

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СОЛЕНОИДОВ

Г.Н.Афанасьев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор общефизических приложений тороидальных соленоидов. Рассматриваются следующие вопросы: статические и нестатические электрические и магнитные соленоиды, электрические векторные потенциалы, волны электромагнитных потенциалов, конкретная реализация статических и нестатических соленоидов, эффект Ааронова — Кашера для тороидальных соленоидов, экспериментальное обоснование эффекта Ааронова — Бома.

The physical applications of the toroidal solenoids are studied. The following questions are concerned: static and nonstatic electric and magnetic solenoids and their concrete realizations, 3-dimensional analogue of the Aharonov — Casher effect, the experimental verification of the Aharonov — Bohm effect.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Тороидальный соленоид (ТС) — уникальный объект, обладающий рядом удивительных свойств. Упомянем только некоторые из них. В зависимости от направления тока на поверхности соленоида магнитное поле может быть полностью заключено как внутри, так и вне его [1—3]. Это обстоятельство благоприятствует применению ТС в установках по термоядерному синтезу [4], для построения эффективных накопителей электромагнитной энергии [5], в качестве излучателя радиоволн [6], для проверки основ электромагнитной теории Максвелла [7] и квантовой механики [8—10]. Мультипольное разложение электромагнитного поля тороидального соленоида содержит новый тип мультипольных моментов — тороидальные моменты [11, 12]. Замкнутые цепочки произвольной формы, составленные из тороидальных моментов, обладают удивительным свойством: векторный потенциал не выходит за их пределы, то есть они являются полностью самоэкранированными объектами [13]. Далее, магнитное поле покоящегося или равномерно движущегося в вакууме соленоида не выходит за его пределы. При равномерном движении в среде с  $\epsilon \mu \neq 1$  магнитное поле выходит за пределы тороидального соленоида [14].

В предыдущих двух обзорах [15,16] мы рассмотрели свойства тороидальных соленоидов. Цель данного обзора заключается в рассмотрении конкретных физических приложений тороидальных соленоидов. Мы будем придерживаться следующего плана изложения. В разд.2 даны сведения о магнитных тороидальных соленоидах (МТС), необходимые нам для дальнейшего изложения. В разд.3 строится набор векторных потенциалов (ВП) МТС, обладающих различным асимптотическим поведением [17]. Несмотря на это сечения рассеяния заряженных частиц на таких ВП оказываются одними и теми же. Это отражает неоднозначность обратной квантовой задачи рассеяния. В разд.4 рассматривается поведение МТС во внешнем магнитном поле. Для бесконечно малого МТС получается система уравнений, связывающая координаты центра тяжести ТС и углы его ориентации. Попутно выясняется физический смысл полученных в разд.3 ВП с различным асимптотическим поведением: они соответствуют тороидальным моментам высшей мультипольности [12,18]. В разд.5 доказываем существование эффекта Ааронова — Кашера [19] для ТС и его бесконечно малых аналогов — тороидальных моментов. Оказывается, точечные тороидальные соленоиды (т.е. моменты) должны квантовым образом рассеиваться на кулоновском поле. В разд.6 рассматриваются самоэкранированные электромагнитные объекты [20]. Под ними мы понимаем такие конфигурации зарядов и токов, для которых магнитное поле везде равно нулю, а электрическое отлично от нуля только в ограниченной области пространства. Из электрических диполей сначала строится статический электрический соленоид. Электрическая индукция оказывается отличной от нуля только внутри соленоида. Вне его отличен от нуля электрический векторный потенциал, который нельзя устранить калибровочным преобразованием. Возникает вопрос о физическом смысле такого потенциала и экспериментальном подтверждении его существования. С этой целью решаются известные электростатические задачи (поляризованная сфера и аксиально-симметричный эллипсоид) с помощью как обычного скалярного потенциала, так и электрического векторного потенциала. Они приводят к одним и тем же результатам. При фиксированной малой полуоси эллипсоида и безгранично увеличивающейся большой полуоси вымирают электрический скалярный потенциал и электрическая напряженность  $E$ , тогда как индукция  $D$  оказывается сосредоточенной внутри эллипсоида. При этом электрический вектор-потенциал эллипсоида переходит в электрический вектор-потенциал цилиндрического соленоида. Затем рассматривается нестатический электрический соленоид, который содержит как зарядовую, так и токовую плотности. Вне такого соленоида возникают волны электромагнитных потенциалов, которые распространяются со скоростью света [21,22]. Они не переносят энергии,

поскольку в них  $E = H = 0$ . Возникает вопрос о физическом смысле таких потенциальных волн, об их измеримости. В разд. 7 анализируется понятие квантовой непроницаемости [23]. Поверхность называется непроницаемой для падающих частиц, если на ней исчезает нормальная компонента квантово-механического тока вероятности. Оказывается, добиться исчезновения этого тока можно бесконечным числом способов. Они соответствуют физически различным ситуациям и приводят к различным наблюдаемым, например, сечениям рассеяния падающих частиц. В разд.8 рассматривается вопрос о возможности наблюдения эффекта Ааронова — Бома в односвязных пространствах [23]. Это оказывается возможным из-за различия математического и физического понятий односвязности. В разд.9 рассмотрено рассеяние электронов на тороидальном соленоиде. Проанализированы известные эксперименты Тономуры по проверке эффекта Ааронова — Бома. Эти фундаментальные эксперименты затрагивают самые основы квантовой механики.

## 2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТОРОИДАЛЬНЫХ СОЛЕНИДАХ

Рассмотрим тор. Его поверхность определяется уравнением

$$(\rho - d)^2 + z^2 = R^2. \quad (1)$$

Пусть постоянный полоидальный ток (рис.1) течет по поверхности тора. Чтобы записать этот ток в явном виде, введем координаты

$$\rho = d + \tilde{R} \cos \psi, \quad z = \tilde{R} \sin \psi.$$

Значение  $\tilde{R} = R$  соответствует поверхности тора. Запишем бесконечно малые элементы объема и поверхности тора:

$$dV = \tilde{R}(d + \tilde{R} \cos \psi) d\tilde{R} d\psi d\varphi, \quad dS = R(d + R \cos \psi) d\psi d\varphi. \quad (2)$$

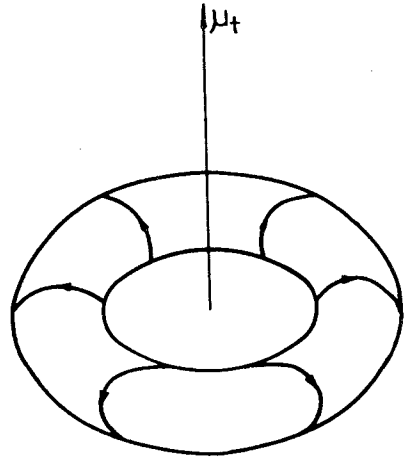
Плотность упомянутого полоидального тока в координатах  $\tilde{R}, \psi$  имеет вид

$$\mathbf{j} = -\frac{gc}{4\pi} \frac{\delta(\tilde{R} - R)}{d + \tilde{R} \cos \psi} \mathbf{n}_\psi. \quad (3)$$

Здесь  $g = 2NI/c$ ,  $I$  — ток в отдельном витке,  $N$  — число витков в обмотке ТС,  $\mathbf{n}_\psi$  — единичный вектор, определяющий направление тока на поверхности тора:

$$\mathbf{n}_\psi = \mathbf{n}_z \cos \psi - (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \sin \psi. \quad (4)$$

Рис.1. Полоидальный ток на поверхности тороидального соленоида и связанный с ним тороидальный момент



Константу  $g$  можно также выразить через магнитный поток  $\Phi$  и геометрические размеры (рис.2) тора  $T$ :

$g = \Phi [2\pi(d - \sqrt{d^2 - r^2})]^{-1}$ . В стационарном случае магнитное поле (МП)  $H$  равно нулю вне ТС. Внутри него отлична от нуля только  $\varphi$ -компонента  $H$ :  $H_\varphi = g/\rho$ . Здесь  $\rho$  — расстояние от оси симметрии ТС ( $\rho = d + \bar{R} \cos \psi$ ).

В дальнейшем нам понадобятся также тороидальные координаты  $\mu, \theta, \varphi$ . Они вводятся следующим образом:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \mu \cos \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \mu \sin \varphi}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}, \quad z = \frac{a \sin \theta}{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta} \quad (5)$$

$$(0 < \mu < \infty, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi).$$

При заданном значении  $\mu$  точки  $P(x, y, z)$  (где  $x, y, z$  определены соотношениями (5)) заполняют поверхность тора  $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$  с параметрами  $d = a \operatorname{cth} \mu, R = a/\operatorname{sh} \mu$ . Пусть  $\mu = \mu_0$  соответствует поверхности тора  $T$  (рис.2). Тогда при  $\mu > \mu_0$  точка  $P$  лежит внутри тора  $T$ , а при  $\mu < \mu_0$  —

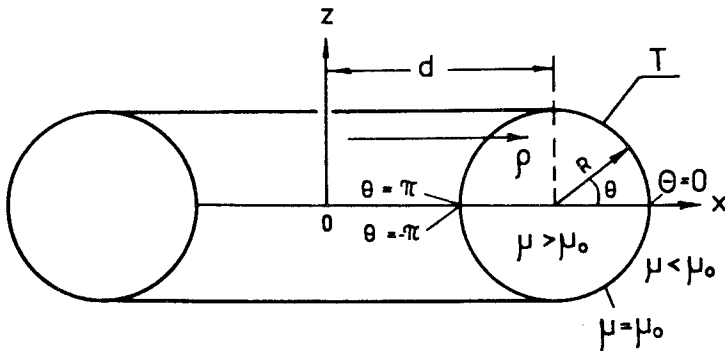


Рис. 2. Геометрические размеры соленоида

вне его. Значение угла  $\theta$  испытывает скачок от  $-\pi$  до  $\pi$  при пересечении круга радиуса  $d-R$ , лежащего в плоскости  $z=0$ . Элементы объема и площади (2), плотность тока (3) и единичный вектор (4) в тороидальных координатах выглядят следующим образом:

$$dV = \frac{a^3 \operatorname{sh} \mu \, d\mu \, d\theta \, d\varphi}{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^3}, \quad dS = \frac{a^2 \operatorname{sh} \mu_0 \, d\theta \, d\varphi}{(\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^2},$$

$$\mathbf{j} = -\frac{gc}{4\pi a^2} \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\operatorname{sh} \mu_0} (\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^2 \mathbf{n}_\theta,$$

$$\mathbf{n}_\theta = [(\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \operatorname{sh} \mu_0 \sin \theta +$$

$$+ \mathbf{n}_z (1 - \operatorname{ch} \mu_0 \cos \theta)] (\operatorname{ch} \mu_0 - \cos \theta)^{-1}.$$

Векторный потенциал ТС был получен в [3]. В интегральной форме неисчезающие компоненты ВП равны

$$A_z = \frac{g\sqrt{R}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d - \rho \cos \varphi}{q^{3/2}} Q_{1/2}(\operatorname{ch} \mu),$$

$$A_\rho = \frac{g\sqrt{R}}{2\pi} z \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{q^{3/2}} Q_{1/2}(\operatorname{ch} \mu) \quad (6)$$

$$(\operatorname{ch} \mu = \frac{r^2 + d^2 + R^2 - 2d\rho \cos \varphi}{2Rq}, \quad q^2 = (\rho \cos \varphi - d)^2 + z^2, \quad r^2 = \rho^2 + z^2,$$

$Q_\nu(x)$  — функция Лежандра 2-го рода). Для бесконечно тонкого ТС ( $R \ll d$ ) эти интегралы берутся в явном виде:

$$A_z = \frac{gR^2}{2(d\rho)^{3/2}} \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_1} [\rho Q_{1/2}^1(\operatorname{ch} \mu_1) - d Q_{-1/2}^1(\operatorname{ch} \mu_1)],$$

$$A_\rho = -\frac{gR^2 z}{2(d\rho)^{3/2}} \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_1} Q_{1/2}^1(\operatorname{ch} \mu_1), \quad \operatorname{ch} \mu_1 = \frac{r^2 + d^2}{2d\rho}. \quad (7)$$

На больших расстояниях ВП убывает как  $r^{-3}$ :

$$A_z \sim \frac{1}{8} \pi g d R^2 \frac{1 + 3 \cos 2\theta_s}{r^3}, \quad A_\rho \sim \frac{3}{8} \pi g d R^2 \frac{\sin 2\theta_s}{r^3} \quad (8)$$

( $r, \theta_s$  — обычные сферические координаты).

Вместо тока (3) иногда удобно ввести намагничение:  $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ . Оно отлично от нуля целиком внутри ТС и равно:

$$\mathbf{M} = M \mathbf{n}_\varphi, \quad M = \frac{g}{4\pi} \frac{\theta(R - \tilde{R})}{d + \tilde{R} \cos \psi} = \frac{g}{4\pi a} \frac{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}{\operatorname{sh} \mu} \theta(\mu - \mu_0). \quad (9)$$

Здесь  $\theta(x)$  — ступенчатая функция ( $\theta(x)$  равна нулю при  $x < 0$  и единице при  $x > 0$ ).

Более общее распределение токов, при которых  $\mathbf{H} = 0$  вне ТС, было получено в [17]. Оно имеет вид

$$\mathbf{j} = - \frac{f_1(\tilde{R}) \theta(R_1 - \tilde{R})}{d + \tilde{R} \cos \psi} \mathbf{n}_\psi = - \frac{1}{\operatorname{sh} \mu} f(\mu) \theta(\mu - \mu_1) (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^2 \mathbf{n}_\theta. \quad (10)$$

Наличие функции  $\theta$  предполагает, что токи заключены внутри тора радиуса  $R_1 = a/\operatorname{sh} \mu_1$ . Токовое распределение (3) получается при следующем частном выборе функций  $f, f_1$ :

$$f_1 = \frac{gc}{4\pi} \delta(\tilde{R} - R), \quad f = \frac{gc}{4\pi a^2} \delta(\mu - \mu_0), \quad R < R_1, \quad \mu_0 > \mu_1.$$

Соответствующие току (10) напряженность МП, намагничение и поток МП равны

$$H_\varphi = \frac{4\pi}{c} \frac{\theta(R - \tilde{R})}{d + \tilde{R} \cos \psi} \int_{\tilde{R}}^R f_1(x) dx = \frac{4\pi a}{c} \frac{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}{\operatorname{sh} \mu} \int_{\mu_1}^{\mu} f(\mu) d\mu,$$

$$M_\varphi = \frac{1}{c} \frac{\theta(R - \tilde{R})}{d + \tilde{R} \cos \psi} \int_{\tilde{R}}^R f_1(x) dx = \frac{a}{c} \frac{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}{\operatorname{sh} \mu} \int_{\mu_1}^{\mu} f(\mu) d\mu,$$

$$\Phi = \frac{8\pi^2}{c} \int_0^R (d - \sqrt{d^2 - x^2}) f_1(x) dx = \frac{8\pi^2 a^3}{c} \int_{\mu_1}^{\infty} (\operatorname{cth} \mu - 1) f(\mu) d\mu.$$

Векторные потенциалы, отвечающие току (10), явно вычислены в [16,17]. В общем случае (т.е. при произвольных функциях  $f, f_1$ ) на больших расстояниях они убывают как  $r^{-3}$ :

$$A_\rho \sim \frac{3}{2} \frac{\pi^2 a^5}{r^3 c} \sin 2\theta_s \alpha(\mu_1), \quad A_z \sim \frac{\pi^2 a^5}{2r^3 c} (1 + \cos 2\theta_s) \alpha(\mu_1),$$

$$\alpha(\mu_1) = \int_{\mu_1}^{\infty} d\mu \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh}^3 \mu} f(\mu). \quad (11)$$

Эти выражения справедливы и для точечного ( $a \rightarrow 0$ ) тороидального соленоида.

### 3. ВЕКТОРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С РАЗЛИЧНЫМ АСИМПТОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

Попытаемся распорядиться свободой в выборе функций  $f(f_l)$  таким образом, чтобы изменить асимптотику ВП. Для этого нам понадобятся члены более высокого порядка в асимптотическом разложении ВП. Такое разложение для плотности тока (3) было получено в [16,24]:

$$A_z = -\frac{1}{2} gR \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta_s) f_l^0,$$

$$A_\rho = \frac{1}{2} gR \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{1}{l(l+1)} P_l^1(\cos \theta) f_l^1. \quad (12)$$

Здесь

$$f_l^0 = \int d\psi \cos \psi \rho^l P_l(R \sin \psi / \rho), \quad f_l^1 = \int d\psi \sin \psi \rho^l P_l^1(R \sin \psi / \rho),$$

$$\rho = (d^2 + R^2 + 2dR \cos \psi)^{1/2}.$$

Суммирование в (12) производится по четным значениям  $l$ . Отличие этих соотношений от аналогичных, приведенных в [16,24], связано с тем, что нормированные на единицу полиномы Лежандра ( $Y_l^m = 1/\sqrt{2\pi} (-1)^m P_l^m$ ) были использованы в [16,24], тогда как обычная нормировка

$$\int_{-1}^1 |P_l^m(x)|^2 dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

принята здесь. Нам понадобятся первые два члена в разложении (12):

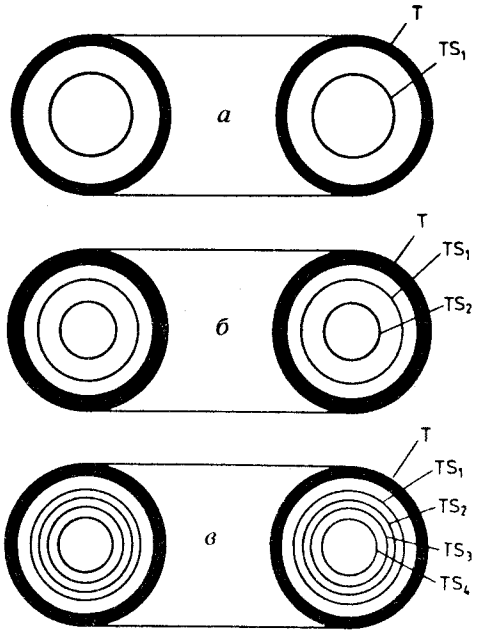
$$A_z \approx \frac{\pi g d R^2}{2r^3} \left[ P_2(\cos \theta) - \frac{3}{2} \frac{d^2 - R^2/4}{r^2} P_4(\cos \theta) \right],$$

$$A_\rho \approx \frac{\pi g d R^2}{4r^3} \left[ P_2^1(\cos \theta) - \frac{3}{4} \frac{d^2 - R^2/4}{r^2} P_4^1(\cos \theta) \right].$$

Рассмотрим два концентрических соленоида  $ТС_1$  и  $ТС_2$  (рис.3,б) с параметрами  $d_1, R_1, \Phi_1$  и  $d_2, R_2, \Phi_2$ . Суммарный ВП равен

$$A_z^{(1,2)} = A_z^{(1)} + A_z^{(2)}, \quad A_\rho^{(1,2)} = A_\rho^{(1)} + A_\rho^{(2)}.$$

Рис. 3. Внутри непроницаемого тора Т показаны конфигурации токов. Они индуцируют калибровочно-неинвариантные векторные потенциалы, дающие одно и то же квантово-механическое сечение рассеяния заряженных частиц. Векторный потенциал концентрируется все ближе к соленоиду по мере продвижения сверху вниз



Подберем параметры соленоидов таким образом, чтобы компенсировать ведущие члены ( $\sim r^{-3}$ ) в асимптотике ВП. Это имеет место, если

$$g_1 d_1 R_1^2 + g_2 d_2 R_2^2 = 0. \quad (13)$$

Подставляя в (13) явные выражения  $g, d, R$  для каждого из

соленоидов ( $d_i = a \operatorname{cth} \mu_i, R_i = a / \operatorname{sh} \mu_i, g_i = \Phi_i |a (\operatorname{cth} \mu_i - 1)|^{-1}$ ) и полагая  $y_i = \operatorname{cth} \mu_i$ , получаем следующее соотношение:

$$\Phi_1 y_1 (y_1 + 1) + \Phi_2 y_2 (y_2 + 1) = 0.$$

Это уравнение можно разрешить относительно  $y_2$ :

$$y_2 = -\frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{4} - \frac{\Phi_1}{\Phi_2} y_1 (y_1 + 1) \right]^{1/2}.$$

Суммарный ВП убывает теперь как  $r^{-5}$ :

$$\begin{aligned} A_z^{(1,2)} &\sim -\frac{9}{32} \Phi_1 a^2 y_1 (y_1 + 1) (y_1^2 - y_2^2) \frac{1}{r^5} P_4(\cos \theta_s), \\ A_\rho^{(1,2)} &\sim -\frac{9}{128} \Phi_1 a^2 y_1 (y_1 + 1) (y_1^2 - y_2^2) \frac{1}{r^5} P_4^1(\cos \theta_s). \end{aligned} \quad (14)$$

Окружим  $ТС_1$  и  $ТС_2$  непроницаемым (для падающих заряженных частиц) тором Т. Пусть суммарный магнитный поток  $ТС_1$  и  $ТС_2$  равен  $\Phi$  (т.е.  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ ). Квантовое сечение рассеяния заряженных частиц зависит только от геометрических параметров непроницаемого тора Т и



магнитного потока  $\Phi$  внутри тора (см. разд.9). Это означает, что конфигурации токов, изображенные на рис.3,а (внутри Т один ТС с магнитным потоком  $\Phi$ ) и рис.3,б (внутри Т два ТС с суммарным магнитным потоком  $\Phi$ ), физически не различимы несмотря на различное поведение ВП ( $\sim r^{-3}$  для рис.3,а и  $r^{-5}$  для рис.3,б). Эти ВП не связаны калибровочным преобразованием, поскольку им соответствуют различные распределения магнитного поля  $H$  внутри тора Т. Эту игру можно продолжить дальше. Возьмем (в дополнение к ТС<sub>1</sub> и ТС<sub>2</sub>) соленоиды ТС<sub>3</sub> и ТС<sub>4</sub> с параметрами, удовлетворяющими соотношению  $g_3 d_3 R_3^2 + g_4 d_4 R_4^2 = 0$ . Суммарный ВП соленоидов ТС<sub>3</sub> и ТС<sub>4</sub> равен

$$A_z^{(3,4)} = -\frac{9}{32} \Phi_3 a^2 y_3 (y_3 + 1) (y_3^2 - y_4^2) r^{-5} P_4(\cos \theta_s),$$

$$A_\rho^{(3,4)} = -\frac{9}{128} \Phi_3 a^2 y_3 (y_3 + 1) (y_3^2 - y_4^2) r^{-5} P_4^1(\cos \theta_s).$$

Здесь  $y_3 = \text{cth } \mu_3$ ,  $y_4 = \text{cth } \mu_4$ . Полный ВП, генерируемый соленоидами ТС<sub>1</sub>+ТС<sub>4</sub>, равен

$$A_z = A_z^{(1,2)} + A_z^{(3,4)}, \quad A_\rho = A_\rho^{(1,2)} + A_\rho^{(3,4)}.$$

Потребуем теперь равенства суммарного магнитного потока  $\Phi$  ( $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = \Phi$ ) и исчезновения коэффициентов при  $r^{-5}$ . Это имеет место, если

$$\Phi_1 y_1 (y_1 + 1) (y_1^2 - y_2^2) + \Phi_3 y_3 (y_3 + 1) (y_3^2 - y_4^2) = 0.$$

Полученная таким образом конфигурация из четырех соленоидов (рис.3,в) генерирует ВП, убывающий на больших расстояниях как  $r^{-7}$ . Окружим теперь конфигурацию из четырех соленоидов ТС<sub>1</sub>+ТС<sub>4</sub> тем же самым непроницаемым тором Т (рис.3,в). При этом заряженные частицы будут испытывать то же самое квантовое рассеяние, что и в случаях рис.3,а и б. Совпадение квантово-механических сечений можно интерпретировать или как неоднозначность квантовой обратной задачи рассеяния (одно и то же сечение рассеяния при различных токовых распределениях внутри тора Т) или как неоднозначность обратной электромагнитной задачи (одни и те же  $E$ ,  $H$  вне тора Т генерируются различными токовыми распределениями внутри тора Т). Для каждой из конфигураций рис.3,а-в магнитный поток равен  $\Phi$ . Это означает, что  $\oint A_i dl$ , взятый вдоль любого замкнутого контура, проходящего через отверстие тора Т, равен  $\Phi$ . В частности, это справедливо для интеграла  $\int A_z dz$ , взятого

вдоль оси  $z$ . Поскольку  $A_z$  убывает все быстрее по мере продвижения от верхней части рис.3 к нижней, то ВП все более сосредоточивается вблизи тора Т. Физический смысл этих ВП будет рассмотрен в разд.4.

О реализациях статических соленоидов [13]. Рассмотрим произвольную конфигурацию токов  $j$ . Векторный потенциал

$$A = \frac{1}{c} \int G_0(r, r') j(r') dV', \quad G_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}.$$

Поскольку  $\text{div } j = 0$ , то вместо тока  $j$  можно ввести эквивалентное намагничение  $M$ :  $j = c \text{ rot } M$ . Тогда

$$A = \int G_0(r, r') \text{ rot } M(r') dV'. \quad (15)$$

Отсюда сразу находим, что

$$H = \text{rot } A = \text{grad} \int G_0 \text{ div } M dV' + 4\pi M. \quad (16)$$

Мы видим, что при  $\text{div } M = 0$  напряженность  $H$  отлична от нуля только внутри соленоида (намагничение по определению отлично от нуля только внутри соленоида). Следует соблюдать известную осторожность при использовании формализма намагничения. В только что рассмотренном случае тока  $j$ , текущего в вакууме, мы ввели фиктивное намагничение с помощью соотношения  $j = c \text{ rot } M$ . В этом случае  $B = H$  везде, причем  $H$  определялось выражением (16). Ситуация меняется, если мы имеем реальную среду с намагничением  $M$ . Тогда (в отсутствие токов) имеем  $B = H + 4\pi M$ ,  $\text{div } B = 0$ . Для векторного потенциала по-прежнему справедливо соотношение (15). В итоге получаем

$$B = \text{rot } A = H + 4\pi M, \quad (17)$$

где

$$H = \text{grad} \int G_0 \text{ div } M(r') dV'. \quad (18)$$

Отсюда следует, что при  $\text{div } M = 0$  напряженность магнитного поля  $H$  равна нулю везде, а магнитная индукция  $B$  отлична от нуля только внутри соленоида.

Из сказанного следует, что можно конструировать соленоиды произвольной формы, если заключенный внутри ее объем заполнить веществом с соленоидальным ( $\text{div } M = 0$ ) намагничением. В качестве примера укажем на равномерно намагниченную нить произвольной формы. Такие круговые и прямолинейные нити использовались в экспериментах по проверке существования эффекта Ааронова — Бома.

Представим теперь  $M$  в виде  $M = \text{rot } t$ . Тогда из (15) следует, что

$$A = \text{grad} \int G_0(r, r') \text{ div } t(r') dV' + 4\pi t(r).$$

Если  $\operatorname{div} \mathbf{t} = 0$ , то  $\mathbf{A} = 4\pi \mathbf{t}$ . Тогда векторный потенциал отличен от нуля только там, где  $\mathbf{t} \neq 0$  (т.е. опять-таки внутри соленоида). Это означает, что имеет место полная самоэкранировка. В частности, это справедливо для тороидальных моментов ( $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{t}$ ). Замкнутые цепочки, составленные из тороидальных моментов, являются, таким образом, полностью самоэкранированными объектами. При их произвольной деформации векторный потенциал не выходит за их пределы.

**Соленоиды с нетривиальной спиральностью.** Вернемся снова к обычным цилиндрическим и тороидальным соленоидам. Как хорошо известно, для цилиндрического соленоида с поверхностным током  $j \delta(\rho - R) \mathbf{n}_\varphi$  векторный потенциал  $A_\varphi$  равен  $\Phi/2\pi\rho$  вне соленоида ( $\rho > R$ ) и  $\Phi\rho/2\pi R^2$  внутри. Магнитное поле отлично от нуля только внутри соленоида:  $\mathbf{H} = \mathbf{n}_z \Phi/\pi R^2$ . Здесь  $\Phi$  — магнитный поток через сечение соленоида:  $\Phi = 4\pi^2 R^2 j/c$ . Заметим, что в данном случае векторный потенциал перпендикулярен магнитному полю. Поэтому  $S = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} dV = 0$ . Величина  $S$  называется спиральностью [64—66]. Таким образом, привычный нам цилиндрический соленоид обладает нулевой спиральностью. Вместо тока вводим эквивалентное намагничение. Для рассматриваемого цилиндрического соленоида оно равно  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n}_z$ ,  $M_0 = j/c$ . Векторный потенциал следующим образом связан с намагничеством:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Забудем теперь о токе и будем рассматривать соленоид как цилиндр, наполненный магнитным веществом с плотностью намагничения  $\mathbf{M}$ . Пусть у намагничения имеется  $\varphi$ -компонента (в дополнение к уже имевшейся  $z$ -компоненте):

$$\mathbf{M} = M_0(\mathbf{n}_z \cos \alpha + \mathbf{n}_\varphi \sin \alpha)$$

(т.е. линии намагничения имеют вид спиралей, равномерно распределенных внутри цилиндра и имеющих своей осью ось симметрии цилиндра.) Приведем теперь не исчезающие компоненты векторного потенциала и магнитного поля, соответствующие этому намагничению. Внутри цилиндра

$$A_z = 4\pi M_0(R - \rho) \sin \alpha, \quad A_\varphi = 2\pi\rho M_0 \cos \alpha,$$

$$B_z = 4\pi M_0 \cos \alpha, \quad B_\varphi = 4\pi M_0 \sin \alpha.$$

Вне цилиндра

$$A_z = 0, \quad A_\varphi = 2\pi R^2 M_0 \cos \alpha / \rho, \quad \mathbf{B} = 0.$$

В итоге для спиральности скрученного цилиндрического соленоида получаем следующее выражение (на единицу длины цилиндра):

$$S = \frac{1}{3} 16 \pi^3 M_0^2 \sin 2\alpha \cdot R^3.$$

Обратимся теперь к тороидальному соленоиду. Его можно рассматривать как тор  $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$ , заполненный веществом с намагничением  $M$ , определенным выражением (9). Пусть теперь в дополнение к уже имевшейся тороидальной ( $\varphi$ ) компоненте имеется полоидальная компонента ( $\theta$ ) намагничения:

$$\mathbf{M} = M(\mathbf{n}_\varphi \cos \alpha + \mathbf{n}_\theta \sin \alpha) \quad (19)$$

(линии намагничения имеют вид спиралей, навивающихся на осевую линию  $\rho = d, z = 0$  тора). Магнитное поле (индукция) отлично от нуля только внутри тора:

$$B_\varphi = 4\pi M \cos \alpha, \quad B_\theta = 4\pi M \sin \alpha.$$

$\rho$ - и  $z$ -компоненты векторного потенциала, генерируемые тороидальной компонентой, нами выписаны ранее (см. соотношения (6)+(8), которые следует дополнить множителем  $\cos \alpha$ ). Из них легко найти необходимую нам  $\theta$ -компоненту векторного потенциала:

$$A_\theta = -[A_\rho \operatorname{sh} \mu \sin \theta + A_z (1 - \operatorname{ch} \mu \cos \theta)] (\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{-1}.$$

Далее,  $\theta$ -компонента  $\mathbf{M}$  генерирует  $\varphi$ -компоненту  $\mathbf{A}$ , которая равна

$$A_\varphi = -8\pi M_0 \sin \alpha \frac{\operatorname{ch} \mu - \cos \theta}{\operatorname{sh} \mu \sin \theta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{\mu - \mu_0}{2} \right) \cdot \sin \theta}{\operatorname{ch} \left( \frac{\mu + \mu_0}{2} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\mu - \mu_0}{2} \right) \cdot \cos \theta}$$

внутри тора и нулю — вне его. Отсюда следует, что намагничению (19) соответствует отличная от нуля спиральность. Мы выпишем ее в явном виде для бесконечно тонкого тора ( $R \ll d$  или  $\mu_0 \gg 1$ ). В этом случае необходимые нам компоненты векторного потенциала и магнитного поля внутри тора имеют вид

$$A_\theta = 4\pi a M_0 [\exp(-\mu) - \mu_0 \cos \theta \exp(-\mu_0)] \cos \alpha,$$

$$A_\varphi = -8\pi a M_0 \exp(-\mu_0) \sin \alpha,$$

$$B_\theta = 4\pi M_0 \sin \alpha, \quad B_\varphi = 4\pi M_0 \cos \alpha.$$

В итоге для спиральности находим следующее выражение:

$$S = \int AB \, dV = \frac{1}{3} 32 \pi^4 a^4 M_0^2 \sin 2\alpha \exp(-3\mu_0).$$

Спиральность  $S$ , наряду с магнитным потоком  $\Phi$ , является одним из топологических инвариантов, характеризующих структуру магнитного поля. Эти инварианты остаются неизменными при произвольных, но непрерывных деформациях соленоидов. Существуют также топологические инварианты, отличные от  $\Phi$  и  $S$  [67]. Они характеризуют более тонкую структуру магнитного поля. В разд.9 мы покажем, как спиральность влияет на сечения рассеяния заряженных частиц.

#### 4. ДВИЖЕНИЕ ТОРОИДАЛЬНОГО СОЛЕНИДА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Энергия взаимодействия ТС с внешним магнитным полем определяется выражением

$$U = - \int H_{\text{ext}} M \, dV. \quad (20)$$

Здесь  $M$  — намагниченность ТС (см. разд.3). Поскольку только  $\varphi$ -компонента  $M$  отлична от нуля, то ТС взаимодействует с внешним МП, если последнее имеет ненулевую проекцию на экваториальную плоскость ТС и ненулевое перекрытие с  $M_\varphi$ . Если источник МП находится на достаточно большом удалении от ТС, то МП вблизи ТС можно разложить в ряд

$$H_{\text{ext}}(r_s) = H_{\text{ext}}(r_0) + (r \nabla_0) H_{\text{ext}}(r_0), \quad r_s = r_0 + r. \quad (21)$$

Здесь вектор  $r_0$  определяет некоторую точку вблизи ТС, например, его центр масс;  $r$  — вектор, идущий от  $r_0$  к определенной точке, лежащей внутри ТС. Подставляем это разложение в (20):

$$U = - \mu_d H_{\text{ext}}(r_0) - \frac{1}{2} \mu_t \text{rot } H(r_0). \quad (22)$$

Здесь  $\mu_t = \int M \, dV$  — дипольный магнитный момент, равный нулю для ТС. Далее,

$$\mu_t = \int (r \times M) \, dV \quad (23)$$

с точностью до несущественной константы совпадает с так называемым тороидальным дипольным моментом (ТДМ) [11,12,18]. Он направлен вдоль оси симметрии ТС и по абсолютной величине равен

$$\mu_t = \frac{1}{2} \pi g d R^2.$$

При произвольной ориентации  $\theta, \varphi$  оси симметрии ТС

$$\mu_t = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \frac{1}{2} \pi g d R^2.$$

Чтобы изучить движение ТС в магнитном поле, возьмем лагранжиан  $L = T - U$ . Кинетическая энергия  $T$  равна сумме энергии движения центра масс  $T_{cm} = \frac{1}{2} M(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2)$  и энергии вращения  $T_{rot} = \frac{1}{2} (A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2)$ . Здесь  $M$  — масса ТС,  $x_0, y_0, z_0$  — координаты его центра масс;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции вектора угловой скорости на связанные с ТС оси инерции:

$$\omega_x = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \quad \omega_y = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \omega_z = \dot{\psi} \cos \psi + \dot{\psi},$$

углы  $\varphi, \theta, \psi$  определяют ориентацию системы координат, жестко связанной с ТС, относительно лабораторной системы координат;  $A, B, C$  — моменты инерции ТС ( $A = \int (y^2 + z^2) \rho dV / \int \rho dV$  и т.д.):

$$A = B = \frac{1}{2} d^2 M (1 + 5R^2/4d^2), \quad C = d^2 M (1 + 3R^2/4d^2).$$

Используя уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}_{\text{ext}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}}$  и принимая во внимание, что разложение (21) справедливо на больших расстояниях от источника МП (где  $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$ ), получаем

$$U = -\frac{1}{2c} \dot{\mathbf{E}}_{\text{ext}} \boldsymbol{\mu}_t, \quad \dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (24)$$

Это выражение упрощается, если поле  $E_{\text{ext}}$  направлено вдоль оси  $z$ :  $U = -\frac{1}{2c} \dot{E}_z(\mathbf{r}_0) \mu_t \cos \theta$ ,  $\theta$  — угол наклона  $\boldsymbol{\mu}_t$  к оси  $z$ . Отсюда следует, что потенциальная энергия ТДМ зависит как от координат центра масс ТДМ, так и от ориентации ТДМ. Уравнения Лагранжа ( $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ,  $q_i = x_0, y_0, z_0, \varphi, \theta, \psi$ ) приводят к связанной системе уравнений, которые полностью определяют движение ТДМ. Классические уравнения движения легко проквантовать. В результате приходим к следующему уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad H = T + V, \quad T = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_0^2 + \frac{\hbar^2}{2MA^2} L^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{1}{C^2} - \frac{1}{A^2} \right) L_z^2,$$

$$V = -\frac{1}{2c} \dot{E}_z(\mathbf{r}_0) \mu_t n_t.$$

Здесь  $L_i$  — декартовы компоненты обычного углового момента,  $L^2 = \sum L_i^2$ . Для магнитного дипольного момента классические и квантовые уравнения были получены недавно в работе [68]. ТДМ является важной характеристикой ТС, но не исчерпывающей. Чтобы убедиться в этом, обратимся снова к конфигурации токов, изображенной на рис.3. Соответствующие ей намагничение и ТДМ имеют вид

$$M_{12} = \frac{1}{4\pi a} \frac{\text{ch } \mu - \cos \theta}{\text{sh } \mu} [g_1 \theta(\mu - \mu_1) + g_2 (\mu - \mu_2)],$$

$$\mu_i^{(1,2)} = \frac{1}{2} \pi (g_1 d_1 R_1^2 + d_2 d_2 R_2^2). \quad (25)$$

С учетом соотношения (13) ТДМ исчезает для данной конфигурации. Это означает, что следующий член в разложении  $H_{\text{ext}}$  должен быть принят во внимание. Он равен  $\frac{1}{2}(\mathbf{r} \nabla_0)^2 H_{\text{ext}}$ . Подставляя его в (20), находим

$$U = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_{0i}} (\text{rot } H_{\text{ext}})_j \int x_i (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_j dV.$$

Легко убедиться, что интегралы в правой части обращаются в нуль для намагничения (25). Подставляя очередной член  $\frac{1}{6}(\mathbf{r} \nabla_0)^3 H_{\text{ext}}$  в разложении  $H_{\text{ext}}$  в (20), получаем

$$U = -\frac{1}{8} \frac{\partial^2}{\partial x_{0i} \partial x_{0j}} (\text{rot } H_{\text{ext}})_k \int x_i x_j (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_k dV. \quad (26)$$

Неисчезающие интегралы в правой части равны

$$\int x^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_z dV = \int y^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_z dV = \frac{7}{32} \Phi_1 a^4 y_1 (y_1 + 1) (y_1^2 - y_2^2),$$

$$\int z^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_z dV = \frac{1}{16} \Phi_1 a^4 y_1 (y_1 + 1) (y_1^2 - y_2^2),$$

$$\int xz (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_x dV = \int yz (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_y dV =$$

$$= -\frac{1}{32} \Phi_1 a^4 y_1 (y_1 + 1) (y_1^2 - y_2^2), \quad y_i = \text{cth } \mu_i. \quad (27)$$

Поэтому для токовой конфигурации рис.3,б энергия взаимодействия определена выражением (26). Интегралы в правой части (26) обычно определяются как тороидальные моменты высших порядков (или

мультипольностей) [12,18]. Обратимся теперь к конфигурации рис.3,в. Вместо (26) находим

$$U = -\frac{1}{8} \frac{\partial^2(\text{rot } \mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_0))_k}{\partial x_{0i} \partial x_{0j}} \iint x_i x_j (\mathbf{r} \times (M_{12} + M_{34}))_k dV. \quad (28)$$

Здесь  $M_{34}$  определяется выражением, аналогичным (25). Из (28) сразу следует, что это выражение исчезает для токовой конфигурации рис.3,в. Взаимодействие возникает, когда члены более высоких порядков в разложении  $\mathbf{H}_{\text{ext}}$  принимаются в расчет. В итоге мы получаем физическую интерпретацию токовых конфигураций, показанных на рис.3: они генерируют тороидальные моменты различных мультипольностей.

### 5. ЭФФЕКТ ААРОНОВА — КАШЕРА ДЛЯ ТОРОИДАЛЬНЫХ СОЛЕНОИДОВ

Сначала приведем известные аргументы, иллюстрирующие существование эффекта Ааронова — Кашера [19] для цилиндрического соленоида. Рассмотрим частицу с зарядом  $e$ , находящуюся в поле покоящегося цилиндрического соленоида. Следующий член в лагранжиане описывает их взаимодействие [19]:

$$\frac{e}{c} \mathbf{v}_e \mathbf{A}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_s). \quad (29)$$

Здесь  $\mathbf{r}_e$  и  $\mathbf{r}_s$  — радиусы-векторы заряженной частицы и цилиндрического соленоида,  $\mathbf{v}_e$  — скорость заряженной частицы,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_s)$  — вектор-потенциал, генерируемый соленоидом в месте нахождения заряженной частицы. Соображения галилеевской инвариантности позволяют написать взаимодействие в случае, когда движутся как заряд, так и цилиндрический соленоид:

$$\frac{e}{c} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_s) \mathbf{A}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_s). \quad (30)$$

Здесь  $\mathbf{v}_s$  — скорость цилиндрического соленоида. Ааронов и Кашер [19] показали, что добавленный член

$$-\frac{e}{c} \mathbf{v}_s \mathbf{A}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_s) \quad (31)$$

описывает квантовое рассеяние нейтральных частиц, обладающих магнитным дипольным моментом на бесконечно тонкой заряженной нити (это и есть эффект Ааронова — Кашера). Эксперименты, в которых ней-



троны рассеивались на такой нити, были поставлены в 1989 г. [25]. Они подтвердили существование эффекта Ааронова — Кашера.

Обратимся теперь к тороидальному соленоиду. Взаимодействие заряженной частицы с покоящимся ТС по-прежнему описывается выражением (29), но под  $A$  следует понимать вектор-потенциал ТС. Эксперименты, в которых электроны рассеивались на магнитном поле непроницаемого ТС (эффект Ааронова — Бома), были выполнены Тономурой [8]. Они подтвердили существование АБ-эффекта. Теоретическое описание этих экспериментов дано в работах [9, 10].

В случае, когда движутся как заряд, так и тороидальный соленоид, требование галилеевской инвариантности лагранжиана приводит нас к выражению (30). Наша ближайшая цель состоит в получении и интерпретации добавленного члена (31) для тороидального соленоида. Пусть ТС с полоидальным током  $\mathbf{j}$  (который генерирует векторный потенциал  $A$  с магнитным полем  $H$ , равным нулю вне ТС) движется со скоростью  $v_s$  во внешнем электрическом поле с напряженностью  $E$  и скалярным потенциалом  $\varphi$  ( $E = -\text{grad } \varphi$ ). Согласно специальной теории относительности при движении тока  $\mathbf{j}$  возникает зарядовая плотность  $\rho = \gamma(v_s \mathbf{j})/c^2$ . Множитель  $\gamma = (1 - \beta_s^2)^{-1/2}$  можно опустить, если мы не выходим за рамки галилеево-инвариантной теории. Взаимодействие движущегося ТС с внешним электростатическим полем описывается выражением

$$U = \int \varphi(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e) \rho(\mathbf{r}_s) dV_s = \frac{1}{c^2} \int \varphi(v_s \mathbf{j}) dV_s. \quad (32)$$

Заменяем ток эквивалентным намагничиванием ( $\mathbf{j} = c \text{ rot } M$ ) и интегрируем по частям

$$U = \frac{1}{c} v_s \int (\mathbf{E}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e) \times M) dV_s \quad (33)$$

(интегрирование ведется внутри ТС, где  $M \neq 0$ ). На больших расстояниях от источника электростатического поля (или для малых размеров ТС) электрическое поле  $E$  вблизи ТС можно разложить в ряд

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_e) + (\mathbf{r} \nabla_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_e), \quad \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}. \quad (34)$$

Здесь  $\mathbf{r}_0$  относится к некоторой точке в окрестности ТС. Ради определенности выберем в качестве этой точки центр тяжести ТС. Далее  $\mathbf{r}$  — расстояние от центра тяжести до текущей точки внутри ТС. Подставляем это разложение в (33). Тогда

$$U = \frac{1}{c} v_s (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\mu}_d) - \frac{1}{2c} (v_s \nabla_0) (\mathbf{E} \boldsymbol{\mu}_r). \quad (35)$$

Здесь  $\mu_d = \int M dV$  и  $\mu_t = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) dV$  — магнитные дипольный и тороидальный моменты ТС. Оказывается, для ТС  $\mu_d = 0$ . Тороидальный момент  $\mu_t$  направлен по оси симметрии ТС (см. рис.1). По абсолютной величине он равен  $\mu_t = \frac{1}{2} \pi g d R^2$ . Здесь  $g = \Phi [2\pi(d - \sqrt{d^2 - R^2})]^{-1}$ ,  $\Phi$  — магнитный поток внутри ТС,  $d, R$  — геометрические размеры ТС  $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$ . При получении (35) был опущен член, содержащий  $\text{div } \mathbf{E}$ , поскольку разложение (34) справедливо вне источника электрического поля. Таким образом,

$$U = -\frac{1}{2c} (\mathbf{v}_s \nabla_0) (\mathbf{E} \mu_t). \quad (36)$$

Спросим себя: какое электрическое поле  $\mathbf{E}$  должно быть подставлено в (36), чтобы воспроизвести член (31)? Приравниваем эти выражения:

$$e v_s \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_e) = -\frac{1}{2} (\mathbf{v}_s \nabla_0) (\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_e) \mu_t). \quad (37)$$

Знак минус в (37) возник за счет того, что потенциальная энергия в лагранжиан входит с отрицательным знаком. Кроме того, было принято во внимание, что вектор-потенциал ТС является четной функцией координат [3] (в отличие от вектор-потенциала цилиндрического соленоида). Приравниваем в (37) коэффициенты при  $\mathbf{v}_s$ :

$$e \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \nabla (\mu_t \mathbf{E}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_e. \quad (38)$$

Без ограничения общности можно считать, что оси симметрии ТС в обеих частях (38) параллельны оси  $z$ . Поскольку при его получении было использовано разложение (34), справедливое при больших удалениях ТС от источника, то в качестве вектор-потенциала в левой части (38) следует использовать его асимптотическое выражение (8):

$$A_x \sim \frac{3}{4} \pi g d R^2 \frac{xz}{r^5}, \quad A_y \sim \frac{3}{4} \pi g d R^2 \frac{yz}{r^5}, \quad A_z \sim \frac{\pi g d R^2}{4} \frac{3z^2 - r^2}{r^5}.$$

Тогда из (38) получаем следующие уравнения:

$$3e \frac{xz}{r^5} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad 3e \frac{yz}{r^5} = -\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad e \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Легко убедиться, что эти уравнения удовлетворяются при  $E_z = ez/r^3$ , что является  $z$ -компонентой  $\mathbf{E} = e\mathbf{r}/r^3$ . Это означает, что член (31), восстанавливающий галилеевскую симметрию лагранжиана, на больших расстояниях описывает движение ТС в кулоновском поле. Если распределение токов (или намагниченность) в ТС таково, что ТДМ исчезает, то в

разложении  $E$  должны быть учтены члены более высокого порядка. В этом случае вместо (36) получаем

$$U = -\frac{1}{8c} (\mathbf{v}_s \nabla_0) \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_{0j} \partial x_{0k}} \int x_j x_k (\mathbf{r} \times \mathbf{M})_i dV$$

(предполагается суммирование по повторяющимся индексам). Подставляя вместо  $\mathbf{M}$  намагничение  $M_{12}$ , определенное соотношением (25), и учитывая ранее полученные выражения (27), находим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_{0j} \partial x_{0k}} \int x_j x_k (\mathbf{r} \times \mathbf{M}_{12})_i dV = \\ & = \alpha \left[ \frac{7}{32} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y_0^2} \right) + \frac{1}{16} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z_0^2} - \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial x_0 \partial z_0} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y_0 \partial z_0} \right) \right], \\ & \alpha = \Phi_1 a^4 y_1 (y_1 + 1) (y_1^2 - y_2^2). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что вне источника  $\operatorname{div} E = 0$ , мы преобразуем это выражение к виду

$$-\frac{3}{32} \alpha \frac{\partial^2 E_z}{\partial z_0^2}.$$

В результате получаем

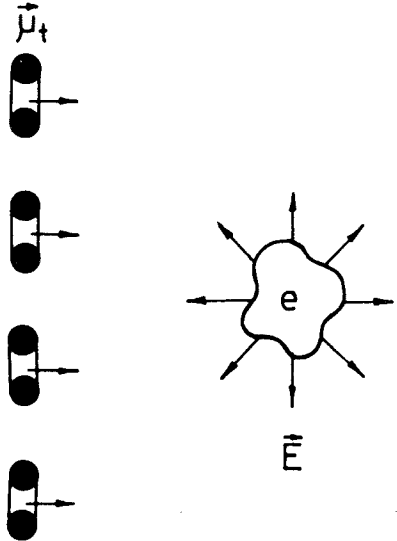
$$U = \frac{3}{256} \frac{\alpha}{c} (\mathbf{v}_s \nabla_0) \frac{\partial^2 E_z}{\partial z_0^2}. \quad (39)$$

Сравниваем это выражение с (31):

$$eA = \frac{3}{256} \alpha \nabla_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}. \quad (40)$$

Учитывая, что асимптотическое поведение  $A$  для рассматриваемой конфигурации рис.3,б определено соотношением (14), убеждаемся, что уравнение (40) удовлетворяется при  $E_z = ez/r^3$ . Различие выражений (36) и (39) означает только то, что тороидальные моменты высших мультипольностей взаимодействуют с одним и тем же внешним электрическим полем более сложным образом, чем тороидальные дипольные моменты. Чтобы найти электрическое поле  $E$  на конечных расстояниях, обратимся к выражению (32), в котором еще не было выполнено разложение внешнего поля. Приравнявая (31) и (32), получаем

Рис. 4. Теория предсказывает, что тороидальные моменты должны рассеиваться кулоновским полем



$$\frac{e}{c} (\mathbf{v}_s \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \int \varphi (\mathbf{v}_s \mathbf{j}) dV'$$

Или, сравнивая коэффициенты при  $\mathbf{v}_s$ ,

$$e\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \varphi (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'. \quad (41)$$

Примем во внимание, что вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению  $\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ . Его решение имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'. \quad (42)$$

Сравнивая (41) и (42), заключаем:  $\varphi = e|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ , что соответствует электрическому потенциалу точечного заряда. Таким образом, дополнительный член (31) описывает движение ТС в кулоновском поле. Из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} m_e v_e^2 + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{e}{c} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_s) \mathbf{A}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_s) \quad (43)$$

следуют уравнения  $\dot{\mathbf{v}}_e = 0, \dot{\mathbf{v}}_s = 0$ , что означает отсутствие рассеяния в рамках классической механики. Зафиксировав положение кулоновского центра

( $\mathbf{v}_e = \mathbf{r}_e = 0, \mathbf{v}_s \equiv \mathbf{v}, \mathbf{r}_s \equiv \mathbf{r}$ ) приходим к лагранжиану  $L = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}$ , описывающему рассеяние ТС кулоновским центром. Для бесконечно малого ТС этот лагранжиан приводится к виду:  $L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2c} (\mathbf{v} \nabla) (\mathbf{E} \boldsymbol{\mu}_t)$ ,

что соответствует рассеянию дипольного тороидального момента кулоновским полем. Опять-таки отсутствует классическое рассеяние ( $\dot{\mathbf{v}} = 0$ ). Соответствующие уравнения Шредингера имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A})^2 \Psi &= \mathcal{E} \Psi, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla - \frac{i}{2\hbar c} \nabla (\mathbf{E} \boldsymbol{\mu}_t))^2 \Psi &= \mathcal{E} \Psi, \quad \mathbf{E} = e\mathbf{r}/r^3. \end{aligned} \quad (44)$$

Они описывают квантовое рассеяние ТС и тороидального дипольного момента кулоновским полем (рис.4). Возникает вопрос: как проверить су-

ществование эффекта Ааронова — Кашера для рассматриваемого случая? Мы должны найти нейтральные частицы, обладающие неисчезающим тороидальным моментом (и нулевым дипольным моментом). Именно такими частицами, согласно [26], являются нейтрино Майорана. Второй путь — изучить рассеяние ферромагнитных микрочастиц (которые согласно [27] обладают тороидальным дипольным моментом) кулоновским полем. Заметим, что область, в которой заключены источники кулоновского поля, может быть не многосвязной. Для случая рассеяния обычных магнитных диполей этот эффект отмечался ранее в [28].

## 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ СОЛЕНОИДЫ

**Физический смысл намагничения.** Прежде всего выясним физический смысл намагничения (9). Выпишем выражение для намагничения еще раз:

$$M = M n_\varphi, \quad M = \frac{1}{4\pi} g \frac{\theta(R - \tilde{R})}{d + \tilde{R} \cos \psi} = \frac{g}{4\pi} \theta(R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2})/\rho. \quad (45)$$

Для бесконечно тонкого ТС ( $R \ll d$ ) при фиксированном магнитном потоке  $\Phi$  имеем

$$M = \frac{1}{4\pi} \Phi \delta(\rho - d) \delta(z). \quad (46)$$

Векторный потенциал, удовлетворяя уравнению  $\Delta A = -4\pi \text{rot } M$ , следующим образом выражается через намагничение [29, 30]:

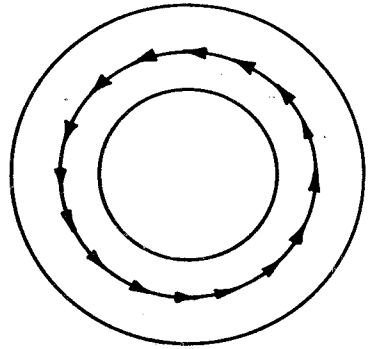
$$A = \int \left( M(r') \times \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \right) dV'. \quad (47)$$

Соотношения (46) и (47) означают, что бесконечно тонкий ТС может быть реализован в виде цепочки магнитных диполей (рис.5). В самом деле, ВП в точке  $r$ , генерируемый магнитным диполем, расположенным в  $r_0$ , равен (см., напр., [29])

$$A = m \left( n \times \frac{r - r_0}{|r - r_0|^3} \right). \quad (48)$$

Здесь  $n$  и  $m$  — направление и мощность магнитного диполя. Проинтегрируем это соотношение по окружности радиуса  $d$ , лежащей в плоскости  $z = 0$ . Тогда  $n = n_\varphi$  — единичный вектор, касательный к этой окружности ( $n_\varphi = n_y \cos \varphi - n_x \sin \varphi$ ),  $r_0$  — ее радиус-вектор ( $r_0 = d n_\rho$ ,  $n_\rho = n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi$ ). В итоге мы приходим к векторному потенциалу

Рис. 5. Явная реализация магнитного (электрического) тороидального соленоида с помощью круговой цепочки магнитных (электрических) диполей



бесконечно тонкого ТС, определенного в разд.2 (см. (7)). При этом  $g = 4m/R^2$  или  $\Phi = 4\pi m/d$ . Далее, соотношения (45) и (47) означают, что ТС конечной толщины может быть реализован в виде замкнутой спиновой трубки радиуса  $R$ . В самом деле, проинтегрируем (48) по объему тора. При этом под  $m$  следует понимать спиновую плотность внутри тора, которая совпадает с намагничением  $M$ . В итоге мы приходим к векторному потенциалу ТС конечной толщины (6). Такая спиновая трубка (ферромагнитное кольцо с не зависящим от внешних полей намагничением) была использована в экспериментах [8] по проверке существования АБ-эффекта (см. разд.9).

Более простой случай представляет цилиндрический соленоид. Он может быть реализован в виде линейной спиновой цепочки (рис.6). В самом деле, интегрируя (48) вдоль оси  $z$ , мы получаем ВП цилиндрического соленоида:  $A = n_\varphi \Phi / 2\pi\rho$ ,  $\Phi = 4\pi m$ . Такая спиновая цепочка (намагниченный волосок) была использована в ранних экспериментах по проверке АБ-эффекта (см., например, обзор [31]).

До сих пор мы говорили только о намагничении и векторном потенциале. Возникает вопрос, чему равны магнитная индукция  $B$  и напряженность  $H$ . Запишем общее соотношение:  $B = H + 4\pi M$ . Поскольку для намагничений (45), (46)  $\text{div } M = 0$ , то согласно соотношениям (16), (17)  $H = 0$  везде,  $B = 4\pi M$ , т.е. магнитная индукция  $B$  отлична от нуля только внутри соленоида.

**Электрические тороидальные соленоиды (ЭТС).** Заменяем теперь магнитные диполи электрическими. Тогда электрическая поляризация равна  $P = n_\varphi \Phi \delta(\rho - d) \times \delta(z)/4\pi$  — для цепочки электрических диполей и  $P = g \theta(R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2})/4\pi\rho$  — для конечной трубки

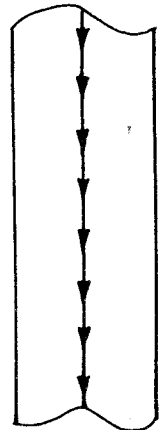


Рис. 6. Явная реализация магнитного (электрического) цилиндрического соленоида с помощью линейной цепочки магнитных (электрических) диполей

диполей. В отсутствие свободных зарядов уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (49)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (50)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}. \quad (51)$$

Исключая из этих уравнений  $\mathbf{E}$ , находим уравнения для  $\mathbf{D}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (52)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{D} = 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{P}. \quad (53)$$

Уравнение (52) удовлетворяется автоматически, если ввести электрический векторный потенциал  $\mathbf{A}_e$ :

$$\mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_e = 0. \quad (54)$$

Подставляя эти соотношения в (53), получаем уравнение для  $\mathbf{A}_e$ :

$$\Delta \mathbf{A}_e = -4\pi \operatorname{rot} \mathbf{P}.$$

Отсюда

$$\mathbf{A}_e = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{rot} \mathbf{P} dV' = \int \left( \mathbf{P} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV', \quad (55)$$

что совпадает с (47). Применяя к (55) операцию  $\operatorname{rot}$ , получаем  $\mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_e = 4\pi \mathbf{P}$ . Тогда из (51) следует, что  $\mathbf{E} = 0$ .

Очевидно, задача об ЭТС является чисто электростатической. Обычно такая задача полностью определяется зарядовой плотностью  $\rho(r)$ . Из нее легко получаем электрический потенциал  $\Phi$ , напряженность  $\mathbf{E}$ , индукцию  $\mathbf{D}$ , поляризацию  $\mathbf{P}$ . В данном случае индукция и поляризация строятся из элементарных электрических дипольных моментов. Возникает вопрос: как построить мультипольное разложение для электрического ВП и индукции. Для магнитной спиновой трубки задача упрощается введением реального поверхностного тока, эквивалентного намагничению, и выполнением мультипольного разложения для ВП, генерируемого этим током. Для электрической спиновой трубки можно формально [32] ввести эквивалентный ток магнитных монополей  $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{P}$  и осуществить мультипольное разложение для соответствующего ВП. В итоге возникает следующая альтернатива:

1) описание электрического поля ЭТС в терминах зарядовой плотности возможно (хотя на данном этапе и неизвестно). Это выглядело бы странным, поскольку намагничение  $\mathbf{M}$ , имеющее ту же функциональную

форму, что и поляризация  $\mathbf{P}$ , строится из совсем других «кирпичиков» — элементарных токов;

2) описание электрического поля ЭТС в терминах зарядовой плотности является неполным.

Наконец, отметим, что именно для ЭТС построенные с помощью поляризации  $\mathbf{P}$  тороидальные моменты обретают самостоятельное значение. В самом деле, для МТС существует стандартное [33,34] разложение вектор-потенциалов по полной системе электрических, магнитных и продольных мультиполей. Как показано в [24], тороидальные формфакторы и моменты сводятся к стандартным электрическим и поэтому задают иное представление ЭМП МТС. Для ЭТС подобное стандартное разложение отсутствует (ввиду невозможности пустить по обмотке соленоида ток монополей). С другой стороны, электрические тороидальные моменты можно строить точно так же, как магнитные (см. разд.3). Комбинируя электрические дипольные трубки с различными поляризациями, мы легко воспроизводим весь набор электрических тороидальных моментов высшей мультипольности (рис.3). Они по-разному взаимодействуют с внешним электрическим полем.

**Электрический векторный потенциал.** Чтобы прояснить физический смысл электрического векторного потенциала (см. (54), (55)), рассмотрим хорошо известный в физической литературе случай — поляризованную сферу радиуса  $a$ . Пусть поляризация  $\mathbf{P}$  постоянна внутри сферы и направлена вдоль оси  $z$ :

$$\mathbf{P} = P_0 n_z \theta(a - r). \quad (56)$$

В отсутствие свободных зарядов уравнения Максвелла выглядят следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (57)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (58)$$

Они связаны соотношением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}. \quad (59)$$

Будем решать эту систему уравнений двумя способами. В первом случае [35] мы с помощью (59) исключаем  $\mathbf{D}$  из (57) и получаем следующую систему уравнений для  $\mathbf{E}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (60)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (61)$$

Второе из этих уравнений автоматически удовлетворяется, если положить

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (62)$$



Тогда из (60) получаем уравнения для

$$\Delta\Phi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \operatorname{div} \mathbf{P} = -P_0 \cos \theta \cdot \delta(r - a).$$

Отсюда

$$\Phi = - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Или в явном виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{3} 4\pi P_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad \text{при } r > a, \\ \Phi &= \frac{4}{3} \pi P_0 r \cos \theta \quad \text{при } r < a. \end{aligned} \quad (63)$$

Отсюда легко находим

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{8}{3} \pi P_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta, \quad E_\theta = \frac{4}{3} \pi P_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \theta, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} \text{ — вне сферы } (r > a), \\ E_r &= -\frac{4}{3} \pi P_0 \cos \theta, \quad E_\theta = \frac{4}{3} \pi P_0 \sin \theta, \\ D_r &= \frac{8}{3} \pi P_0 \cos \theta, \quad D_\theta = -\frac{8}{3} \pi P_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (64)$$

— внутри сферы.

Второй способ решения системы уравнений (57)+(59) состоит в исключении  $\mathbf{E}$  и написании уравнения для  $\mathbf{D}$ . Применяв к уравнению (59) операцию  $\operatorname{rot}$ , перепишем в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{D} = 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{P}. \quad (65)$$

Чтобы уравнение (57) удовлетворялось автоматически, полагаем

$$\mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_e = 0. \quad (66)$$

Подставляем это выражение в (65), получая следующее уравнение для электрического вектор-потенциала:

$$\Delta \mathbf{A}_e = -4\pi \operatorname{rot} \mathbf{P}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{P} = P_0 \sin \theta \cdot \delta(r - a) \mathbf{n}_\varphi.$$

Отсюда

$$\mathbf{A}_e = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{rot} \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV',$$

или в явном виде

$$A_e = \frac{4\pi}{3} P_0 \frac{a^3}{r^2} \sin \theta \cdot n_\varphi \quad \text{при } r > a \text{ и} \quad (67)$$

$$A_e = \frac{4\pi}{3} P_0 r \sin \theta \cdot n_\varphi \quad \text{при } r < a.$$

Подставляя  $A_e$  в (66) и (59), находим ранее полученные выражения (64) для  $D$ ,  $E$ . Это означает, что для сферы с постоянной поляризацией поля  $E$ ,  $D$  можно найти двумя различными способами. Они выражаются, соответственно, через скалярный и векторный электрический потенциалы. Поскольку пространство вне сферы односвязно, то эти потенциалы однозначно выражаются через  $E$ ,  $D$ , и поэтому в данном случае имеют только вспомогательные значения.

В качестве второго примера рассмотрим вытянутый эллипсоид

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad c > b, \quad (68)$$

с постоянной поляризацией, направленной вдоль оси  $z$ . Введем сфероидальные координаты:

$$x = a \operatorname{sh} \mu \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{sh} \mu \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \operatorname{ch} \mu \cos \theta.$$

Пусть значение  $\mu = \mu_0$  соответствует эллипсоиду (68). Тогда поляризация

$$P = P_0 n_z \theta(\mu_0 - \mu). \quad (69)$$

Обычный способ [35] решения уравнений Максвелла (57)+(59) с поляризацией (69) состоит в исключении  $D$  и введении электрического скалярного потенциала  $\Phi$ :  $E = -\operatorname{grad} \Phi$ . В результате для скалярного электрического потенциала  $\Phi$ , напряженности электрического поля  $E$  и индукции  $D$  находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi &= 4\pi P_0 a \operatorname{sh}^2 \mu_0 \cos \theta \cdot f_{10}(\mu, \mu_0), \\ E_\mu &= -4\pi P_0 \operatorname{sh}^2 \mu_0 \frac{\cos \theta}{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2}} \frac{df_{10}(\mu, \mu_0)}{d\mu}, \\ E_\theta &= -4\pi P_0 \operatorname{sh}^2 \mu_0 \frac{\sin \theta}{(\operatorname{ch} \mu - \cos \theta)^{1/2}} f_{10}(\mu, \mu_0), \end{aligned} \quad (70)$$

$$D = E + 4\pi P.$$

Здесь

$$f_{lm}(\mu, \mu_0) = \begin{cases} Q_l^m(\operatorname{ch} \mu) P_l^m(\operatorname{ch} \mu_0), & \mu > \mu_0, \\ P_l^m(\operatorname{ch} \mu) Q_l^m(\operatorname{ch} \mu_0), & \mu < \mu_0, \end{cases}$$

$P_l^m, Q_l^m$  — функции Лежандра. Значения  $\mu < \mu_0$  и  $\mu > \mu_0$  соответствуют точкам, лежащим внутри и вне эллипсоида соответственно.

Альтернативный способ решения уравнений (57)+(59) состоит в исключении  $E$  и введении электрического векторного потенциала:  $D = \operatorname{rot} A_e$ . Для  $A_e$  находим следующее выражение:

$$A_e = A n_\varphi, \quad A = -2\pi P_0 a \operatorname{ch} \mu_0 \operatorname{sh} \mu_0 \sin \theta \cdot f_{11}. \quad (71)$$

Используя соотношения  $D = \operatorname{rot} A_e$  и  $E = D - 4\pi P$ , приходим к выражениям (70). Таким образом, рассмотренные электростатические задачи можно с одинаковым успехом решать как с помощью электрического скалярного, так и векторного потенциалов.

Будем теперь безгранично увеличивать большую полуось  $c$  эллипсоида (68), оставляя неизменной меньшую  $b$ . Для этого надо в выражениях (70), (71) положить  $a = b/\operatorname{sh} \mu_0$  и  $\mu_0 \rightarrow 0$ . Тогда в этом пределе  $\Phi \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow 0$  как вне, так и внутри эллипсоида;  $A_e \rightarrow 2\pi P_0 b^2 n_\varphi / \rho$ ,  $D \rightarrow 0$  вне эллипсоида и  $A_e \rightarrow 2\pi P_0 \rho n_\varphi$ ,  $D \rightarrow 4\pi P$  внутри него. В итоге мы получаем электромагнитное поле электрического цилиндрического соленоида радиуса  $b$ . Эта же ситуация (исчезновение электрического скалярного потенциала  $\Phi$  и напряженности  $E$  и выживание электрического векторного потенциала  $A_e$  и индукции  $D$ ) справедлива и для электрического тороидального соленоида.

Возможность введения электрических векторных потенциалов была упомянута в [36]. Некоторые приложения этих потенциалов указаны в [37].

Как узнать о существовании электрического поля внутри электрического соленоида? Способы — те же самые, что и для магнитного соленоида. Кратко перечислим их:

1) электромагнитное поле (ЭМП) выходит за пределы ТС, равномерно движущегося в среде с  $\epsilon \mu \neq 1$  [14, 16];

2) ЭМП выходит за пределы ускоренного ТС [24];

3) взаимодействие внешнего электрического поля с электрическими диполями, образующими электрический соленоид, определяется выражением:

$$U = - \int E_{\text{ext}} P dV.$$

На больших расстояниях от источников внешнего электрического поля (или при малых размерах электрического ТС) это выражение имеет вид

$$U = -\frac{1}{2} \epsilon_i \operatorname{rot} E_{\text{ext}} = \frac{1}{2c} \frac{\partial H_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{\partial t} \epsilon_i, \quad (72)$$

Здесь  $\epsilon_i = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) dV$  — электрический тороидальный дипольный момент [32]. Для электрической поляризации  $\mathbf{P}$ , определенной выше, он направлен вдоль оси симметрии ЭТС и равен  $\epsilon_i = \frac{1}{2} \pi g d R^2$ . Выражение (72) означает, что на больших расстояниях ЭТС взаимодействует с меняющимся во времени магнитным полем [32]. Это выражение было использовано в работе [38] для объяснения наблюдаемого в эксперименте [39] вращения немагнитных молекул в однородном магнитном поле, медленно меняющемся во времени. Эта ситуация существенно упрощается для электрического цилиндрического соленоида, который состоит из линейной цепочки электрических диполей (рис.б). Такой соленоид стремится ориентироваться вдоль внешнего электрического поля. Возникает вопрос о практической реализации ЭТС. В природе существуют вещества [35], называемые электретами, которые, являясь электрически нейтральными (т.е. незаряженными), обладают, тем не менее, постоянным электрическим дипольным моментом. Из различных типов электретов наиболее подходящими нам кажутся ферроэлектрики (электрические аналоги ферромагнетиков). Из таких веществ можно изготовить незаряженное тороидальное колечко, несущее электрический тороидальный дипольный момент (точно так же, как из ферромагнетика изготовлялось колечко в опытах по проверке АБ-эффекта [8]).

Распределяя внутри тора электрические и магнитные диполи, мы приходим к статическому электромагнитному ТС, для которого электрическая  $\mathbf{D}$  и магнитная  $\mathbf{B}$  индукции отличны от нуля только внутри ТС. Вне соленоида имеются отличные от нуля электрические и магнитные векторные потенциалы.

О физическом смысле электрического векторного потенциала. В примерах, рассмотренных выше, мы или заставляли ЭМП выйти за пределы ЭТС, приводя его в движение, или разрешали внешнему электрическому полю проникать внутрь ЭТС и взаимодействовать с образующими его электрическими диполями. Зафиксируем теперь положение ЭТС. Вне его имеется исчезающий электрический ВП. Как и в случае магнитного соленоида, этот ВП нельзя устранить калибровочным преобразованием, поскольку  $\oint A_e dl = \Phi$  для любого замкнутого контура, проходящего через отверстие соленоида. Можно ли обнаружить существование электрического ВП вне ЭТС, не проникая внутрь него? Мы не знаем очевидного

ответа. В самом деле, аналогом АБ-эффекта для рассматриваемого случая было бы рассеяние свободных магнитных зарядов на электрическом ВП вне ЭТС. Но монополи в природе пока что не обнаружены. В заключение мы перефразируем вопрос, поставленный Аароновым и Бомом в 1959 г.: имеет ли физический смысл электрический векторный потенциал электрического тороидального соленоида?

Нестатические электрические соленоиды [20]. В работе [1] точечный электрический соленоид был построен с помощью следующих (нестатических) точечных плотностей заряда и тока:

$$\rho = D \exp(-i\omega t) \Delta \delta^3(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j} = i\omega D \exp(-i\omega t) \nabla \delta^3(\mathbf{r}) \quad (73)$$

( $D$  — постоянная). Источникам (73) соответствуют следующие электромагнитные потенциалы:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\exp(-i\omega t) D \left[ 4\pi \delta^3(\mathbf{r}) + k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \right], \\ \mathbf{A} &= ikD \exp(-i\omega t) \nabla \frac{\exp(ikr)}{r}. \end{aligned} \quad (74)$$

Отличной от нуля оказывается только электрическая напряженность

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi D \exp(-i\omega t) \nabla \delta^3(\mathbf{r}). \quad (75)$$

Эти соотношения легко обобщаются на случай зарядового и токового распределений конечных размеров. Выберем  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  в виде

$$\rho = \exp(-i\omega t) \Delta f, \quad \mathbf{j} = i\omega \nabla f \exp(-i\omega t). \quad (76)$$

Этим источникам соответствуют следующие потенциалы и напряженность:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\exp(-i\omega t) \left[ 4\pi f + k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f dV' \right], \quad G = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \mathbf{A} &= ik \exp(-i\omega t) \nabla \int G f dV', \end{aligned} \quad (77)$$

$$\mathbf{E} = 4\pi \exp(-i\omega t) \nabla f, \quad \mathbf{H} = 0$$

(множитель  $\exp(-i\omega t)$  далее в очевидных случаях опускаем).

Очевидно, выражения (73)—(75) получаются при  $f = D \delta^3(\mathbf{r})$ . Из (77) следует, что если функция  $f$  отлична от нуля внутри некоторой пространственной области, то в ней же отличны от нуля  $E$ ,  $H$ . С другой стороны,

электромагнитные потенциалы  $\Phi, A$  отличны от нуля и вне этой области. Таким образом, соотношения (76), (77) при таком выборе  $f$  реализуют нестатический электрический соленоид. В частности,  $f$  можно выбрать отличной от нуля внутри тора  $(\rho - d)^2 + z^2 = R^2$ . Вот один из способов достичь этого:  $f = D \theta(R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2})$ ,  $D$  — постоянная.

В работе [21] нестатический соленоид был реализован в виде цилиндрического конденсатора. Экспериментально он изучался в интересной работе [40]. Взамен этого мы рассмотрим сферический конденсатор, который получается при специальном выборе функции  $f$ . Имеем

$$\rho = \frac{e}{4\pi r^2} [\delta(r - r_1) - \delta(r - r_2)], \quad j = \frac{i\omega e}{4\pi r^3} r \theta(r - r_1) \theta(r_2 - r), \quad r_1 < r_2. \quad (78)$$

Такой сферический конденсатор состоит из двух противоположно заряженных сфер и радиального тока, текущего между ними. Используя общие соотношения

$$\Phi = \int G \rho(r') dV', \quad A = \frac{1}{c} \int G j(r') dV',$$

легко находим скалярный и векторный потенциалы (только радиальная компонента векторного потенциала отлична от нуля):

$$\Phi = ike h_0^{(1)}(kr) [j_0(1) - j_0(2)], \quad A_r = -keh_1^{(1)}(kr) [j_0(1) - j_0(2)] \quad \text{при } r > r_2,$$

$$\Phi = ikej_0(kr) [h_0^{(1)}(1) - h_0^{(1)}(2)], \quad A_r = -kej_1(kr) [h_0^{(1)}(1) - h_0^{(1)}(2)] \quad \text{при } r < r_1,$$

$$\Phi = ike [h_0^{(1)}(kr)j_0(1) - j_0(kr)h_0^{(1)}(2)], \quad (79)$$

$$A_r = ek [j_1(kr)h_0^{(1)}(2) - h_1^{(1)}(kr)j_0(1)] - \frac{ie}{kr^2} \quad \text{при } r_1 < r < r_2,$$

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \quad j_l(1) \equiv j_l(kr_1) \text{ и т.д.}$$

Напряженности электромагнитного поля равны нулю вне сферического конденсатора, т.е. при  $r > r_2$  и  $r < r_1$ . Внутри него отлична от нуля только радиальная компонента  $E$ :

$$E_r = e/r^2, \quad H = 0.$$

Из соотношений (74), (77), (79) следует, что вне нестатического электрического соленоида возникают волны электромагнитных потенциалов.

Этот факт отмечался ранее в работах [21, 22]. Возникает вопрос о физическом смысле таких волн и о возможности их экспериментального обнаружения. Пусть область  $S$ , где  $E$ ,  $H$  не равны нулю, недоступна для наблюдения. Может ли наблюдатель, находящийся вне  $S$ , убедиться в существовании волн электромагнитных потенциалов? Поскольку  $E = H = 0$  в них, то эти волны не несут энергии. Поэтому зарегистрировать их можно только на квантовом уровне. Причина этого состоит в том, что в уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A})^2 + e\Phi$$

входят потенциалы  $\Phi$ ,  $\mathbf{A}$ , а не напряженности  $E$ ,  $H$ .

Преобразование

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi \exp\left(-\frac{ie\chi}{\hbar c}\right), \quad \chi = ik \exp(-i\omega t) \int G f dV' \quad (80)$$

устраняет электромагнитные потенциалы вне  $S$ . Если  $\chi$  — однозначная функция вне  $S$ , то (80) — унитарное преобразование между однозначными волновыми функциями при наличии и отсутствии электромагнитных потенциалов вне  $S$ . В такой ситуации наличие волн электромагнитных потенциалов вне  $S$  не приводит к наблюдаемым следствиям. С другой стороны, если  $\chi$  испытывает разрыв вне  $S$  (это, в свою очередь, определяется выбором функции источника  $f$ ), то возникает принципиальная возможность наблюдения волн электромагнитных потенциалов. Например, за счет разности фаз, приобретенной волновой функцией заряженной частицы при ее обходе вокруг замкнутого контура. Необходимым условием является неоднозначность области пространства, доступной для пробных заряженных частиц. Причина этого состоит в том, что многозначные волновые функции допустимы только в неоднозначных пространствах.

Обратимся к общему нестатическому соленоиду [13]. Для этого выпишем разложение скалярного и векторного потенциалов по скалярным и векторным гармоникам [33, 34]. Вне области  $S$  ( $\rho, j \neq 0$  только в  $S$ ) имеем

$$\Phi = 4\pi ik \sum h_l Y_l^m q_l^m, \quad \mathbf{A} = \frac{4\pi ik}{c} \sum \mathbf{A}_l^m(\tau) a_l^m(\tau). \quad (81)$$

Здесь  $\mathbf{A}_l^m(\tau)$  — элементарные векторные потенциалы, являющиеся векторными решениями уравнения Гельмгольца. Далее  $\tau$  означает электри-

ческие  $E$ , магнитные  $M$  и продольные  $L$  мультиполи. Векторные функции  $A$  равны\*:

$$\begin{aligned} A_l^m(L) &= \frac{1}{k} \nabla h_l Y_l^m, \\ A_l^m(M) &= h_l L Y_l^m, \quad L = -i(\mathbf{r} \times \nabla), \\ A_l^m(E) &= -\frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) h_l Y_l^m. \end{aligned} \quad (82)$$

$A_l^m(\tau)$  являются собственными функциями полного углового момента и его третьей проекции, они ортогональны на сфере произвольного радиуса:

$$\int d\Omega A_l^m(\tau) A_{l'm'}^{m'*}(\tau') = \text{const} \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\tau\tau'}$$

Функции  $q_l^m, a_l^m(\tau)$  зависят от распределений зарядов и токов:

$$\begin{aligned} q_l^m &= \int j_l Y_l^m \rho dV, \quad a_l^m(\tau) = \int B_l^m(\tau) j dV, \\ \rho &= \frac{1}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad q_l^m = \frac{i}{c} a_l^m(L). \end{aligned}$$

Векторные функции  $B_l^m(\tau)$  получаются из  $A_l^m(\tau)$  путем замены сферических функций Ханкеля  $h_l$  на бесселевы  $j_l$ . Из (82) следует, что

$$\operatorname{rot} A_l^m(L) = 0, \quad \operatorname{rot} A_l^m(M) = ik A_l^m(E), \quad \operatorname{rot} A_l^m(E) = -ik A_l^m(M).$$

Действуя оператором  $\operatorname{rot}$  на  $A$ , получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} 4\pi k^2 \sum [A_l^m(M) a_l^m(E) - A_l^m(E) a_l^m(M)].$$

Поскольку  $A_l^m(E)$  и  $A_l^m(M)$  — линейно независимы и ортогональны, то условие  $H = 0$  сводится к следующему:

$$a_l^m(E) = a_l^m(M) = 0. \quad (83)$$

Чтобы прояснить физический смысл этих условий, параметризуем плотность тока несколькими различными способами. Простейшей параметризацией является следующая [36]:

\*Интересно выяснить, во что переходят элементарные векторные потенциалы в статическом пределе ( $k \rightarrow 0$ )? Это обсуждается в приложении.



$$\mathbf{j} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \mathbf{M}, \quad \text{div } \mathbf{M} = 0.$$

Подстановка этого выражения в (83) приводит к условиям

$$\int j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) (\mathbf{rM}) dV = \int j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) (\mathbf{r} \text{rot } \mathbf{M}) dV = 0.$$

Для параметризации Гельмгольца

$$\mathbf{j} = \text{grad } f_1 + \text{rot } (\mathbf{r} f_2) + \text{rot rot } (\mathbf{r} f_3)$$

аналогичные условия выглядят следующим образом:

$$\int j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) \left[ 2r \frac{df_2}{dr} + 6f_2 + k^2 r^2 f_2 + r \frac{\partial}{\partial r} \text{div } (\mathbf{r} f_2) \right] dV = 0,$$

$$\int j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) \left[ 2 \text{div } (\mathbf{r} f_3) + k^2 r^2 f_3 + r \frac{\partial}{\partial r} \text{div } (\mathbf{r} f_3) \right] dV = 0.$$

Наконец, рассмотрим параметризацию

$$\mathbf{j} = [\mathbf{r} f_{lm}^{(1)} + f_{lm}^{(2)} \nabla + f_{lm}^{(3)} (\mathbf{r} \times \nabla)] Y_l^m$$

(произвольная векторная функция может быть представлена в таком виде, см., например, [41]). Функции  $f_{lm}^{(i)}$  зависят только от радиальной координаты  $r$ . Подставляя это выражение в (83), находим следующие условия, которым удовлетворяют функции  $f^{(1)}, f^{(3)}$ :

$$\int j_l(kr) f_{lm}^{(1)}(r) r^2 dr = \int j_l(kr) f_{lm}^{(3)}(r) r^2 dr.$$

Поскольку бесселевы функции  $j_l(kr)$  образуют полную систему, то с первого взгляда кажется, что эти интегралы обращаются в нуль, только если  $f_{lm}^{(1)} = f_{lm}^{(3)} = 0$ . Это было бы справедливо, если бы мы требовали исчезновения интегралов для всех значений  $k$ . Однако для фиксированных значений  $k$  (что имеет место в рассматриваемом случае) всегда можно найти нетривиальные (т.е. ненулевые) функции  $f_{lm}^{(i)}$ , обращающие интегралы в нуль.

С учетом условий (83) электромагнитные потенциалы перепишем в виде:

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi i}{ck} \nabla \sum h_l Y_l^m \int \nabla (j_l Y_l^m) \mathbf{j} dV,$$

$$\Phi = 4\pi ik \sum h_l Y_l^m \int j_l Y_l^m \rho dV,$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0$$

(точка означает дифференцирование по времени).

Легко убедиться, что этим потенциалам соответствуют равные нулю напряженности магнитного ( $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ ) и электрического ( $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$ ) полей. Электромагнитные потенциалы можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \text{grad } \chi, \quad \Phi = -\frac{1}{c}\dot{\chi},$$

где

$$\chi = \frac{1}{c} 4\pi i \exp(-i\omega t) \sum h_l Y_l^m a_l^m(L),$$

$$a_l^m(L) = \frac{1}{k} \int \nabla(j_l Y_l^m) \cdot \mathbf{j} dV = -icq_l^m.$$

Электромагнитные потенциалы из уравнения Шредингера устраняются с помощью унитарного преобразования

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi \exp(iex/\hbar c).$$

Поскольку функция  $\chi$  всюду однозначна и непрерывна, то с первого взгляда кажется, что электромагнитные потенциалы устраняются с помощью однозначного непрерывного преобразования и поэтому ненаблюдаемы в области, где  $E = H = 0$ . На самом деле это не так. Дело в том, что при получении электромагнитных потенциалов неявно предполагалось, что плотности тока и заряда сосредоточены в односвязной области пространства  $S$ , включающей начало координат, а электромагнитные потенциалы вычислялись вне  $S$ . В этом случае электромагнитные потенциалы действительно ненаблюдаемы. Ситуация меняется, если область многосвязна. В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда плотности тока и заряда заключены внутри тора  $T: (\rho - d)^2 + z^2 = R^2$ . Тогда вне сферы радиуса  $d + R$  справедливы приведенные ранее выражения. Внутри сферы радиуса  $d - r$  имеем

$$\mathbf{A} = \text{grad } \chi_{\text{in}}, \quad \Phi = -\frac{1}{c}\dot{\chi}_{\text{in}},$$

$$\chi_{\text{in}} = \frac{1}{c} 4\pi i \exp(-i\omega t) \sum j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) b_l^m(L),$$

$$b_l^m(L) = \frac{1}{k} \int \nabla(h_l Y_l^m) \cdot \mathbf{j} dV = -icq_l^m,$$

$$q_l^m = \int h_l Y_l^m \rho dV.$$

Хотя как при  $r > d + R$ , так и при  $r < d - R$  электромагнитные потенциалы представимы в виде производных от  $\chi$ , сами функции  $\chi$ , вообще говоря, различны в этих областях. Это еще не означает, что электромагнит-

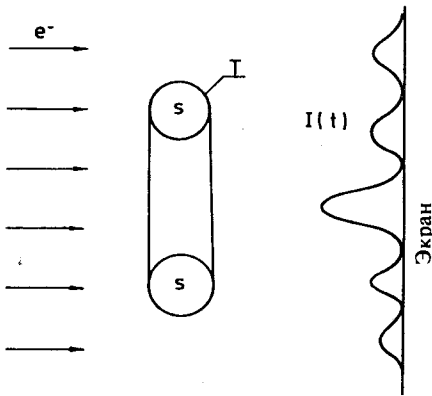


Рис. 7. Принципиальная схема установки для детектирования и регистрации волн электромагнитных потенциалов. Фаза пучка заряженных частиц модулируется меняющимися во времени электромагнитными потенциалами, что на экране приводит к интерференционной картине, также меняющейся во времени

ные потенциалы наблюдаемы вне тора при любых  $\rho, j$  внутри тора. Они наблюдаемы при таких  $\rho, j$ , для которых полная функция  $\chi$ , составленная из  $\chi_{in}$  и  $\chi_{out}$ , определен-

ных, соответственно, в областях  $r < d - R$  и  $r > d + R$ , действительно является разрывной. В этом случае исходная волновая функция  $\Psi$ , удовлетворяющая уравнению Шредингера с ненулевым потенциалом, неэквивалентна преобразованной волновой функции  $\Psi' = \Psi \exp(iex/\hbar c)$ , удовлетворяющей уравнению Шредингера без электромагнитных потенциалов. Разрывность функции  $\chi$  приводит к разрывности волновой функции  $\Psi'$  (исходная функция при этом предполагается непрерывной). В качестве иллюстрации рассмотрим статический тороидальный соленоид с полоидальным током (3). В этом случае известно явное выражение для функции  $\chi$  в тороидальных координатах [3, 15]. Она меняется скачком на величину магнитного потока при пересечении круга радиуса  $d - R$ , лежащего в экваториальной плоскости ( $z = 0$ ) соленоида. С другой стороны, эту же функцию можно выразить и в сферических координатах (см. приложение). Для бесконечно тонкого соленоида ( $R \ll d$ ) имеем

$$\chi_{out} = -\frac{1}{4} \pi g R^2 \sum (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta)$$

при  $r > d$  и

$$\chi_{in} = -\frac{1}{2} \pi g R^2 \sum (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{r^{2n+1}}{d^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta)$$

при  $r < d$ . Мы видим, что для статического тороидального соленоида с полоидальным током (3) функции  $\chi_{in}$  и  $\chi_{out}$ , хотя и однозначны в областях своего определения, не совпадают на их границе (т.е. при  $r = d$ ).

Если бы удалось найти такие нестатические распределения  $\rho, j$  в торе, для которых  $H = E = 0$  вне тора, то это дало бы способ передачи инфор-

мации без потерь энергии. Возможная схема экспериментальной установки показана на рис.7. Заряженные частицы (например, электроны) падают на тороидальный соленоид, внутри которого плотности заряда и тока меняются по определенному временному закону. Электромагнитные напряженности равны нулю вне соленоида, но потенциалы отличны от нуля. Это приводит к тому, что фаза волновой функции электронов также меняется со временем, причем изменение фазы различно для электронов, прошедших через отверстие соленоида и вне его. На достаточно большом расстоянии от соленоида располагается экран, на котором наблюдается меняющаяся во времени интерференционная картина, что в принципе может быть зарегистрировано. Энергия не накапливается внутри соленоида. Она «втекает» («вытекает») внутрь соленоида из его обмотки при увеличении (уменьшении) в ней тока. Основным является вопрос о практической реализации  $\rho, j$ , генерирующих нулевые напряженности вне тора. Следующая конфигурация периодических токов и зарядов как будто удовлетворяет этим требованиям:

$$\rho = ik(\operatorname{div} \mathbf{N} + \Delta\Psi), \quad \mathbf{j} = c(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{N} - k^2\mathbf{N}) - ck^2\nabla\Psi$$

(фактор  $\exp(-i\omega t)$  опять опущен). Здесь  $\Psi, \mathbf{N}$  — произвольные скалярная и векторная функции, задающие распределения токов и зарядов и отличные от нуля только внутри тора. Электромагнитные потенциалы и напряженности:

$$\Phi = ik\chi - 4\pi ik\Psi, \quad \mathbf{A} = \nabla\chi + 4\pi\mathbf{N}, \quad \mathbf{H} = 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{N}, \quad \mathbf{E} = 4\pi ik(\mathbf{N} + \nabla\Psi),$$

$$\chi = \int G_k(\operatorname{div} \mathbf{N} - k^2\Psi)dV', \quad G_k = \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Отсюда следует, что электромагнитные напряженности отличны от нуля только внутри тора, тогда как потенциалы отличны от нуля как внутри, так и вне тора. Пусть  $\Phi$  — поток магнитного поля через поперечное сечение соленоида. Тогда  $\Phi = \int \mathbf{H}d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}_l dl$ . Здесь  $C$  — замкнутый кон-

тур, не пересекающий тор, но проходящий через его отверстие. Поскольку по определению  $\mathbf{N} = 0$  вне тора, то  $\chi$  — многозначная (точнее, разрывная) функция вне тора. Далее, векторная функция  $\mathbf{N}$  должна быть сингулярной внутри тора. Это сразу следует из теоремы Стокса, согласно которой

$$\int \mathbf{H}d\mathbf{S} = \Phi = 4\pi \oint_C \mathbf{N}_l dl.$$

Отсюда вытекало бы, что  $\mathbf{N} \neq 0$  вне тора, что противоречит исходному предположению об исчезновении  $\mathbf{N}$  вне тора. Но теорема Стокса применима только к таким векторным функциям, которые не слишком сингулярны. Поэтому  $\mathbf{N}$  и, как следствие,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  сингулярны внутри тора.

Применив теорему Стокса к обеим частям уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}$ , получаем  $\oint \mathbf{E}_l dl = ik\Phi$ . Отсюда можно было бы ошибочно

заключить, что  $E \neq 0$  вне тора. Сингулярность  $\mathbf{E}$  опять-таки делает незаконным применение теоремы Стокса. Далее, неясно, как решать уравнение Гельмгольца с такими сингулярными источниками. Эти осложнения показывают, что рассмотренная реализация зарядовой и токовой плотностей не является особенно удачной, а вопрос о возможности генерации и детектирования волн электромагнитных потенциалов остается пока что открытым. Токи и заряды, удовлетворяющие условиям (83), не излучают, потому что  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$  вне тора. С другой стороны, оказывается возможным сконструировать неизлучающие токи и заряды с  $E, H \neq 0$  вне их. Это будет иметь место, если радиальная компонента вектора Пойнтинга будет убывать быстрее, чем  $r^{-2}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Рассмотрим явные выражения для электромагнитных потенциалов:

$$\Phi = \int G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV', \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'.$$

На больших расстояниях

$$\Phi_0 = \frac{1}{r} \exp(ikr) \int \exp(-ik \mathbf{n}_r \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV', \quad \mathbf{n}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|,$$

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{cr} \exp(ikr) \int \exp(-ik \mathbf{n}_r \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV',$$

$$\mathbf{E} = -ik \mathbf{n}_r \Phi_0 + ik \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{H} = ik (\mathbf{n}_r \times \mathbf{A}_0).$$

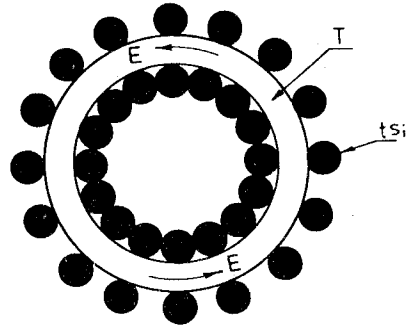
Члены порядка  $r^{-2}$  и более высокого опущены, поскольку они не дают вклад в поток энергии. Радиальная компонента вектора Пойнтинга имеет вид

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{n}_r \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})) = \frac{k^2}{4\pi c} \mathbf{n}_r \cdot (\mathbf{A}_0 \times (\mathbf{A}_0 \times \mathbf{n}_r)) = \\ &= \frac{k^2}{4\pi c} (|\mathbf{A}_0|^2 - |\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{A}_0|^2) = \frac{k^2}{4\pi c} (|\mathbf{A}_0|^2 - |A_{0r}|^2) = \frac{k^2}{4\pi c} (|A_{0\theta}|^2 + |A_{0\varphi}|^2). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует известное условие, что поток энергии в окружающее пространство исчезает, если  $A_{0\theta} = A_{0\varphi} = 0$ .

Только что рассмотренные нестатические электрические соленоиды содержали отличные от нуля как токовую, так и зарядовую плотности. В [42] была предложена конфигурация токов (в отсутствие зарядовой плотности), реализующая нестатический тороидальный соленоид. На тор  $T$  (рис.8) с параметрами  $d, R$  нанизываются тороидальные соленоиды  $ts_i$ . В пределе бесконечно тонких соленоидов  $ts_i$  они полностью покрывают

Рис. 8. Тор  $T$ , на который наизаны тороидальные соленоиды  $ts_i$  с переменными токами в их обмотках. Для бесконечно тонких соленоидов  $ts_i$  и при их плотном покрытии тора электромагнитное поле не выходит за пределы  $T$



поверхность тора  $T$ . В [42] утверждается, что при переменном токе в обмотках  $ts_i$  электромагнитное поле оказывается сосредоточенным внутри тора. Мы сейчас докажем прямым вычислением, что это не имеет места по крайней мере для бесконечно тонкого тора ( $R \ll d$ ). В этом случае тороидальные соленоиды  $ts_i$  становятся бесконечно малыми и сводятся к тороидальным моментам [12,18 ]:

$$t = \exp(-i\omega t) t n_\varphi \delta(\rho - d) \delta(z).$$

Этому тороидальному моменту соответствует ток

$$j = c \text{rot rot } t.$$

Рассматриваемая конфигурация соленоидов сводится к цепочке тороидальных моментов (см. рис.5, где под стрелками следует теперь понимать тороидальные моменты). Ей отвечает вектор-потенциал:

$$A = \frac{1}{c} \exp(-i\omega t) \int G j dV' = \exp(-i\omega t) \int G \text{rot rot } t dV'.$$

Очевидно, интегрирование здесь производится вдоль тороидальной цепочки. Перенося операцию  $\text{rot rot}$  на функцию Грина, получаем

$$\begin{aligned} A &= \exp(-i\omega t) (\text{grad div} - \Delta)I = \\ &= \exp(-i\omega t) (\text{grad div} + k^2)I + 4\pi \exp(-i\omega t)t(r). \end{aligned}$$

Здесь

$$I = G t(r')dV'.$$

Подставляя явное выражение для  $t$ , приводим этот интеграл к виду

$$\begin{aligned} I &= n_\varphi I, \quad I = \int \frac{\exp(ikZ)}{Z} \cos \varphi d\varphi, \\ Z &= (r^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi)^{1/2}, \quad r^2 = \rho^2 + z^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $I$  не зависит от  $\varphi$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{I} = 0$ . Поэтому

$$\mathbf{A} = \exp(-i\omega t) (4\pi t + k^2 \mathbf{n}_\varphi I).$$

Вычислим теперь  $I$ :

$$I = \frac{i\pi^2}{(\tilde{r}\tilde{d})^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + \frac{3}{2}) J_{2n+3/2}(k\tilde{d}) H_{2n+3/2}^{(1)}(k\tilde{r}) \frac{1}{2^{4n}} \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{2n}{2}\right)^2.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \tilde{d} = \frac{1}{2}(d_1 - d_2), \\ r_1 &= [(\rho + d)^2 + z^2]^{1/2}, \quad r_2 = [(\rho - d)^2 + z^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

В итоге вне цепочки тороидальных моментов имеем

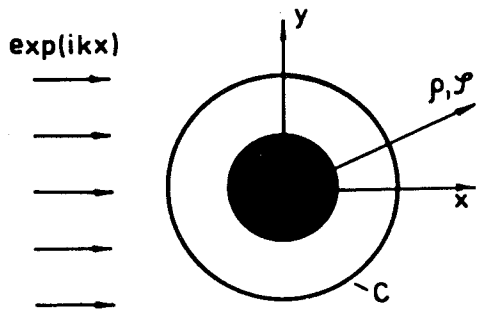
$$\begin{aligned} A_\varphi &= \exp(-i\omega t) k^2 I, \quad E_\varphi = k^3 \exp(-i\omega t) I, \\ H_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi), \quad H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi). \end{aligned}$$

Поскольку  $I \neq 0$ , то вне тороидальной цепочки отличны от нуля напряженности  $E$ ,  $H$ . Это означает, что конфигурация, изображенная на рис.8, не является соленоидом. Некоторая осторожность, однако, необходима. Мы доказали отличие от нуля  $E$ ,  $H$  вне бесконечно тонкого тора. Но измерения, описанные в [42], были выполнены для тора конечной толщины. Известно, что для периодического тока, протекающего в обмотке цилиндрического соленоида, векторный потенциал  $\mathbf{A}$  (а следовательно, и магнитное поле  $H$ ) исчезает вне соленоида при определенных значениях  $kR$  ( $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $R$  — радиус соленоида). Предположим, что этим же свойством обладает конфигурация токов, изображенная на рис.8. Тогда обнаруженное в [42] исчезновение электромагнитного поля вне тора может быть приписано близости радиуса использованного в [42] тора к критическим значениям, упомянутым выше.

## 7. КВАНТОВАЯ НЕПРОНИЦАЕМОСТЬ

Эффект Ааронова — Бома часто определяют как квантовые следствия наличия недоступных для частиц полей. Недоступность полей обеспечивается окружением области с отличными от нуля напряженностями электромагнитного поля (ЭМП) непроницаемым экраном  $S$  подхо-

Рис. 9. Бесконечный цилиндрический соленоид (затемнен), окруженный непроницаемым цилиндром  $S$  радиуса  $R$ . Стрелки показывают волновой вектор падающих частиц



двух геометрической формы. Мы считаем, что экран  $S$  непроницаем для падающих частиц, если на нем обращается в нуль нормальная к  $S$  компонента квантово-механического тока вероятности.

**Рассеяние на непроницаемом цилиндре.** В качестве первого примера рассмотрим рассеяние заряженных бесспиновых частиц на непроницаемом цилиндре  $S$  радиуса  $R$  (рис.9), содержащем цилиндрический соленоид. В нерелятивистском случае ток вероятности

$$j = \frac{\hbar}{2i\mu} (\bar{\Psi} \nabla \Psi - \Psi \nabla \bar{\Psi}) - \frac{e}{\mu c} A |\Psi|^2. \quad (84)$$

В данном случае единственной отличной от нуля компонентой вектор-потенциала является  $A_\varphi = \Phi/2\pi\rho$  ( $\Phi$  — магнитный поток внутри соленоиды). Поэтому условие непроницаемости цилиндра  $S$  сводится к следующему:

$$\bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \rho} = 0, \quad \rho = R. \quad (85)$$

Обычно этому условию удовлетворяют, полагая

$$\Psi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R. \quad (86)$$

Добиться выполнения условия (85) можно многими способами. Вот два простейших, отличных от (86):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \quad (87)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \alpha \Psi \quad \text{при} \quad \rho = R \quad (88)$$

( $\alpha$  — произвольная вещественная константа). В любом из этих случаев волновую функцию (ВФ) можно представить в виде

$$\Psi = \Psi_{AB} + \Psi_s. \quad (89)$$

Здесь  $\Psi_{AB}$  — волновая функция, отвечающая рассеянию на бесконечно тонком соленоиде:



$$\Psi_{AB} = \sum \exp [i\pi (|m| - |m - \gamma|) + im\varphi] J_{|m-\gamma|}(k\rho) \quad (90)$$

$\left(k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \gamma = \frac{e\Phi}{\hbar c}\right)$ . Здесь и далее при отсутствии индекса суммирования подразумевается суммирование от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Асимптотическое выражение для  $\Psi_{AB}$ , справедливое при всех углах рассеяния, было впервые получено в [43]:

$$\Psi_{AB} \sim \exp [ikx + i\gamma(\varphi - \pi)] + i \sin \pi\gamma \exp (i\varphi/2) \frac{\exp(ik\rho)}{(1 - 2\pi ik\rho \sin^2 \varphi/2)^{1/2}}.$$

При не слишком малых углах рассеяния  $\varphi$  ( $k\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \gg 1$ ) приходим к выражению, полученному в [44]:

$$\Psi_{AB} \sim \exp [ikx + i\gamma(\varphi - \pi)] + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp(ik\rho) \cdot f_{AB}(\varphi)$$

$$f_{AB} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} \sin \pi\gamma, \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2\pi k} \frac{\sin^2 \pi\gamma}{\sin^2 \varphi/2}. \quad (91)$$

(Ради определенности и без ограничения общности мы считаем  $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$ ). Второе слагаемое в (89) учитывает конечность размеров соленоида и его экранировку:

$$\Psi_s = \sum \exp [i\pi (|m| - \frac{1}{2}|m - \gamma|) + im\varphi] H_{|m-\gamma|}^{(1)}(k\rho) C_m.$$

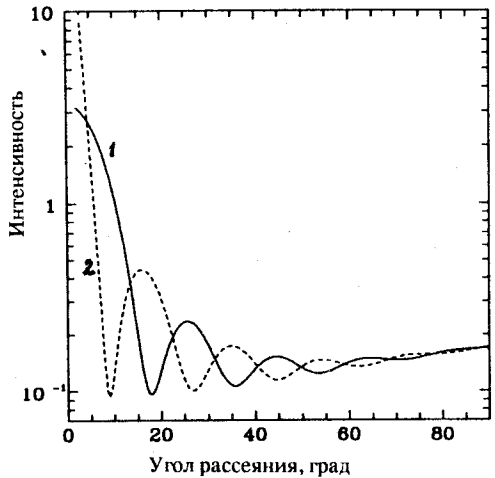
Коэффициенты  $C_m$  определяются граничным условием при  $\rho = R$ :

$$C_m = -\frac{J_{|m-\gamma|}}{H_{|m-\gamma|}^{(1)}} \quad \text{при условии (86),}$$

$$C_m = -\frac{\dot{J}_{|m-\gamma|}}{\dot{H}_{|m-\gamma|}^{(1)}} \quad \text{при условии (87),}$$

$$C_m = -\frac{k \dot{J}_{|m-\gamma|} - \alpha J_{|m-\gamma|}}{k \dot{H}_{|m-\gamma|}^{(1)} - \alpha H_{|m-\gamma|}^{(1)}} \quad \text{при условии (88),}$$

Рис. 10. Нерелятивистская интенсивность рассеяния на цилиндре в случае, когда наложено граничное условие (86). Интенсивность определяется как отношение сечения рассеяния (93) к геометрическому ( $=2R$ ). Определенная таким образом интенсивность безразмерна. Кривые 1 и 2 отвечают отсутствию магнитного потока внутри соленоида и значению  $\gamma = 1/2$  соответственно. Параметр  $kR = 10$



Здесь и в дальнейшем мы опускаем аргумент функций Бесселя и Хенкеля, если он равен  $kR$ . Точка над этими функциями означает дифференцирование по их аргументу. При  $\rho \rightarrow \infty$  получаем

$$\Psi_s \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp(ik\rho) \cdot f_s(\varphi),$$

$$f_s(\varphi) = \left(\frac{2}{\pi ik}\right)^{1/2} \sum C_m \cdot \exp[i\pi(|m| - |m - \gamma|) + im\varphi]. \tag{92}$$

Полная амплитуда и сечение имеют вид

$$f = f_{AB} + f_s, \quad \sigma = |f|^2. \tag{93}$$

Констатируем зависимость сечения рассеяния от конкретной реализации условия непроницаемости (85). Типичные сечения показаны на рис.10—12. Налицо сильная зависимость от выбора условий непроницаемости:

Условия (86)—(88), будучи тривиальными с математической точки зрения (они соответствуют красвым задачам Дирихле — Неймана и смешанной красвой задаче), отвечают различным типам физической непроницаемости. Существенным является ответ на вопрос: какой именно тип физической непроницаемости реализуется в экспериментах по проверке существования АБ-эффекта? На данном этапе мы не интересуемся поведением ВФ внутри цилиндра  $S$ . Например, чтобы обратить ВФ внутри  $S$  в нуль при граничном условии (86), мы должны создать бесконечное объемное отталкивание внутри цилиндра  $S$  и  $\delta$ -образный

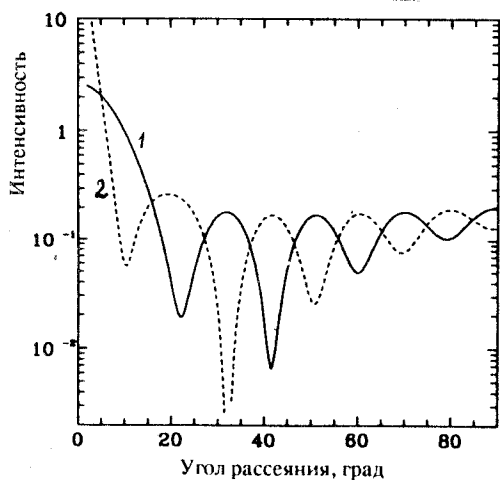


Рис. 11. То же, что на рис.10, для граничного условия (87)

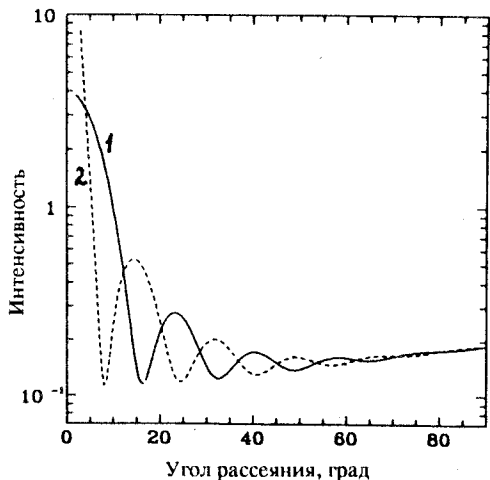
отталкивающий потенциал на поверхности цилиндра  $S$ . Последний необходим для получения правильной величины скачка нормальной производной  $\Psi$  при переходе через границу  $S$  (в самом деле,  $\partial\Psi/\partial\rho$  равно нулю внутри цилиндра и не равно нулю с наружной стороны цилиндра при граничном условии (86)). Наконец, отметим работы [45,

46], в которых изучалось влияние изменения граничных условий на процесс рассеяния (безотносительно к АБ-эффекту).

**Рассеяние на непроницаемой сфере.** Рассмотрим теперь непроницаемую сферу  $S$  радиуса  $R$ . В отсутствие магнитного поля условие исчезновения на поверхности  $S$  нормальной компоненты тока вероятности выглядит следующим образом:

$$\bar{\Psi}_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} - \Psi_0 \frac{\partial \bar{\Psi}_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (94)$$

Простейшими реализациями (94) являются следующие:



$$\Psi_0 = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (95)$$

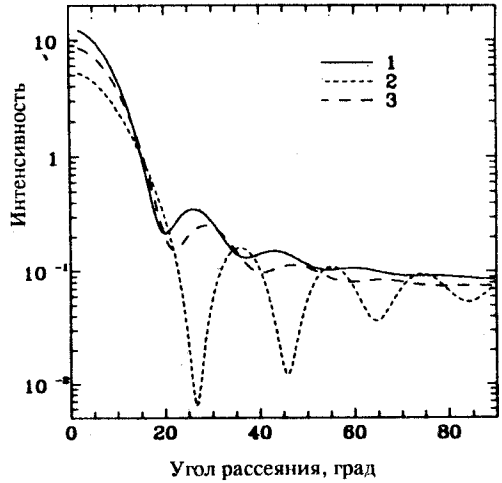
$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R, \quad (96)$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = \alpha \Psi \quad \text{при } r = R \quad (97)$$

( $\alpha$  — произвольная вещественная константа). В любом из этих случаев волновая функ-

Рис. 12. То же, что на рис.10, для граничного условия (88)

Рис. 13. Нерелятивистские сечения рассеяния на непроницаемой сфере  $S$  радиуса  $R$ . Интенсивность определяется как отношение сечения рассеяния (98) к геометрическому ( $= \pi R^2$ ). Кривые 1, 2 и 3 относятся к условиям непроницаемости (95), (96) и (97) (при  $\alpha=1$ ) соответственно. Параметр  $kR=10$



ция, амплитуда и сечение рассеяния имеют вид

$$\Psi_0 = \exp(ikz) + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum i^l (2l + 1) C_l H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta),$$

$$f(\theta) = \frac{1}{ik} \sum (2l + 1) C_l P_l(\cos \theta), \quad \sigma = |f(\theta)|^2. \quad (98)$$

Коэффициенты  $C_l$ :

$$C_l = -J_{l+\frac{1}{2}}/H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)} \quad \text{при условии (95),}$$

$$C_l = -\frac{(l+1)J_{l+\frac{1}{2}} - kR J_{l-\frac{1}{2}}}{(l+1)H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)} - kR H_{l-\frac{1}{2}}^{(1)}} \quad \text{при условии (96),}$$

$$C_l = -\frac{(l+1+\alpha R)J_{l+\frac{1}{2}} - kR J_{l-\frac{1}{2}}}{(l+1+\alpha R)H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)} - kR H_{l-\frac{1}{2}}^{(1)}} \quad \text{при условии (97).}$$

Типичные сечения  $\sigma = |f|^2$  показаны на рис.13. Как и в случае непроницаемого цилиндра, констатируем сильную зависимость сечений от конкретной реализации условий непроницаемости.

Релятивистские условия непроницаемости. *Релятивистский непроницаемый цилиндр*. Переходим к рассмотрению релятивистского АБ-эффекта. Имеется несколько работ по этому вопросу. В первой же из них [47] было доказано, что для бесконечно тонкого цилиндрического соленоида релятивистское АБ-сечение отличается от нерелятивистского множителем  $(1-\beta^2)^{1/2}$ ,  $\beta = v/c$ . Авторы работы [48], в которой изучалось рассеяние на непроницаемом цилиндрическом соленоиде конечного радиуса  $R$ , утверждают, что на границе соленоида невозможно обратить в нуль все компоненты дираковской ВФ. Релятивистское рассеяние заряженных частиц на цилиндрическом потенциальном барьере конечной высоты (с соленоидом внутри) рассматривалось в работе [49]. В ней было показано, что невозможно сшить на границе барьера все компоненты дираковской волновой функции и их производные. Ввиду того, что в типичных экспериментах по проверке существования АБ-эффекта [8] энергия электронов порядка 100 кэВ, что соответствует  $\beta \approx 0,6$ , возникает необходимость в более детальном изучении этого вопроса.

Вне цилиндра  $S$  ВФ удовлетворяет уравнению Дирака

$$H\Psi = \mathcal{E}\Psi, \quad H = -i\hbar c \alpha \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) + \mu c^2 \beta,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\Psi$  разлагаем по состояниям с определенной проекцией углового момента

$$J_3 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \hbar \Sigma_3, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \sum \Psi_m, \quad J_3 \Psi_m = \hbar \left( m + \frac{1}{2} \right) \Psi_m, \quad \Psi_m = \begin{bmatrix} \Psi_{1m} \\ \Psi_{2m} \\ \Psi_{3m} \\ \Psi_{4m} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{1m} = u_{1m} \exp(im\varphi), \quad \Psi_{2m} = u_{2m} \exp[i(m+1)\varphi], \quad (99)$$

$$\Psi_{3m} = u_{3m} \exp(im\varphi), \quad \Psi_{4m} = u_{4m} \exp[i(m+1)\varphi].$$

Функции  $u_{1m}, u_{2m}$  являются линейными комбинациями бесселевых функций:

$$u_{1m} = A_m [J_{m-\gamma}(k\rho) + B_m H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

$$u_{2m} = C_m [J_{m+1-\gamma}(k\rho) + D_m H_{m+1-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

$$k^2 = (\mathcal{E}^2 - \mu^2 c^4)^{1/2} / \hbar c.$$

Малые компоненты дираковской ВФ следующим образом выражаются через  $u_{1m}, u_{2m}$ :

$$u_{3m} = -\frac{i\eta}{k} \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{m+1-\gamma}{\rho} \right) u_{2m} = -i\eta C_m [J_{m-\gamma}(k\rho) + D_m H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

$$u_{4m} = -\frac{i\eta}{k} \left( \frac{d}{d\rho} - \frac{m-\gamma}{\rho} \right) u_{1m} = -i\eta A_m [J_{m+1-\gamma}(k\rho) + B_m H_{m+1-\gamma}^{(1)}(k\rho)],$$

$$\eta = \left( \frac{\mathcal{E} - \mu c^2}{\mathcal{E} + \mu c^2} \right)^{1/2}. \quad (100)$$

Коэффициенты  $A_m, C_m$  фиксируются из условия получения правильного выражения для падающей волны, которую выбираем распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  с положительной спиральностью и энергией:

$$\Sigma \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_{inc} = p \Psi_{inc}, \quad p = \hbar k,$$

$$\Psi_{inc} = \exp [ikx + i\gamma(\varphi - \pi)] u_\eta, \quad u_\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \eta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

В итоге получаем

$$A_m = \exp \left( i\pi \frac{m+\gamma}{2} \right), \quad B_m = \exp \left( i\pi \frac{m+1+\gamma}{2} \right).$$

Подставляя эти коэффициенты в (99), приводим  $\Psi$  к виду

$$\Psi = (\Psi_{AB} + \Psi_s^0) u_\eta + \Psi_s. \quad (101)$$

Здесь  $\Psi_{AB}$  определено соотношением (90):

$$\Psi_s^0 = i \sin \pi \gamma \sum_{m=0}^{-\infty} \exp \left( i\pi \frac{\gamma - m}{2} \right) H_{\gamma-m}^{(1)}(k\rho) \exp(im\varphi),$$

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} \Psi_1^{(s)} \\ \Psi_2^{(s)} \\ \Psi_3^{(s)} \\ \Psi_4^{(s)} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_1^{(s)} = \sum \exp\left(i\pi \frac{m+\gamma}{2}\right) B_m H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho) \exp(im\varphi),$$

$$\Psi_2^{(s)} = \sum \exp\left(i\pi \frac{m+\gamma}{2}\right) D_{m-1} H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho) \exp(im\varphi),$$

$$\Psi_3^{(s)} = \eta \sum \exp\left(i\pi \frac{m+\gamma}{2}\right) D_m H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho) \exp(im\varphi),$$

$$\Psi_4^{(s)} = \eta \sum \exp\left(i\pi \frac{m+\gamma}{2}\right) B_{m-1} H_{m-\gamma}^{(1)}(k\rho) \exp(im\varphi).$$

Здесь и в дальнейшем, когда пределы суммирования не указаны, подразумевается суммирование по всем  $m$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При  $\rho \rightarrow \infty$  имеем следующее асимптотическое поведение  $\Psi$ :

$$\Psi \sim \exp[ikx + i\gamma(\varphi - \pi)] u_\eta + \frac{\exp(ik\rho)}{\sqrt{\rho}} f(\varphi), \quad (102)$$

где  $f(\varphi)$  — спинорная амплитуда рассеяния, равная

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \eta f_2 \exp(-i\varphi) \\ \eta f_1 \exp(i\varphi) \end{bmatrix},$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \exp(i\pi\gamma) \sum B_m \exp(im\varphi), \quad (103)$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \exp(i\pi\gamma) \sum D_{m-1} \exp(im\varphi).$$

Наконец, сечение рассеяния равно

$$\sigma = \frac{1}{2} (|f_1|^2 + |f_2|^2). \quad (104)$$

Коэффициенты  $B_m, D_m$  определяются граничным условием при  $\rho = R$ . Потребуем, например, чтобы при  $\rho = R$  обращались в нуль большие компоненты  $u_{1m}, u_{2m}$  дираковской ВФ. Это дает

$$D_{m-1} = B_m = -J_{m-\gamma} / H_{m-\gamma}^{(1)}. \quad (105)$$

Подставляя эти значения в (100), получаем при  $\rho = R$ :

$$|u_{3m}|^2 = \frac{4\eta^2}{\pi^2 k^2 R^2} \left( J_{m-\gamma}^2 + Y_{m-\gamma}^2 \right)^{-1},$$

$$|u_{4m}|^2 = \frac{4\eta^2}{\pi^2 k^2 R^2} \left( J_{m+1-\gamma}^2 + Y_{m+1-\gamma}^2 \right)^{-1}.$$

В типичных экспериментах по АБ-эффекту [8]  $kR \sim 10^6$ . Заменяем функции Бесселя и Неймана их асимптотическими выражениями. Тогда

$$|u_{3m}|^2 \approx |u_{4m}|^2 \approx \frac{2\eta^2}{\pi kR} \ll 1.$$

Поэтому, хотя отличие от нуля при  $\rho = R$  малых компонент ВФ действительно имеет место [48], но в реальных экспериментах им можно пренебречь. Подставляя (105) в (103) и (104), имеем

$$f_1 = f_2 = f, \quad \sigma = |f|^2,$$

$$f = -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \exp(i\pi\gamma) \sum \frac{J_{m-\gamma}}{H_{m-\gamma}^{(1)}} \exp(im\varphi). \quad (106)$$

Эта сумма содержит бesselовы функции как с положительными, так и с отрицательными индексами. Избавимся от последних, воспользовавшись (при  $m - \gamma < 0$ ) тождествами

$$J_{-\nu}(x) = i \sin \pi \nu H_{\nu}^{(1)}(x) + J_{\nu} \exp(-i\pi\nu),$$

$$H_{-\nu}^{(1,2)} = \exp(i\pi\nu) H_{\nu}^{(1,2)}.$$

Тогда

$$f = -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \pi \gamma \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} + \right.$$

$$\left. + \sum \exp[i\pi(|m| - |m - \gamma|) + im\varphi] J_{|m-\gamma|} / H_{|m-\gamma|}^{(1)} \right\}, \quad (107)$$



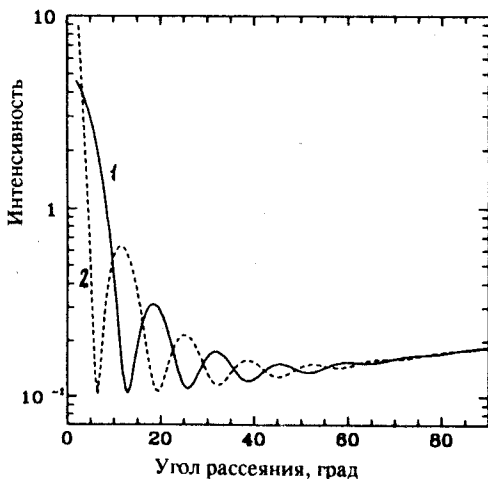


Рис. 14. Релятивистское сечение рассеяния электронов на непроницаемом цилиндре  $C$  радиуса  $R$  при  $\gamma = 0$  (кривая 1) и  $\gamma = 1/2$  (кривая 2). Условие непроницаемости соответствует исчезновению больших компонент дираковской волновой функции. Кинетическая энергия электронов 150 кэВ. Параметр  $kR = 10$

что по форме совпадает с нерелятивистской амплитудой рассеяния (93), соответствующей граничному условию (86). Точнее, нерелятивистское (93) переходит в релятивистское сечение (86) при за-

мене нерелятивистского импульса  $k_{\text{нерел}} = \sqrt{2\mu E}/\hbar$  на релятивистский  $k_{\text{рел}} = k_{\text{нерел}} (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Типичное сечение представлено на рис.14. Для бесконечно тонкого соленоида ( $kR \ll 1$ ) суммой в (107) можно пренебречь. Поэтому

$$f_{AB}^{\text{рел}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sin \pi \gamma \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2}.$$

Это выражение отличается от нерелятивистского (91) смыслом  $k$ . Поэтому для бесконечно тонкого соленоида  $\sigma_{AB}^{\text{рел}} = \sigma_{AB}^{\text{нерел}} \sqrt{1 - \beta^2}$ , что подтверждается результатами работы [47]. Апостериори факт перехода нерелятивистских выражений в релятивистские можно подтвердить тем, что отдельные компоненты дираковской ВФ удовлетворяют уравнению второго порядка, которое по форме совпадает с уравнением Шредингера, отличаясь тем, что содержит релятивистский импульс вместо нерелятивистского. Неисчезновение при  $\rho = R$  малых компонент дираковской ВФ (хотя оно и носит академический характер из-за численной малости  $u_{3m}, u_{4m}$ , при  $\rho = R$ ) связано с нерелятивистским характером граничного условия. Точного выполнения условия непроницаемости можно добиться путем наложения релятивистского граничного условия, а именно: потребуем обращения в нуль (как это делается в теории кварковых мешков, см., например, [50]) нормальной к поверхности непроницаемого цилиндра  $C$  компоненты тока вероятности:  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Здесь  $\mathbf{n}$  — нормаль к

поверхности  $C$ ,  $j$  — дираковский ток вероятности  $= ec \Psi^+ \alpha \Psi$ . В результате получаем

$$\Psi^+ \alpha n \Psi = 0 \quad \text{при } \rho = R. \tag{108}$$

Это выражение неудобно для практического применения. Следующее релятивистское условие, линейное по компонентам дираковской ВФ, также широко используется в теории мешков [50]:

$$i \alpha n \Psi = \beta \Psi \quad \text{при } \rho = R. \tag{109}$$

Доказательство того, что (108) вытекает из (109), занимает всего две строчки. Выполняем эрмитово сопряжение (109):

$$i \Psi^+ \alpha n = - \Psi^+ \beta. \tag{110}$$

Умножая (109) слева на  $\Psi^+$ , а (110) справа на  $\Psi$ , получаем

$$i \Psi^+ \alpha n \Psi = \Psi^+ \beta \Psi = - \Psi^+ \beta \Psi = 0.$$

Поэтому  $\Psi^+ \alpha n \Psi = 0$ , если выполнено условие (109). Обратное, вообще говоря, не имеет места, то есть условие (108) более общее, чем (109). В дальнейшем мы ограничимся условием (109). Применяем его к дираковской ВФ (99). Это дает

$$u_{4m} = -iu_{1m}, \quad u_{3m} = -iu_{2m} \quad \text{при } \rho = R. \tag{111}$$

Отсюда находим коэффициенты  $B_m, D_m$ :

$$B_m = -\frac{J_{m-\gamma} + \eta J_{m+1-\gamma}}{H_{m-\gamma}^{(1)} + \eta H_{m+1-\gamma}^{(1)}}, \quad D_m = -\frac{J_{m+1-\gamma} - \eta J_{m-\gamma}}{H_{m+1-\gamma}^{(1)} - \eta H_{m-\gamma}^{(1)}}.$$

Подставляем эти выражения в (103):

$$f_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \pi \gamma \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} + \exp(i\pi\gamma) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{m-\gamma} + \eta J_{m+1-\gamma}}{H_{m-\gamma}^{(1)} + \eta H_{m+1-\gamma}^{(1)}} \exp(im\varphi) + \exp(-i\pi\gamma) \sum_{m=0}^{-\infty} \frac{J_{\gamma-m} - \eta J_{\gamma-m-1}}{H_{\gamma-m}^{(1)} - \eta H_{\gamma-m-1}^{(1)}} \exp(im\varphi) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 f_2 = & -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \left\{ \frac{1}{2} \sin \pi \gamma \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} + \right. \\
 & + \exp(i\pi\gamma) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_{m+1-\gamma} - \eta J_{m-\gamma}}{H_{m+1-\gamma}^{(1)} - \eta H_{m-\gamma}^{(1)}} \exp[i(m+1)\varphi] + \\
 & \left. + \exp(-i\pi\gamma) \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{J_{\gamma-m-1} + \eta J_{\gamma-m}}{H_{\gamma-m-1}^{(1)} + \eta H_{\gamma-m}^{(1)}} \exp[i(m+1)\varphi] \right\}.
 \end{aligned} \tag{112}$$

Рассмотрим предельные случаи этих выражений.

а) Магнитный поток внутри соленоида равен нулю ( $\gamma = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 f_1 = & -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \sum \frac{J_m + \eta J_{m+1}}{H_m^{(1)} + \eta H_{m+1}^{(1)}} \exp(im\varphi), \\
 f_2 = & -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \sum \frac{J_{m+1} - \eta J_m}{H_{m+1}^{(1)} - \eta H_m^{(1)}} \exp[i(m+1)\varphi].
 \end{aligned} \tag{113}$$

б) Бесконечно тонкий экранирующий цилиндр ( $kR \ll 1$ ).

При  $0 < \gamma < 1/2$ :

$$\begin{aligned}
 f_1 = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sin \pi \gamma \frac{\exp(-i\varphi/2)}{\sin \varphi/2}, \\
 f_2 = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sin \pi \gamma \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2}.
 \end{aligned}$$

При  $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ :

$$\begin{aligned}
 f_1 = & -\frac{\sin \pi \gamma}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2}, \\
 f_2 = & -\frac{\sin \pi \gamma}{\sqrt{2\pi ik}} \frac{\exp(3i\varphi/2)}{\sin \varphi/2}.
 \end{aligned} \tag{114}$$

В этом случае сечение рассеяния

$$\sigma_{AB}^{\text{рел}} = \frac{1}{2\pi k} \frac{\sin^2 \pi \gamma}{\sin^2 \varphi/2}. \tag{115}$$

По форме оно совпадает с нерелятивистским выражением (91), отличаясь тем, что в (115) входит релятивистский импульс. Поэтому, как и выше,

$$\sigma_{AB}^{\text{рел}} = \sigma_{AB}^{\text{нерел}} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Удивительно, что исходные выражения (112) для  $f_1, f_2$  являются непрерывными функциями  $\gamma$ , тогда как амплитуды  $f_1$  и  $f_2$  в (114) разрывны при  $\gamma = 1/2$ . Причина этого кажущегося противоречия становится ясной, если рассмотреть предел (112) при  $kR \rightarrow 0$  при произвольном значении  $\gamma$ . Оставляя в (112) только неисчезающие члены, получаем

$$f_1(kR \rightarrow 0, \gamma) = -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \sin \pi \gamma \left( \frac{1}{2} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} - i\eta \frac{1}{\frac{J_{-\gamma}}{J_{\gamma-1}} \exp(i\pi\gamma) + \eta} \right),$$

$$f_2(kR \rightarrow 0, \gamma) = -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \sin \pi \gamma \left( \frac{1}{2} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} + i\eta \frac{\exp(i\varphi)}{\frac{J_{\gamma-1}}{J_{-\gamma}} \exp(-i\pi\gamma) + \eta} \right).$$

Примем теперь во внимание, что при  $kR \rightarrow 0$

$$\frac{J_{-\gamma}(kR)}{J_{\gamma-1}(kR)} \sim \left(\frac{kR}{2}\right)^{1-2\gamma} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}.$$

Представим первый множитель в этом выражении в виде

$$\left(\frac{kR}{2}\right)^{1-2\gamma} = \exp\left((1-2\gamma) \ln \frac{kR}{2}\right).$$

Если  $kR$  настолько мало, что  $\left|(1-2\gamma) \ln \frac{kR}{2}\right| \gg 1$ , то

$$\left(\frac{kR}{2}\right)^{1-2\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \gamma < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{при } \frac{1}{2} < \gamma < 1, \end{cases}$$

и мы приходим к (114). С другой стороны, если  $\gamma$  настолько близко к  $1/2$ , что  $\left|(1-2\gamma) \ln \frac{kR}{2}\right| \ll 1$ , то

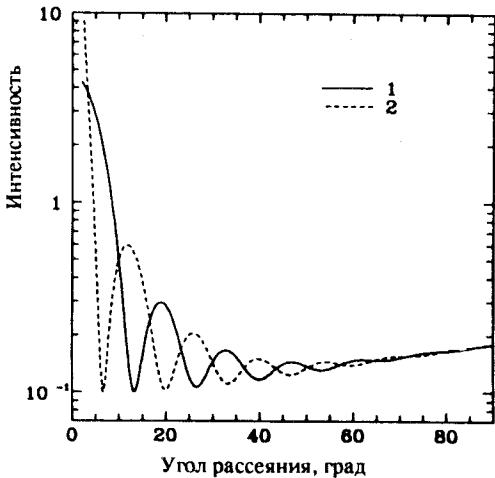
$$\left(\frac{kR}{2}\right)^{1-2\gamma} \approx 1 + (1-2\gamma) \ln \frac{kR}{2}.$$

Подставляя это выражение в  $f_1$  и  $f_2$ , получаем

$$f_1 \left( \gamma = \frac{1}{2}, kR \rightarrow 0 \right) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \left( \frac{1}{2} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} - \frac{\eta}{1-i\eta} \right),$$

$$f_2 \left( \gamma = \frac{1}{2}, kR \rightarrow 0 \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \left( \frac{1}{2} \frac{\exp(i\varphi/2)}{\sin \varphi/2} - \frac{\eta}{1+i\eta} \exp(i\varphi) \right). \quad (116)$$

Уравнения (114) и (116) соответствуют разным физическим ситуациям. Тот факт, что различные последовательности перехода к пределу могут вести к различной физике, не является новым. В частности, с этим связана недавняя дискуссия [51] о законности первого борновского приближения для описания АБ-эффекта. На рис.15 даны релятивистские сечения рассеяния, соответствующие точному релятивистскому граничному условию (109).



Сравнивая их с приближенными релятивистскими сечениями, соответствующими исчезновению при  $\rho = R$  бывших компонент дираковской волновой функции, мы отмечаем их прекрасное совпадение, несмотря на резкое различие амплитуд рассеяния (103) и (112).

Рис. 15. То же, что на рис. 14, для условия непроницаемости (109)

**Рассеяние на релятивистски непроницаемой сфере.** Рассмотрим теперь релятивистское рассеяние на непроницаемой сфере радиуса  $R$ . Пусть падающая волна распространяется в положительном направлении оси  $z$  с положительными энергией  $\mathcal{E}$  и спиральностью. Тогда

$$\Psi_{inc} = \exp(ikz) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \left( \frac{\mathcal{E} - \mu c^2}{\mathcal{E} + \mu c^2} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{1}{\hbar c} (\mathcal{E}^2 - \mu^2 c^4)^{1/2}.$$

Полная волновая функция равна

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_s.$$

При  $r \rightarrow \infty$

$$\Psi_s = \frac{\exp(ikr)}{r} f(\varphi), \quad f(\varphi) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}.$$

Компоненты  $f_i$  спинорной амплитуды рассеяния зависят от выбора того или иного условия непроницаемости. Потребуем, например, исчезновения при  $r = R$  больших компонент дираковской ВФ. Тогда

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{i}{k} \sum (2l+1) \frac{J_{l+1/2}}{H_{l+1/2}^{(1)}} P_l(\cos \theta), \quad f_2 = 0, \\ f_3 &= \frac{i\eta}{k} \sum \left[ l \frac{J_{l-1/2}}{H_{l-1/2}^{(1)}} + (l+1) \frac{J_{l+3/2}}{H_{l+3/2}^{(1)}} \right] P_l(\cos \theta), \\ f_4 &= \frac{i\eta}{k} \exp(i\varphi) \sum \left( \frac{J_{l-1/2}}{H_{l-1/2}^{(1)}} - \frac{J_{l+3/2}}{H_{l+3/2}^{(1)}} \right) P_l^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (117)$$

Оказывается, что при  $r = R$  малая компонента  $\Psi_3 = 0$ , а  $\Psi_4$  имеет порядок  $(kR)^{-2}$ .

Потребуем теперь точного исчезновения при  $r = R$  дираковского тока вероятности. Это эквивалентно условию

$$i \alpha \mathbf{n} \Psi = \beta \Psi \quad \text{при } r = R,$$

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta, 0). \quad (118)$$

Этому условию непроницаемости соответствуют компоненты релятивистской спинорной амплитуды

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{i}{k} \sum \left[ (l+1) g_{l+1} + l f_l \right] P_l(\cos \theta), \\ f_2 &= -\frac{i}{k} \exp(i\varphi) \sum (g_{l+1} - f_l) P_l^1(\cos \theta), \\ f_3 &= \frac{i\eta}{k} \sum \left[ (l g_l + (l+1) f_{l+1}) \right] P_l(\cos \theta), \end{aligned}$$

$$f_4 = \frac{i\eta}{k} \sum (g_l - f_{l+1}) P_l^1(\cos \theta),$$

$$g_l = \frac{J_{l-\frac{1}{2}} + \eta J_{l+\frac{1}{2}}}{H_{l-\frac{1}{2}}^{(1)} + \eta H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}}, \quad f_l = \frac{J_{l+\frac{1}{2}} - \eta J_{l-\frac{1}{2}}}{H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)} - \eta H_{l-\frac{1}{2}}^{(1)}}. \quad (119)$$

Для каждого из рассмотренных условий непроницаемости имеем сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{1}{1 + \eta^2} (|f_1|^2 + |f_2|^2 + |f_3|^2 + |f_4|^2).$$

Типичные условия зависимости показаны на рис.16. Как и для рассеяния на цилиндре, констатируем прекрасное совпадение сечений рассеяния, отвечающих различным релятивистским условиям непроницаемости. При этом амплитуды рассеяния (117) и (119) имеют существенно различную функциональную форму.

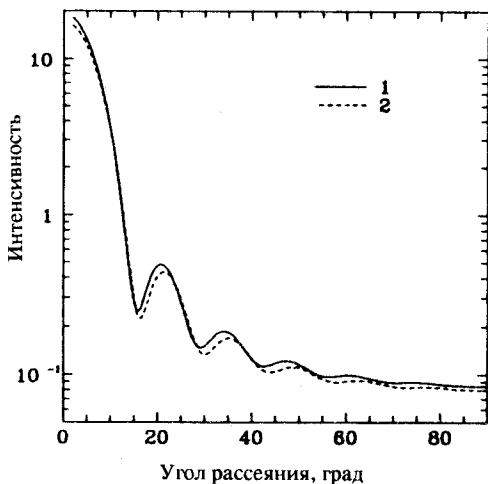


Рис. 16. Релятивистская интенсивность рассеяния электронов на непроницаемой сфере  $S$  радиуса  $R$ . Кривые 1 и 2 соответствуют исчезновению больших компонент дираковской волновой функции на поверхности  $S$  и условию непроницаемости (118) соответственно

## 8. ОБ ЭФФЕКТЕ ААРОНОВА — БОМА В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ ПРОСТРАНСТВА

Типичное рассуждение об отсутствии АБ-эффекта в односвязных областях пространства выглядит следующим образом. Пусть напряженности  $E$ ,  $H$  отличны от нуля в ограниченной односвязной области пространства  $S$ . Вне  $S$  отличны от нуля скалярный и векторный потенциалы  $\Phi$ ,  $A$ . Рассмотрим произвольный контур  $C$ , целиком лежащий вне  $S$ . Легко видеть, что  $\oint A_l dl$ , взятый по этому контуру, всегда равен нулю. В са-

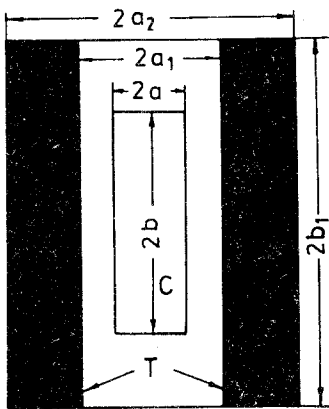


Рис.17. Тороидальная полость  $T$ , внутри которой магнитное поле  $H$  отлично от нуля. В цилиндрической полости  $C$ , где  $H=0$ , два различных векторных потенциала, связанных калибровочным преобразованием, приводят к различным собственным значениям (согласно [53])

мом деле, на контур  $C$  можно всегда натянуть поверхность, целиком лежащую вне  $S$ . По теореме Стокса

$$\oint A_l dl = \int H dS.$$

Поскольку вне  $S$  напряженности  $E=H=0$ , то  $\oint A_l dl = 0$ , что и доказывает наше утверждение.

Поскольку наличие нетривиальных путей, вдоль которых  $\oint A_l dl \neq 0$ , является необходимым условием существования АБ-эффекта [52], то заключаем об отсутствии последнего в рассматриваемом случае.

Контрпример, приведенный в работе [53], заставляет нас усомниться в этом рассуждении и по-новому взглянуть на возможность существования АБ-эффекта в односвязных пространствах.

Авторы работы [53] рассматривают тороидальную полость  $T$  (рис.17)  $a_1 < \rho < a_2, |z| < b_1$ , внутри которой магнитное поле  $H$  отлично от нуля:

$$H_\rho = H_z = 0, \quad H_\varphi = \Phi [2b_1 (a_2 - a_1)]^{-1} \quad (120)$$

( $\Phi$  — магнитный поток).

Вне  $T$  магнитное поле равно нулю. Далее, авторы [53] приводят два ВП, дающих одно и то же магнитное поле  $H$ . Они равны нулю при  $|z| > b_1$ .

При  $|z| < b_1$  они определены следующими выражениями:

$$A_z^{(1)} = \begin{cases} \frac{\Phi}{2b_1} & \text{при } \rho < a_1 \\ \Phi \frac{1}{2b_1} \frac{a_2 - \rho}{a_2 - a_1} & \text{при } a_1 < \rho < a_2 \\ 0 & \text{при } \rho > a_2, \end{cases} \quad (121)$$



$$A_z^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho < a_1 \\ -\frac{\Phi}{2b_1} \frac{\rho - a_1}{a_2 - a_1} & \text{при } a_1 < \rho < a_2 \\ -\frac{\Phi}{2b_1} & \text{при } \rho > a_2. \end{cases} \quad (122)$$

Пусть теперь заряженная частица заключена в цилиндрической полости  $C$ :  $|z| < b$  ( $b < b_1$ ),  $\rho < a$  ( $a < a_1$ ). Наложим на ВФ  $\Psi$  по радиальной переменной условие Дирихле ( $\Psi = 0$  при  $\rho = a$ ), а по переменной  $z$  — условие периодичности:

$$\Psi(z = b) = \Psi(z = -b). \quad (123)$$

Решениями уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar c} A_z^{(1,2)} \right)^2 \Psi \right] = E \Psi \quad (124)$$

внутри  $C$  с выбранными граничными условиями являются следующие ВФ:

$$\Psi_{nsm}^{(1,2)} \sim \exp\left(\frac{in\pi z}{b}\right) \exp(im\varphi) J_m(\lambda_{ms}\rho/R). \quad (125)$$

Здесь  $\lambda_{ms}$  —  $s$ -й ненулевой корень функции Бесселя  $J_m(x)$ . Этим ВФ отвечают собственные значения

$$E_{nms}^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{\lambda_{ms}^2}{R^2} + \left( \frac{n\pi}{b} - \frac{e\Phi}{\hbar c} \frac{1}{2b_1} \right)^2 \right], \quad (126)$$

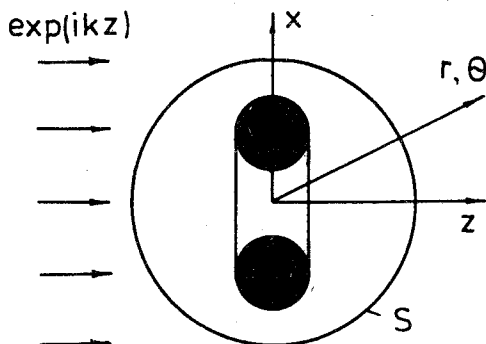
$$E_{nms}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{\lambda_{ms}^2}{R^2} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right].$$

Очевидно,  $E_{nms}^{(1)} \neq E_{nms}^{(2)}$ , то есть собственные значения в односвязной области (где  $H = 0$ ) зависят от частного выбора ВП. Это выглядит весьма странно, поскольку ВП  $A_z^{(1)}$  и  $A_z^{(2)}$  связаны калибровочным преобразованием:

$$A_z^{(1)} = A_z^{(2)} + \text{grad } \chi. \quad (127)$$

Функция  $\chi$  равна  $\Phi z/2b_1$  при  $|z| < b_1$ ,  $\Phi/2$  при  $z > b_1$  и  $-\Phi/2$  при  $z < -b_1$ . Отметим, что собственные значения  $E^{(1,2)}$  отвечают волновым функциям

Рис. 18. Торoidalный соленоид (зачернен) внутри сферы  $S$ . При одном и том же граничном условии на поверхности сечение рассеяния заряженных частиц зависит от величины магнитного потока внутри соленоида



$\Psi^{(1,2)}$ , удовлетворяющим при  $z = \pm b$  одному и тому же граничному условию (123). Между тем калибровочному преобразованию ВП (127) отвечает следующее преобразование ВФ:

$$\Psi_1 = \tilde{\Psi}_2 \exp\left(\frac{ie\chi}{\hbar c}\right). \quad (128)$$

Отсюда следует, что если  $\Psi_1$  удовлетворяют граничному условию (123), то преобразованная ВФ  $\tilde{\Psi}_2$  этому условию, вообще говоря, не удовлетворяет:

$$\tilde{\Psi}_2(z = -b) = \tilde{\Psi}_2(z = b) \exp\left(\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right) \neq \tilde{\Psi}_2(z = b). \quad (129)$$

Поэтому различие собственных значений  $E_1$  и  $E_2$  обязано тому факту, что соответствующие им  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  не связаны калибровочным преобразованием. При калибровочном преобразовании должны меняться также и граничные условия, которым удовлетворяют ВФ.

Рассмотрим теперь рассеяние заряженных бесспиновых частиц на сфере  $S$ , внутри которой находится ТС (рис.18). Пусть на поверхности сферы выполняется граничное условие

$$\Psi(z = R) = f_0(\theta, \varphi). \quad (130)$$

Задача рассеяния полностью определена. Пространство вне сферы односвязно. Будет ли сечение рассеяния зависеть от величины магнитного поля внутри сферы  $S$  (при одном и том же граничном условии (130))? Ответ является утвердительным. В самом деле, пусть при отсутствии магнитного поля задано граничное условие (130). Для такого условия

можно найти волновую функцию  $\Psi_0$ , амплитуду и сечение рассеяния \*. Включим теперь магнитное поле внутри ТС. С помощью калибровочного преобразования

$$\Psi = \Psi' \exp \left( \frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \quad (131)$$

устраиваем ВП вне сферы  $S$ . Функция  $\alpha$  получена в [3,15]. Волновая функция  $\Psi'$  удовлетворяет свободному уравнению Шредингера с граничным условием

$$\Psi' (r = R) = f_0 \exp \left( - \frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \Big|_{r=R}.$$

Так как преобразование (131) унитарно, то все наблюдаемые для  $\Psi$  и  $\Psi'$  одинаковы. Поскольку  $\Psi_0$  и  $\Psi'$  удовлетворяют свободному уравнению Шредингера с различными граничными условиями, то они описывают различные физические ситуации. Ввиду унитарной эквивалентности  $\Psi$  и  $\Psi'$  это означает, что при одном и том же граничном условии при  $r = R$  ситуации при наличии и отсутствии магнитного поля внутри сферы оказываются физически различными. Эти ситуации эквивалентны в следующих двух случаях. Во-первых, когда на поверхности  $S$  наложено граничное условие, явно зависящее от магнитного поля внутри ТС:

$$\Psi = f_0 \exp \left( \frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \Big|_{r=R}.$$

Действительно, после унитарного преобразования (131) мы приходим к ВФ  $\Psi'$  удовлетворяющей граничному условию (130). Во втором случае на поверхности сферы налагается калибровочно-инвариантное граничное условие. Поскольку ток вероятности является калибровочно-инвариантной величиной, то исчезновение его нормальной компоненты на поверхности сферы является калибровочно-инвариантным условием. Итак, имеем на поверхности сферы

$$\bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} - \frac{2ie}{\hbar c} A_z |\Psi|^2 = 0 \quad \text{при } r = R.$$

После калибровочного преобразования (131) приходим к ВФ  $\Psi'$ , удовлетворяющей граничному условию:

\*Здесь  $\Psi_0$  — ВФ, описывающая рассеяние на сфере при граничном условии (130) и отсутствии ТС внутри сферы.

$$\overline{\Psi}' \frac{\partial \Psi'}{\partial z} - \Psi' \frac{\partial \overline{\Psi}'}{\partial z} = 0 \quad \text{при } r = R.$$

Выбираем одну из частных реализаций этого граничного условия:

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial z} \Big|_{r=R} = 0. \quad (132)$$

Для такой реализации решение в явном виде было получено в разд.7. После этого с помощью того же преобразования (131) возвращаемся к исходной ВФ  $\Psi$ . В явном виде граничное условие для  $\Psi$  получается подстановкой в (132)  $\Psi' = \Psi \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)$ . Тогда

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar c} A_z \Psi = 0. \quad (133)$$

Итак, если в отсутствие магнитного поля внутри сферы на ее поверхности задано граничное условие

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = 0,$$

то для получения той же физической ситуации при наличии магнитного поля должно быть наложено граничное условие (133). Единственным нерелятивистским граничным условием, сохраняющим свою функциональную форму при всех значениях магнитного потока внутри сферы, является условие  $\Psi = 0$  на границе сферы.

Вывод состоит в том, что нам следует действовать с известной осмотрительностью при рассмотрении АБ-эффекта в односвязном пространстве, а именно: мы должны определить, что мы понимаем под тем или иным условием непроницаемости. Мы невольно уподобляемся персонажу Монтеня: «Я знаю одного такого человека: когда я спрашиваю о чем-нибудь, хотя бы хорошо ему известном, он немедленно требует книгу, чтобы отыскать в ней нужный ответ; и он никогда не решится сказать, что у него на задку завелась парша, пока не справится в своем лексиконе, что собственно значит зад и что значит парша». (Монтень, *Опыты*, М.: Правда, 1991, с.106).

## 9. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ЭФФЕКТА ААРОНОВА — БОМА

Дискуссия последних лет о существовании эффекта Ааронова — Бомма связана с тем, что в многосвязных областях пространства допустимы многозначные ВФ [15,54]. Оказывается, что грамотное использование многозначных ВФ (т.е. решение уравнений Шредингера с помощью мно-

гозначных ВФ) приводит к исчезновению АБ-эффекта [54,55], который появляется только при использовании однозначных ВФ. Известное доказательство Паули [56] однозначности ВФ справедливо только в односвязных областях пространства. Поэтому эта теоретическая неопределенность может быть разрешена только опытным путем. Первые эксперименты (см., например, обзор [31]), в которых электроны рассеивались на цилиндрических соленоидах, теперь рассматриваются как недостаточные. Основными причинами являются: плохая асимптотика ВФ (из-за медленного убывания ВП), наличие обратного потока магнитного поля и утечки магнитного поля, обаянные конечной длине реального цилиндрического соленоида. Это позволяет связать наблюдаемый на эксперименте сдвиг дифракционной картины с рассеянием электронов на утечках магнитного поля [57]. Эти недостатки отсутствуют для тороидального соленоида. Быстрое убывание ВП ( $\sim r^{-3}$ , см. разд.2) приводит к нормальной асимптотике ВФ. В прекрасных экспериментах, выполненных японскими физиками (см. их описание в книге [8]), изучалось рассеяние электронов на ТС. Мы будем ссылаться на эти эксперименты как на эксперименты Тономуры. Кратко коснемся существующих теоретических подходов. В важной работе [9] была рассмотрена фраунгоферовская дифракция электронов на ТС. К сожалению, это приближение неприменимо для тех условий, при которых были выполнены эксперименты Тономуры. Адекватный подход был найден в [10]. Наша ближайшая цель — применить результаты этих работ к описанию этих экспериментов.

Следующая ВФ [10] описывает рассеяние плоской электронной волны на непроницаемом ТС:

$$\Psi = \exp(ikz) + \Psi_s, \quad (134)$$

$$\Psi_s = i \frac{1 + \cos \theta}{2} \exp(ikr) \exp\left(ik \frac{d^2 + R^2}{2r}\right) \cdot$$

$$[\exp(i\omega)W_1 - \exp(2i\pi\gamma - i\omega) \cdot W_2].$$

Здесь  $d, R$  — параметры непроницаемого тора ( $(\rho - d)^2 + z^2 + R^2$  с магнитным потоком  $\Phi$  внутри него (рис.19),  $\gamma = e\Phi/hc$ ;  $\theta$  и  $r$  — угол рассеяния на расстояние от ТС до точки наблюдения  $P$ ;  $k$  — волновое число,  $\omega = \frac{kdR}{r}$ ;  $W_1$  и  $W_2$  — линейные комбинации функций Ломмеля двух переменных

$$W_{1,2} = U_1 \left[ \frac{k(d \pm R)^2}{r}, k(d \pm R) \sin \theta \right] - iU_2 \left[ \frac{k(d \pm R)^2}{r}, k(d \pm R) \sin \theta \right].$$

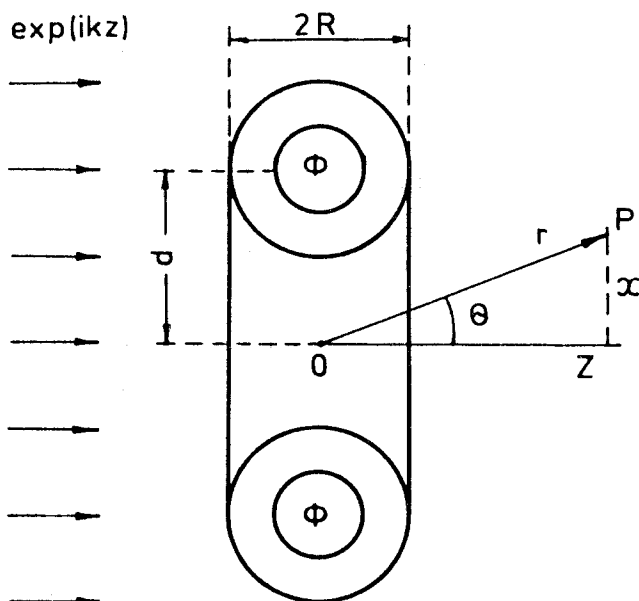


Рис.19. Схематическое изображение рассеяния заряженных частиц на непрозрачном тороидальном соленоиде с магнитным потоком  $\Phi$ .  $d, R$  — параметры тороидального соленоида;  $z, x$  — положение плоскости наблюдения и расстояние точки наблюдения от оси симметрии соленоида

Интенсивность рассеяния определяется квадратом абсолютной величины  $\Psi$ :  $I = |\Psi|^2$ . Обсудим теперь условия, при которых выражение (134) справедливо. Оно было получено в рамках теории дифракции Френеля — Кирхгофа [58]. В ней предполагается, что ВФ исчезает на поверхности тора, тогда как вне тора, в плоскости  $z = 0$ , ВФ совпадает с плоской волной  $\exp(ikz)$ . Далее, в произвольной точке  $P$  ВФ определяется дифракционным интегралом. Он сводится к выражению (134), если выполнены следующие условия:

$$k(d - R) \gg 1, \quad (135)$$

$$\delta \sin^2 \theta \ll \pi \quad (\delta = kd^2/2r). \quad (136)$$

В обсуждаемых экспериментах [8]  $d \approx 2 \cdot 10^{-4}$  см,  $R \approx 1 \cdot 10^{-4}$  см,  $k \approx 2 \cdot 10^{10}$  см $^{-1}$  (это соответствует энергии электронов  $E \approx 150$  кэВ). Мы вычислим интенсивности электронов в плоскостях  $z = 10$  и  $100$  см.

Им соответствуют значения  $\delta = 4$  и  $0,4$  соответственно. Тогда соотношение (136) приводит к следующему ограничению на  $\sin \theta$ :  $\sin^2 \theta \ll \frac{1}{4} \pi$  для  $z = 10$  см и  $\sin^2 \theta \ll 2\pi$  при  $z = 100$  см. В экспериментах Тономуры измерения проводились при  $x$ , лежащих внутри дыры тора ( $x \leq d - R$ ) и в ближайшей окрестности ТС. Примем (с запасом), что  $x_{\text{макс}} = 2(d + R) \approx 6 \cdot 10^{-4}$  см. Тогда  $\sin \theta_{\text{макс}} = \frac{x_{\text{макс}}}{z} \approx 6 \cdot 10^{-5}$  (при  $z = 10$  см) и  $6 \cdot 10^{-6}$  (при  $z = 100$  см). Поэтому условие (136) заведомо выполнено. Далее, в рассматриваемом случае  $k(d - R) \approx 2 \cdot 10^6$ . Ввиду этого условие (135) также выполнено. Физически оно означает, что достаточно много длин волн укладывается в отверстии тора. Поскольку падающая волна вблизи тора отличается от плоской волны на расстояниях порядка нескольких длин волн и поскольку ВФ ввиду непроницаемости тора обращается в нуль на поверхности тора, то условия применимости теории дифракции Френеля — Кирхгофа выполнены. Специальные меры были предприняты в экспериментах Тономуры, чтобы обеспечить непроницаемость тора. Согласно [8] только  $10^{-6}$  падающих частиц достигает области внутри тора, где  $H \neq 0$ . Условие (135) вовсе не означает перехода к геометрической оптике и отсутствия дифракции. Условие (136) как раз и определяет область углов, в которой справедлива френелевская теория дифракции. Согласно [59] существенно, чтобы поперечные размеры пучка значительно превышали размеры детектора. В этой же работе приведены прекрасные, четко выраженные дифракционные картины, для которых отношение размеров рассеивателя к длине волны электрона было порядка  $10^4$ .

Численный анализ дифракции электронов тороидальным соленоидом. На рис. 20—23 показаны типичные интенсивности электронов в плоскости  $z = \text{const}$ . Параметры  $R$ ,  $d$  и  $k$  те же, что и в экспериментах Тономуры:  $R \approx 10^{-4}$  см,  $d = 2 \cdot 10^{-4}$  см,  $k = 2 \cdot 10^{10}$  см $^{-1}$ . Вычисления проводились при  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Это не означает ограничения общности, поскольку теория инвариантна относительно замены  $\gamma \rightarrow \gamma + n$  ( $n$  — целое). Именно при таких значениях  $\gamma$  (целых и полуцелых) были выполнены эксперименты Тономуры. Рассмотрим сначала случай, когда расстояние  $z$  от плоскости  $z = 0$  до плоскости наблюдения равно 10 см (рис. 20, 21). Мы отмечаем малую величину интенсивности в области тени ( $1 < x < 3$ ). Для больших расстояний от оси  $z$  интенсивности электронов одни и те же при  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1/2$ . Они осциллируют около значения  $|\Psi|^2 = 1$ , причем амплитуда осцилляций затухает по мере роста  $x$ . Для  $x$ , лежащих внутри

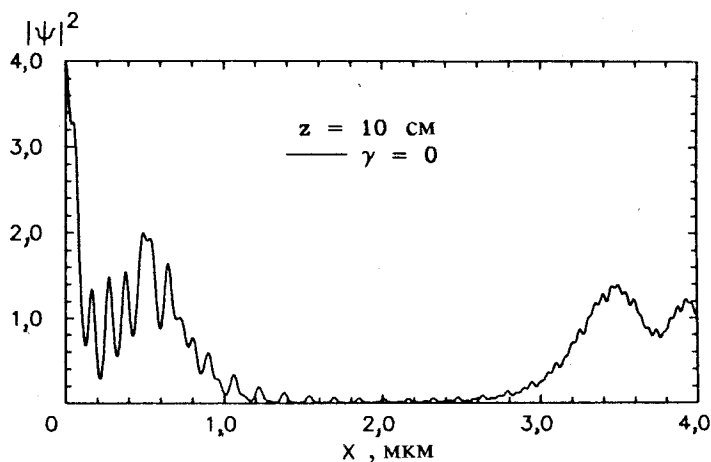


Рис.20. Интенсивность рассеяния электронов в плоскости  $z = 10$  см при отсутствии магнитного потока внутри соленоида ( $\gamma = e\Phi/hc = 0$ ). Интервалы  $0 < x < 1$  и  $1 < x < 3$  соответствуют дыре соленоида и области тени

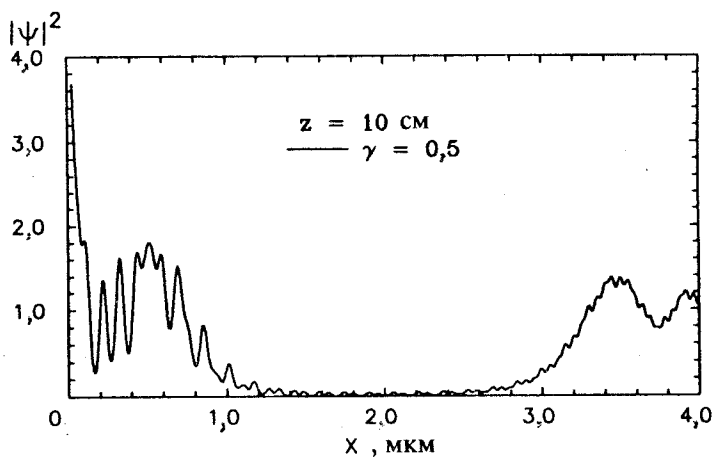


Рис.21. То же, что на рис.20, при  $\gamma = 1/2$

отверстия тора ( $x < 1$ ), интенсивности для  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1/2$  существенно различаются (рис.22). Большинство осцилляций в этой области углов оказываются в противофазе. На рис.23 представлены интенсивности рассеяния в плоскости  $z = 100$  см. Мы видим, что только одна осцилляция



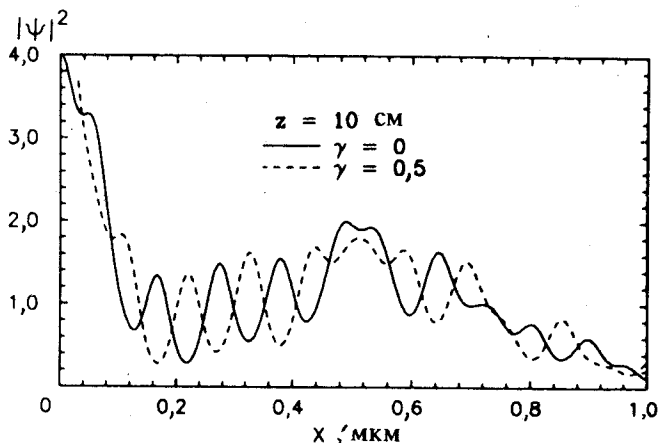
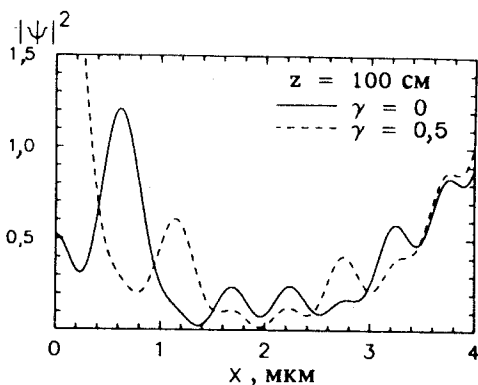


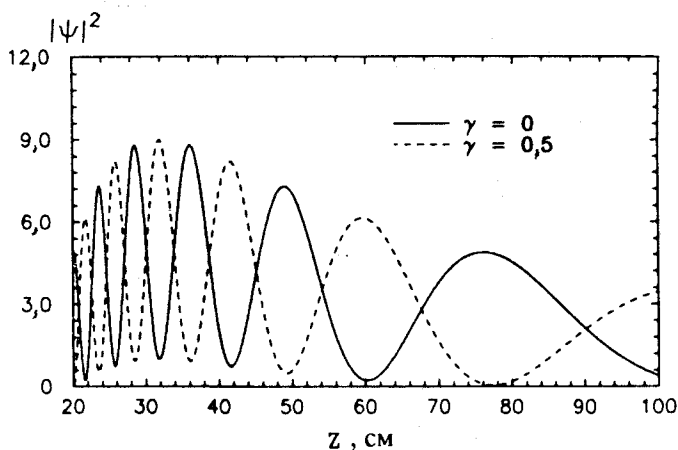
Рис.22. То же, что на рис.20 и 21, внутри отверстия соленоида

Рис.23. Интенсивность рассеяния электронов в плоскости  $z = 100$  см

наблюдается внутри отверстия тора. Область тени, как это и должно быть, не столь ярко выражена, как в предыдущем случае. На рис.24 представлены интенсивности вдоль оси  $z$ . В этом случае  $\Psi$  существенно упрощается и мы получаем

$$|\Psi|^2 = 1 - 8 \sin \left[ \frac{k(d-R)^2}{4z} \right] \sin \left( \frac{kdR}{z} - \pi \gamma \right) \cos \left[ \frac{k(d+R)^2}{4z} - \pi \gamma \right].$$

Мы видим, что максимумы  $|\Psi|^2$  на оси симметрии макроскопически разделены при  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1/2$ . Неясно, однако, как практически выполнить такое измерение. В самом деле, малость отверстия тора (2 мкм в диаметре) и конечность размеров реального детектора с необходимостью приводят к усреднению интенсивности. Вследствие сохранения потока частиц эти усредненные интенсивности будут практически одинаковы при  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1/2$  и едва ли могут быть различимы экспериментально.


 Рис.24. Интенсивность рассеяния вдоль оси  $z$ 

**Эксперименты Тономуры.** В предыдущем пункте мы рассмотрели дифракцию плоской электронной волны на непроницаемом ТС. Однако эксперименты Тономуры были выполнены в слегка иной форме (рис.25). Падающий пучок электронов расщепляется на две части. Первая из них, как и прежде, освещает ТС. Вторая часть пучка (которую будем называть реперной волной  $\Psi_{\text{ref}}$ ) с помощью электронной оптической системы направляется к первой, и обе они встречаются позади ТС. В результате в этой области возникает интерференционная картина. Эти эксперименты показывают, что в области II (где  $\Psi_{\text{ref}}$  интерферирует с частью пучка  $\Psi_{\text{out}}$ , не прошедшей через отверстие соленоида) интерференционная картина остается одной и той же при любом значении магнитного потока  $\Phi$  внутри ТС. В области I (где  $\Psi_{\text{ref}}$  интерферирует с частью пучка  $\Psi_{\text{in}}$ , прошедшей через отверстие ТС) интерференционная картина сдвигается при изменении  $\Phi$ .

*Качественное рассмотрение.* Стандартное объяснение наблюдаемого сдвига дифракционной картины выглядит следующим образом. Предположим, что в отсутствие магнитного поля ВФ  $\Psi_{\text{in}}$  и  $\Psi_{\text{out}}$  могут быть аппроксимированы плоскими волнами:  $\Psi_{\text{in}} = \Psi_{\text{out}} = \exp(ikz)$ . Далее, пусть волновой вектор реперной волны имеет компоненты  $k_x = k \sin \alpha$ ,  $k_z = k \cos \alpha$ . Тогда  $\Psi_{\text{ref}} = \exp [ik(x \sin \alpha + z \cos \alpha)]$ . В отсутствие магнитного поля мы имеем в областях I и II:

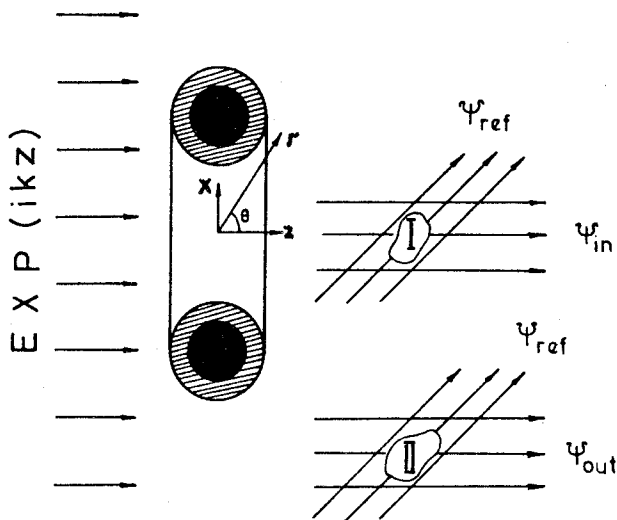


Рис.25. Схематическое изображение экспериментов Тононуры

$$\Psi_0 = \exp(ikz) + \Psi_{\text{ref}} \quad \text{и} \quad |\Psi_0|^2 = 2\{1 + \cos[kx \sin \alpha - kz(1 - \cos \alpha)]\}.$$

В плоскости  $z = \text{const}$  (где и проводились измерения) максимумы  $|\Psi_0|^2$  расположены при  $x_n^0 = [2\pi n + kz(1 - \cos \alpha)]/k \sin \alpha$ . Расстояние между ними  $\Delta x_n^0 = 2\pi/k \sin \alpha$ . Наличие магнитного поля может быть учтено дираковским фазовым множителем (см., напр. [60]):

$$\Psi_{\text{in}}^\Phi = \Psi_{\text{out}}^\Phi = \exp(ikz) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^z A_z(x, z) dz\right).$$

Здесь  $A_z$  — вектор-потенциал ТС. Несмотря на то, что эти функции имеют один и тот же вид, они на самом деле отличаются из-за различных значений  $x$  в них. Вследствие короткодействия  $A_z$  ( $\sim r^{-3}$  на больших расстояниях) верхний предел интегрирования  $z$  может быть заменен на  $+\infty$  уже на расстояниях порядка долей сантиметра. Поскольку  $\int_{-\infty}^{\infty} A_z(x, z) dz$  равен  $\Phi$ , если ось интегрирования проходит внутри отверстия соленоида, и нулю в противном случае, то  $\Psi_{\text{out}} = \exp(ikz)$  и  $\Psi_{\text{in}} = \exp(ikz) \exp(2i\pi\gamma)$ .

Это означает, что в области II интерференционная картина остается той же, что и в отсутствие магнитного поля, тогда как в области I

$$|\Psi_I^\Phi|^2 = 2 \{ 1 + \cos [kx \sin \alpha - kz(1 - \cos \alpha) - 2\pi \gamma] \}.$$

Максимумы  $|\Psi_I^\Phi|^2$  расположены при  $x_n^\Phi = x_n^0 + 2\pi \gamma / k \sin \alpha$ . Это означает, что включение магнитного поля сдвигает их на  $\Delta = 2\pi \gamma / k \sin \alpha$ . Из-за периодичности  $|\Psi_I^\Phi|^2$  относительно  $\gamma$  следует, что достаточно рассмотреть интервал  $0 < \gamma < 1$ . Наибольший сдвиг интерференционных картин имеет место при  $\gamma = 1/2$ . Он равен  $\Delta = \pi / k \sin \alpha$ .

*Количественное рассмотрение.* Чтобы получить количественные результаты мы образуем суперпозицию ВФ (134) и  $\Psi_{ref}$ . Результаты вычислений представлены на рис.26,27. Угол падения  $\alpha$  был выбран  $2\pi \cdot 10^{-6}$  рад. Мы видим, что максимумы интенсивности  $|\Psi + \Psi_{ref}|^2$  достаточно разнесены внутри отверстия тора. Интенсивность осциллирует вокруг 1 в области тени (поскольку там  $\Psi$  мало, а  $|\Psi_{ref}| = 1$ ) и около 2 в области вне тора ( $x > 3$ ) (поскольку там  $\Psi_{ref}$  и  $\Psi$  порядка 1, но с различными фазами). В одной из статей Тономуры [61] угол падения оценивался равным  $10^{-3}$  рад. Для такого  $\alpha$  и  $z = 100$  см рассчитанная интерферен-

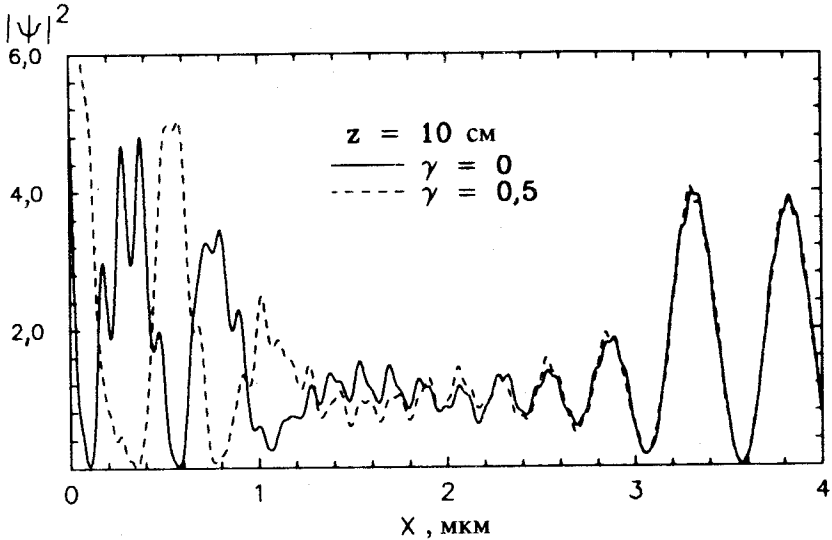
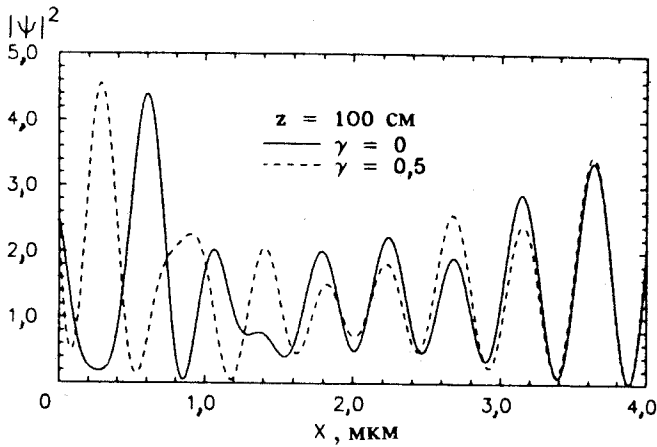
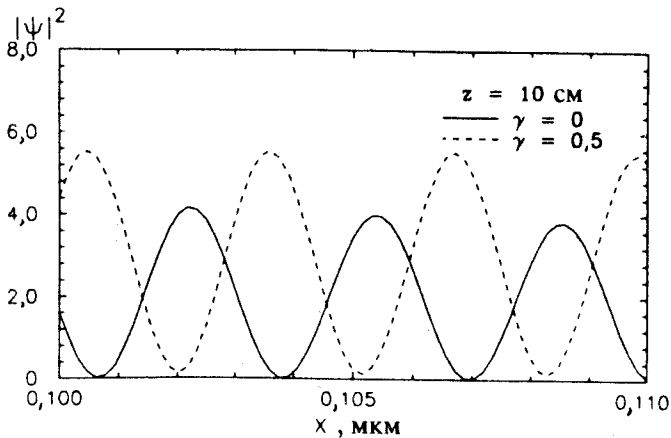


Рис.26. Интенсивность рассеяния, соответствующая интерференции рассеянной и опорной волн в плоскости  $z = 10$  см. Угол падения опорной волны  $\alpha = 2\pi \cdot 10^{-6}$  рад

Рис.27. То же, что на рис.25, в плоскости  $z = 100$  смРис.28. То же, что на рис.25, для угла падения  $10^{-3}$  рад. Показана только часть интерференционной картины ( $0,1\text{ мкм} \leq x \leq 0,11\text{ мкм}$ )

ционная картина представлена на рис.28. Обращаем внимание на масштаб по горизонтальной оси: вся интерференционная картина разыгрывается на интервале  $10^{-2}$  мкм. Из этого рисунка мы оцениваем расстояние между соседними максимумами  $\approx 3,2 \cdot 10^{-3}$  мкм, а сдвиг интерференционной картины, обязанный включению магнитного поля (при  $\gamma = 1/2$ ), оценивается в половину этого значения. Это находится в согла-

сии с качественными оценками, полученными выше ( $\Delta x_n^0 \sim 3,14 \cdot 10^{-3}$  мкм,  $\Delta \sim 1,58 \cdot 10^{-3}$  мкм). Эта интерференционная картина записывалась на фотопленку. Затем с помощью метода голографии восстанавливалась первоначальная дифракционная картина (то есть в отсутствие реперной волны). Из рисунков, представленных в [8,61], мы оцениваем расстояние между соседними максимумами как 0,5 мкм, тогда как сдвиг отдельного максимума, обязанный включению магнитного поля (при  $\gamma = 1/2$ ), примерно составляет 0,25 мкм. Чтобы сравнить с теорией, необходимо задать расстояние  $z$  между ТС и плоскостью наблюдения. Во всех известных нам работах группы Тономуры информация об этом расстоянии отсутствует. Из рис.20–23 мы оцениваем сдвиг дифракционной картины:  $\Delta \approx 0,06$  мкм при  $z = 10$  см и  $\Delta \approx 0,4$  мкм при  $z = 100$  см. Поэтому плоскость наблюдения в экспериментах Тономуры должна лежать между этими значениями  $z$ . Отметим, что хотя качественное рассмотрение дает практически тот же сдвиг интерференционной картины, что и количественное, между ними есть принципиальное отличие. В самом деле, после восстановления исходной (т.е. в отсутствие реперной волны) интерференционной картины мы получаем в первом случае  $|\Psi|^2 = 1$  как при  $\rho < d - R$ , так и при  $\rho = d + R$ . С другой стороны, количественное рассмотрение, использующее волновую функцию (134), приводит к интерференционным картинам, изображенным на рис.20–24. Мы заключаем: именно минимальное отличие количественной и качественной интерференционных картин (до процедуры голографического восстановления) приводит к корректному описанию обсуждаемых экспериментов.

Сделаем несколько заключительных замечаний. Во-первых, дифракционная картина, наблюдаемая в экспериментах Тономуры, образуется суперпозицией индивидуальных электронных событий. Под этим мы понимаем рассеяние отдельного электрона на ТС и его дальнейшее схлопывание на регистрирующем экране. Интенсивность падающих электронов была столь низкой [8,61], что только электрон находился внутри экспериментальной установки в данный момент времени. Во-вторых, применимость теории дифракции Френеля — Кирхгофа для описания рассеяния электронов подтверждается тщательным анализом теоретических и экспериментальных дифракционных картин [62]. В-третьих, следует упомянуть недавнюю работу [63] о применении когерентных точечных источников низкоэнергетических электронов ( $\sim 20$ – $50$  кэВ) для изучения структуры кристаллической решетки. Согласно утверждению авторов этой работы, увеличение дифракционной картины в 150000 раз (по сравнению с дифракционной картиной для плоской волны) может быть получено при малых расстояниях между излучателем электронов и

изучаемым объектом. Это открывает новые возможности для изучения квантовых эффектов недоступных полей.

В разд.3 мы отмечали, что распределение магнитного поля внутри намагниченного тора характеризуется (кроме магнитного потока  $\Phi$ ) спиральностью  $S$ . Вектор намагничения  $M$  следующим образом зависит от угла  $\alpha$ , определяющего величину скручивания магнитных силовых линий внутри  $T$ :

$$M = M (\cos \alpha \cdot n_\varphi + \sin \alpha \cdot n_\theta).$$

Можно ли узнать о нетривиальной спиральности внутри тора, проводя эксперименты вне тора (можно окружить тор непроницаемым экраном)? В начале этого раздела мы выяснили, что сечение рассеяния заряженных частиц на непроницаемом намагниченном торе зависит от геометрических размеров тора и от той части магнитного потока, которую «видит» заряженная частица при обходе вокруг замкнутого пути, проходящего через отверстие соленоида. Эта часть потока равна  $\Phi \cos \alpha$ . Поскольку сечение рассеяния является периодической функцией магнитного потока (см., например, выражение (134)), то сечение будет периодически меняться при изменении угла скручивания  $\alpha$ . Это будет иметь место в интервале  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ . Здесь  $\alpha_0 = \arccos(2\gamma)^{-1}$ ,  $\gamma = e \Phi / hc$ . При дальнейшем увеличении  $\alpha$  (т.е. при  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ) сечение приближается к сечению рассеяния на непроницаемом торе в отсутствие магнитного поля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко перечислим вопросы, затронутые в данном обзоре:

1. Рассмотрено семейство тороидальных соленоидов с постоянным током, векторные потенциалы которых убывают на больших расстояниях как  $r^{-2n-1}$ . При одном и том же суммарном магнитном потоке и одном и том же непроницаемом торе, объемлющем тороидальные соленоиды, сечение рассеяния заряженных частиц оказывается одним и тем же. Несмотря на это векторные потенциалы различных семейств не связаны калибровочным преобразованием. Тороидальные соленоиды с различным асимптотическим поведением реализуют тороидальные моменты различных мультипольностей.

2. Дан практический рецепт построения соленоидов произвольной геометрической формы. Для этого достаточно заполнить произвольную часть пространства веществом с соленоидальным намагничением.

3. Дана конкретная реализация тороидальных соленоидов с нетривиальной спиральностью, являющейся (наряду с магнитным потоком)

одним из инвариантов, характеризующих топологическую структуру магнитного поля.

4. Найдены классические и квантовые уравнения движения тороидальных моментов во внешнем электромагнитном поле.

5. Найден трехмерный аналог эффекта Ааронова — Кашера. Оказывается, тороидальные соленоиды различных мультипольностей должны испытывать квантовое рассеяние на кулоновском центре. При этом классическое рассеяние отсутствует.

6. Доказана возможность существования нетривиальных электрических векторных потенциалов. Дана явная реализация систем, обладающих такими потенциалами. Простейшими оказываются тороидальные и цилиндрические электрические соленоиды.

7. Рассмотрены нестатические конфигурации токов и зарядов, вне которых напряженности  $E$ ,  $H$  равны нулю, но электромагнитные потенциалы  $A$ ,  $\Phi$  отличны от нуля. Сформулированы условия, при которых эти потенциалы имеют физический смысл и могут быть наблюдаемы. Это открывает принципиальную возможность передачи информации без затрат энергии (за счет фазовой модуляции волновой функции рассеиваемых частиц).

8. Рассмотрены различные варианты квантовой непроницаемости, которая определяется как условие исчезновения (на границе области непроницаемости) нормальной компоненты квантово-механического тока вероятности. Оказывается, различные варианты непроницаемости приводят к различным физическим следствиям, что должно учитываться при постановке экспериментов.

9. Рассмотрены современные эксперименты по проверке существования эффекта Ааронова — Бома. В частности, дано количественное описание известных экспериментов Тономуры, в которых электроны рассеиваются на непроницаемых тороидальных магнитных соленоидах.

## ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Вместо элементарных векторных потенциалов  $A_l^m(\tau)$ ,  $B_l^m(\tau)$  введем векторные сферические гармоники (ВСГ):

$$A_l^m(M) = -h_l Y_{ll}^m,$$

$$A_l^m(E) = \left( \sqrt{l+1} h_{l-1} Y_{l,l-1}^m - \sqrt{l} h_{l+1} Y_{l,l+1}^m \right) / \sqrt{2l+1}, \quad (П.1)$$



$$\begin{aligned}
 A_l^m(L) &= \left( \sqrt{l+1} h_{l+1} Y_{l,l+1}^m + \sqrt{l} h_{l-1} Y_{l,l-1}^m \right) / \sqrt{2l+1} \\
 B_l^m(M) &= -j_l Y_{ll}^m, \\
 B_l^m(E) &= \left( \sqrt{l+1} j_{l-1} Y_{l,l-1}^m - \sqrt{l} j_{l+1} Y_{l,l+1}^m \right) / \sqrt{2l+1}, \\
 B_l^m(L) &= \left( \sqrt{l+1} j_{l+1} Y_{l,l+1}^m + \sqrt{l} j_{l-1} Y_{l,l-1}^m \right) / \sqrt{2l+1}.
 \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Они являются векторно-связанными величинами из обычных скалярных сферических гармоник и единичных сферических векторов ( $n_0 = n_z$ ,  $n_{\pm 1} = \mp 1/\sqrt{2} (n_x \pm in_y)$ ):

$$Y_{jl}^m = \sum_{\mu} C(1, -\mu, l, m + \mu; jm) Y_l^{m+\mu} n_{-\mu}.$$

ВСГ ортогональны на сфере произвольного радиуса:

$$\int Y_{jl}^m \cdot Y_{j'l'}^{m'} d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{\tau\tau'}.$$

Тогда векторный потенциал можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{c} 4\pi ik \sum h_l(kr) Y_{jl}^m \cdot J_{jl}^m, \\
 J_{jl}^m &= \int j_l(kr) Y_{jl}^{m*} \cdot j dV.
 \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

В статическом пределе это выражение переходит в следующее:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{c} 4\pi \sum \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{jl}^m \cdot J_{jl}^m, \\
 J_{jl}^m &= \int r^l Y_{jl}^{m*} \cdot j dV.
 \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

$r^l Y_{jl}^m$ ,  $r^{-l-1} Y_{jl}^m$  являются векторными решениями уравнения Лапласа.

Мы, однако, заинтересованы в таких решениях, которые представимы в виде (82), т.е. которые получаются действием операторов  $L (= -i r \times \nabla)$ ,  $\nabla$  на скалярные решения уравнения Лапласа. Попробуем перейти к статическому пределу в выражении (81). Для этого разложим  $A_l^m$ ,  $B_l^m$  в ряд по степеням  $k$ :

$$\begin{aligned}
 A_l^m(\tau) &= k^{-l-2} [A_{1l}^m(\tau) + k^2 A_{2l}^m(\tau)] \\
 B_l^m(\tau) &= k^{l-1} [B_{1l}^m(\tau) + k^2 B_{2l}^m(\tau)], \quad \tau = E, L, \\
 A_l^m(M) &= k^{-l-1} A_{1l}^m(M), \quad B_l^m(M) = k^l B_{1l}^m(M).
 \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Здесь

$$A_{1l}^m(E) = \frac{2\alpha_l}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla \times \left( L r^{-l-1} Y_l^m \right),$$

$$\begin{aligned}
 A_{2l}^m(E) &= \frac{\alpha_l}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{1}{2l-1} \nabla \times \left( \mathbf{L} r^{l-1} Y_l^m \right), \\
 \mathbf{B}_{1l}^m(E) &= - \frac{i\beta_l}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla \times \left( \mathbf{L} r^l Y_l^m \right), \\
 \mathbf{B}_{2l}^m(E) &= \frac{i\beta_l}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{1}{2(2l+3)} \nabla \times \left( \mathbf{L} r^{l+2} Y_l^m \right), \\
 A_{1l}^m(L) &= 2i\alpha_l \nabla r^{-l-1} Y_l^m, \quad A_{2l}^m(L) = \frac{i\alpha_l}{2l-1} \nabla r^{l-1} Y_l^m, \\
 \mathbf{B}_{1l}^m(L) &= \beta_l \nabla r^l Y_l^m, \quad \mathbf{B}_{2l}^m(L) = -\frac{1}{2}\beta_l \frac{1}{2l+3} \nabla r^{l+2} Y_l^m, \\
 A_{1l}^m(M) &= \frac{2i\alpha_l}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} r^{-l-1} Y_l^m, \quad \mathbf{B}_{1l}^m(M) = \frac{\beta_l}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{L} r^l Y_l^m, \\
 \alpha_l &= (-1)^{l+1} \sqrt{\pi} 2^{l-1} / \Gamma\left(\frac{1}{2} - l\right), \quad \beta_l = \sqrt{\pi} 2^{-l-1} / \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{П.6}$$

Величины  $A_{il}^m, \mathbf{B}_{il}^m$  не зависят от  $k$ . Члены при более высоких степенях  $k$  не дают вклад в длинноволновом пределе и поэтому опущены в разложении (П.5). Для коэффициентов  $a_l^m(\tau)$ , входящих в определение ВП (см. (81)), имеет место следующее разложение:

$$\begin{aligned}
 a_l^m(\tau) &= k^{l-1} [a_{1l}^m(\tau) + k^2 a_{2l}^m(\tau)], \quad \tau = E, l, \\
 a_l^m(M) &= k^l a_{1l}^m(M), \quad a_{il}^m(\tau) = \int \mathbf{B}_{il}^m(\tau)^* \cdot \mathbf{j} dV.
 \end{aligned} \tag{П.7}$$

Из (П.5), (П.7) следует, что вклады в ВП (81) взятых по отдельности электрических и продольных мультиполей расходятся при  $k \rightarrow 0$  как  $k^{-2}$ . Между тем разложение (П.3), полностью эквивалентное (81), переходит в таком пределе в (П.4). Никаких сингулярностей при этом переходе не возникает. Это означает, что сингулярности электрических и продольных мультиполей в (81) компенсируют друг друга. В этом можно удостовериться и иным способом, если заметить, что сингулярный член в (81) имеет вид

$$k^{-2} [a_{1l}^m(E) A_{1l}^m(E) + a_{1l}^m(L) A_{1l}^m(L)].$$

Из явного вида  $a_{1l}^m, A_{1l}^m$  следует, что это выражение равно нулю. С учетом этого находим в качестве статического предела (81) следующее выражение:

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \sum \frac{1}{2l+1} \frac{1}{l(l+1)} \mathbf{C}_l^m(M) \cdot d_l^m(M) + \tag{П.8}$$

$$+ \frac{2\pi}{c} \sum \frac{1}{4l^2 - 1} C_l^m(E) \cdot d_l^m(L) - \frac{2\pi}{c} \sum \frac{1}{(2l+1)(2l+3)} C_l^m(L) \cdot d_l^m(E).$$

Здесь

$$C_l^m(M) = (\mathbf{r} \times \nabla) r^{-l-1} Y_l^m, \quad D_l^m(M) = (\mathbf{r} \times \nabla) r^l Y_l^m,$$

$$C_l^m(E) = [\nabla - \frac{1}{l} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] r^{1-l} Y_l^m,$$

$$D_l^m(E) = [\nabla + \frac{1}{l+1} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] r^{l+2} Y_l^m,$$

$$C_l^m(L) = \nabla r^{-1-l} Y_l^m, \quad D_l^m(L) = \nabla r^l Y_l^m,$$

$$d_l^m(\tau) = \int D_l^{m*}(\tau) \cdot \mathbf{j} dV. \quad (\text{П.9})$$

Это и есть выражение, которое мы искали. Входящие в него векторные функции  $C$ ,  $D$  удовлетворяют уравнению Лапласа  $\Delta C_l^m(\tau) = \Delta D_l^m(\tau) = 0$ .

Это не является очевидным для  $C_l^m(E)$  и  $D_l^m(E)$ . В самом деле, составляющие их слагаемые не удовлетворяют уравнению Лапласа, удовлетворяют только их линейные комбинации. Это, однако, становится очевидным, если подействовать оператором  $\Delta$  на  $C_l^m(E)$  и  $D_l^m(E)$  и воспользоваться тождеством

$$\Delta r^\alpha Y_l^m = (\alpha - l)(\alpha + l + 1) r^{\alpha-2} Y_l^m,$$

в котором следует взять  $\alpha = 1 - l$  для  $C_l^m(E)$  и  $l + 2$  для  $D_l^m(E)$ . Кроме того,  $C_l^m$  и  $D_l^m$  удовлетворяют соотношениям

$$\text{div } C_l^m(E) = -2(2l-1) r^{-l-1} Y_l^m, \quad \text{div } D_l^m(E) = 2(2l+3) r^l Y_l^m,$$

$$\text{rot } C_l^m(E) = -\frac{2(2l-1)}{l} C_l^m(M), \quad \text{rot } D_l^m(E) = -\frac{2(2l+3)}{l+1} D_l^m(M),$$

$$\text{rot } C_l^m(M) = l C_l^m(L), \quad \text{rot } D_l^m(M) = -(l+1) D_l^m(L), \quad (\text{П.10})$$

$$\text{div } C_l^m(M) = \text{div } D_l^m(M) = \text{div } C_l^m(L) = \text{div } D_l^m(L) =$$

$$= \text{rot } C_l^m(L) = \text{rot } D_l^m(L) = 0.$$

Кроме того, они ортогональны на сфере произвольного радиуса

$$\int C_l^m(\tau) \cdot C_{l'}^{m'*}(\tau') d\Omega = \text{const} \cdot \delta_{ll'} \cdot \delta_{mm'} \cdot \delta_{\tau\tau'},$$

$$\int \mathbf{D}_l^m(\tau) \cdot \mathbf{D}_l^{m'*}(\tau') d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\tau\tau'} \text{const.}$$

Если  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , то вторая сумма в (П.8) исчезает, а коэффициент  $d_l^m(E)$  упрощается:

$$d_l^m(E) = \frac{2(2l+3)}{l+1} \int r^l Y_l^{m*}(\mathbf{r}) dV.$$

Перейдем теперь к статическому пределу в выражениях (П.1), (П.2):

$$r^{-l-2} \mathbf{Y}_{l,l+1}^m = \frac{1}{[(l+1)(2l+1)]^{1/2}} \mathbf{C}_l^m(L),$$

$$r^l \mathbf{Y}_{l+1,l}^m = \frac{1}{[(l+1)(2l+3)]^{1/2}} \mathbf{D}_{l+1}^m(L),$$

$$r^{-l} \mathbf{Y}_{l,l-1}^m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \mathbf{C}_l^m(E), \quad r^{l+1} \mathbf{Y}_{l,l+1}^m = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \mathbf{D}_l^m(E),$$

$$r^{-l-1} \mathbf{Y}_{ll}^m = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{C}_l^m(M), \quad r^l \mathbf{Y}_{ll}^m = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{D}_l^m(M). \quad (\text{П.11})$$

Отсюда следует, что разложения (П.4) и (П.8) совпадают. Новым, однако, является найденное представление для  $r^l \mathbf{Y}_{jl}^m$  и  $r^{-l-1} \mathbf{Y}_{jl}^m$  в виде дифференциальных операторов (П.11).  $A_l^m(\tau)$  удовлетворяют соотношениям

$$\text{rot } A_l^m(M) = ik A_l^m(E), \quad \text{rot } A_l^m(E) = -ik A_l^m(M).$$

При  $k \rightarrow 0$  они переходят в следующие:

$$\text{rot } A_{1l}^m(M) = i A_{1l}^m(E),$$

$$\text{rot } [A_{1l}^m(E) + k^2 A_{2l}^m(E)] = -ik^2 A_{1l}^m(M). \quad (\text{П.12})$$

Первое из соотношений (П.12) выполняется автоматически в силу определений (П.6). Собирая во втором из них члены при одинаковых степенях  $k$ , получаем

$$\text{rot } A_{1l}^m(E) = 0, \quad \text{rot } A_{2l}^m(E) = -i A_{1l}^m(M). \quad (\text{П.13})$$

В справедливости этих выражений можно легко убедиться и независимо, если воспользоваться соотношением

$$\text{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) r^\alpha Y_l^m = -(\alpha+1) \nabla r^\alpha Y_l^m + (\alpha-l)(\alpha+l+1) r r^{\alpha-2} Y_l^m. \quad (\text{П.14})$$

Полагая  $\alpha = -l-1$ , получаем

$$\text{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) r^{-l-1} Y_l^m = l \nabla r^{-l-1} Y_l^m. \quad (\text{П.15})$$

Поскольку (см. (П.6))  $A_{ll}^m(E)$  пропорционально левой части (П.15), то первое из соотношений (П.13) выполнено. При  $\alpha = 1 - l$  из (П.14) получаем

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) r^{1-l} Y_l^m = (l-2) \nabla r^{1-l} Y_l^m - 2(2l-1) r r^{-l-1} Y_l^m.$$

Действуя на обе части этого выражения оператором  $\operatorname{rot}$ , убеждаемся в справедливости второго из соотношений (П.13). При  $\alpha = l$  и  $l+2$  из (П.14) получаются соотношения между  $B_{il}^m$ :

$$\operatorname{rot} B_{il}^m(E) = 0, \quad \operatorname{rot} B_{2l}^m(E) = -i B_{1l}^m(M).$$

Из (П.15) следует, что одна и та же векторная функция может быть как градиентом, так и вихрем. Аналогичное соотношение для положительных степеней  $r$  выглядит следующим образом:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) r^l Y_l^m = -(l+1) \nabla r^l Y_l^m. \quad (\text{П.16})$$

Обратимся снова к исходным определениям (П.1), (П.2). Для  $\tau = E, L$  разложим обе части этих соотношений по степеням  $k$ . Приравнявая в (П.1) коэффициенты при  $k^{-l-2}$ , мы приходим к соотношениям, уже содержащимся в (П.9)–(П.11). Приравниваем коэффициенты при  $k^{-l}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) r^{1-l} Y_l^m &= l(2l-1) \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} r^{-l} \left( Y_{l,l+1}^m - \sqrt{\frac{l+1}{l}} \frac{1}{l-1/2} Y_{l,l-1}^m \right), \\ \nabla r^{1-l} Y_l^m &= (2l-1) \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} r^{-l} \left( Y_{l,l+1}^m + \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{1}{l-1/2} Y_{l,l-1}^m \right). \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Обращаем эти соотношения:

$$\begin{aligned} r^{-l} Y_{l,l-1}^m &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left[ \nabla - \frac{1}{l} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) \right] r^{1-l} Y_l^m, \\ r^{-l} Y_{l,l+1}^m &= \frac{1}{2l-1} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left[ \nabla + \frac{1}{l+1} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) \right] r^{1-l} Y_l^m. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Первое из этих соотношений является следствием (П.9), (П.11). Аналогично, разлагая (П.2), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) r^{l+2} Y_l^m &= -(l+1)(2l+3) \sqrt{\frac{l}{2l+1}} r^{l+1} \times \\ &\times \left( Y_{l,l-1}^m + \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{1}{l+3/2} Y_{l,l+1}^m \right), \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\nabla r^{l+2} Y_l^m = (2l+3) \sqrt{\frac{l}{2l+1}} r^{l+1} \left[ Y_{l,l-1}^m - \sqrt{\frac{l+1}{l}} \frac{1}{l+3/2} Y_{l,l+1}^m \right].$$

Или, обращая их,

$$\begin{aligned} r^{l+1} Y_{l,l+1}^m &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left[ \nabla + \frac{1}{l+1} \text{rot} (\mathbf{r} \times \nabla) \right] r^{l+2} Y_l^m, \\ r^{l+1} Y_{l,l-1}^m &= -\frac{1}{2l+3} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left[ \nabla - \frac{1}{l} \text{rot} (\mathbf{r} \times \nabla) \right] r^{l+2} Y_l^m. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Опять-таки, первое из этих соотношений вытекает из (П.9), (П.10). Домножим первое из соотношений (П.19) на плотность тока  $\mathbf{j}$ , и интегрируем по объему

$$\begin{aligned} &\int \text{rot} (\mathbf{r} \times \nabla) r^{l+2} Y_l^m \mathbf{j} dV = \\ &= -(l+1)(2l+3) \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \int r^{l+1} \left( Y_{l,l-1}^m + \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{1}{l+3/2} Y_{l,l+1}^m \right) \mathbf{j} dV. \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

Интеграл в правой части совпадает с тороидальным моментом [12]. Таким образом, соотношение (П.21) дает новое представление для тороидального момента. Если  $\text{div} \mathbf{j} = 0$ , то интеграл в левой части (П.21) упрощается:

$$2(2l+3) \int r^l Y_l^{m*} (\mathbf{r} \mathbf{j}) dV. \quad (\text{П.22})$$

Итак, тороидальный момент естественным образом возникает как коэффициент при  $k^{l+1}$  в разложении электрического формфактора  $a_l^m(E)$ . Соотношения (П.8) полезны при решении различных магнитостатических и электростатических задач. Например, полученные в разд.3 условия исчезновения вне заданной области пространства магнитного поля  $H$  и векторного потенциала  $A$  следуют из (П.8) почти автоматически. В качестве иной иллюстрации применим соотношения (П.8) к вычислению статического векторного потенциала тороидального соленоида  $(\rho-d)^2 + z^2 = R^2$ . Вычислим коэффициенты  $d_l^m(\tau)$ , входящие в (П.8). При  $\tau = M$  имеем

$$d_l^m(M) = \int (\mathbf{r} \times \nabla) r^l Y_l^{m*} \mathbf{j} = - \int r^l Y_l^{m*} (\mathbf{r} \text{rot} \mathbf{j}) dV.$$

Для полоидального тока (3)  $\text{rot} \mathbf{j}$  имеет только  $\varphi$ -компоненту. Поэтому  $\mathbf{r} \text{rot} \mathbf{j} = 0$  и  $d_l^m(M) = 0$ . Далее, из уравнения непрерывности ( $\text{div} \mathbf{j} = 0$ ) следует, что  $d_l^m(L) = 0$ . По той же причине в подынтегральном выра-

жении для  $d_l^m(E)$  не дает вклад компонента  $D_l^m(E)$ , пропорциональная  $\nabla$ . В итоге для ВП находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2\pi}{c} \nabla \sum \frac{1}{2l+1} \frac{1}{2l+3} \frac{1}{l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m \int \text{rot}(\mathbf{r} \times \nabla) r^{l+2} Y_l^{m*} \mathbf{j} dV = \\ &= -\frac{4\pi}{c} \nabla \sum \frac{1}{2l+1} \frac{1}{l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m \int r^l Y_l^{m*}(\mathbf{r} \mathbf{j}) dV. \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

Используя явное выражение (3) для  $\mathbf{j}$ , получаем

$$\mathbf{r} \mathbf{j} = \frac{gc}{4\pi} \frac{\delta(\tilde{R} - R)}{d + R \cos \psi} d \sin \psi.$$

В (П.23) отличны от нуля только члены с  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} gdR \nabla \sum \frac{1}{l+1} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \int \rho^l P_l\left(\frac{R \sin \psi}{\rho}\right) \sin \psi d\psi, \\ \rho^2 &= d^2 + R^2 + 2dR \cos \psi. \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Здесь  $P_l$  — полиномы Лежандра ( $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$ ). Только члены с нечетными  $l$  отличны от нуля в (П.24). Полагая  $l = 2n + 1$ , находим

$$A = -\frac{1}{2} gdR \nabla \sum \frac{1}{n+1} \frac{1}{r^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta) \int \rho^{2n+1} P_{2n+1}\left(\frac{R \sin \psi}{\rho}\right) \sin \psi d\psi. \quad (\text{П.25})$$

Для бесконечно тонкого соленоида ( $R \ll d$ ) это выражение упрощается:

$$A = -\frac{1}{4} \pi g R^2 \nabla \sum (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{d^{2n+1}}{r^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta). \quad (\text{П.26})$$

Эти выражения справедливы вне сферы радиуса  $d + R$ . Внутри сферы радиуса  $d - R$  имеем

$$A = \frac{1}{2} gdR \nabla \sum \frac{1}{l} r^l P_l(\cos \theta) \int \frac{1}{\rho^{l+1}} P_l\left(\frac{R \sin \psi}{\rho}\right) \sin \psi d\psi \quad (\text{П.27})$$

— для конечного соленоида и

$$A = -\frac{1}{2} \pi g R^2 \nabla \sum (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{r^{2n+1}}{d^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (\text{П.28})$$

— для бесконечного соленоида.

Уточним физический смысл разложения ВП (П.8). Для этого зададимся вопросом, почему мы должны «руками» накладывать условие  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ . Заметим, что исходный нестатический ВП (81) удовлетворяет калибровке Лоренца  $\text{div } \mathbf{A} + \Phi/c = 0$ . Здесь

$$\Phi = 2\pi^2 ik \exp(-i\omega t) \sum q_l^m h_l Y_l^m, \quad q_l^m = \int j_l Y_l^{m*} \rho_0 dV, \quad \rho = \rho_0 \exp(-i\omega t).$$

Соотношение  $q_l^m = \frac{i}{c} a_l^m(L)$  гарантирует автоматическое выполнение калибровки Лоренца. Применив к (81) оператор  $\text{div}$  получаем:

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c} 2\pi^2 k^2 \sum a_l^m(L) h_l Y_l^m = -\frac{\dot{\Phi}}{c}.$$

Легко убедиться, что это выражение при  $k \rightarrow 0$  стремится к конечной величине

$$\frac{1}{c} \pi^{5/2} \sum_l, \quad \sum_l \equiv \sum_l \left(-\frac{2}{r}\right)^{l+1} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-l)} a_l^m(L) Y_l^m.$$

С другой стороны, из  $\text{div } \mathbf{A} + \Phi/c = 0$  как будто следует, что при  $k \rightarrow 0$   $\dot{\Phi}$ , а следовательно, и  $\text{div } \mathbf{A}$  должны обращаться в нуль. Чтобы понять причину этого противоречия, запишем  $\Phi$  в виде

$$\Phi = -2\pi^2 \frac{k}{c} \exp(-i\omega t) \sum a_l^m(L) h_l Y_l^m.$$

Если  $kR \ll 1$ ,  $kr \ll 1$  ( $R$  — размер области, где  $\rho$ ,  $j \neq 0$ ,  $r$  — расстояние от этой области до точки наблюдения), то можно перейти к пределу  $k \rightarrow 0$  под знаком суммы. Тогда

$$\Phi = -\frac{i\pi^{5/2}}{kc} \exp(-i\omega t) \sum_l.$$

Мы пока не конкретизировали интервал рассматриваемых времен и поэтому не заменили  $\exp(-i\omega t)$  единицей. Физический потенциал равен действительной части этого выражения:

$$\Phi = -\frac{i\pi^{5/2}}{kc} \sin \omega t \sum_l.$$

Поскольку мы сохранили зависимость от времени в  $\Phi$ , то она должна быть сохранена и в ВП. Для этого выражение (П.8) следует домножить на  $\cos \omega t$ . При  $\omega t \ll 1$  для ВП мы возвращаемся к (П.8), тогда как  $\Phi$  переходит в  $-\pi^{5/2} t \sum_l$ . Итак, если мы не налагаем дополнительного условия  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , то векторному потенциалу соответствует линейно растущий во времени (при  $\omega t \ll 1$ ) скалярный потенциал  $\Phi$ . Сопряженное решение получается, если в  $\Phi$ ,  $\mathbf{A}$  оставить только чисто мнимые части. Тогда



$$\Phi = -\frac{i\pi^{5/2}}{kc} \cos \omega t \sum.$$

а ВП получается домножением (П.8) на  $(-\sin \omega t)$ .

Мы заключаем: выражение описывает (с учетом временного множителя  $\exp(-i\omega t)$  и при отказе от калибровочного условия  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ) более широкий круг явлений, чем чистая магнитостатика, которая получается при  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миллер М.А. — Изв. вуз. Радиофизика, 1986, т.19, № 9, с.991—1007.
2. Saledin D.R. — IEEE Trans. Mag., 1984, vol. Mag.20, p.381—383.
3. Afanasiev G.N. — J.Phys.A, 1990, vol.23, p.5755—5764; J. Comput. Phys., 1987, vol.69, p.196—208.
4. Status Report on Controlled Thermonuclear Fusion, IAEA, Vienna, 1990.
5. IEEE Trans. on Plasma Science, 1989, vol.17, No.3; IEEE Trans. on Magnetics, 1989, vol.25, No.1; 1991, vol.27, No.1.
6. Афанасьев Г.Н., Дубовик В.М. — В сб.: Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн, 1991, ч.1, с.71-72.
7. Bartlett D.F., Ward V.F.L. — Phys.Rev.D, 1977, vol.16, p.3453—3458.
8. Peshkin M., Topomura A. — The Aharonov-Bohm Effect. Springer, Berlin, 1989.
9. Любошиц В.Л., Смородинский Я.А. — ЖЭТФ, 1978, т.75, с.40—45.
10. Afanasiev G.N. — Phys.Lett. A, 1989, vol. 142, p.222—226; Afanasiev G.N., Shilov V.M. — J.Phys. A, 1989, vol.22, p.5195—5215; Afanasiev G.N., Shilov V.M. — J. Phys. A, 1993, vol.26, p.743—750.
11. Зельдович Я.Б. — ЖЭТФ, 1957, т.33, с.1531—1533.
12. Dubovik V.M., Tugushev V.V. — Phys.Rep, 1990, vol.187, p.145—202.
13. Afanasiev G.N., Dubovik V.M., Misticu S. — JINR Preprint E2-92-177, Dubna, 1992 (to be published in J.Phys. A).
14. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. — ЖЭТФ, 1985, т.88, с.84—95.
15. Афанасьев Г.Н. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.172—250.
16. Афанасьев Г.Н. — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.1264—1321.
17. Afanasiev G.N. — JINR Preprint, E2-91-544, Dubna, 1991.
18. Дубовик В.М., Чешков А.А. — ЭЧАЯ, 1974, т.5, с.791—837; Дубовик В.М., Тосуньян Л.А. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.1193—1228.
19. Aharonov Y., Casher A. — Phys.Rev.Lett., 1984, vol.53, p.319—321.
20. Afanasiev G.N. — J.Phys. A, 1993, vol.26, p.731—742.
21. Петухов В.Р. — Препринт ИТЭФ 105-91, М., 1991.
22. Петухов В.Р. — Препринт ИТЭФ, 106-91, М., 1991.
23. Afanasiev G.N. — J.Phys.A, 1990, vol.23, p.5185—5204.
24. Afanasiev G.N., Dubovik V.M. — J.Phys.A, 1992, vol.25, p.4869.
25. Cimino A., Orat G.I., Klein A.C. et al. — Phys.Rev.Lett., 1989, vol.63, p.380—383.
26. Radescu E.E. — Phys.Rev., 1985, vol.D32, p.1266—1268; Кобзарев И.Ю., Окунь Л.Б. — В сб.: Проблемы теоретической физики, М.: Наука, 1972, с.219—223.
27. Дубовик В.М., Кротов С.С., Тугушев В.В. — Кристаллография, 1987, т.32, с.540—552.
28. Casella R.C. — Phys.Rev.Lett., 1990, vol.65, p.2217—2220.
29. Jackson J.D. — Classical Electrodynamics, New York, John Wiley, 1975.
30. Carrascal B., Estevez G.A., Lorenzo V. — Amer.J.Phys., 1991, vol.51, p.233—237.

31. Olariu S., Popescu I.I. — *Rev. Mod. Phys.*, 1985, vol.52, p.339—436.
32. Дубовик В.М., Тосунян Л.А., Тугушев В.В. — *ЖЭТФ*, 1986, т.90, с.591—605.
33. Роуз М. — *Поля мультиполей*. М.: ИЛ, 1957.
34. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. — *Квантовая электродинамика*. М.: Физматгиз, 1959; Блатт Дж.М., Вайскопф В.Ф. — *Теоретическая ядерная физика*. М.: ИЛ, 1954.
35. Brown W.F. (p.1—154), Forsbergh P.W. (p.264—392) — In: *Handbuch der Physics*, bd.17: Dielectrics (Ed. by S.Flugge), Springer, Berlin, 1956.
36. Стрэттон Дж.А. — *Теория электромагнетизма*. М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с.35—36.
37. Jefimenko O.D. — *Amer. J. Phys.*, 1990, vol.58, p.625—631.
38. Марценюк М.А., Марценюк Н.М. — *Письма в ЖЭТФ*, 1991, т.53, с.229—232.
39. Толстой Н.А., Спартаков А.А. — *Письма в ЖЭТФ*, 1990, т.52, с.796—799.
40. Bartlett D.F., Gengel G. — *Phys.Rev.*, 1989, vol.A39, p.938—945.
41. Barreга R.G., Estevez G.A., Giraldo J. — *Eur.J.Phys.*, 1985, vol.6, p.287—293.
42. Рязанов Г.А. — *Электрическое моделирование с применением вихревых полей*. М.: Наука, 1969, с.79—80.
43. Takabajasi T. — *Hadr. Journ. Suppl.*, 1985, vol.1, p.219—238.
44. Aharonov Y., Bohm D. — *Phys.Rev.*, 1959, vol.115, p.485—491.
45. Razavy M. — *Phys.Rev.*, 1989, vol.A40, p.1—4.
46. Levy-Leblond J.M. — *Phys.Lett.*, 1987, vol.A125, p.441—445.
47. Bose S.K. — *Indian J.Phys.*, 1987, vol.B61, p.274.
48. Percoco U., Villalba V.M. — *Phys.Lett.*, 1989, vol.A140, p.105—107.
49. Olariu S. — *Phys.Lett.*, 1990, vol.A144, p.287—292.
50. Thomas A.W. — In: *Advances in Nuclear Physics*. Eds. J.W.Negele and E.Vogt, Plenum, New York, 1984, vol.13, p.1—137; Vepstas J., Jackson A.D. — *Phys.Rep.*, 1990, vol.187, p.111—144.
51. Aharonov Y., Au C.K., Lerner E.C., Liang J.Q. — *Phys.Rev.*, 1984, vol.D29, p.2396—2398; Nagel B. — *Phys.Rev.*, 1985, vol.D32, p.3328—3330; Brown R.A. — *J.Phys.*, 1985, vol.A18, p.2497.
52. Wu T.T., Yang C.N. — 1975, *Phys.Rev.*, vol.D12, p.3845.
53. Roy S.M., Singh V. — *J.Phys.*, 1989, vol.A22, p.L425—L430.
54. Roy S.M., Singh V. — *Nuovo Cimento*, 1984, vol.A79, p.391—409.
55. Aharonov Y.(p.10—19), Yang C.N.(p.5—9) — In: *Proc. Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics* (ed. S.Kamefuchi). Japan Phys. Soc., Tokyo, 1984.
56. Pauli W. — *Helv. Phys. Acta*, 1939, vol.12, p.147—168 (русский перевод в кн: В.Паули — *Труды по квантовой теории*. (Под ред. Я.А.Сморodinского) М.: Наука, 1977, с.294—314).
57. Roy S.M. — *Phys.Rev.Lett.*, 1980, vol.44, p.111—114.
58. Борн М., Вольф Э. — *Основы оптики*. М.: Наука, 1970.
59. Matteucci G. — *Amer.J.Phys.*, 1990, vol.58, p.1143—1147.
60. Berry M.V. — *Eur. J. Phys.*, 1980, vol.2, p.240—244.
61. Tomomura A., Osakabe N., Matsuda T. et al. — *Phys.Rev.*, 1986, vol.A34, p.815—822.
62. Komrska J. — In: *Adv. in Electronics and Electron Physics*. Academic Press, New York, 1971, v.30, p.139—234.
63. Fink H.W., Stocker W., Schmid H. — *Phys.Rev.Lett.*, 1990, vol.65, p.1204—1206.
64. Berger M.A., Field G.B. — *J.Fluid Mech.*, 1984, vol.147, p.133—148.
65. Moffat M.K. — *Nature*, 1990, vol.347, p.367—369.
66. Pfistor H., Gekelman W. — *Amer.J.Phys.*, 1991, vol.59, p.497—502.
67. Berger M.A. — *J.Phys.A*, 1990, vol.23, p.2787.
68. Barut A.O., Bozic M., Maric Z. — *Ann. of Phys.*, 1992, vol.214, p.53.
69. Flekkyoy E.G., Leinaas J.M. — *Intern. Journ. Mod. Phys.*, 1991, vol.6, p.5327—5347.