a_2 = g_{21}^c, \quad \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\hat{f}^c) a_1 = 0,$$

придем к кинетическим уравнениям (см. аналогичный вывод в случае ферми-жидкости [51])

$$\mathrm{i}\frac{\partial f^c}{\partial t} = [\varepsilon, f^c] + \Delta g^{c+} - g^c\Delta^+, \quad \mathrm{i}\frac{\partial g^c}{\partial t} = \varepsilon g^c + g^c\tilde{\varepsilon} + f^c\Delta + \Delta\tilde{f}^c + \Delta,$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial b_1}{\partial t} = \eta_1 \equiv \frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial b_1^*}, \quad \mathrm{i}\frac{\partial b_1^*}{\partial t} = -\eta_1^* = -\frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial b_1},$$

которые являются покомпонентным представлением уравнений (46).

Используя кинетические уравнения (46) и свойства симметрии функционала энергии $\mathcal{E}$, сформулируем законы сохранения и определим плотности потоков сохраняющихся физических величин. При этом будем использовать следующую лемму.

Лемма. Временную производную среднего значения плотности физической величины a, $a(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) = \operatorname{tr} fa = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}^c\hat{a} + \frac{1}{2}\langle\beta, \hat{a}\beta\rangle$, можно представить в виде

$$\dot{a}(\mathrm{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} a(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta) = -\frac{\partial a_k(\mathrm{x})}{\partial x_k} + \frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}^c[\hat{\varepsilon}(\mathrm{x}), \hat{A}] + \mathrm{i}\langle\hat{\eta}(\mathrm{x}), \hat{A}\beta\rangle, \tag{49}$$

где

$$a_k(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}^c\int d^3x'x_k'\int_0^1 d\xi\,[\hat{\varepsilon}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{a}(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}')] +$$
$$+ \mathrm{i}\int d^3x'x_k'\int_0^1 d\xi\,\langle\eta(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{a}(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}')\beta\rangle, \tag{50}$$

$$\hat{A} = \int d^3x\hat{a}(\mathrm{x}).$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из кинетических уравнений (46) (см. также [51,52]).

Полагая в формулах (49), (50) $\hat{a}(\mathrm{x}) = \hat{\rho}(\mathrm{x})$, с помощью соотношения (37), следующего из фазовой инвариантности $\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$, находим закон сохранения плотности числа частиц $\rho(\mathrm{x}) \equiv \rho(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$:

$$\frac{\partial \rho(\mathrm{x})}{\partial t} = -\frac{\partial j_k(\mathrm{x})}{\partial x_k}, \quad \hat{\rho}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\rho}(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & -\tilde{\underline{\rho}}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}, \quad \underline{\rho}(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x} - \underline{\mathrm{x}}), \tag{51}$$

где $\underline{\mathrm{x}}$ — оператор координаты и

$$j_k(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{i}}{2} \mathrm{Sp}\, \hat{f}^c \int d^3x' x_k' \int_0^1 d\xi\, [\hat{\varepsilon}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{\rho}(\mathrm{x} + \xi \mathrm{x}')] +$$

$$+ \mathrm{i} \int d^3x' x_k' \int_0^1 d\xi\, \langle \eta(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \rho(\mathrm{x} + \xi \mathrm{x}')\beta \rangle \tag{52}$$

— плотность потока числа частиц.

Полагая в формулах (49), (50) $\hat{a}(\mathrm{x}) = \hat{s}_i(\mathrm{x})$ и используя (38), находим закон сохранения плотности спина $s_i(\mathrm{x}) \equiv s_i(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$:

$$\frac{\partial s_i(\mathrm{x})}{\partial t} = -\frac{\partial j_{ik}(\mathrm{x})}{\partial x_k}, \quad \hat{s}_i(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} s_i(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & -\tilde{s}_i(\mathrm{x}) \end{pmatrix}, \tag{53}$$

где

$$j_{ik}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int d^3x' x_k' \int_0^1 d\xi\, \mathrm{Sp}\, \hat{f}^c [\hat{\varepsilon}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{s}_i(\mathrm{x} + \xi \mathrm{x}')] +$$

$$+ \mathrm{i} \int d^3x' x_k' \int_0^1 d\xi\, \langle \eta(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{s}_i(\mathrm{x} + \xi \mathrm{x}')\beta \rangle \tag{54}$$

— плотность потока спина.

Наконец, полагая в формулах (49), (50) $\hat{a}(\mathrm{x}) = \hat{\pi}_i(\mathrm{x})$ и используя соотношение (39), находим закон сохранения плотности импульса $\pi_i(\mathrm{x}) \equiv \pi_i(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)$:

$$\frac{\partial \pi_i(\mathrm{x})}{\partial t} = -\frac{\partial t_{ik}(\mathrm{x})}{\partial x_k},$$

$$\hat{\pi}_i(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \underline{\pi}_i(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & -\tilde{\underline{\pi}}_i(\mathrm{x}) \end{pmatrix}, \quad \underline{\pi}_i(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\{\underline{p}_i, \delta(\mathrm{x} - \underline{\mathrm{x}})\}, \tag{55}$$

где $\underline{p}_i$ — оператор импульса и

$$t_{ik}(\mathrm{x}) = -\mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)\delta_{ik} +$$
$$+ \frac{\mathrm{i}}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \, \mathrm{Sp}\, \hat{f}^c [\hat{\varepsilon}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{\pi}_i(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}')] +$$
$$+ \mathrm{i} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \, \langle \hat{\eta}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{\pi}_i(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}')\beta \rangle \tag{56}$$

— тензор натяжений.

Сформулируем теперь закон сохранения энергии. Согласно (35) из кинетических уравнений (46) имеем

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}}{2} \mathrm{Sp}\, \hat{f}^c [\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta), \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)] - \mathrm{i} \langle \hat{\eta}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta), \hat{\eta}(\hat{f}^c, \beta) \rangle.$$

Легко видеть, что

$$\langle \hat{\eta}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta), \hat{\eta}(\hat{f}^c, \beta) \rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \, \langle \hat{\eta}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'; \hat{f}^c, \beta), \hat{\eta}(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}'; \hat{f}^c, \beta) \rangle,$$

$$\mathrm{i}[\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta), \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)] = \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [\hat{\varepsilon}(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}'), \hat{\varepsilon}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}')].$$

Поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathrm{x}; \hat{f}^c, \beta)}{\partial t} = -\frac{\partial w_k}{\partial x_k}, \tag{57}$$

где плотность потока энергии определяется формулой

$$w_k = \frac{\mathrm{i}}{4} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \, \mathrm{Sp}\, \hat{f}^c [\hat{\varepsilon}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{\varepsilon}(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}')] +$$
$$+ \frac{1}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi \, \langle \hat{\eta}(\mathrm{x} - (1-\xi)\mathrm{x}'), \hat{\eta}(\mathrm{x} + \xi\mathrm{x}') \rangle. \tag{58}$$

5. ТЕРМОДИНАМИКА БОЗЕ-ЖИДКОСТИ

Рассмотрим плотность термодинамического потенциала для равновесного пространственно-однородного состояния сверхтекучей бозе-жидкости $\hat{f}^c = \hat{f}^c_{\text{eq}}$, $\beta = \beta_{\text{eq}}$. Условие пространственной однородности (45) позволяет представить $\omega \equiv \frac{\Omega}{V}$ в виде (ср. с (42)):

$$\omega(\hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}) =$$
$$= -\frac{S(\hat{f}^c_{\text{eq}})}{V} + Y_0 \mathcal{E}(0; \hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}) + Y_i \pi_i(0; \hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}) + Y_4 \rho(0; \hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}), \quad (59)$$

где $\mathcal{E}(0; \hat{f}^c, \beta)$ — плотность энергии бозе-жидкости и π_i, ρ — плотность импульса и числа частиц соответственно. В силу условия (45) плотность термодинамического потенциала зависит не только от параметров Y, но и от сверхтекучего импульса q_i:

$$\omega(\hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}) = \omega(Y, \mathrm{q}). \quad (60)$$

Существенно, что ω зависит от Y как явно, так и через $\hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}$. В силу вариационного принципа $\delta_{f^c}\omega(\hat{f}^c, \beta) = \delta_\beta \omega(\hat{f}^c, \beta) = 0$ при $\hat{f}^c = \hat{f}^c_{\text{eq}}$, $\beta = \beta_{\text{eq}}$. Поэтому дифференцирование термодинамического потенциала (59) по Y фактически происходит только по величинам, явно входящим в выражение (59). В связи с эти имеем

$$\frac{\partial \omega(Y, q)}{\partial Y_0} = \mathcal{E}, \quad \frac{\partial \omega(Y, q)}{\partial Y_i} = \pi_i, \quad \frac{\partial \omega(Y, \mathrm{q})}{\partial Y_4} = \rho. \quad (61)$$

Для нахождения производной $\frac{\partial \omega(Y, \mathrm{q})}{\partial q_i}$ введем оператор

$$U_{\mathrm{g}} = \exp(-\mathrm{i} g_i \hat{x}_i), \quad \hat{x}_i = \begin{pmatrix} \underline{x}_i & 0 \\ 0 & -\underline{\tilde{x}}_i \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Формулу (59), справедливую для пространственно-однородных состояний (45), перепишем в виде

$$\omega(Y, \mathrm{q} + \mathrm{g}) = \frac{1}{V} \mathrm{Re}\, \mathrm{Sp}\, \hat{f}^c_{\mathrm{g}} \ln \hat{f}^c_{\mathrm{g}} + Y_0 \mathcal{E}(U^+_{\mathrm{g}} \hat{f}^c_{\mathrm{g}} U_{\mathrm{g}}, U^+_{\mathrm{g}} \beta_{\mathrm{g}}) +$$
$$+ \frac{Y_i}{2} (\mathrm{Sp}\, \hat{f}^c_{\mathrm{g}} U_{\mathrm{g}} \hat{\pi}_i U^+_{\mathrm{g}} + \langle \beta_{\mathrm{g}}, U_{\mathrm{g}} \hat{\pi}_i U^+_{\mathrm{g}} \beta_{\mathrm{g}} \rangle) +$$
$$+ \frac{Y_4}{2} (\mathrm{Sp}\, \hat{f}^c_{\mathrm{g}} U_{\mathrm{g}} \hat{\rho} U^+_{\mathrm{g}} + \langle \beta_{\mathrm{g}}, U_{\mathrm{g}} \hat{\rho} U^+_{\mathrm{g}} \beta_{\mathrm{g}} \rangle), \quad (63)$$

где

$$\hat{f}^c_{\mathbf{g}} \equiv U_{\mathbf{g}} \hat{f}^c(Y, \mathbf{q} + \mathbf{g}) U^{\dagger}_{\mathbf{g}}, \ \beta_{\mathbf{g}} \equiv U_{\mathbf{g}} \beta(Y, \mathbf{q} + \mathbf{g}), \ \hat{f}^c(Y, \mathbf{q}) \equiv \hat{f}^c_{\text{eq}}, \ \beta(Y, \mathbf{q}) \equiv \beta_{\text{eq}}.$$

Легко видеть, что оператор $\hat{f}^c_{\mathbf{g}}$ и волновая функция $\beta_{\mathbf{g}}$ принадлежат классу пространственно-однородных величин (45) при любом $\mathbf{g}$, т.е.

$$[\hat{f}^c_{\mathbf{g}}, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0, \quad (\hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3)\beta_{\mathbf{g}} = 0.$$

Поэтому, дифференцируя выражение (63) по g_i и полагая $g_i = 0$, с учетом вариационного принципа

$$\delta_f \omega(\hat{f}^c, \beta) = \delta_\beta \omega(\hat{f}^c, \beta) = 0, \quad \hat{f}^c = \hat{f}^c_{\text{eq}}, \quad \beta = \beta_{\text{eq}}$$

имеем

$$\frac{\partial \omega(Y, \mathbf{q})}{\partial q_i} = Y_0\Big(\frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Sp} \hat{f}^c_{\text{eq}} [\hat{\varepsilon}(0; \hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}), \hat{x}_i] + \mathrm{i}\langle \eta(0; \hat{f}^c_{\text{eq}}, \beta_{\text{eq}}), \hat{x}_i \beta_{\text{eq}} \rangle\Big) +$$

$$+ \ Y_k \frac{\mathrm{i}}{2} \big(\operatorname{Sp} \hat{f}^c_{\text{eq}} [\hat{\pi}_k, \hat{x}_i] + \langle \beta_{\text{eq}}, [\hat{\pi}_k, \hat{x}_i] \beta_{\text{eq}} \rangle\big).$$

Заметим, что из соотношений (40) инвариантности относительно фазовых преобразований и преобразований трансляции для квазичастичных энергий следует

$$\hat{\varepsilon}_q(\mathbf{x}; e^{-\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}} \hat{f}^c_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}}, e^{-\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}} \beta_{\mathbf{q}}) = e^{-\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}} \hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}(0; \hat{f}^c_{\mathbf{q}}, \beta_{\mathbf{q}}) e^{\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}},$$

$$\eta_q(\mathbf{x}; e^{-\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}} \hat{f}^c_{\mathbf{q}} e^{\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}}, e^{-\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}} \beta_{\mathbf{q}}) = e^{-\mathrm{i}\hat{\mathbf{p}}\mathbf{x}} \eta_{\mathbf{q}}(0; \hat{f}^c_{\mathbf{q}}, \beta_{\mathbf{q}})$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \hat{f}^c_q, \beta_q) \equiv e^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}; \hat{f}^c, \beta) e^{\mathrm{i}\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}}, \quad \eta(\mathbf{x}; \hat{f}^c_{\mathbf{q}}, \beta_{\mathbf{q}}) \equiv e^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}} \eta(\mathbf{x}; \hat{f}^c, \beta),$$

$$\hat{f}^c_{\mathbf{q}} \equiv e^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}} \hat{f}^c e^{\mathrm{i}\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}}, \quad \beta_q \equiv e^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}} \beta.$$

С помощью этих формул легко получить, согласно (52), следующее выражение для плотности тока в пространственно-однородном состоянии (45):

$$j_k = \frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Sp} \hat{f}^c [\hat{\varepsilon}(0; \hat{f}^c, \beta), \hat{x}_k] + \mathrm{i}\langle \eta(0; f^c, \beta), \hat{x}_k \beta \rangle. \tag{64}$$

Так как $[\hat{\pi}_k(0), \hat{x}_i] = -\mathrm{i}\delta_{ki} \hat{\rho}(0)$, то

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \big(\operatorname{Sp} \hat{f}^c [\hat{\pi}_k(0), \hat{x}_i] + \langle \beta, [\hat{\pi}_k(0), \hat{x}_i] \beta \rangle\big) = \rho, \tag{65}$$

где ρ — плотность числа частиц. Поэтому

$$\frac{\partial\omega(Y, \mathbf{q})}{\partial q_i} = Y_0(j_i + \frac{Y_i}{Y_0}\rho). \tag{66}$$

Таким образом, второй закон термодинамики для обратимых процессов в сверхтекучей бозе-жидкости формируется в том же виде, что и для сверхтекучей ферми-жидкости [51]:

$$d\omega = \mathcal{E}dY_0 + \pi_i dY_i + \rho dY_4 + Y_0(j_i + \frac{Y_i}{Y_0}\rho)dq_i . \tag{67}$$

Замечая, что плотность энтропии $s = -\omega + Y_0\mathcal{E} + Y_i\pi_i + Y_4\rho$, найдем выражение для дифференциала плотности энергии $\mathcal{E} = \mathcal{E}(s, \pi, \rho, \mathbf{q})$:

$$d\mathcal{E} = Y_0^{-1}ds - Y_i d\pi_i + Y_0 (j_i + \frac{Y_i}{Y_0}\rho)dq_i .$$

6. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И УРАВНЕНИЙ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Как и в теории сверхтекучей ферми-жидкости [51], произвольная физическая величина для бозе-жидкости

$$A = \begin{pmatrix} a & -\underline{a} \\ \underline{a}^+ & -\tilde{a} \end{pmatrix}, \quad a = a^+, \quad \underline{a} = \tilde{\underline{a}} \tag{68}$$

преобразуется под действием преобразования U (см. (11)) по формуле

$$A \to A' = U^{\ddagger}AU, \quad A' = \begin{pmatrix} a' & -\underline{a}' \\ \underline{a}'^+ & -\tilde{a}' \end{pmatrix}, \tag{69}$$

где

$$a' = u^+au - \tilde{v}\underline{a}^+u - u^+\underline{a}v^* + \tilde{v}\tilde{a}v^* \equiv a'^+ ,$$

$$\underline{a}' = -u^+av + \tilde{v}\underline{a}^+v + u^+\underline{a}u^* - \tilde{v}\tilde{a}u^* \equiv \tilde{\underline{a}}' . \tag{70}$$

С помощью преобразования U матрицу A можно привести к квазидиагональной форме

$$A' = U^{\ddagger}AU = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & -\tilde{a}' \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти диагонализирующее преобразование U, приравняем выражение (70) для $\underline{a}'$ нулю:

$$u^{+}av - \tilde{v}\underline{a}^{+}v - u^{+}\underline{a}u^{*} + \tilde{v}\tilde{a}u^{*} = 0$$

или

$$aX + \tilde{X}\tilde{a} - \underline{a} - \tilde{X}\underline{a}^{+}X = 0,$$

где $v = Xu^{*}$. Из условия унитарности ($UU^{\dagger} = 1$, см. (13), (14)) легко найти

$$uu^{+} = (1 - \tilde{X}X^{+})^{-1}.$$

Из формул (15) также легко получить

$$X = \tilde{X}. \tag{71}$$

Следовательно,

$$uu^{+} = (1 - XX^{+})^{-1} \equiv K, \tag{72}$$

и уравнение для X приобретает вид

$$aX + X\tilde{a} - \underline{a} - X\underline{a}^{+}X = 0. \tag{73}$$

Найдем a'. Из соотношений (70) и (71) получим

$$a' = u^{+}Du, \;\; D = a - \underline{a}X^{+} + X\tilde{a}X^{+} - X\underline{a}^{+} = D^{+}. \tag{74}$$

С помощью (73) величину D можно представить в виде

$$D = (a - X\underline{a}^{+})(1 - XX^{+}), \tag{75}$$

и, следовательно, согласно (74)

$$a' = u^{+}(a - X\underline{a}^{+})u^{+^{-1}}. \tag{76}$$

Заметим, что из эрмитовости матрицы D и формулы (75) следует, что

$$K(a - X\underline{a}^{+}) = (a - \underline{a}X^{+})K. \tag{77}$$

Справедлива также формула

$$X\tilde{K} = KX = K\tilde{X}. \tag{78}$$

Формула (72) определяет матрицу u с точностью до преобразования $u \to u\lambda$, где λ является некоторой унитарной матрицей ($\lambda\lambda^+ = 1$). Эту неоднозначность в определении матрицы u можно использовать для диагонализации эрмитовой матрицы a' в импульсном и спиновом пространствах.

Представим уравнение самосогласования для $\hat{f}^c$ (см. (44)) в виде, содержащем операторы, действующие только в импульсном и спиновом пространствах. Согласно предыдущему разделу, величина $\hat{\xi} = \hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta) + \frac{Y_i}{Y_0}\hat{p}_i + \frac{Y_4}{Y_0}\hat{\tau}_3$, определяющая равновесный статистический оператор $\hat{f}^c$:

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \xi & -\underline{\xi} \\ \underline{\xi}^+ & -\tilde{\xi} \end{pmatrix}, \quad \xi = \varepsilon(\hat{f}^c, \beta) + \frac{Y_i}{Y_0}\underline{p}_i + \frac{Y_4}{Y_0}, \quad \underline{\xi} = \Delta(\hat{f}^c, \beta), \tag{79}$$

может быть приведена к квазидиагональной форме унитарным преобразованием (11):

$$U^{\dagger}\hat{\xi}U = \begin{pmatrix} \xi' & 0 \\ 0 & -\tilde{\xi}' \end{pmatrix},$$

где в соответствии с (76)

$$\xi' = u^+(\xi - X\underline{\xi}^+)u^{+^{-1}}, \tag{80}$$

а матрица X удовлетворяет уравнению

$$\xi X + X\tilde{\xi} - \underline{\xi} - X\underline{\xi}^+ X = 0, \quad \tilde{X} = X. \tag{81}$$

Так как

$$U = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}, \quad \hat{f}^c = U\hat{f}_0^c U^{\dagger}, \tag{82}$$

где

$$\hat{f}_0^c = \begin{pmatrix} \hat{f}_0^c & 0 \\ 0 & -1 - \tilde{f}_0^c \end{pmatrix}, \quad f_0^c = (e^{Y_0\xi'} - 1)^{-1},$$

то

$$f^c = uf_0^c u^{+^{-1}} + v(1 + \tilde{f}_0^c)v^+, \quad g^c = uf_0^c\,\tilde{v} + v(1 + \tilde{f}_0^c)\tilde{u}.$$

Замечая, что согласно (82), (80)

$$f_0^c = u^+ n u^{+^{-1}}, \quad n = \{\exp Y_0(\xi - X\Delta^+) - 1\}^{-1}, \tag{83}$$

получим

$$f^c = Kn + X(1 + \widetilde{n})X^+K, \quad g^c = \widetilde{KnX} + K(1 + n)X, \tag{84}$$

где (см. (72))

$$K = (1 - XX^+)^{-1}.$$

При выводе этих формул мы учли, что $\nu = Xu^*$ и $\widetilde{XK} = KX$ (см. (78)).

Рассмотрим решение уравнений (81), (84) для бесспиновых квазичастиц в однородном случае, когда $q_i = 0$, т.е. будем считать, что $[\widehat{f}^c, \widehat{p}_i] = 0$, откуда следует $[f^c, \underline{p}_i] = 0$, $\underline{p}_i g^c + g^c \widetilde{\underline{p}}_i = 0$. Таким образом,

$$f_{12}^c = f_{\mathbf{p}_1}^c \delta_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}, \quad g_{12}^c = g_{\mathbf{p}_1}^c \delta_{\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2}, \tag{85}$$

где $f_{\mathbf{p}}^{c^*} = f_{\mathbf{p}}^c$, $g_{\mathbf{p}}^c = g_{-\mathbf{p}}^c$. Отсюда и из (36) следует, что

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\mathbf{p}_1} \delta_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}, \quad \Delta_{12} = \Delta_{\mathbf{p}_1} \delta_{\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2}.$$

Поэтому $X_{12} = X_{\mathbf{p}_1} \delta_{\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2}$, где $X_{\mathbf{p}}$ удовлетворяет уравнению (см. (81))

$$X_{\mathbf{p}}^2 \Delta_{\mathbf{p}}^* - X_{\mathbf{p}}(\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{-\mathbf{p}}) + \Delta_{\mathbf{p}} = 0,$$

решение которого можно представить в виде

$$X_{\mathbf{p}} = \frac{\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{-\mathbf{p}} - 2E_{\mathbf{p}}}{2\Delta_{\mathbf{p}}^*}, \quad E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\left(\frac{\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{-\mathbf{p}}}{2}\right)^2 - |\Delta_{\mathbf{p}}|^2}. \tag{86}$$

Из формул (83), (72) следует, что

$$n_{\mathbf{p}} = \left\{\exp Y_0\left(\frac{\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{-\mathbf{p}}}{2} + E_{\mathbf{p}}\right) - 1\right\}^{-1},$$

$$K_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left(E_{\mathbf{p}} + \frac{\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{-\mathbf{p}}}{2}\right), \quad K_{\mathbf{p}}|X_{\mathbf{p}}|^2 = -\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left(E_{\mathbf{p}} - \frac{\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{-\mathbf{p}}}{2}\right). \tag{87}$$

Таким образом,

$$f_{\mathbf{p}}^c = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left\{\left(E_{\mathbf{p}} + \frac{\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{-\mathbf{p}}}{2}\right)n_{\mathbf{p}} - \left(E_{\mathbf{p}} - \frac{\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{-\mathbf{p}}}{2}\right)(1 + n_{-\mathbf{p}})\right\}, \tag{88}$$

$$g_{\mathbf{p}}^c = \frac{\Delta_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}}}(n_{\mathbf{p}} + n_{-\mathbf{p}} + 1). \tag{89}$$

К этим уравнениям должны быть добавлены уравнения самосогласования для конденсатных амплитуд b, b^*, а также уравнения, связывающие величины ξ, Δ, η с g^c, f^c, b:

$$Y_0\eta_p^* + (Y_4 + Y_i p_i)b_p = 0, \quad Y_0\eta_p - (Y_4 + Y_i p_i)b_p^* = 0,$$

$$\xi_p = \varepsilon_p + \frac{Y_i}{Y_0}p_i + \frac{Y_4}{Y_0}, \tag{90}$$

$$\varepsilon_p = \frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial f_p^c}, \quad \Delta_p = 2\frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial g_p^c}, \quad \eta_p = \frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial b_p}, \quad \eta_p^* = \frac{\partial E(\hat{f}^c, \beta)}{\partial b_p^*}. \tag{91}$$

При заданном функционале энергии $E(\hat{f}^c, \beta)$ уравнения (88)—(91) представляют собой замкнутую систему уравнений для нахождения f^c, g^c, b.

Отметим, что уравнения (88)—(90) в силу фазовой инвариантности функционала энергии допускают решения, когда $b = 0$, но $g^c \neq 0$. Соответствующий этому случаю фазовый переход не связан с явлением бозе-конденсации и изучался ранее в микроскопическом подходе (см., например, [53]). Этот фазовый переход, с математической точки зрения, очень близок к переходу в сверхтекучее состояние для ферми-систем.

Уравнения (88)—(90) допускают также решения, когда $b \neq 0$ (в этом случае с необходимостью и $g^c \neq 0$). Этот фазовый переход соответствует явлению бозе-конденсации.

7. ЭНЕРГИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСАТА И ТЕОРИЯ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА БОГОЛЮБОВА

Для дальнейшего изучения уравнений самосогласования необходимо сделать конкретные предположения относительно структуры функционала энергии $E(\hat{f}^c, \beta)$ бозе-жидкости.

Будем предполагать, что в области низких температур функционал энергии квазичастиц можно получить в результате усреднения микроскопического гамильтониана квазичастиц $\mathcal{H}(a^+, a)$ по состоянию $\underline{\rho}^0(\hat{f}^c, \beta)$ (см. (5)):

$$E(\hat{f}^c, \beta) = \operatorname{Sp} \underline{\rho}^{(0)}(\hat{f}^c, \beta)\mathcal{H}(a^+, a). \tag{92}$$

Гамильтониан $\mathcal{H}(a^+, a)$ в полуфеноменологическом подходе представляет собой произвольный N-упорядоченный эрмитов оператор (операторы a^+ стоят левее операторов a). Из (92) следует, что $E(\hat{f}^c, \beta) = \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\hat{f}^c)\mathcal{H}(a^+ + b^*, a + b)$. Поэтому, учитывая, что f^c и g^c представляют собой связи операторов a^+, a и a, a (см. (9)) и используя правила Вика, найдем:

$$E(\hat{f}^c, \beta)\,|_{f^c = g^c = 0} \equiv E(\beta) = \mathcal{H}(b^*, b),$$

где $E(\beta)$ — функционал энергии конденсата. Замечая, что

$$E(\beta) = \exp\left(b \frac{\partial}{\partial b'} + b^* \frac{\partial}{\partial b'^*}\right) E(\beta')\,|_{\beta'=0}, \tag{93}$$

представим микроскопический гамильтониан квазичастиц в виде

$$\mathcal{H}(a^+, a) = \exp\left(a^+ \frac{\partial}{\partial b'^*}\right) \exp\left(a \frac{\partial}{\partial b'}\right) E(\beta')\,|_{\beta' = 0} \tag{94}$$

(мы учли N-упорядоченность $\mathcal{H}$). Таким образом, используя формулы (92), (93), имеем

$$E(\hat{f}^c, \beta) = \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\hat{f}^c)\,\hat{\mathcal{H}}(\beta),$$

где, согласно (94), (5),

$$\hat{\mathcal{H}}(\beta) \equiv \underline{U}(\beta)\mathcal{H}(a^+, a)\underline{U}(\beta)^+ = \exp\left(a^+ \frac{\partial}{\partial b^*}\right) \exp\left(a \frac{\partial}{\partial b}\right) E(\beta)$$

и, следовательно,

$$E(\hat{f}^c, \beta) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial b^*}, \frac{\partial}{\partial b}\right) E(\beta). \tag{95}$$

Величина $\mathcal{F}(u^*, u)$, определяемая формулой

$$\mathcal{F}(u^*, u) = \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\hat{f}^c) \exp(u^* a^+) \exp(ua), \tag{96}$$

представляет собой производящий функционал многочастичных функций распределения (см. [52]).

Вводя обозначения $\chi = \begin{pmatrix} u^* \\ -u \end{pmatrix}$, $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}$ (см. (13)) и используя известную формулу $\exp(a^+ u^*) \exp(au) = \exp(a^+ u^* + au - \frac{1}{2}u^* u)$, получим

$$\mathcal{F}(u^*, u) = \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \chi, \tau_3 \chi \rangle\right) \operatorname{Sp}\rho^{(0)}(\hat{f}^c) \exp(\langle \chi, \hat{\psi} \rangle),$$

где мы учли, что $ua + u^* a^+ = \langle \chi, \hat{\psi} \rangle$, $2u^* u = \langle \chi, \tau_3 \chi \rangle$. Производя под знаком шпура в этой формуле унитарное преобразование Боголюбова (11) и учитывая, что $\rho_0^{(0)} = \hat{U}^+ \rho^{(0)}(\hat{f}^c)\hat{U}$, $\hat{U}^+ \hat{\psi} \hat{U} = U\hat{\psi}$ (см. (19)), найдем

$$\mathfrak{F}(u^*, u) = \exp(-\frac{1}{4}\langle \chi, \tau_3 \chi \rangle) \operatorname{Sp} \rho_0^{(0)} \exp \langle \underline{\chi}, \hat{\psi} \rangle) =$$

$$= \exp(-\frac{1}{4}\langle \chi, \tau_3 \chi \rangle + \frac{1}{4}\langle \chi, \tau_3 \underline{\chi} \rangle) \operatorname{Sp} \rho_0^{(0)} \exp(a^+ \underline{u}^*) \exp(a\underline{u}),$$

где $\underline{\chi} = U^{\dagger}\chi$, $\underline{u} = U^{\dagger} u$. Так как $\operatorname{Sp} \rho_0^{(0)} \exp(a^+ \underline{u}^*) \exp(a\underline{u}) = \exp(\underline{u} f_0^c \underline{u}^*)$ [52], то

$$\mathfrak{F}(u^*, u) = \exp\{-\frac{1}{4}\langle \chi, \tau_3 \chi \rangle + \frac{1}{4}\langle \underline{\chi}, \tau_3 \underline{\chi} \rangle\} + \underline{u} f_0^c \underline{u}^*.$$

Поэтому, согласно (82),

$$\mathfrak{F}(u^*, u) = \exp\{\frac{1}{2}\langle \chi, \hat{f}^c \chi \rangle - \frac{1}{4}\langle \chi, \tau_3 \chi \rangle\}.$$

Замечая далее, что $\langle \chi, \hat{f}^c \chi \rangle = 2uf^c u^* + ug^c u + u^* g^{c^+} u^* + u^* u$ и $\frac{1}{2}\langle \chi, \tau_3 \chi \rangle = u^* u$, получим

$$\mathfrak{F}(u^*, u) = \exp\{uf^c u^* + \frac{1}{2} ug^c u + \frac{1}{2} u^* g^{c^+} u^*\}. \tag{97}$$

Таким образом, в соответствии с (95) можно выразить функционал энергии $E(\hat{f}^c, \beta)$ бозе-жидкости в терминах функционала энергии $E(\beta) = E(\hat{f}^c, \beta)|_{g^c = f^c = 0}$ бозе-конденсата:

$$E(\hat{f}^c, \beta) = \exp\left\{\frac{\partial}{\partial b} f^c \frac{\partial}{\partial b^*} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b} g^c \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b^*} g^{c^+} \frac{\partial}{\partial b^*}\right\} E(\beta). \tag{98}$$

Свойства фазовой и трансляционной инвариантности функционала энергии конденсата $E(\beta) \equiv E(b, b^*)$ формулируются соотношениями

$$E(e^{i\varphi} b_p, e^{-i\varphi} b_p^*) = E(b_p, b_p^*),$$

$$E(e^{ipy} b_p, e^{-ipy} b_p^*) = E(b_p, b_p^*). \tag{99}$$

Для функционала энергии (98) справедливы соотношения

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial E}{\partial f^c_{12}} = \frac{\partial^2 E}{\partial b_1 \partial b_2^*}, \quad \Delta_{21} = 2\,\frac{\partial E}{\partial g^{c*}_{12}} = \frac{\partial^2 E}{\partial b_1^* \partial b_2^*}, \quad \Delta^*_{21} = \frac{\partial^2 E}{\partial b_1 \partial b_2}. \qquad (100)$$

Рассмотрим приближение, когда корреляционные функции f^c, g^c малы по сравнению с b^*, b (почти все частицы находятся в конденсате). В этом случае функционал энергии $E\,(\hat{f}^c, \beta)$ можно представить в виде

$$E\,(\hat{f}^c, \beta) = \left\{1 + \frac{\partial}{\partial b} f^c \frac{\partial}{\partial b^*} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b} g^c \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b^*} g^{c*} \frac{\partial}{\partial b^*} + \ldots\right\} E(\beta).$$

Поэтому (см. также (100))

$$\varepsilon_{21} \approx \frac{\partial^2 E(\beta)}{\partial b_1 \partial b_2^*}, \quad \Delta_{21} \approx \frac{\partial^2 E(\beta)}{\partial b_1^* \partial b_2^*},$$

где волновые функции конденсата b_1, b_1^* находятся из уравнений

$$\frac{\partial E(\beta)}{\partial b_0} + \frac{Y_4}{Y_0} b_0^* = 0, \quad \frac{\partial E(\beta)}{\partial b_0^*} + \frac{Y_4}{Y_0} b_0 = 0, \quad b_{\mathrm{p}} = 0 \quad (\mathrm{p} \neq 0)$$

(мы рассматриваем для простоты случай, когда сверхтекучий импульс $\mathrm{q} = 0$ и, следовательно, $b_{\mathrm{p}} = \delta_{\mathrm{p},0} b_0$). Нормальная и аномальная функции распределения надконденсатных частиц определяются при этом уравнениями (88), (89):

$$f^c_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2E_{\mathrm{p}}}\left\{\left(E_{\mathrm{p}} + \varepsilon_{\mathrm{p}} + \frac{Y_4}{Y_0}\right) n_{\mathrm{p}} - \left(E_{\mathrm{p}} - \varepsilon_{\mathrm{p}} - \frac{Y_4}{Y_0}\right)(1 + n_{-\mathrm{p}})\right\},$$

$$g^c_{\mathrm{p}} = \frac{\Delta_{\mathrm{p}}}{2E_{\mathrm{p}}}(n_{\mathrm{p}} + n_{-\mathrm{p}} + 1),$$

$$n_{\mathrm{p}} = \{\exp Y_0(E_{\mathrm{p}} + Y_0^{-1} Y_i p_i) - 1\}^{-1}, \qquad (101)$$

$$E_{\mathrm{p}} = \left\{\left(\frac{\partial^2 E(\beta)}{\partial b_{\mathrm{p}} \partial b_{\mathrm{p}}^*} - \frac{1}{b_0}\frac{\partial E(\beta)}{\partial b_0}\right)^2 - \left|\frac{\partial^2 E(\beta)}{\partial b_{\mathrm{p}} \partial b_{-\mathrm{p}}}\right|^2\right\}^{1/2}, \quad b_{\mathrm{p}} = b_0 \delta_{\mathrm{p},0}$$

(мы учли при этом, что $\varepsilon_{12} = \varepsilon_1 \delta_{1,2}$, $\Delta_{12} = \Delta_1 \delta_{1,-2}$). Покажем, что величина E_{p}, которая может интерпретироваться как энергия квазичастицы с импульсом p_i, обращается в нуль при $p_i = 0$ ($E_0 = 0$), в силу фазовой инвариантности функционала энергии конденсата $E(b, b^*) =$

$= E(e^{i\varphi}\, b,\ e^{-i\varphi}\, b^*)$ (теорема Голдстоуна — Боголюбова). Действительно, вводя обозначение $b_\varphi = e^{i\varphi}\, b_0$, имеем

$$\frac{\partial E(b_\varphi,\, b^*_\varphi)}{\partial\varphi} = \mathrm{i}\, b_\varphi \frac{\partial E}{\partial b_\varphi} - \mathrm{i} b^*_\varphi \frac{\partial E}{\partial b^*_\varphi} = 0.$$

Повторно дифференцируя по φ и полагая $\varphi = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 E(\beta)}{\partial b_0 \partial b_0^*} - \frac{1}{b_0}\frac{\partial E(\beta)}{\partial b_0} = \frac{\partial^2 E(\beta)}{\partial b_0 \partial b_0},$$

откуда и следует, что $E_0 = 0$.

В теории слабонеидеального бозе-газа исходят из гамильтониана

$$\mathcal{H}(a, a^+) = \sum_1 \varepsilon_1^0 a_1^+ a_1 + \frac{1}{V}\sum_{1234} \Phi(12;\, 34)\, a_1^+ a_2^+ a_3 a_4\,, \quad \varepsilon_1^0 = \frac{p_1^2}{2m}\,,$$

где $\Phi(12;\, 34)$ — амплитуда взаимодействия бозе-частиц, отличная от нуля только при $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$. В этом случае энергия конденсата определяется формулой

$$E(\beta) = \sum_1 \varepsilon_1^0 b_1^* b_1 + \frac{1}{V}\sum_{1234} \Phi(12;\, 34) b_1^* b_2^* b_3 b_4\,.$$

Для потенциального взаимодействия $V(x_1 - x_2)$ между частицами

$$\Phi(12;\, 34) = \frac{1}{4}\left(\nu\,(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + \nu\,(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)\right)\delta_{1+2,3+4}\,,$$

где $\nu(\mathbf{p}) = \int d^{\,3}x\, e^{i\mathbf{px}}\, V(\mathbf{x})$. Поэтому

$$\Delta_1 = n_0\nu(1), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + n_0(\nu(0) + \nu(1)), \quad n_0 = b_0^* b_0 / V. \qquad (102)$$

Кроме того, из уравнений (101), (102) следует, что

$$\frac{Y_4}{Y_0} = -n_0\nu(0), \quad \varepsilon_1 + \frac{Y_1}{Y_0} = \varepsilon_1^0 + n_0\nu(1)$$

и, следовательно,

$$E_\mathbf{p} = \{\varepsilon_\mathbf{p}^0\,(\varepsilon_\mathbf{p}^0 + 2n_0\nu\,(\mathbf{p}))\}^{1/2},$$

$$g^c_{\mathrm{p}} = \frac{n_0 \nu(\mathrm{p})}{2E_{\mathrm{p}}}(n_{\mathrm{p}} + n_{-\mathrm{p}} + 1),$$

$$f^c_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2E_{\mathrm{p}}}\left\{(E_{\mathrm{p}} + \varepsilon^0_{\mathrm{p}} + n_0\nu(\mathrm{p}))n_{\mathrm{p}} - (E_{\mathrm{p}} - \varepsilon^0_{\mathrm{p}} - n_0\nu(\mathrm{p}))(1 + n_{-\mathrm{p}})\right\}.$$

Эти формулы определяют спектр и нормальную и аномальную корреляционные функции слабонеидеального бозе-газа. Они были получены впервые Н.Н.Боголюбовым [13] и справедливы в области низких температур и слабого взаимодействия между бозонами, когда почти все частицы находятся в конденсате.

Рассмотрим в заключение вопрос о колебаниях пространственно-однородной бозе-жидкости в условиях, когда все частицы находятся в конденсате. Для этого необходимо воспользоваться кинетическими уравнениями (46). В пространственно-однородном случае $b_1 = e^{-i\varphi}\underline{b}\,\delta_{10}$ ($\underline{b} > 0$, φ —некоторая фаза). Пренебрегая при нахождении величины η_1 (определяющей изменение со временем «волновой функции» конденсатных частиц) корреляционными функциями f^c, g^c и используя условия фазовой и трансляционной инвариантности функционала $E(\beta)$ (99), находим

$$\eta_1 = e^{-i\varphi}\underline{\eta}\,\delta_{1,0}, \quad \underline{\eta} = \left(\frac{\partial E}{\partial b_0^*}\right)_0 = \underline{\eta}^* \tag{103}$$

(индекс «0» в (103) означает, что мы полагаем $b_1 = \underline{b}\,\delta_{1,0}$). В этом же приближении

$$\varepsilon_{12} = \underline{\varepsilon}_1\delta_{1,2}, \quad \underline{\varepsilon}_1 = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial b_1 \partial b_1^*}\right)_0 = \underline{\varepsilon}^*_1,$$

$$\Delta^*_{12} = \underline{\Delta}^*_1 e^{2i\varphi}\delta_{1,-2}, \quad \underline{\Delta}^*_1 = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial b_1 \partial b_{-1}}\right)_0 \neq \underline{\Delta}_1.$$

В силу (103) кинетическое уравнение для b_1 принимает вид $i\dot{\underline{b}} + \dot{\varphi}\,\underline{b} = \underline{\eta}$, откуда $\dot{\underline{b}} = 0$, $\dot{\varphi} = \underline{\eta}/\underline{b}$ и, следовательно, $\underline{b} = \mathrm{const}$, $\varphi = \frac{\underline{\eta}}{\underline{b}}t + \mathrm{const}$.

Так как φ зависит от t, то Δ_{12} также зависит от t через фазовый множитель $e^{2i\varphi}$ ($\underline{\varepsilon}_1$ и Δ^*_1 не зависят от t). Поэтому через фазовый множитель $e^{2i\varphi}$ от времени будет зависеть энергия квазичастиц $\hat{\varepsilon}(t)$. Учитывая это, решение первого из кинетических уравнений (46) можно представить в виде

$$\hat{f}^c(t) = U(t)\hat{f}^c(0)U(t)^{+}, \qquad (104)$$

где

$$i\,\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \hat{\varepsilon}(t)U(t), \quad U(0) = 1.$$

Унитарный оператор U (см. разд.1) имеет вид $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} i\dot{u} &= \varepsilon u + \Delta v^*, \qquad u(0) = 1, \\ -i\dot{v}^* &= \Delta^+ u + \tilde{\varepsilon} v^*, \quad v^*(0) = 0. \end{aligned}$$

В пространственно-однородном случае $u_{12} = u_1\delta_{1,2}$, $v^*_{12} = v^*_1\delta_{1,-2}$. Поэтому, вводя обозначение $w_1 = -v^*_{-1}\,e^{-2i\varphi}$, перепишем последние уравнения в виде

$$\begin{aligned} i\dot{u}_1 &= \underline{\varepsilon}_1 u_1 + \underline{\Delta}_1 w_1, \\ -i\dot{w}_1 &= \underline{\Delta}^*_1 u_1 + (\underline{\varepsilon}_{-1} - 2\dot{\varphi})\, w_1 . \end{aligned}$$

Решение этих уравнений с учетом начальных условий $u_1(0) = 1$, $w_1(0) = 0$ имеет вид

$$u_1(t) = \frac{1}{\omega_- - \omega_+}\left\{(\omega_- - \underline{\varepsilon}_1)\, e^{-i\omega_+ t} - (\omega_+ - \underline{\varepsilon}_1)\, e^{-i\omega_- t}\right\},$$

$$w_1(t) = \frac{\Delta^*_1}{\omega_- - \omega_+}\left\{e^{-i\omega_+ t} - e^{-i\omega_- t}\right\},$$

где

$$\omega_\pm = \dot{\varphi} \pm \sqrt{(\underline{\varepsilon}_1 - \dot{\varphi})^2 - |\underline{\Delta}_1|^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\underline{b}}\frac{\partial E}{\partial \underline{b}}.$$

Предполагая, что в начальный момент времени все частицы находились в конденсате $(f^c(0) = g^c(0) = 0)$, имеем $\hat{f}^c(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому, согласно (104),

$$f^c_1(t) = v_1\, v^*_1 = -1 + u_1\, u^*_1, \quad g^c_1(t) = v_1\, u_1$$

и, следовательно,

$$f_1^c(t) = \frac{|\underline{\Delta}_1|^2}{\omega_1^2}\sin^2\omega_1 t,\quad \omega_1 \equiv \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} = \sqrt{(\varepsilon_1 - \dot{\varphi})^2 - |\underline{\Delta}_1|^2},$$

$$g_1^c(t) = \frac{\underline{\Delta}_1}{\omega_1}\left\{\left(\dot{\varphi} - \underline{\varepsilon}_1\right)\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} - \mathrm{i}\cos\omega_1 t\right\} e^{-2\mathrm{i}\varphi(t)}\sin\omega_1 t. \tag{105}$$

Величина ω_1 совпадает с энергией квазичастицы E_1. Таким образом, энергия E_1 определяет не только термодинамику, но пространственно-однородные колебания бозе-жидкости в условиях, когда почти все частицы находятся в конденсате.

8. ИДЕАЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА БОЗЕ-ЖИДКОСТИ

Для построения идеальной гидродинамики сверхтекучей бозе-жидкости, согласно принципу локальности состояния термодинамического равновесия, необходимо найти плотности потоков числа частиц, импульса и энергии в состоянии статистического равновесия. Так как плотность потока числа частиц уже была определена в разд.3 (см. (52)), то теперь найдем выражения для тензора натяжений и плотности потока энергии в терминах термодинамического потенциала ω. Начнем с тензора натяжения.

Пусть a_{ik} — коэффициенты произвольных аффинных преобразований $x_i \to x_i' = a_{ik}\,x_k$. Тогда легко определить, что операторы $a_{ik}^{-1}\,\hat{x}_k$ и $\tilde{a}_{jk}\,\hat{p}_k$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы $\hat{x}_i$, $\hat{p}_j$. Отсюда, как известно, следует, что

$$U_a\,\hat{x}_i\,U_a^{\dagger} = a_{ik}^{-1}\,x_k\,,\quad U_a\,\hat{p}_i\,U_a^{\dagger} = \tilde{a}_{ik}\,\hat{p}_k\,, \tag{106}$$

где U_a — некоторый унитарный оператор. Кроме того,

$$U_a\hat{\rho}\,(\mathrm{x})\,U_a^{\dagger} = \det a\,\hat{\rho}\,(a\mathrm{x}),\qquad U_a\hat{\pi}_i\,(\mathrm{x})\,U_a^{\dagger} = \det a\cdot\tilde{a}_{ik}\,\hat{\pi}_k\,(a\mathrm{x}). \tag{107}$$

В случае бесконечно малых преобразований $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$, $U_a = 1 - \mathrm{i}\,\xi_{ik}\,\hat{\Gamma}_{ki}$, причем генератор $\hat{\Gamma}_{ki}$ унитарных преобразований (106) определяется формулой

$$\widehat{\Gamma}_{ik} = \int d^3x\, x_i \widehat{\pi}_k(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \{\underline{x}_i, \underline{p}_k\} & 0 \\ 0 & -\{\underline{x}_i, \underline{p}_k\} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $U_a^{\dagger} = U_a^{-1} = 1 + \mathrm{i}\,\xi_{ik}\widehat{\Gamma}_{ki}$. Поэтому из (106), (107) следуют коммутационные соотношения

$$[\Gamma_{ik}, \widehat{x}_i] = -\mathrm{i}\,\delta_{kl}\widehat{x}_l, \quad [\Gamma_{ik}, \widehat{p}_l] = \mathrm{i}\,\delta_{il}\widehat{p}_k,$$

$$\mathrm{i}\,[\widehat{\pi}_l(\mathrm{x}), \widehat{\Gamma}_{ki}] = \delta_{ik}\widehat{\pi}_l(\mathrm{x}) + \delta_{lk}\widehat{\pi}_i(\mathrm{x}) + x_k\frac{\partial \widehat{\pi}_l(\mathrm{x})}{\partial x_i},$$

$$\mathrm{i}\,[\widehat{\rho}(\mathrm{x}), \widehat{\Gamma}_{ki}] = \delta_{ik}\widehat{\rho}(\mathrm{x}) + x_k\frac{\partial \widehat{\rho}(\mathrm{x})}{\partial x_i}.$$

Для равновесного пространственно-однородного состояния бозе-жидкости справедливы соотношения (см. (45))

$$[\widehat{f}^c(Y, \mathrm{q}),\ \widehat{p}_i - q_i\widehat{\tau}_3] = 0, \quad (\widehat{p}_i - q_i\widehat{\tau}_3)\beta(Y, \mathrm{q}) = 0$$

и, следовательно,

$$[U_a\widehat{f}^c(Y, \widetilde{a}\,\mathrm{q})\,U_a^{\dagger}, \widehat{p}_i - q_i\widehat{\tau}_3] = 0, \quad (\widehat{p}_i - q_i\widehat{\tau}_3)U_a\beta(Y, \widetilde{a}\,\mathrm{q}) = 0.$$

Пусть $|x, \lambda\rangle\,(\lambda = s, \tau;\ \tau = \pm 1)$ — собственный вектор операторов $\widehat{x}_i$ (оператор координаты), $\widehat{s}_3$, $\widehat{\tau}_3$:

$$\widehat{\mathrm{x}}\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle = \mathrm{x}\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle, \quad \widehat{s}_3\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle = \mathrm{s}\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle, \quad \widehat{\tau}_3\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle = \tau\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle.$$

Тогда, согласно (106), $\widehat{U}_a^{\dagger}\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle = \zeta\,|a^{-1}\mathrm{x}, \lambda\rangle$. Условие нормировки $\langle \mathrm{x}\lambda\,|\mathrm{x}'\lambda\rangle = \tau\,\delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}')$ приводит к следующему выражению для нормирующего множителя $\zeta : \zeta = 1/\sqrt{\det a}$. Поэтому

$$U_a\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle = |a\,\mathrm{x}, \lambda\rangle\sqrt{\det a}, \quad U_a\,|0, \lambda\rangle = \sqrt{\det a}\,|0, \lambda\rangle. \tag{108}$$

Вычисляя шпур в (x, λ)-представлении, энтропию единицы объема можно представить в виде

$$s(\widehat{f}^c) = -\frac{1}{V}\mathrm{Re\,Sp}\,\widehat{f}^c\,\ln\widehat{f}^c = -\frac{1}{V}\mathrm{Re}\sum_{\lambda}\int d^3x\,\langle \mathrm{x}, \lambda|\,\widehat{f}^c\ln\widehat{f}^c\,|\mathrm{x}, \lambda\rangle.$$

Так как для пространственно-однородных состояний (45) матричный элемент $\langle \mathrm{x}\lambda \mid \hat{f}^c \ln \hat{f}^c \mid \mathrm{x}\lambda \rangle$ не зависит от x, то

$$s(\hat{f}^c) = -\operatorname{Re}\sum_\lambda \langle 0\lambda \mid \hat{f}^c \ln \hat{f}^c \mid 0\lambda \rangle,$$

или, используя (108), имеем

$$s(\hat{f}^c) = -\det a \operatorname{Re}\sum_\lambda \langle 0\lambda \mid U_a \hat{f}^c U_a^\dagger \ln U_a \hat{f}^c U_a^\dagger \mid 0\lambda \rangle.$$

Таким образом,

$$s(\hat{f}^c) = \det a\, s(U_a \hat{f}^c U_a^\dagger).$$

Эта формула показывает, что плотность энтропии не является инвариантом унитарного преобразования U_a (каким является полная энтропия), так как при преобразовании U_a появляется множитель $\det a$. Этот дополнительный множитель всегда появляется при преобразовании величин типа плотностей (см. (107)).

Используя формулу (59), имеем согласно (107):

$$\frac{\omega\,(Y, \tilde{a}q)}{\det a} = \frac{1}{V}\operatorname{Re}\operatorname{Sp}\hat{f}_a^c \ln \hat{f}_a^c + \frac{Y_0}{\det a}\,\mathcal{E}(U_a^\dagger \hat{f}_a^c U_a, U_a^\dagger \beta_a) +$$

$$+ \frac{1}{2} Y_i \tilde{a}_{ik} (\operatorname{Sp}\hat{f}_a^c \hat{\pi}_k(0) + \langle \beta_a, \hat{\pi}_k(0) \beta_a \rangle) +$$

$$+ \frac{1}{2} Y_4 (\operatorname{Sp}\hat{f}_a^c \hat{\rho}(0) - \langle \beta_a, \hat{\rho}(0) \beta_a \rangle),$$

$$\hat{f}_a^c \equiv U_a \hat{f}^c (Y, \tilde{a}\,\mathrm{q})\, U_a^\dagger, \quad \beta_a = U_a \beta\,(Y, \tilde{a}\,\mathrm{q}). \tag{109}$$

Положим в этой формуле $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$ и будем считать, что $\xi_{ik} \ll 1$. Варьирование правой части (109) по f_a^c и β_a (связанное с разложением по ξ_{ik}) согласно вариационному принципу (см. разд.5) приводит к нулевому результату. Поэтому, учитывая, что $\delta\left(\dfrac{\omega\,(Y, \tilde{a}q)}{\det a}\right) = -\xi_{ii}\,\omega + \xi_{ki}\, q_k \dfrac{\partial\omega}{\partial q_i}$, в результате разложения правой части по ξ_{ik} получим

$$\omega\,\delta_{ik} - q_k \frac{\partial\omega}{\partial q_i} = Y_0 \mathcal{E}(0; \hat{f}^c, \beta)\,\delta_{ik} - Y_0\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Sp}\hat{f}^c\, [\hat{\varepsilon}(0; \hat{f}^c, \beta), \Gamma_{ik}] +\right.$$

$$+ \mathrm{i} \langle \eta (0; \hat{f}^c, \beta), \Gamma_{ik} \beta \rangle \Big) - Y_i \pi_k, \tag{110}$$

где $\pi_k = \frac{1}{2} (\mathrm{Sp} \hat{f}^c \hat{\pi}_k (0) + \langle \beta, \hat{\pi}_k (0) \beta \rangle)$. В силу (56) для состояний $\hat{f}^c, \beta$, удовлетворяющих условию пространственной однородности, среднее значение тензора натяжений t_{ik} равно

$$t_{ik} = -\mathcal{E} (0; \hat{f}^c, \beta) \delta_{ik} + \frac{\mathrm{i}}{2} \mathrm{Sp} \hat{f}^c [\hat{\varepsilon} (0; \hat{f}^c, \beta), \Gamma_{ki}] + \mathrm{i} \langle \eta (0; \hat{f}^c, \beta), \Gamma_{ki} \beta \rangle.$$

Отсюда с учетом (110), (61) имеем

$$t_{ki} = \frac{q_k}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial Y_k} \frac{\omega Y_i}{Y_0}. \tag{111}$$

Найдем теперь выражение для плотности потока энергии w_k в терминах термодинамического потенциала ω. Для пространственно-однородных состояний (см. (45)) справедливо следующее утверждение: если $[\hat{f}^c, \hat{p}_i - q_i \hat{\tau}_3] = 0$, то

$$\overline{w}_k = \frac{\mathrm{i}}{2} \int d^3 x \, x_k \mathrm{Sp} \hat{f}^c [\hat{Q} (\mathbf{x}), \hat{Q} (0)] \equiv \langle Q, Q \rangle_k' = 0, \tag{112}$$

где

$$\hat{f}^c = (\mathrm{e}^{\hat{Q}} - 1)^{-1}, \quad \hat{Q} = \int d^3 x \, \hat{Q} (\mathbf{x}).$$

Здесь использовано обозначение $\langle a, b \rangle_k' = \frac{\mathrm{i}}{2} \int d^3 x \, x_k \mathrm{Sp} \hat{f}^c [\hat{a} (\mathbf{x}), \hat{b} (0)]$.

Доказательство этого утверждения в точности повторяет доказательство аналогичного утверждения для ферми-жидкости [51], поэтому здесь мы его не приводим.

Используя определения операторов $\hat{\pi}_i (\mathbf{x}), \hat{\rho} (\mathbf{x})$, легко получить следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{\rho} (\mathbf{x}), \hat{\rho} (\mathbf{x}')] = 0, \quad [\hat{\pi}_i (\mathbf{x}), \hat{\rho} (\mathbf{x}')] = -\mathrm{i} \hat{\rho} (\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$[\hat{\pi}_i (\mathbf{x}), \hat{\pi}_k (\mathbf{x}')] = -\mathrm{i} \hat{\pi}_k (\mathbf{x}) \frac{\partial \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_i} - \mathrm{i} \hat{\pi}_i (\mathbf{x}') \frac{\partial \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_k}. \tag{113}$$

Применим формулу (112) для состояния статистического равновесия, когда

$$\hat{Q}(\mathbf{x}) = Y_0 \hat{\varepsilon}\left(\mathbf{x}; \hat{f}^c, \beta\right) + Y_i \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + Y_4 \hat{\rho}(\mathbf{x}).$$

Замечая, что $\langle a, b \rangle_k' = \langle b, a \rangle_k'$, получим

$$Y_0^2 \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_k' + 2 Y_0 Y_i \langle \varepsilon, \pi_i \rangle_k + 2 Y_0 Y_4 \langle \varepsilon, \rho \rangle_k' +$$

$$+ 2 Y_i Y_4 \langle \pi_i, \rho \rangle_k' + Y_i Y_l \langle \pi_i, \pi_l \rangle_k' = 0. \tag{114}$$

Выражая с помощью формул (52), (56), (58) величины $\langle \ldots, \ldots \rangle_k'$ через средние плотности физических величин и плотности их потоков с помощью соотношений (113) и уравнения самосогласования $\eta(0) = = - Y_0^{-1} (Y_i \hat{\pi}_i(0) + Y_4 \hat{\rho}(0)) \beta$, имеем

$$\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_k' = 2 w_k - \frac{Y_k}{Y_0^2} (\langle \beta, Y_i \hat{\pi}_i(0) \beta \rangle + Y_4 \langle \beta, \hat{\rho}(0) \beta \rangle),$$

$$\langle \pi_i, \rho \rangle_k' = \delta_{ik} (\rho - \frac{1}{2} \langle \beta, \hat{\rho}(0) \beta \rangle),$$

$$\langle \varepsilon, \pi_i \rangle_k' = t_{ik} + \mathcal{E}(0) \delta_{ik} +$$

$$+ \frac{1}{2 Y_0} (\langle \beta, (\delta_{kj} \hat{\pi}_i(0) + \delta_{ki} \hat{\pi}_j(0)) \beta \rangle Y_j + Y_4 \delta_{ik} \langle \beta, \hat{\rho}(0) \beta \rangle),$$

$$\langle \varepsilon, \rho \rangle_k' = j_k + \frac{Y_k}{2 Y_0} \langle \beta, \hat{\rho}(0) \beta \rangle,$$

$$Y_i Y_l \langle \pi_i, \pi_l \rangle_k' = Y_k Y_i (\pi_i - \frac{1}{2} \langle \beta, \hat{\pi}_i(0) \beta \rangle).$$

Поэтому формула (114) принимает вид

$$Y_0^2 w_k + Y_0 Y_i (t_{ik} + \mathcal{E}(0) \delta_{ik}) + Y_0 Y_4 j_k + Y_k Y_i \pi_i + Y_k Y_4 \rho = 0.$$

Отсюда с помощью (61), (111), (66) окончательно находим

$$w_k = - \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0^2} \frac{\partial \omega}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{Y_k \omega}{Y_0}. \tag{115}$$

Обозначая $\zeta_{\alpha k}$ ($\alpha = 0,1,2,3,4$) средние значения операторов плотностей потоков ($\zeta_{0k} = w_k, \zeta_{lk} = t_{lk}, \zeta_{4k} = j_k$), запишем формулы (66), (111), (115) единым образом (ср. с [51]):

$$\zeta_{\alpha k} = \frac{\partial \omega}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} - \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0}, \quad \alpha = 0,1,2,3,4. \tag{116}$$

Принцип локальности состояния статистического равновесия приводит к уравнениям гидродинамики идеальной сверхтекучей бозе-жидкости

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} = - \frac{\partial \zeta_{\alpha k}}{\partial x_k}, \tag{117}$$

где $\zeta_\alpha = \partial \omega / \partial Y_\alpha$ (см. (61); $\zeta_0 = \mathcal{E}, \zeta_k = \pi_k, \zeta_4 = \rho$), которые имеют такой же вид, как и уравнения гидродинамики идеальной сверхтекучей ферми-жидкости. Величины ζ_α , $\zeta_{\alpha k}$ зависят от x, t через медленно меняющиеся в пространстве и во времени функции $Y_\alpha = Y_\alpha$ (x, t), $q_i = q_i$ (x, t). Система уравнений гидродинамики станет замкнутой, если будет найдено уравнение для сверхтекучего импульса q_i (x, t). Для нахождения этого уравнения заметим, что равновесная функция распределения не коммутирует с гамильтонианом квазичастиц $\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c, \beta)$. Действительно, согласно (44), (45) имеем

$$[\hat{\varepsilon}, \hat{f}^c] = - \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} [\hat{\tau}_3, \hat{f}^c], \quad \hat{\eta} = - \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} \hat{\tau}_3 \beta. \tag{118}$$

Поэтому оператор $\hat{f}^c$ и конденсатные амплитуды квазичастиц β, описывающие состояние статистического равновесия, должны зависеть от времени. Легко видеть, что эта зависимость должна сводиться к некоторому фазовому преобразованию

$$\hat{f}^c (t) = \exp (\mathrm{i} \varphi(t) \hat{\tau}_3) \hat{f}^c \exp (- \mathrm{i} \varphi(t) \hat{\tau}_3), \quad \beta (t) = \exp (\mathrm{i} \varphi(t) \hat{\tau}_3) \beta.$$

Действительно, в силу (118) эти величины удовлетворяют кинетическим уравнениям (46), если фаза φ (t) удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varphi} (t) = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}. \tag{119}$$

Дадим общее определение фазы:

$$\varphi (\mathrm{x}, t) = \mathrm{Im} \ln \psi (\mathrm{x}, t),$$

где

$$\psi(\mathrm{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathrm{p}} \exp(i\mathrm{px}) b_{\mathrm{p}}(t).$$

В состоянии статистического равновесия это определение, согласно (119), приводит к формуле

$$\varphi(\mathrm{x}, t) = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0} t + \mathrm{qx} + \varphi(0), \tag{120}$$

откуда

$$\dot{\varphi}(\mathrm{x}, t) = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}, \quad \frac{\partial \varphi(\mathrm{x}, t)}{\partial x_i} = q_i. \tag{121}$$

Считая справедливыми эти формулы для слабонеоднородных состояний, получим

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}. \tag{122}$$

Таким образом, система уравнений (117) совместно с уравнением (122) образует замкнутую систему уравнений идеальной гидродинамики сверхтекучей бозе-жидкости.

Отметим, что выражения для плотностей потоков (116) можно представить в форме, соответствующей двухжидкостной гидродинамике. Термодинамический потенциал ω в силу вращательной инвариантности является функцией параметров Y_0, Y_i^2, Y_4, q^2, $Y_i q_i$. Если ввести величины σ_n, σ_s, m^* согласно формулам

$$\sigma_n = -2Y_0 \frac{\partial \omega}{\partial Y_i^2}, \quad \sigma_s = \frac{2}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial q_i^2} (m^*)^2, \quad m^* = \sigma_n \frac{1}{\rho - \dfrac{\partial \omega}{\partial Y_i q_i}}, \tag{123}$$

то потоки j_k, t_{ik}, w_k приобретают вид

$$j_k = \frac{\sigma_n}{m^*} v_{nk} + \frac{\sigma_s q_k}{(m^*)^2}, \quad t_{ik} = -\frac{\omega}{Y_0}\delta_{ik} + \sigma_n v_{ni} v_{nk} + \sigma_s \frac{q_i q_k}{(m^*)^2}, \quad v_{ni} = -\frac{Y_i}{Y_0},$$

$$w_k = v_{nk}\left[-\frac{\omega}{Y_0} + \varepsilon + \left(\rho - \frac{\sigma_n}{m^*}\right) q_0\right] - \frac{\sigma_s q_k}{(m^*)^2} q_0, \quad q_0 = \frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}. \tag{124}$$

Из (123) видно, что σ_n имеет смысл плотности «массы» нормальной компоненты, а σ_s — плотности «массы» сверхтекучей компоненты бозе-жидкости. Будем m^* интерпретировать как эффективную «массу квазичастицы». Тогда q_i/m^* приобретает смысл сверхтекучей скорости. Плотность жидкости $\sigma = m^*\rho = m^*\, \partial\omega/\partial Y_4$, вообще говоря, не совпадает с суммой нормальной σ_n и сверхтекучей σ_s плотностей: $\sigma \neq \sigma_n + \sigma_s$.

Рассмотрим теперь бозе-жидкость, функционал плотности энергии которой инвариантен относительно преобразования Галилея:

$$\mathcal{E}\,(\mathbf{x};\, e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{f}^c e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}},\, e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\beta) =$$

$$= \mathcal{E}\,(\mathbf{x};\hat{f}^c,\beta) + v_i\pi_i(\mathbf{x};\hat{f}^c,\beta) + \frac{mv^2}{2}\,p\,(\mathbf{x};\hat{f}^c,\beta), \tag{125}$$

где m — масса частиц, v_k — произвольный параметр, играющий роль скорости. Так как $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\eta}$, $\hat{p}_i$, $\hat{\tau}_3$ изменяются при преобразовании Галилея, согласно формулам (см. (41))

$$e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{\varepsilon}(\hat{f}^c,\beta)\, e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\varepsilon}\,(e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{f}^c e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}},\, e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\beta) + v_i\hat{p}_i + \frac{mv^2}{2}\hat{\tau}_3,$$

$$e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{\eta}\,(\hat{f}^c,\beta) = \hat{\eta}\,(e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{f}^c e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}},\, e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\beta) +$$

$$+ v_i\hat{p}_i\, e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\beta + \frac{mv^2}{2}\hat{\tau}_3\, e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\beta,$$

$$e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{p}_i\, e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}} = \hat{p}_i + mv_i\hat{\tau}_3, \quad e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{\tau}_3\, e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\tau}_3, \tag{126}$$

то, учитывая уравнения самосогласования (44) и условие однородности (45), легко показать, что

$$e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\hat{f}^c(Y_0, Y_i, Y_4, q_i)\, e^{im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}} = \hat{f}^c(Y_0', Y_i', Y_4', q_i'),$$

$$e^{-im\mathbf{v}\hat{\mathbf{x}}}\beta(Y_0, Y_i, Y_4, q_i) = \beta(Y_0', Y_i', Y_4', q_i'), \tag{127}$$

где

$$Y_0' = Y_0,\ \ Y_i' = Y_i + Y_0 v_i,\ \ Y_4' = Y_4 + Y_i m v_i + Y_0\frac{mv^2}{2},$$

$$q_i' = q_i - mv_i. \tag{128}$$

Термодинамический потенциал $\omega(Y_\alpha, q_i)$ $(\alpha = 0,1,2,3,4)$ зависит от параметров Y_α как явно, так и через функции $\hat{f}^c$ и β. Поэтому, подставляя в формулу (42) для термодинамического потенциала $\omega(Y_\alpha, q_i)$ Y'_α вместо Y_α и используя (127), а также (128), получим для галилеево-инвариантной бозе-жидкости

$$\omega(Y_\alpha, q_i) = \omega(Y'_\alpha, q'_i),$$

откуда следует

$$\omega(Y_0, Y_i, Y_4, q_i) = \omega(Y'_0, Y'_i, Y'_4, 0) \equiv \omega(Y'_0, Y'_i, Y'_4),$$

$$Y'_0 = Y_0, \quad Y'_i = Y_0 + Y_0 m^{-1} q_i, \quad Y'_4 + Y_4 + Y_i q_i + Y_0 \frac{q^2}{2m},$$

и формулы (124) приобретают вид

$$j_k = \frac{\sigma_n}{m} v_{nk} + \frac{\sigma_s}{m} v_{sk}, \quad t_{ik} = -\frac{\omega}{Y_0}\delta_{ik} + \sigma_s v_{si} v_{sk} + \sigma_n v_{ni} v_{nk},$$

$$w_k = v_{nk}\left(-\frac{\omega}{Y_0} + \varepsilon + \frac{\sigma_s}{m}\frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}\right) - v_{sk}\frac{\sigma_s}{m}\frac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}, \tag{129}$$

причем $m^* = m$, $\sigma_s = \sigma - \sigma_n$. Уравнения (129) в этом случае представляют собой уравнения двухжидкостной гидродинамики Ландау (см. [2]).

При построении гидродинамики удобно использовать 4-векторный формализм: $x^\mu \equiv (x^k \equiv x_k, x^0 = t)$, $Y_\mu \equiv (Y_k, Y_0)$, $q_\mu \equiv (q_k, q_0)$, $q_0 = \dfrac{Y_4 + Y_i q_i}{Y_0}$ (связь между ковариантными и контравариантными компонентами осуществляется с помощью диагонального матричного тензора $g_{\mu\nu}$ с компонентами $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; величины Y_μ, q_μ являются формальными 4-векторами, так как изучаемая система не является, вообще говоря, релятивистски-инвариантной). От переменных Y_0, Y_k, Y_4, q_k перейдем к новым переменным Y_μ, q_μ. При этом вместо потенциала $\omega(Y_0, Y_i, Y_4, q_i)$ будем использовать потенциал Гиббса $\omega' = \dfrac{\omega}{Y_0} = \omega'(Y_\mu, q_\mu)$.

Легко видеть, что плотности потоков можно представить в виде

$$j^{\mu} = \frac{\partial \omega'}{\partial q_{\mu}}, \quad t^{\mu\nu} = -\frac{\partial \omega' Y^{\nu}}{\partial Y_{\mu}} + q^{\mu} \frac{\partial \omega'}{\partial q_{\nu}} \tag{130}$$

(эти величины представляют собой формальные 4-тензор энергии-импульса и 4-вектор тока квазичастиц соответственно), а уравнения гидродинамики сверхтекучей бозе-жидкости имеют вид

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial j^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{131}$$

Уравнения движения для сверхтекучего импульса q_i (122) вместе с условием потенциальности вектора $\mathbf{q}$ ($\mathrm{rot}\, \mathbf{q} = 0$) объединяются в уравнение

$$\frac{\partial q^{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial q^{\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \tag{132}$$

причем 4-импульс q_{ν} связан с фазой φ соотношением $q_{\nu} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}}$. В случае релятивистски-инвариантной бозе-жидкости Y_{μ}, q_{μ} образуют не формальные, а реальные 4-векторы, и уравнения (131), (132) образуют систему релятивистски-инвариантных уравнений гидродинамики (см. [47,54]) сверхтекучей бозе-жидкости, причем $\omega' = \omega'(Y_{\mu}Y^{\mu}, q_{\mu}q^{\mu}, Y_{\mu}q^{\mu})$.

Рассмотрим теперь состояния сверхтекучей бозе-жидкости, близкие к состоянию статистического равновесия. Эти состояния будут описываться линеаризованными уравнениями сверхтекучей гидродинамики, с помощью которых можно найти собственные колебания в системе.

Чтобы линеаризовать уравнения (131), (132) около состояния статистического равновесия, представим параметры Y_{μ}, q_{μ} в виде

$$Y_{\mu}(x, t) = \overline{Y}_{\mu} + \delta Y_{\mu}(x, t), \quad q_{\mu}(x, t) = \overline{q}_{\mu} + \delta q_{\mu}(x, t),$$

где $\overline{Y}_{\mu}, \overline{q}_{\mu}$ — равновесные значения величин Y_{μ}, q_{μ}, $\mu = 0,1,2,3$, и $\delta Y_{\mu}, \delta q_{\mu}$ — их отклонения от равновесных значений.

Переходя к фурье-компонентам

$$\delta Y_{\mu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x\, e^{-ikx} \delta Y_{\mu}(x), \quad \delta q_{\mu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x\, e^{-ikx} \delta q_{\mu}(x),$$

из (131), (132) имеем

$$k_\nu \left(\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial Y_\lambda} \delta Y_\lambda (k) + \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda (k) \right) = 0,$$

$$k_\nu \left(\frac{\partial j^\nu}{\partial Y_\lambda} \delta Y_\lambda (k) + \frac{\partial j^\nu}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda (k) \right) = 0, \qquad (133)$$

$$k_\nu \delta q_\mu (k) - k_\mu \delta q_\nu (k) = 0,$$

где, согласно (130),

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial Y_\lambda} = - \frac{\partial^2 Y^\nu \omega'}{\partial Y_\mu \partial Y_\lambda} + q^\mu \frac{\partial j^\nu}{\partial Y_\lambda},$$

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial q_\lambda} = g^{\mu\lambda} j^\nu - g^{\mu\nu} j^\lambda - Y^\nu \frac{\partial j^\lambda}{\partial Y_\mu} + q^\mu \frac{\partial j^\nu}{\partial q_\lambda}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (133) и используя соотношение $\delta q_\lambda (k) = \mathrm{i} k_\lambda \delta \varphi (k)$, получим

$$\delta Y_\lambda (k) D^{\mu\nu} + \mathrm{i}\, \delta \varphi (k) (kY) a^\mu = 0,$$

$$a^\lambda \delta Y_\lambda (k) + \mathrm{i} b \delta \varphi (k) = 0. \qquad (134)$$

Здесь

$$D^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 (kY) \omega'}{\partial Y_\mu \partial Y_\nu} = (kY) B^{\mu\nu} + k^\nu A^\mu + k^\mu A^\nu,$$

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \omega'}{\partial Y_\mu \partial Y_\nu}, \quad A^\nu = \frac{\partial \omega'}{\partial Y_\nu}, \quad a^\lambda = k_\nu \frac{\partial^2 \omega'}{\partial Y_\lambda \partial q_\nu}, \quad b = k_\nu k_\mu \frac{\partial^2 \omega'}{\partial q_\nu \partial q_\mu}.$$

Выразив из первого уравнения (134) δY_λ через $\delta \varphi$ и подставив полученное выражение во второе уравнение (134), найдем дисперсионное уравнение для колебаний сверхтекучей бозе-жидкости:

$$b - a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu} a^\mu (kY) = 0. \qquad (135)$$

При $Y_i = q_i = 0$ дисперсионное уравнение (135) с учетом (116), (123), (124) можно записать в виде

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (B + (\sigma - \sigma_n - \sigma_s) C) - k^4 \frac{s \sigma_s}{Y_0 \sigma_n} - A (m^*)^{-2} = 0, \qquad (136)$$

где

$$A = \frac{\partial P}{\partial \zeta_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_4} \left(\frac{Y_4}{Y_0} \right) - \frac{\partial P}{\partial \zeta_4} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \left(\frac{Y_4}{Y_0} \right),$$

$$B = \frac{1}{m^*} \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta_4} - \frac{Y_4}{Y_0} \frac{\partial P}{\partial \zeta_0} \right) + \frac{s}{Y_0 \sigma_n} \left[\frac{\partial P}{\partial \zeta_0} + \frac{\sigma_s}{m^*} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \left(\frac{Y_4}{Y_0} \right) \right],$$

$$C = \frac{1}{(m^*)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_4} \left(\frac{Y_4}{Y_0} \right) - \frac{Y_4}{Y_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \left(\frac{Y_4}{Y_0} \right) + m^* \frac{s}{Y_0 \sigma_n} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \left(\frac{Y_4}{Y_0} \right) \right],$$

(s — плотность энтропии, $P = -\omega'$ — давление).

В случае галилеево-инвариантной бозе-жидкости ($\sigma = \sigma_n + \sigma_s$, $m^* = m$) A и B принимают вид

$$A = -m^2 \frac{s}{\sigma^2 C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_T, \quad B = \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_s + \frac{\sigma_s T s^2}{\sigma_n \sigma^2 C_V},$$

где C_V — теплоемкость единицы массы при постоянном объеме, $Y_0^{-1} = T$ — температура. В этом случае решениями дисперсионного уравнения являются хорошо известные выражения [2] для скоростей первого и второго звуков:

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_{s/\sigma} + \frac{T s^2 \sigma_s}{C_V \sigma^2 \sigma_n} \right] \pm$$

$$\pm \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_{s/\sigma} + \frac{T s^2 \sigma_s}{C_V \sigma^2 \sigma_n} \right] - \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_T \frac{T s^2 \sigma_s}{C_V \sigma^2 \sigma_n} \right\}^{1/2}$$

(индексу 1 соответствует знак «+», а индексу 2 — знак «−»).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе задания энергии бозе-системы как функционала нормальных и аномальных функций распределения, а также конденсатных амплитуд построена полуфеноменологическая теория сверхтекучей бозе-жидкости.

С помощью термодинамического вариационного принципа, связанного с тем, что энтропия системы в состоянии статистического равновесия должна принимать максимальное значение при фиксированных аддитивных интегралах движения, в настоящем обзоре получены наглядные, с физической точки зрения, уравнения самосогласования для определения равновесных нормальных и аномальных функций распределения и конденсатных амплитуд.

Дан вывод кинетических уравнений для нормальных и аномальных функций распределения и конденсатных амплитуд, на основе которых исследованы пространственно-однородные колебания бозе-жидкости в области достаточно больших частот ($\omega \tau \gg 1$).

Показано, что в том случае, когда в качестве функционала энергии взят функционал, полученный в микроскопической теории в первом борновском приближении, результаты полностью соответствуют теории Боголюбова [5,13] для слабонеидеального бозе-газа.

Из сформулированного выше вариационного принципа без конкретизации функционала энергии найдены потоки аддитивных интегралов движения в состоянии статистического равновесия. На основе принципа локальности состояния статистического равновесия и полученных кинетических уравнений найдены уравнения двухжидкостной идеальной гидродинамики сверхтекучей бозе-жидкости. Эти уравнения обобщают уравнения двухжидкостной гидродинамики Ландау на случай, когда функционал энергии неинвариантен по отношению к преобразованию Галилея. Если же функционал энергии галилеево-инвариантен, то эти уравнения переходят в уравнения двухжидкостной гидродинамики Ландау.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Капица П.Л.** — ДАН СССР, 1938, т.18, 1, с.29.
2. **Ландау Л.Д.** — ЖЭТФ, 1941, т.11, вып.6, с.592—614.
3. **Ландау Л.Д.** — ЖЭТФ, 1944, т.14, с.112.
4. **Халатников И.М.** — ЖЭТФ, 1952, т.23, с.8.
5. **Боголюбов Н.Н.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, т.11, 1, с.77; J.Phys.USSR, 1947, vol.9, p.23.
6. **Feynman R.P** — Phys.Rev., 1954, vol.94, No.7, p.262—277.
7. **Hohenberg P.C., Platzman P.M.** — Phys.Rev., 1966, vol.152, No.1, p.198—200.
8. **Докукин Е.Б., Козлов Ж.А., Парфенов В.А.** — ЖЭТФ, 1978, т.75, 6, с.2273—2279.
9. **Благовещенский Н.М., Богоявленский И.В., Карнацевич Л.В. и др.** — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.37, вып.3, с.152—154;
   Bogoyvlenskii I.V., Milenko Yu.Ya., Karnatsevich L.V. et al. — Cryogenics, 1983, No.3, p.498—500.
10. **Богоявленский И.В., Карнацевич Л.В., Козлов Ж.А., Пучков А.В.** — ФНТ, 1990, т.16, №2, с.139—163.

11. Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R. — Phys.Rev., 1957, vol.108, No.5, p.1175—1204.
12. Боголюбов Н.Н — ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.58—65; с.73—79.
13. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) — Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
14. Боголюбов Н.Н. — ДАН СССР, 1958, т.52, с.119.
15. Мигдал А.Б. — ЖЭТФ, 1959, т.37, вып.1(7), с.249—262.
16. Смирнов А.В., Толоконников С.В., Фаянс С.А. — ЯФ, 1988, т.48, вып.6(12), с.1661—1673.
17. Кузьменко Н.К., Михайлов В.М. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.4, с.830—877.
18. Мигдал А.Б. — ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.6(12), с.2209—2224.
19. Седракян Д.М., Шахабасян К.М. — УФН, 1991, т.161, 7, с.3—40.
20. Линде А.Д. — Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
21. Вакарчук И.А., Юхновский И.Р. — ТМФ, 1979, т.40, 1, с.100—111.
22. Вакарчук И.А. — ТМФ, 1985, т.65, 2, с.285—295.
23. Боголюбов Н.Н. — Препринт ОИЯИ, Д-781, Дубна, 1961.
24. Goldstone J. — Nuovo Cimento, 1961, vol.19, No.1, p.154—164.
25. Горьков Л.П. — ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.3, с.735—739.
26. Элиашберг Г.М. — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.966.
27. Nambu Y. — Phys.Rev., 1960, No.3, vol.117, p.648—663.
28. Зубарев Д.Н. — УФН, 1960, т.71, с.71—116.
29. Беляев С.Т. — ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.2, с.433—446; ibid, с.417—432.
30. Соловьев В.Г. — ЖЭТФ, 1958, т.35, вып.3(9), с.823—825.
31. Церковников Ю.А. — ТМФ, 1976, т.26, 1, с.77—95.
32. Церковников Ю.А. — Труды Межд. симп. по избр. проблемам статист. механики. ОИЯИ Д17-88-95, Дубна, 1988, с.387—396.
33. Попов В.Н. — Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
34. Брусов П.Н., Попов В.Н. — Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей. М.: Наука, 1988.
35. Брусов П.Н., Настенька М.О., Филатова-Новоселова Т.В. и др. — ЖЭТФ, 1991, т.99, вып.5, с.1495—1503.
36. Girardean M., Arnowitt R. — Phys.Rev., 1959, vol.113, p.755.
37. Coniglio A., Marinaro M. — Nuovo Cim.B, 1967, vol.48, No.2, p.249—261.
38. Кондратенко П.С. — ТМФ, 1975, т.22, 2, с.278—287.
39. Непомнящий Ю.А., Пашицкий Э.А. — ЖЭТФ, 1990, т.98, вып.1(7), с.178—195.
40. Bednorz J.G., Muller K.A. — Z.Phys.B, 1986, vol.64, p.189; Rev. Mod. Phys., 1988, vol.60, p.585.
41. Varma C.M. — Int. Conf. on Superconductivity. Jan., 1990. Bangalore, India. Abstract, p.7.
42. Akhieser A.I., Peletminskij S.V., Yatsenko A.A. — Phys.Lett.A., 1990, vol.151, No.1,2, p.99—102.
43. Friedberg R., Lee T.D. — Phys.Lett.A, 1989, vol.138, No.8, p.423—426.
44. Боголюбов Н.Н. — Препринт ОИЯИ Р-1395, Дубна, 1963.
45. Морозов В.Г. — ТМФ, 1976, т.28, 2, с.267—280.
46. Ковалевский М.Ю., Лавриненко Н.М., Пелетминский С.В., Соколовский А.И. — ТМФ, 1982, т.50, 3, с.450—465.
47. Боголюбов Н.Н. (мл.), Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. и др. — ЭЧАЯ, 1985, т.16, вып.4, с.875—926.
48. Боголюбов Н.Н. (мл.), Ковалевский М.Ю., Курбатов А.М. и др. — УФН, 1989, т.159, вып.4, с.585—620.
49. Ландау Л.Д. — ЖЭТФ, 1956, т.30, с.1058—1064.

50. **Силин В.П.** — ЖЭТФ, 1957, т.33, с.495—500.
51. **Красильников В.В., Пелетминский С.В., Яценко А.А., Рожкова А.А.** — ЭЧАЯ, 1988, т.19, вып.6, с.1440—1446;
Krasil'nikov V.V., Peletminskij S.V., Yatsenko A.A. — Physica A, 1990, vol.162, p.513—541.
52. **Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.** — Методы статистической физики. М.: Наука, 1977, с.368.
53. **Церковников Ю.А.** — ДАН СССР, 1962, т.143, 4, с.832—835.
54. **Лебедев В.В., Халатников И.М.** — ЖЭТФ, 1982, т.83, вып.5(11), с.1601—1614.