

УДК 537.62 + 681.3.076 + 541.18:537

# ТОРОИДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ АГРЕГИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ И КОМПОЗИТОВ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ЗАПИСИ ИНФОРМАЦИИ

*В.М.Дубовик*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*М.А.Марценюк, Н.М.Марценюк*

Пермский университет

Показана важность изучения нового магнитного параметра порядка агрегированных суспензий — тороидной поляризации. На основе мультипольной параметризации развито несколько способов введения тороидного дипольного момента агрегата магнитных частиц. Изложены методы, с помощью которых рассчитываются величины тороидных диполей различных агрегатов и тороидной поляризации суспензий в зависимости от наложенных внешних полей и термодинамических условий. В результате найдено, как управлять тороидным диполем отдельного агрегата нанометрического размера. Эти теоретические разработки открывают перспективы новых подходов к проблеме записи и хранения информации в магнитных средах.

The importance of studying a new magnetic order parameter of aggregated suspensions — toroid polarization — is demonstrated. Different ways of the multipole toroid description of the magnetic-particle aggregate are developed. Some methods of evaluating the toroid dipoles of aggregates and the toroid polarization of suspensions in external fields and different thermodynamic conditions are applied. As a result it is shown how to operate with the toroid dipole of a separate aggregate of the nanometric size. Along these lines the encouraging perspectives appear for new approaches to the problem of the recording and storage of the information in magnetic media.

## ВВЕДЕНИЕ

Ферромагнитные суспензии (или, как их еще называют, магнитные жидкости) [1—3] представляют собой коллоидные растворы сложного состава, включающие несущую жидкость, магнитные частицы и поверхностно-активное вещество (сурфактант или ПАВ). Магнитные частицы,

почти сферические по форме, имеют размеры, близкие к пределу однодоменности (10—15 нм для большинства ферромагнетиков), а их магнитные моменты составляют по порядку величины  $10^4$ — $10^5$  магнетонов Бора. Типичная магнитная жидкость состоит из магнетитовых частиц, взвешенных в керосине, с олеиновой кислотой в качестве ПАВ. Поверхностно-активное вещество покрывает частицы слоем толщиной около 2—4 нм, что позволяет полностью или частично предотвратить коагуляцию. Магнитные жидкости могут значительно изменять свои свойства в зависимости от выбранного сурфактанта, толщины образованного им слоя на поверхности частицы, от размера и формы самих частиц, а также в зависимости от величины и типа их намагничивания. Практически путем подбора соответствующих ПАВ удается достичь довольно значительной концентрации магнитных частиц (до  $10^{18}$  см<sup>-3</sup>). Благодаря своим необычным магнитным свойствам («жидкие магнитные материалы») магнитные жидкости нашли широкое применение в технике (см. подробнее [1, 2]).

Многие наблюдаемые свойства магнитных суспензий при достаточно малых концентрациях частиц могут быть объяснены на основе модели невзаимодействующих броуновских частиц, обладающих фиксированными магнитными моментами [1—3]. В этом случае зависимость намагниченности суспензии  $M$  от величины магнитного поля  $H$  и температуры  $T$  выражается формулой Ланжевена

$$M = \mu_0 N L(\xi) \frac{H}{H}; \quad L(\xi) = \operatorname{cth} \xi - \frac{1}{\xi}, \quad (1)$$

где  $N$  — плотность числа частиц,  $\mu_0$  — величина магнитного момента одной частицы, аргумент функции Ланжевена  $L(\xi)$  является безразмерным параметром, равным отношению магнитной и тепловой энергии частицы:  $\xi = \mu_0 H / kT$ . Однако, с увеличением концентрации частиц, становится существенным взаимодействие между ними и поэтому наблюдается значительное отклонение поведения суспензии от модели невзаимодействующих точечных броуновских диполей. В частности, наблюдается отклонение от ланжевенского поведения не только намагниченности, но и оптических и реологических свойств суспензии (см., например, [4—9]). Наиболее важный эффект, к которому приводит взаимодействие между частицами, — это образование агрегатов магнитных частиц [1—13]. Теория образования агрегатов первоначально была развита в работе Де Жена и Пинкуса [14], а затем в работах других авторов (см. обзоры [10, 11], а также работы [15—17]). Непосредственное наблюдение агрегатов магнитных частиц методом малоуглового рассеяния нейтронов было выполнено недавно в работе [17]. Как показывают эти иссле-

дования, при малых концентрациях частиц образуются небольшие агрегаты, состоящие из 2—10 частиц. При более высоких концентрациях становится выгодным образование фрактальных кластеров, сеточных структур, «доменов», слоев перемешающейся концентрации и т.п. В настоящей работе мы будем рассматривать суспензию при достаточно малых концентрациях, когда образуются только малые агрегаты, как это обычно имеет место в устойчивых суспензиях. Это дает возможность использовать для описания агрегированной суспензии модель невзаимодействующих частиц, имеющих сложную структуру, которая может изменяться под действием внешнего магнитного поля и температуры. Следует отметить, что, несмотря на значительное число публикаций, посвященных агрегированным суспензиям, большая часть работ проводилась без детального учета формы агрегатов и взаимной ориентации магнитных моментов частиц, образующих агрегат. Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы последовательно учесть пространственную и магнитную конфигурацию агрегатов, их изменения под действием внешнего магнитного поля и температуры, а также установить их макроскопические проявления.

Если считать, что частицы суспензии до агрегирования были намагничены однородно (в дальнейшем эти частицы для краткости мы будем называть «эмбрионами»; понятие об «эмбрионах» для атомных кластеров было введено в работе [18]), то агрегат из них представляет собой новую частицу, которая характеризуется неоднородным распределением намагниченности по объему. В частности, в отсутствие магнитного поля энергетически выгодным является образование агрегатов с замкнутым магнитным потоком и равным нулю суммарным магнитным моментом (подобно тому, как в объемном ферромагнетике образуется доменная структура с замыкающими доменами [19]). Отсутствие суммарного магнитного момента означает, что для описания магнитных свойств агрегата необходимо вводить мультипольные моменты более высокого порядка, к числу которых относится квадрупольный, а также тороидный момент [20—22] и магнитный «заряд». Существенно, что замкнутая (вихревая) структура распределения магнитных моментов эмбрионов наиболее естественно описывается именно тороидным моментом. Таким образом, независимое измерение тороидного момента суспензии, а также ее восприимчивости к неоднородному магнитному полю (тороидная восприимчивость) наряду с измерениями намагничивания в однородном магнитном поле может дать ценную информацию о структуре магнитной жидкости и образующихся (или существующих) в ней агрегатах.

План обзора следующий. В первом разделе рассматривается классификация агрегатов магнитных частиц суспензии. Показано, что могут существовать агрегаты двух типов: магнитные, у которых формооб-

разующим фактором является диполь-дипольное взаимодействие эмбрионов, и немагнитные, образующиеся при слиянии оболочек сурфактанта эмбрионов. Эти агрегаты различаются между собой по форме и по магнитным свойствам. Во втором разделе вводятся мультипольные характеристики агрегатов. Показано, что агрегат как система, состоящая из конечного числа диполей, имеет конечное число магнитных степеней свободы и поэтому описывается конечным числом независимых мультипольных моментов, описывающих его магнитное состояние. Вводятся другие «представления» магнитной конфигурации агрегатов, подробно анализируется их смысл и связь друг с другом. В третьем разделе рассматривается взаимодействие агрегатов с неоднородным магнитным полем и между собой. Показано, что параметры действующего поля могут отличаться от исходного. В частности, действующее поле, в зависимости от формы агрегата, может иметь вихревую конфигурацию, хотя исходное поле является безвихревым. Это позволяет проводить измерения тороидной поляризации суспензии в квазистатическом режиме, без привлечения высокочастотных источников вихревого магнитного поля (создаваемого, например, токами смещения). В этом же разделе анализируются способы формирования внешнего поля заданной конфигурации с помощью системы макроскопических диполей. Рассматривается взаимодействие двух «конечных тороидов» при различном их расположении.

В четвертом разделе описываются алгоритмы расчета магнитной конфигурации агрегатов и их формы на основе методов микромагнетизма и молекулярной динамики. В заключительном пятом разделе приведены результаты вычислений [50], которые используются для исследования процесса перемагничивания агрегатов вихревым магнитным полем. Указываются возможности управления тороидностью магнитной среды для записи и хранения информации.

## 1. ТИПЫ АГРЕГАТОВ МАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ

Исследованию процессов агрегации частиц магнитной суспензии посвящено большое число публикаций (см. обзоры и монографии [1—2] и [10—13] и указанную там литературу). Первоначально агрегаты наблюдались методами электронной микроскопии на образцах магнитной жидкости, высушенных на специальных подложках или полученных микротомией полимеризованных жидкостей [10]. Но в последнее время были проведены исследования жидкости методами малоуглового рассеяния нейтронов [17], позволившие наблюдать агрегаты *in situ*. Важным свидетельством в пользу излагаемых ниже представлений являются на-

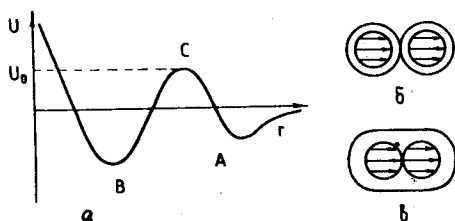


Рис.1. Схематическое изображение потенциала парного взаимодействия между частицами магнитной суспензии (а). Минимум А соответствует магнитному связыванию частиц в агрегат (б), а минимум В — немагнитному (в)

блюдения жидкости методом спектроскопии оптического смещения [8], а также моделирование суспензии с помощью взвесей магнитных микро-частиц, наблюдаемых в оптический микроскоп [23]. Макроскопические проявления образования агрегатов наблюдались при исследовании восприимчивости суспензии [4—5], оптических эффектов [4—9], а также в реологических экспериментах [10—11,13]. Теоретически образование агрегатов в слабо концентрированных суспензиях при наличии (и без) магнитного поля рассматривалось в работе Де Жена и Пинкуса [14], где получена оценка длины цепочки в зависимости от параметра взаимодействия частиц  $\lambda = \mu^2/a^3kT$  (здесь  $a$  — диаметр частицы) и их объемной концентрации.

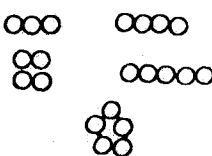
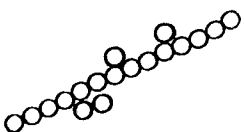
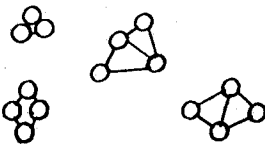
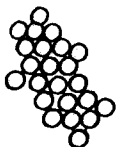
В работе Иордана [24] сделана попытка исследования более сложной структуры агрегатов, рассматриваемых как полимерные молекулы. В работе Пинкуса [25] качественно рассмотрена магнитная конфигурация агрегатов в зависимости от их формы; предсказывается, что в отсутствие поля возможно образование кольцевых структур с замкнутым магнитным потоком, имеющих нулевой суммарный магнитный момент. Аналогичные предсказания делаются в работах Шолтена [26,27] на основе анализа взаимодействия между диспергированными частицами, а также по данным измерения двулучепреломления и дихроизма магнитных жидкостей. Кроме того, моделирование ансамбля взаимодействующих диполей проводилось численно методом Монте-Карло [16] и другими методами [15,28], которые также свидетельствуют об образовании агрегатов магнитных частиц различных типов.

Для качественного понимания процесса агрегирования в магнитной суспензии удобно исходить из зависимости потенциала парного взаимодействия частиц суспензии от расстояния между ними, который схематически показан на рис.1,а в соответствии с данными работ [12,26,29]. Потенциальная кривая имеет два минимума, отделенных друг от друга потенциальным барьером высоты  $U_0$ . Высота барьера является мерой отталкивания частиц суспензии, покрытых оболочкой сурфактанта (стерическое или энтропийное отталкивание; отметим, что здесь мы отвлекаемся от природы этого взаимодействия). Правый минимум

потенциала ( $A$ ) соответствует магнитному дипольному притяжению между частицами, при котором не нарушается целостность оболочек сурфактанта на поверхности частиц рис.1,б. Такие агрегаты, образующиеся за счет сил магнитного притяжения, мы будем называть в дальнейшем магнитными или дипольными. Именно процесс дипольного агрегирования частиц магнитной суспензии (наиболее характерный для магнитных жидкостей) исследовался в большинстве цитируемых выше работ. Глубина минимума  $A$  на кривой потенциала в устойчивых суспензиях может считаться малой по сравнению с энергией теплового движения  $kT$ . Поэтому процесс дипольного агрегирования протекает, если использовать современную терминологию, по сценарию диффузионно-ограниченного агрегирования (ДООА) [28,30]. В отсутствие магнитного поля среднее число частиц в агрегате зависит от их полной концентрации в суспензии: при малой концентрации, не превышающей некоторой критической, в суспензии присутствуют агрегаты из малого числа частиц (менее 10). Об этом свидетельствуют результаты как непосредственного наблюдения [8,17], так и численного моделирования [15—17]. Метод малоуглового рассеяния позволяет независимо наблюдать как оболочку сурфактанта, так и сами магнитные частицы. При наблюдениях, описанных в [17], средний радиус одной частицы суспензии составлял 6 нм, а средняя толщина оболочки сурфактанта на частице 4 нм. При малой концентрации в жидкости наблюдались в основном димеры со средним расстоянием между центрами частиц 21 нм, что свидетельствует о дипольном происхождении этих агрегатов. При увеличении концентрации частиц в жидкости наблюдались также цепочечные и трехмерные агрегаты, состоящие из большего числа частиц [17]. При достижении критической концентрации становится возможным образование бесконечных фрактальных дипольных агрегатов, которые, как правило, имеют пониженную фрактальную размерность  $D$  ( $D \approx 2$  в отсутствие поля или  $D \approx 1$  при наличии поля) [23,28,31]. Дипольные агрегаты могут изменять свою форму в достаточно сильных магнитных полях, что проявляется в так называемом кюривейссовском поведении восприимчивости суспензии и двулучепреломления [4—7,9].

Кроме дипольных агрегатов, характерных именно для магнитных суспензий, в магнитной жидкости может происходить и обычное (немагнитное) связывание частиц в агрегаты. Этой возможности соответствует второй минимум на потенциальной кривой рис.1,а (минимум  $B$ ). При немагнитном агрегировании происходит слияние оболочек сурфактанта, и частицы удерживаются силами Ван-дер-Ваальса или силами поверхностного натяжения оболочки (рис.1,в). Поскольку величина барьера  $U_0$  достаточно велика, то процессы образования агрегатов такого типа проис-

Таблица 1. Типы агрегатов в магнитной суспензии

Тип связи частиц	Размерность (число частиц)	
	Конечное число частиц (малые агрегаты)	Фрактальные агрегаты, содержащие очень большое число частиц
Дипольный (магнитный)		 $D \approx 1$
Немагнитный		 $D \approx 2,5$

ходят сравнительно медленно; при условии  $U_0 \gg kT$  процесс агрегирования принято называть реакционно-ограниченным (РОА) [30]. На начальном этапе можно считать, что в жидкости присутствуют только малые агрегаты такого типа [8]. При очень больших временах этот процесс агрегации приводит в конце концов к образованию фрактальных агрегатов с относительно большой фрактальной размерностью  $D \approx 2,5$ , что будет означать практически полную необратимую коагуляцию суспензии [32].

Таким образом, имеющиеся данные свидетельствуют о том, что в магнитной суспензии на малых временных интервалах и при достаточно малых концентрациях частиц (меньше критических — см. выше) существуют агрегаты из небольшого числа (2—10) частиц, относящиеся к двум разновидностям, — дипольные (магнитные) и немагнитные агрегаты (см. табл.). Эти агрегаты отличаются друг от друга как по форме, так и по магнитным свойствам. Дипольные агрегаты могут также изменять свою форму под действием внешних факторов, а немагнитные агрегаты с хорошей степенью точности можно считать неизменными по форме (жесткими). В литературе отсутствует детальное описание малых агрегатов — их формы, распределения магнитных моментов, образующих их частиц (эмбрионов), и связанные с этим особенности поведения магнитной суспензии. Рассмотрение этих вопросов и составляет основную цель настоящей работы.

Как уже было отмечено во введении, для описания устойчивых магнитных суспензий во многих случаях используется модель невзаимодействующих броуновских магнитных диполей. Справедливость этой модели обосновывается тем, что, несмотря на дальнедействующий характер магнитного дипольного взаимодействия ( $U \sim 1/r^3$ ), оно также сильно зависит от взаимной ориентации взаимодействующих диполей. При усреднении по ориентациям броуновских частиц эффективное взаимодействие между ними спадает с расстоянием уже как  $1/r^6$  (в соответствии с классическим результатом Ван-дер-Ваальса). Поэтому при достаточной толщине оболочки сурфактанта, покрывающей частицы, диполи можно считать слабо взаимодействующими друг с другом. Эти рассуждения показывают, что одночастичная модель является хорошим первым приближением для описания магнитной жидкости. В рамках этой модели удастся объяснить многие наблюдаемые магнитные свойства суспензии. Отметим, что важной модификацией модели является учет неелевского механизма релаксации магнитного момента отдельной частицы относительно ее осей анизотропии [3,33,34] (модель «размороженных» диполей).

Дальнейшим усложнением одночастичной модели, вытекающим из экспериментальных данных [4—9,27,34], является предположение о том, что в магнитной суспензии, кроме одиночных частиц, имеются также малые агрегаты, которые могут существенно изменить ее свойства, как это уже было отмечено выше. По тем же причинам, что и в случае одиночных магнитных диполей, можно пренебречь взаимодействием агрегатов между собой, тем более что при агрегировании суммарный магнитный момент образовавшегося агрегата может быть меньше, чем сумма моментов отдельных эмбрионов, как это происходит, например, при образовании кольцевых агрегатов. Взаимодействие между агрегатами может стать существенным только при достаточно большой концентрации эмбрионов, когда начинается неограниченный рост агрегатов. Отметим также, что критическая концентрация, с которой начинается этот процесс, зависит от магнитного поля: при наличии поля дипольные агрегаты вытягиваются в линейные цепи и могут образовать пространственную сеть. Альтернативный процесс — расслоение жидкости на слабо и сильно концентрированную фракции или образование упорядоченных структур (доменов и т.п.) [1,2,35,36].

В соответствии с проведенными рассуждениями, во всяком случае, можно утверждать, что в пространстве с координатами  $N$  (концентрация частиц),  $H$  (магнитное поле) и  $t$  (время) можно выделить область, не слишком удаленную от начала координат, в которой справедлива модель агрегированной суспензии, представляющая собой малые агрегаты



дипольных частиц, слабо взаимодействующие между собой (одно-частичная модель агрегатов). Изучение магнитной суспензии в рамках этой модели представляет самостоятельный интерес, так как эта среда обладает новыми магнитными свойствами — ее частицы, кроме магнитного момента, могут иметь мультипольные моменты более высокого ранга (тороидный, квадрупольный и т.д.), а свойства самих частиц зависят от внешних факторов. Такие особенности поведения частиц проявляются макроскопически как отклонение поведения суспензии от ланжевеновского. Помимо самостоятельного интереса, изучение рассматриваемой модели суспензии имеет и практический интерес. Если считать, что для решения большинства прикладных задач требуются магнитные суспензии с хорошо разделенными частицами, то образование агрегатов, то есть переход суспензии в агрегированное состояние, является нежелательным процессом, что необходимо контролировать. Исследование особенностей поведения суспензии в рамках рассматриваемой модели позволяет решить и эту задачу.

## 2. МАГНИТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ АГРЕГАТОВ

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что исходные частицы суспензии (эмбрионы), образующие агрегаты, являются сферическими по форме и имеют «вмороженные» дипольные моменты («жесткие диполи»). Условие вмороженности подробно обсуждается в работах [3,33—35]. При заданной плотности энергии анизотропии ферромагнетика, из которого состоят частицы, оно хорошо выполняется для частиц тогда, когда размер частиц превышает некоторый критический. В данной работе мы будем рассматривать только равновесные свойства суспензии, поэтому, строго говоря, предположение о жесткости диполей на этом этапе является излишним, так как жесткая связь между частицей и ее дипольным моментом проявляется только при рассмотрении явлений релаксации или других нестационарных явлений типа переходных процессов при перестройке формы агрегатов. Далее по ходу изложения мы будем отмечать, насколько существенно это предположение при рассмотрении той или иной задачи.

Как известно, в реальных суспензиях наблюдается достаточно широкое распределение частиц по размерам. Так как форма агрегата и его магнитные свойства зависят от относительного размера эмбрионов, то при последовательном рассмотрении необходимо было бы исследовать свойства агрегатов при произвольных размерах образующих их частиц, а затем усреднить по известному (обычно лог-нормальному) распределению частиц. Конечно, эта процедура привела бы к сильному услож-

нению задачи. Однако, как показывают экспериментальные данные [17], полученные с помощью наблюдения частиц при рассеянии медленных нейтронов, даже в устойчивой (стандартной) магнитной суспензии в агрегированном состоянии находятся до 70% частиц. Причем, как известно, наиболее вероятно образование агрегатов из частиц, резко отличающихся по размерам: очень крупные частицы служат центрами притяжения для более мелких частиц. Но поскольку относительная доля как крупных так и мелких частиц мала, основную массу составляют частицы среднего размера, то относительно мала и доля агрегатов, образованных из частиц, резко отличающихся по размерам. Это позволяет в первом приближении пренебречь вкладом таких агрегатов и считать, что все эмбрионы в агрегатах имеют приблизительно одинаковый (средний) размер. Другими словами, здесь мы, во-первых, пренебрегаем корреляцией между размерами частиц, образующих агрегаты, то есть считаем, что эмбрионы всех размеров встречаются в агрегатах равновероятно и независимо друг от друга, и, во-вторых, заменяем объем частицы  $V$  на его среднее значение  $\bar{V}$ . Эта замена при усреднении приводит к точному результату, если усредняемая функция  $f(V)$  линейна по  $V$ , а в остальных случаях она эквивалентна приближенному равенству  $f(V) \approx f(\bar{V})$ .

**2.1. Мультипольные моменты среды из точечных диполей.** Каждый агрегат в дальнейшем мы будем описывать координатами  $r_a$  составляющих его эмбрионов и указывать ориентации их магнитных моментов  $m_a$ , где индекс  $a$  нумерует эмбрионы и пробегает значения от 1 до  $n$  ( $n$  — число частиц в агрегате). В соответствии со сделанным выше предположением моменты всех эмбрионов одинаковы по величине:  $|m_a| = \mu_0$ . В случае применимости модели жестких диполей каждый вектор  $m_a$  может быть записан в виде  $m_a = \mu_0 e_a$ , где  $e_a$  — единичный вектор, жестко связанный с самой частицей. Совокупность координат  $r_a$  задает форму агрегата (пространственную конфигурацию), а совокупность моментов  $m_a$  — его магнитную конфигурацию. Алгоритмы вычисления этих величин при заданном  $N$  будут обсуждаться ниже, а здесь мы рассмотрим некоторые интегральные характеристики агрегатов. Далее предполагается, что начало координат выбрано в геометрическом центре агрегата, то есть, что выполняется условие

$$\sum_a r_a = 0. \quad (2)$$

Наиболее важной величиной, описывающей магнитные свойства агрегата как целого, является его суммарный магнитный момент

$$\mu := \sum_a m_a, \quad (3)$$

который определяет энергию взаимодействия агрегата с однородным магнитным полем  $H_0$ :

$$E_H = -(\mu H_0). \quad (4)$$

Кроме этого, могут быть введены мультипольные моменты более высокого порядка, которые описывают неоднородное по пространству распределение моментов  $m_a$  и взаимодействие агрегатов с неоднородными полями.

К ним относятся: квадрупольный момент

$$\kappa_{ik} := \frac{1}{2} \sum_a (m_{ai} x_{ak} + m_{ak} x_{ai} - \frac{2}{3} \delta_{ik} (m_a r_a)), \quad (5)$$

тороидный момент [20—22]

$$\tau := \frac{1}{2} \sum_a (r_a m_a), \quad (6)$$

скалярный момент

$$\sigma := \frac{1}{3} \sum_a (r_a m_a), \quad (7)$$

а также другие моменты, содержащие более высокие степени  $r_a$ . Характерные распределения диполей по пространству, которые описываются моментами  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$  и  $\kappa_{ik}$ , показаны на рис.2. Тороидным моментом обладает распределение диполей с замкнутым магнитным потоком (рис.2,б), а скаляр  $\sigma$  является характеристикой полей, имеющих «источники» или «стоки» (рис.2,в).

В работах [20—22] тороидные мультипольные моменты были введены в электродинамику применительно к системе токов. Для того, чтобы установить связь между «токовыми» и рассматриваемыми здесь «дипольными» моментами, удобно перейти к описанию магнитной конфигурации агрегата с помощью непрерывного распределения намагниченности  $m(r)$ . Тогда от формул (3), (5)—(7) можно перейти к формулам, в которых произведена замена  $\sum_a \rightarrow \int_V$ , где  $V$  — объем, занятый агрегатом:

$$\mu := \int_V m(r) dV, \quad (3')$$

$$\kappa_{ik} := \frac{1}{2} \int_V \left[ m_i x_k + m_k x_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} (mr) \right] dV, \quad (5')$$

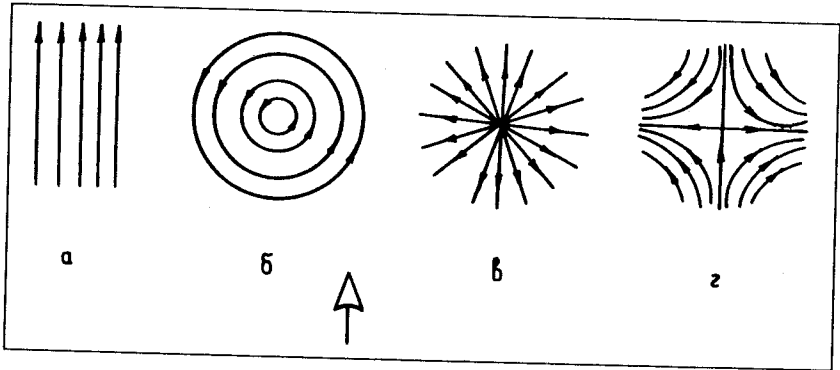


Рис.2. Однородное и неоднородное распределение ориентации диполей в агрегатах, описываемое моментами: а) магнитным; б) тороидным; в) скалярным и г) квадрупольным

$$\tau := \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r} \mathbf{m}] dV, \quad (6')$$

$$\sigma := \int_V (\mathbf{r} \mathbf{m}) dV. \quad (7')$$

Важно отметить, что при разложении плотности электрического тока, подробно проанализированном в [22], в (квази)статическом случае выполняются условия

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad \int \mathbf{j} dV = 0. \quad (8)$$

Первое из этих условий следует из закона сохранения заряда, а второе представляет собой требование равенства нулю полного тока, текущего в системе. Благодаря этим условиям, в разложении полного тока не могут появиться моменты, аналогичные полному дипольному моменту (3') и скаляру  $\sigma$  (5'), которые появляются при разложении распределения намагниченности  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ .

**2.2. Дипольные заряды и токи.** Скаляры, векторы и тензоры, характеризующие введенное выше непрерывное векторное поле  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , могут быть получены также и другим путем, а именно как средние значения производных функции  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  по координатам:

$$\begin{aligned} \rho_m &:= \operatorname{div} \mathbf{m}(\mathbf{r}); \\ \mathbf{j}_m &:= c \operatorname{rot} \mathbf{m}(\mathbf{r}); \end{aligned} \quad (9)$$

$$q_{ik} := \frac{1}{2} (\nabla_i m_k + \nabla_k m_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{m}),$$

где  $c$  — скорость света. Интегралы от этих величин по объему агрегата могут использоваться для обобщенного описания магнитной конфигурации агрегатов наряду с введенными выше мультипольными моментами  $\sigma$ ,  $\tau_i$ ,  $\kappa_{ik}$ . Таким образом, могут быть введены следующие величины:

«магнитный заряд»

$$e_m := \int \rho_m(\mathbf{r}) dV, \quad (10)$$

полный «дипольный ток»

$$\mathbf{i} := \int \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) dV \quad (11)$$

и тензор градиента намагниченности агрегата

$$p_{ik} := \int q_{ik}(\mathbf{r}) dV. \quad (12)$$

Следует особо подчеркнуть, что в формулах (10)—(12) интегрирование ведется только по объему ферромагнетика, то есть исключается переходная область между ферромагнитной средой и вакуумом, где функция  $m(\mathbf{r})$  терпит разрыв, а ее производные по координатам сингулярны. В частности, объем интегрирования не может быть произвольным образом расширен в область, где ферромагнетик отсутствует и где  $m(\mathbf{r}) = 0$ . Прежде чем переходить к подробному обсуждению введенных величин, установим связь между их «плотностями» (9) и мультипольными моментами  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $k_{ik}$ . Для выяснения связи между тороидным моментом  $\tau$  и соответствующим ему по свойствам пространственно-временной симметрии вектором плотности дипольного тока  $\mathbf{j}_m$ , преобразуем тождественно подынтегральное выражение в формуле (6')

$$\frac{1}{2} [\mathbf{r}m(\mathbf{r})]_i = \frac{1}{10} [m(\mathbf{r})\nabla]_k (x_i x_k - 2r^2 \delta_{ik}). \quad (13)$$

После этого в формуле (6) можно произвести интегрирование по частям и представить подынтегральное выражение в виде

$$\tau_i = \frac{1}{10c} \int (x_i x_k - 2r^2 \delta_{ik}) j_{mk} dV - \frac{1}{10} \oint [m(\mathbf{r}) \mathbf{n}]_k (x_i x_k - 2r^2 \delta_{ik}) dS, \quad (14)$$

где первое слагаемое совпадает с определением «токового» тороидного момента, данного в работах [20—22]. Аналогичным образом может быть установлена связь между моментами  $\sigma$  и  $\kappa_{ik}$ , с одной стороны, и плотностями  $\rho_m$  и  $q_{ik}$  — с другой. Представляя подынтегральные выражения в (7') в виде

$$(\mathbf{r}m) = \frac{1}{2} (m(\mathbf{r})\nabla)r^2, \\ x_i m_k + m_i x_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} m_j x_j = (\nabla_i m_k + m_i \nabla_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} m_j \nabla_j) \frac{1}{2} r^2 \quad (15)$$

и преобразуя интегралы в (7) по частям, можно найти, что моменты  $\sigma$  и  $\kappa_{ik}$  являются квадратичными «радиусами» (ср. [20—22]) плотности заряда  $\rho_m$  и локального градиента намагниченности  $q_{ik}$ :

$$\sigma = \frac{1}{2} \int r^2 \rho_m dV + \dots; \quad \kappa_{ik} = \frac{1}{2} \int r^2 q_{ik} dV + \dots \quad (16)$$

В этих выражениях для краткости опущены интегралы по поверхности. Сравнивая между собой два вида интегральных характеристик — величины  $e_m$ ,  $j$  и  $p_{ik}$ , заданные формулами (10)—(12), и выражения для моментов  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $\kappa_{ik}$ , представленные в форме (14), (16), можно видеть, что, например, дипольный ток  $i$  является моментом нулевого порядка по степеням радиуса-вектора от плотности дипольного тока  $j_m$ , тогда как тороидный момент агрегата  $\tau$  — это момент второго порядка от того же тока, как это следует из сравнения формул (10) и (14). Аналогично средние  $e_m$  и  $p_{ik}$  являются моментами нулевого порядка от плотностей  $\rho_m$  и  $q_{ik}$ , а  $\sigma$  и  $\kappa_{ik}$  — моментами второго порядка. В этой связи отметим, что из двух моментов первого порядка от плотности тока  $j_m$  — скалярного и векторного, имеющих вид интегралов

$$\int (r j_m) dV; \quad \int [r \times j_m] dV,$$

скалярный момент имеет объемную плотность, равную нулю, в чем можно убедиться, используя определение плотности тока  $j_m$  (9), а векторный момент может быть сведен к магнитному моменту агрегата как целого  $\mu$ .

Для более полного понимания связи между тороидным моментом агрегата  $\tau$  и дипольным током  $i$  воспользуемся теоремой Гельмгольца. Введем векторный и скалярный «потенциалы» поля  $m(r)$ :

$$m(r) = -\nabla \varphi_m + \text{rot } a_m. \quad (17)$$

С одной стороны, с помощью теоремы Неемана — Дебая [22] легко показать, что «векторный потенциал»  $a_m$  поля  $m(r)$  является объемной плотностью тороидного момента:  $\tau \sim \int a_m dV$ . С другой стороны, по теореме Гельмгольца (см., например, [37]) между этим потенциалом  $a_m$  и вихрем поля  $m$  (согласно (9) вихрь поля  $m$  равен  $j_m/c$ ) существует связь вида

$$a_m(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j_m(r')}{4\pi |r - r'|} dV'. \quad (18)$$

Таким образом, плотность тока  $\mathbf{j}_m$  является «источником» для поля  $\mathbf{a}_m(\mathbf{r})$ , т.е. тороидный момент агрегата существует только тогда, когда существует плотность дипольного тока  $\mathbf{j}_m$ . При этом полный ток  $\mathbf{i}$  может быть равен нулю, так же как возможно и обратное — то есть тороидный момент  $\boldsymbol{\tau}$  может быть равен нулю, а ток  $\mathbf{j}_m$  — не равен. Используя определение скалярного момента  $\sigma$  (7) и представление распределения намагниченности в виде (17), можно показать, что скалярный потенциал  $\varphi_m$  является плотностью скаляра  $\sigma$ , то есть  $\sigma \sim \int \varphi_m dV$ . С другой стороны, в соответствии с теоремой Гельмгольца потенциал  $\varphi_m$  связан с дивергенцией поля  $\mathbf{m}$ , которая согласно определению (9) равна плотности «заряда»  $\rho_m$ :

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV. \quad (19)$$

Для дальнейшего весьма важен ответ на вопрос: может ли существовать дипольный ток  $\mathbf{i}$ , определенный выражением (11), как интеграл от плотности тока  $\mathbf{j}_m$ . Согласно (8) аналогичный интеграл от «зарядовой» плотности тока равен нулю. Хотя условие поперечности  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , очевидно, выполняется и для дипольного тока:  $\text{div } \mathbf{j}_m = 0$ , это еще не означает, что и полный ток  $\mathbf{i}$  тоже равен нулю и, вообще говоря, не означает даже, что линии тока  $\mathbf{j}_m$  замкнуты (ср. интересное обсуждение этого вопроса в работе [40] применительно к силовым линиям магнитного поля, которое, как известно, также удовлетворяет уравнению  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ ). Учитывая связь  $\mathbf{j}_m = c \text{rot } \mathbf{m}$ , мы можем преобразовать выражение для тока (11) в интеграл по поверхности

$$\mathbf{i} = c \int [\mathbf{n} \times \mathbf{m}] dS. \quad (20)$$

Но, как уже было отмечено выше, в этом интеграле мы не можем перенести поверхность интегрирования в область, где  $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = 0$ , так как по определению в формулах (10)—(12) интегрирование ведется по объему, занятому ферромагнетиком. Для агрегатов магнитных частиц введение функции  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , непрерывной во всем объеме, занятом этой составной частицей, является приближенной операцией, поэтому и о дипольном токе здесь можно говорить только приближенно. Однако принципиальная возможность описания распределения намагниченности с помощью полного дипольного тока  $\mathbf{i}$  может быть рассмотрена на примере относительно крупных частиц ферромагнетика, с размерами, превышающими радиус однодоменности.

Как показывают экспериментальные данные [41], мелкие частицы железа сохраняют состояние однодоменности до размеров порядка 40 нм, а затем они переходят в состояние с одновихревым намагничиванием и сохраняют его в интервале размеров от 40 до 150 нм. При больших размерах одновихревое состояние сменяется многовихревым и, наконец, при размерах более 1000 нм возникает многодоменное состояние. Аналогичные результаты получены методами микромагнетизма [42—45], где показано, что при определенных размерах частиц ферромагнетика распределение намагниченности в таких частицах может быть охарактеризовано как в среднем вихревое, то есть явно имеющее среднее значение ротора векторного поля  $m(\mathbf{r})$  по объему, не равное нулю, что эквивалентно наличию введенного здесь дипольного тока  $i$ . Следует подчеркнуть, что средний «молекулярный ток», который приводит к самому существованию магнитных моментов, разумеется, отсутствует, т.е., как и должно быть, удовлетворяет соотношениям (8). Отметим, что в крупных магнитных частицах встречается также распределение намагниченности, описываемое в среднем магнитным зарядом  $e_m$  и градиентом намагниченности  $p_{ik}$ . Подобные распределения в литературе называют «цветковыми конфигурациями».

**2.3. Мультипольная аппроксимация намагниченности отдельного агрегата.** Намагниченность агрегата введена нами изначально в виде совокупности точечных диполей  $\{m_a\}$ , дискретно распределенных по пространству. Наиболее экономный и легко реализуемый численно способ перехода от совокупности значений  $\{m_a\}$  к непрерывному дифференцируемому распределению  $m(\mathbf{r})$  состоит, как известно, в использовании спектральных методов [38]. В рамках этого подхода будем считать дипольные моменты эмбрионов  $m_a$ , заданные в точках  $\mathbf{r}_a$ , значениями функции  $m(\mathbf{r})$ , то есть  $m(\mathbf{r}_a) = m_a$ . Неизвестную функцию  $m(\mathbf{r})$  ищем в виде разложения по конечному набору заданных функций  $\Phi_\alpha(\mathbf{r})$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots, K$ ):

$$m(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} b_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}). \quad (21)$$

Далее подразумевается, что число этих функций ( $K + 1$ ) меньше, чем число эмбрионов  $n$ :  $K + 1 \leq n$  и, кроме того, базисные функции выбраны таким образом, что система  $n$ -мерных векторов  $\{\Phi_{\alpha}\}$  с компонентами  $\Phi_{\alpha}(\mathbf{r}_a)$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) является линейно независимой.



Для вычисления коэффициентов разложения  $\mathbf{b}_\alpha$  следует найти значения правой и левой частей равенства (21) в точках  $\mathbf{r}_a$ , получившееся при этом равенство  $m_a = \sum_\alpha \mathbf{b}_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{r}_a)$  умножить на  $\Phi_\beta(\mathbf{r}_a)$ , а затем просуммировать все эти соотношения по  $a$ . В результате будет получена система линейных уравнений:

$$\sum_\beta L_{\alpha\beta} \mathbf{b}_\beta = \mathbf{N}_\alpha, \quad (22)$$

$$L_{\alpha\beta} = \sum_a \Phi_\alpha(\mathbf{r}_a) \Phi_\beta(\mathbf{r}_a),$$

$$\mathbf{N}_\alpha = \sum_a m_a \Phi_\alpha(\mathbf{r}_a).$$

Эта система имеет однозначные решения, так как, в силу линейной независимости базисных функций на массиве точек  $\mathbf{r}_a$ , определитель матрицы  $L_{\alpha\beta}$  отличен от нуля. Если переопределить базисные функции таким образом, чтобы  $n$ -мерные векторы  $|\Phi_\alpha\rangle$  были взаимно ортогональными и нормированными:  $\langle \Phi_\alpha | \Phi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ , то матрица  $L_{\alpha\beta}$  будет единичной, и система (22) имеет простое решение:  $\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha$ .

Зная коэффициенты разложения  $\mathbf{b}_\alpha$ , с помощью соотношений (21), (9) — (12) можно вычислить введенные выше интегральные характеристики агрегатов — магнитный заряд, дипольный ток и градиент намагниченности:

$$e_m = \sum_\alpha (\mathbf{b}_\alpha \lambda_\alpha)_m, \quad \mathbf{i} = \sum_\alpha [\lambda_\alpha \mathbf{b}_\alpha],$$

$$p_{ik} = \frac{1}{2} \sum_\alpha (b_{\alpha i} \lambda_{\alpha k} + b_{\alpha k} \lambda_{\alpha i} - \frac{2}{3} b_{\alpha j} \lambda_{\alpha j} \delta_{ik}), \quad (23)$$

где обозначено

$$\lambda_\alpha = \sum_a [\nabla \Phi_\alpha(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}. \quad (24)$$

В качестве примера рассмотрим наиболее простой и естественный вариант выбора базисных функций, считая их равными:  $\Phi_0(\mathbf{r}) = 1$ ,  $\Phi_i(\mathbf{r}) = x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $x_i$  — компоненты радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Следует иметь в виду, что если диполи расположены в одной плоскости (плоский агрегат), то вместо четырех указанных функций  $1, x, y, z$ , необходимо ограничить базис тремя функциями  $1, x, y$ , где считается, что частицы

лежат в плоскости  $(x, y)$ . В противном случае будет нарушено условие линейной независимости векторов  $|\Phi_\alpha\rangle$ . Разложение (21) в рассматриваемом случае может быть записано в виде

$$m_i(\mathbf{r}) = b_{0i} + b_{ik}x_k. \quad (25)$$

В системе уравнений (22), определяющей коэффициенты  $b_{ai}$ , матрица  $L_{\alpha\beta}$  с учетом условия выбора начала координат (2) имеет вид

$$L_{00} = n; \quad L_{0i} = L_{i0} = 0, \quad L_{ik} = \sum_a x_{ai}x_{ak}, \quad (26)$$

а неоднородности  $N_\alpha$  однозначно выражаются через мультипольные моменты  $\sigma, \tau, \kappa_{ik}$ . Действительно, вектор  $N_0$ , как это следует из (22) и определения  $\Phi_0(\mathbf{r}) = 1$ , равен магнитному моменту агрегата

$$N_0 = \sum_a m_a = \mu. \quad (27)$$

Что касается векторов  $N_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ , то эти три вектора образуют тензор второго ранга с компонентами

$$N_{ik} = \sum_a x_{ai}m_{ak}. \quad (28)$$

Раскладывая этот тензор на неприводимые части

$$N_{ik} = N^{(0)}\delta_{ik} + e_{ikl}N_l^{(1)} + N_{ik}^{(2)}, \quad (29)$$

где введены скаляр  $N^{(0)}$ , вектор  $N^{(1)}$  и неприводимый тензор второго ранга  $N^{(2)}$ , связанные с компонентами исходного тензора соотношениями

$$N^{(0)} = \frac{1}{2} N_{jj}; \quad N_i^{(1)} = \frac{1}{2} e_{ikl} N_{kl}$$

$$N_{ik}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( N_{ik} + N_{ki} - \frac{2}{3} N_{jj} \delta_{ik} \right), \quad (30)$$

нетрудно проверить, что эти величины совпадают с мультипольными моментами  $\sigma, \tau, \kappa_{ik}$ , определенными формулами (5) — (7):

$$\sigma = N^{(0)}; \quad \tau = N^{(1)}; \quad \kappa_{ik} = N_{ik}^{(2)}. \quad (31)$$

Система уравнений для неизвестных коэффициентов  $b_\alpha$  в данном случае распадается на две подсистемы:

$$nb_{0i} = \mu_i, \quad L_{ik}b_{kj} = N_{ij},$$

откуда находим решение

$$b_{0i} = \frac{\mu_i}{n}, \quad b_{ik} = L_{ij}^{-1}N_{jk}, \quad (32)$$

где  $L_{ij}^{-1}$  — матрица, обратная к  $L_{ij}$  (невырожденность этой матрицы обусловлена выбором базиса). Зная коэффициенты  $b_\alpha$  в (25), можно найти интересующие нас дипольные заряды и токи. В соответствии с определением (24) вектор  $\lambda_\alpha$  при  $\alpha = 0$  обращается в нуль, а оставшиеся векторы при  $\alpha = 1, 2, 3$  с точностью до множителя образуют единичный тензор второго ранга:  $\lambda_{ik} \sim \delta_{ik}$ . По этой причине, как можно видеть из соотношения (23), дипольные заряды и токи совпадают с неприводимыми частями тензора  $b_{ik}$ :

$$e_m = b^{(0)}, \quad i = b^{(1)}, \quad p_{ik} = b_{ik}^{(2)}, \quad (33)$$

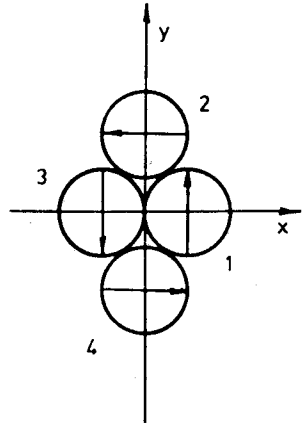
причем разложение тензора  $b_{ik}$  на неприводимые части производится аналогично разложению тензора  $N_{ik}$ , как это определено соотношениями (29), (30).

В общем случае базисные функции  $\Phi_\alpha(\mathbf{r})$  разложения (21) могут быть выбраны как часть некоторого полного набора функций. Так, например, рассмотренные здесь функции  $1, x_i$  — это первые четыре функции полного набора, составленного из всевозможных степеней компонент радиуса-вектора:  $1, x_i, x_i x_k, x_i x_k x_j, \dots$ . Более удобным является выражение этих функций через сферические гармоники  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , где  $\theta, \varphi$  — сферические углы радиуса-вектора. Как показано в [22, 39], в длинноволновом приближении могут быть выбраны функции вида  $r^s Y_{lm}(\theta, \varphi)$ .

В качестве простой иллюстрации рассмотрим плоский агрегат, состоящий из четырех частиц в форме ромба с длинами диагоналей  $2l_1$  (по оси  $X$ ) и  $2l_2$  (по оси  $Y$ ) и ориентацией магнитных моментов эмбрионов, показанной на рис. 3 (основное состояние, в котором все моменты взаимно перпендикулярны, перпендикулярны диагоналям ромба и лежат в плоскости агрегата). Простые вычисления (см. ниже) показывают, что в данном случае магнитный момент агрегата  $\mu$ , а также скалярный момент  $\sigma$  равны нулю, а тороидный и квадрупольный моменты равны

$$\tau = \mu_0(l_1 + l_2) \mathbf{k}, \quad \kappa_{12} = \kappa_{21} = \mu_0(l_1 - l_2), \quad (34)$$

Рис.3. Агрегат в форме ромба. Стрелками показаны ориентации магнитных моментов частиц в основном состоянии



где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ , перпендикулярный плоскости агрегата; остальные не указанные здесь компоненты квадрупольного момента равны нулю. Используя решение (32) и формулы (33), убеждаемся, что в данном случае дипольный заряд  $e_m$  отсутствует, дипольный ток равен

$$\mathbf{i} = \frac{4\mu_0}{c} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \mathbf{k}, \quad (34')$$

а тензор градиента намагниченности имеет только две компоненты

$$p_{12} = p_{21} = 4\mu_0 \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right).$$

Отметим, что, как следует из формул, для агрегата в форме квадрата ( $l_1 = l_2$ ) остаются отличными от нуля лишь тороидный момент в (34) и дипольный ток (34'), в то время как  $\kappa_{ik} = 0$  и  $p_{ik} = 0$ .

**2.4. Параметры магнитного состояния агрегата как конечной дискретной системы.** Рассмотрим несколько иную интерпретацию мультипольных моментов (а также дипольных зарядов и токов), не связанную с каким-либо приближенным подходом. А именно, как будет показано, их можно считать новыми (и точными) параметрами, задающими магнитное состояние агрегата. Действительно, магнитная конфигурация  $n$  диполей задается  $3n$  линейно независимыми переменными — векторами магнитных моментов эмбрионов  $\{\mathbf{m}_a\}$ . Введем обобщенное обозначение для этих переменных  $M_J$ , где индекс  $J$  пробегает значения от 1 до  $3n$ . Очевидно, что вместо координат  $M_J$  могут использоваться их любые линейные комбинации

$$X_K = \sum_J U_{KJ} M_J, \quad (35)$$

где  $U_{KJ}$  — некоторая невырожденная матрица. При этом сам выбор новых переменных  $X_K$  диктуется соображениями удобства решения той или иной конкретной задачи.

Покажем, что оба ряда характеристик — мультипольные моменты  $\mu, \tau, \sigma, \dots$  и дипольные заряды и токи (точнее, значения их плотностей, взятые в начале координат:  $\rho_m(0), j_m(0), \dots$ ) могут рассматриваться как два разных набора переменных, описывающих магнитное состояние агрегата и линейно связанных со старыми переменными  $\{m_a\}$ . Рассмотрим сначала систему мультипольных моментов. По определению они представляют собой всевозможные неприводимые тензоры, которые могут быть выделены из декартовых тензоров  $(S + 1)$ -ранга, имеющих вид

$$T_{i_1 i_2 \dots i_s j} = \sum_a x_{a i_1} x_{a i_2} \dots x_{a i_s} m_{a j}. \quad (36)$$

Это соотношение можно рассматривать как линейное преобразование от старых переменных  $\{m_a\}$  к новым —  $T_{i_1 i_2 \dots i_s j}$ . Поскольку агрегат состоит из конечного числа частиц, то он может описываться только конечным числом независимых координат, поэтому мы можем выбрать из всех возможных компонент тензоров  $T_{i_1 i_2 \dots i_s j}$  некоторую совокупность, содержащую  $3n$  величин, и использовать ее для описания состояний агрегата. Будем в дальнейшем обозначать эти величины символами  $T_K$ , где  $K = 1, 2, \dots, 3n$ . Между переменными состояния  $T_K$  и  $M_j$  согласно (36) существует линейная связь типа (35).

Для получения более компактных и наглядных соотношений перейдем от декартовых координат к сферическим. С этой целью вместо произведений  $x_{a i_1} x_{a i_2} \dots x_{a i_s}$ , стоящих под знаком суммы в равенстве (36),

введем сферические гармоники  $r_a^s Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a)$ , где индекс  $l$  при данном  $s$  пробегает значения, равные  $s, s - 2, \dots$  до 1 при нечетном  $s$  и до 0 при четном  $s$ . Нетрудно проверить, что число независимых компонент симметричного тензора  $x_{a i_1} x_{a i_2} \dots x_{a i_s}$ , равное  $(s + 1)(s + 2)/2$ , и число

функций  $r_a^s Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a)$  с данным  $l, s$  и  $m$  в точности совпадают. Сделав указанную замену, можно затем образовать неприводимые тензоры  $L$ -ранга  $T_{LM}^{(sl)}$  с данными  $s$  и  $l$ , используя известные правила преобразования тензоров в сферических координатах. Таким образом, получим

$$T_{LM}^{(sl)} = \sum_a \sum_m (m_a C_{LMlm}) r_a^s Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a), \quad (37)$$

где символ  $C_{LMlm}$  обозначает коэффициент Клебша — Гордана  $C_{LMlm}^{1q}$ , который для удобства мы перевели в декартову форму по верхнему (век-

торному) индексу. В соответствии с известным правилом «треугольника», которому подчиняются индексы коэффициента Клебша — Гордана, индекс  $L$  может принимать значения  $l, l \pm 1$ , если  $l \neq 0$  и  $L = 1$ , если  $l = 0$ . Из этого определения следует, в частности, что при  $s = 0$  или  $s = 1$  индекс  $l$  принимает значения, соответственно,  $l = 0$  или  $l = 1$ . При  $l = 0$  ранг  $L$  тензора  $T_{LM}^{(s)}$  равен единице, а при  $l = 1$  имеем  $L = 0, 1, 2$ . Таким образом, при  $s = 0, 1$  существуют четыре неприводимых тензора  $T_{LM}^{(s)}$ :  $T_{1M}^{(00)}, T_{00}^{(11)}, T_{1M}^{(11)}, T_{2M}^{(11)}$ , декартовыми аналогами которых являются, соответственно,  $\mu, \sigma, \tau, \kappa_{ik}$ . При  $s = 2$  индекс  $l$  может иметь два значения:  $l = 0$  и  $l = 2$ . Если  $l = 0$ , то, как и ранее,  $L = 1$ , а если  $l = 2$ , то  $L = 0, 1, 2, 3$ . То есть в этом случае существуют следующие тензоры  $T_{LM}^{(s)}$ :  $T_{1M}^{(20)}, T_{1M}^{(22)}, T_{2M}^{(22)}, T_{3M}^{(22)}$ . При этом тензор второго ранга  $T_{2M}^{(22)}$  является моментом тороидного ряда. В декартовом виде он представляет собой сумму симметризованных прямых произведений векторов  $\mathbf{r}_a$  и  $[\mathbf{r}_a \mathbf{m}_a]$ . Отметим, что в общем случае мультиполи тороидного ряда при данном  $s$  имеют ранги  $L$ , равные  $s, s - 2, \dots$

Выберем из всех возможных тензоров  $T_{LM}^{(s)}$  какие-нибудь  $3l$  величин и введем для них указанное выше обозначение  $T_K$ . Согласно (37) связь между  $T_K$  и  $M_J$  может быть записана в виде

$$T_K = \sum_J U_{KJ} M_J, \quad (38)$$

где матрица  $U_{KJ}$  выражается через координаты диполей с помощью функции  $r_a^s Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a)$ . Оставшиеся мультипольные моменты, которые не вошли в набор переменных  $T_K$ , могут быть выражены через  $T_K$ . Действительно, так как матрица  $U_{KJ}$  по предположению невырождена, то с помощью обратной ей матрицы  $U_{KJ}^{-1}$  мы можем выразить  $M_J$  через  $T_K$ :

$$M_J = \sum_K U_{JK}^{-1} T_K,$$

а затем, подставив  $M_J$  в (37) вместо  $\mathbf{m}_a$ , мы получим искомую связь.

Таким образом, мы показали, что мультипольные моменты  $T_K$  могут рассматриваться как независимые параметры, описывающие магнитную конфигурацию агрегатов. Для примера укажем, что для агрегата из

четырёх частиц ( $3n = 12$ ) в качестве величин  $T_K$  можно выбрать следующие двенадцать переменных:  $T_{1M}^{(00)}$ ,  $T_{00}^{(11)}$ ,  $T_{1M}^{(11)}$  и  $T_{2M}^{(11)}$  (при подсчете числа переменных следует учитывать, что при данном  $L$  индекс  $M$  принимает  $2L + 1$  значений, равных  $0, \pm 1, \dots, \pm L$ ). Для агрегата из пяти частиц ( $3n = 15$ ) к этим переменным можно добавить, например, три компоненты тензора  $T_{1M}^{(20)}$ , а для шести частиц ( $3n = 18$ ) можно включить дополнительно еще и  $T_{1M}^{(22)}$ . Нетрудно подсчитать, что вся совокупность величин  $T_{LM}^{(sl)}$  со значениями  $s$ , равными 0, 1 и 2, и со всеми возможными при этом значениями индексов  $l$ ,  $L$  и  $M$  (как раз эти тензоры были перечислены выше) составляет 30 переменных, которых достаточно для описания состояний агрегата из 10 частиц. Следует отметить, что если все диполи лежат на одной прямой или в одной плоскости (далее мы будем называть эти агрегаты линейным и плоским соответственно), то их координаты  $\mathbf{r}_a$  связаны линейной зависимостью принадлежности прямой или плоскости. По этой причине некоторые компоненты тензоров  $T_{LM}^{(sl)}$  оказываются линейно зависимыми между собой и поэтому следует соблюдать осторожность, пытаясь интерпретировать их как независимые координаты.

Покажем теперь, что с такой же точки зрения, как введение новых переменных для описания магнитных состояний, могут быть рассмотрены дипольные заряды и токи. Будем исходить из разложения, аналогичного формуле (21), где в качестве базисных функций  $\Phi_s(\mathbf{r})$  выбраны тензоры  $1, x_{a_1}, x_{a_1} x_{a_2}, \dots$ . Подставим вместо текущей координаты  $\mathbf{r}$  координаты диполей  $\mathbf{r}_a$  и в результате получим следующее соотношение:

$$m_{aj} = Q_j + Q_{j_1} x_{a_1} + Q_{j_1 i_2} x_{a_1} x_{a_2} + \dots \quad (39)$$

Здесь мы обозначили коэффициенты разложения символами  $Q_{j_1 \dots i_s}$  вместо использовавшихся в (21), так как, в отличие от ранее описанного приближенного метода их вычисления, здесь они будут найдены точно. С этой целью будем интерпретировать равенство (39) как линейную связь между старыми и новыми переменными  $m_a$  и  $Q_{i_1 \dots j}$  соответственно. Если, как и в (37), перейти от декартовых координат к сферическим, то равенство (39) можно записать в более удобной форме:

$$m_a = \sum_{sLLM} Q_{LM}^{(sl)} C_{LMlm} r_a^s Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a), \quad (40)$$

где индексы  $s, l, L$  и  $M$  связаны между собой теми же соотношениями, что и в (37). Отобрав среди тензоров  $Q_{LM}^{(sl)}$  ровно  $3n$  независимых переменных (далее будем обозначать эти переменные обобщенным символом  $Q_K$ ) и полагая остальные величины  $Q_{LM}^{(sl)}$  равными нулю, мы можем рассматривать равенство (39) как линейное преобразование от переменных  $M_J$  к переменным  $Q_K$ . В обобщенных обозначениях выражение (40) может быть переписано в виде

$$M_J = \sum_K V_{JK}^{-1} Q_K. \quad (41)$$

Точный вид матрицы преобразования  $V_{JK}^{-1}$  в этой формуле легко установить, сравнивая равенства (41) и (40) при конкретно выбранных значениях индексов  $s, l$  и  $L, M$ . Так как матрица  $Q_J$  по предположению невырождена, то преобразование (41) можно обратить:

$$Q_K = \sum_J V_{JK} M_J. \quad (42)$$

Таким образом, здесь показано, что коэффициенты  $Q_J$  конечной суммы (39) или (40) могут использоваться для описания магнитной конфигурации агрегата наряду с другими переменными. С другой стороны, величины  $Q_J$ , как будет показано ниже, определенным образом связаны с дипольными зарядами и токами и, следовательно, использование этих последних может интерпретироваться как переход к новым переменным.

Отметим, что полученные формулы позволяют не только выразить новые переменные ( $T_j$  и  $Q_j$ ) через старые  $M_j$ , но также дают возможность связать величины  $T_j$  и  $Q_j$  между собой, что представляет интерес в плане рассмотренной выше связи между мультипольными моментами, с одной стороны, и дипольными зарядами и токами — с другой. Считая, что в равенстве (40) в правой части оставлены только те переменные, которые выбраны для описания состояния, и подставляя (40) в (37), мы получим искомую связь в виде

$$T_{LM}^{(sl)} = \sum_{L'M'} \sum_{s'l'} U_{LML'M'}^{(sl's'l')} Q_{L'M'}^{(s'l')}, \quad (43)$$

где обозначено

$$U_{LML'M'}^{(sl's'l')} = \sum_a \left( Y_{LM}^{(sl)}(r_a) Y_{L'M'}^{(s'l')}(r_a) \right).$$



Здесь для сокращения записи введены векторные сферические гармоники

$$Y_{LM}^{(sl)}(\mathbf{r}_a) = \sum_m C_{LMlm} Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a) r_a^s.$$

Как видно из формулы (43), матрица преобразования  $U$ , связывающая моменты  $T_{LM}$  и коэффициенты  $Q_{LM}$ , зависит от пространственного расположения диполей, то есть от геометрической формы агрегата. Отметим в этой связи, что обе матрицы  $U_{JK}$  и  $V_{JK}$  в соотношениях (38) и (42) не являются унитарными. Дело в том, что выбор базисных функций в виде  $r_a^s Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a)$  «навязывается» определением мультипольных моментов, однако эти функции, вообще говоря, не адекватны геометрической форме агрегата. По этой причине моменты  $T_{LM}$  и коэффициенты  $Q_{LM}$  не совпадают между собой и матрица  $U$  в формуле (43) оказывается в общем случае недиагональной и зависящей от координат. Если бы вместо функций  $r_a^s Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a)$  использовались такие базисные функции  $\Phi_s(\mathbf{r})$ , которые были бы ортогональны и нормированы, как это было описано выше после формулы (22), то соответствующие им моменты и коэффициенты совпадали бы между собой, однако эти новые величины уже не имели бы смысла мультипольных моментов и дипольных зарядов и токов.

Возвратимся теперь к соотношению (39) и установим (приближенный) смысл тензорных коэффициентов  $Q_{j_1 i_2 \dots i_s}$  и вместе с тем вложенных в эти тензоры неприводимых тензоров  $Q_{LM}^{(sl)}$ . Для этой цели будем рассматривать сумму (39) опять как приближенное разложение в ряд по степеням радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  некоторой функции  $m(\mathbf{r})$ , имеющей значения  $m_a$  в точках  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$ . Тогда коэффициенты разложения в сумме (39) являются производными от этой функции, взятыми в точке  $\mathbf{r} = 0$  (напомним, что начало координат выбрано в геометрическом центре агрегата в соответствии с условием (2)):

$$Q_{j_1 i_2 \dots i_s} = \frac{1}{s!} \left[ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} m_f(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r}=0}. \quad (44)$$

Сравнивая это соотношение с равенством (9), можно видеть, что при  $s = 1$  неприводимые части тензора второго ранга  $Q_{j_1}$  совпадают со значениями плотности заряда  $\rho_m$ , плотности тока  $j_m$  и градиента намагниченности  $q_{ik}$ , взятыми в точке  $\mathbf{r} = 0$ :

$$Q_{j i_1} = q_{j i_1}(0) + \frac{1}{2c} e_{j i_1 k} j_{m k}(0) + \frac{1}{3} \delta_{j i_1} \rho_m(0).$$

Как можно показать, из формулы (44) следует, что тензоры  $Q_{j i_1 i_2 \dots i_s}$  можно рассматривать как мультипольные моменты в фурье-пространстве. Действительно, если вместо функции  $m(\mathbf{r})$  ввести ее фурье-образ  $m(\mathbf{k})$ , связанный с оригиналом соотношением

$$m(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} m(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (45)$$

подставить это выражение в (44), продифференцировать под знаком интеграла по  $\mathbf{r}$ , а затем положить  $\mathbf{r} = 0$ , то мы получим вместо (44) следующий интеграл:

$$Q_{j i_1 i_2 \dots i_s} = \frac{(i)^s}{s!} \int k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_s} m_j(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (46)$$

Таким образом, тензоры  $Q_{j i_1 i_2 \dots i_s}$  играют в  $k$ -пространстве такую же роль, что и тензоры  $T_{i_1 i_2 \dots i_s j}$  в обычном пространстве. Чтобы полнее показать эту аналогию, запишем соотношение (36) в интегральном виде:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_s j} = \int x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s} m_j(\mathbf{r}) dV, \quad (47)$$

так что аналогия в (46) становится очевидной. Кроме того, оказывается, что для тензоров  $T_{i_1 i_2 \dots i_s j}$  в  $k$ -пространстве существует соотношение, аналогичное (44) для  $Q_{j i_1 i_2 \dots i_s}$ . Действительно, используя обратное преобразование Фурье

$$m(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} m(\mathbf{r}) dV \quad (48)$$

и дифференцируя правую и левую части этого выражения по  $\mathbf{k}$ , а затем полагая  $\mathbf{k} = 0$ , мы получим справа интеграл (47), откуда следует, что между производными от фурье-образа  $m(\mathbf{k})$  и мультипольными моментами  $T_{i_1 i_2 \dots i_s j}$  имеет место связь вида

$$T_{i_1 i_2 \dots i_s j} = \frac{(2\pi)^3}{(-i)^s} \left[ \frac{\partial}{\partial k_{i_1}} \frac{\partial}{\partial k_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial k_{i_s}} m_j(\mathbf{k}) \right]_{\mathbf{k}=0}. \quad (49)$$

То есть эти величины играют роль «коэффициентов разложения» по  $\mathbf{k}$  в соотношении, аналогичном (39), но разложение ведется не по степеням  $\mathbf{r}$ ,

а по степеням  $k$ . В этом смысле мультипольные моменты соответствуют «длинноволновому» приближению в разложении поля намагниченности  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , а коэффициенты  $Q_{j i_1 i_2 \dots i_s}$ , напротив, «коротковолновому» приближению того же поля (ср. [22]). Если символом  $l_0$  обозначить порядок величины линейного размера агрегата, то  $T_{i_1 i_2 \dots i_s j}$  можно оценить как  $l_0^s \mu_0$ , а  $Q_{j i_1 i_2 \dots i_s}$  — как  $\mu_0 / l_0^s$ , что лишний раз подчеркивает отмеченный выше смысл этих величин.

**2.5. Пример: ромбический агрегат.** В качестве простого примера снова рассмотрим плоский агрегат, состоящий из четырех частиц и имеющий форму ромба с длинами диагоналей  $2l_1$  (по оси  $x$ ) и  $2l_2$  (рис.3). Исходная магнитная конфигурация агрегата предполагается известной, то есть считается известной ориентация магнитных моментов частиц  $\mathbf{m}_a$  ( $a = 1, \dots, 4$ ), что составляет 12 переменных. В качестве примера конфигурации укажем вихревую ориентацию диполей (рис.4), которая соответствует основному состоянию агрегата, то есть глобальному минимуму энергии дипольного взаимодействия в отсутствие магнитного поля. Чтобы перейти к описанию состояний с помощью мультипольных моментов, следует учесть, что радиусы-векторы частиц  $\mathbf{r}_a$  линейно зависимы. Поэтому, хотя моменты нулевого и первого порядка по  $\mathbf{r}$  как раз содержат 12 переменных, некоторые из них оказываются линейно зависимыми и поэтому необходимо привлекать моменты второго порядка (но не выше, так как мы ограничиваемся моментами низшего порядка).

Таким образом, далее будут рассмотрены тензоры  $T_j, T_{i,j}, T_{i_1 i_2 j}$ , определенные общей формулой (36). В целях упрощения записи будем обозначать греческими индексами декартовы компоненты тензоров в плоскости агрегата. При выборе осей, показанном на рис.3, отличной от нуля будет лишь часть компонент тензоров  $T_{i \dots j}$ , которые можно записать в принятых обозначениях как  $T_j, T_{\alpha j}$  и  $T_{\alpha \beta j}$ . В дальнейшем также удобно использовать для этих величин

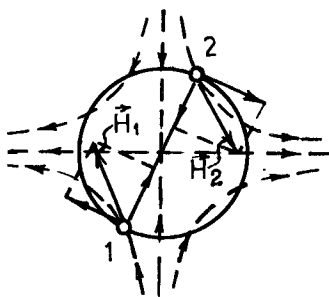


Рис.4. Двухчастичный агрегат 1—2 находится в неоднородном магнитном поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  (потенциальном и соленоидальном); силовые линии поля показаны пунктиром. Векторы  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  изображают значения поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в точках расположения частиц (действующие поля). Окружность показывает силовую линию действующего поля  $\mathbf{H}'(\mathbf{r})$

краткую векторную форму записи по индексу  $j$ , то есть обозначать их как  $T$ ,  $T_\alpha$  и  $T_{\alpha\beta}$  соответственно. Используя формулы (36), легко найти, что в рассматриваемом примере они имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} T &= \mu = m_1 + m_2 + m_3 + m_4, \\ T_1 &= l_1(m_1 - m_3), \quad T_2 = l_2(m_2 - m_4), \\ T_{11} &= l_1^2(m_1 + m_3), \quad T_{22} = l_2^2(m_2 + m_4), \quad T_{12} = T_{21} = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Как можно установить, между этими векторами существует линейная зависимость вида

$$l_2^2 T_{11} + l_1^2 T_{22} - l_1^2 l_2^2 T = 0.$$

Мультипольные моменты  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $\kappa$ , которые являются неприводимыми частями тензора  $T_{i,j}$ , в данном случае оказываются линейно зависимыми, так как из девяти компонент этого тензора отличны от нуля (и независимы) только шесть. Чтобы получить набор независимых мультиполей, сформируем из компонент тензора  $T_{\alpha j}$  двумерный тензор (кратко: 2-тензор) второго ранга  $T_{\alpha\beta}$  и 2-вектор  $T_{\alpha z}$ . Из 2-тензора  $T_{\alpha\beta}$  можно выделить два 2-скаляра:

$$\sigma = \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}), \quad \tau_z = \frac{1}{2}(T_{12} + T_{21}). \tag{51}$$

Учитывая также, что  $x$ - и  $y$ -компоненты тороидного момента пропорциональны компонентам 2-вектора  $T_{\alpha z}$ , в качестве независимых моментов можно выбрать следующие шесть величин: 1) скаляр  $\sigma$ ; 2) тороидный момент агрегата  $\tau$  с компонентами  $\left(\frac{1}{2}T_{23}, -\frac{1}{2}T_{13}, \frac{1}{2}(T_{12} - T_{21})\right)$  и 3) неприводимый (то есть симметричный и бесследовый) 2-тензор второго ранга  $\kappa_{\alpha\beta}$  («двумерный» квадрупольный момент), причем

$$\kappa_{11} = -\kappa_{22} = \frac{1}{2}(T_{11} - T_{22}), \quad \kappa_{12} = \kappa_{21} = \frac{1}{2}(T_{12} + T_{21}).$$

Во втором порядке по  $g$  независимыми являются только три из двадцати семи компонент тензора  $T_{i_1 i_2}$ . Как раз три компоненты имеет дипольный радиус

$$\mu_2 = \sum_a r_a^2 m_a. \tag{52}$$

Однако, как легко проверить, в том случае, когда ромб вырождается в квадрат, момент  $\mu_2$  оказывается пропорциональным полному дипольному моменту агрегата  $\mu$  и таким образом эта величина перестает быть независимой переменной. Другой возможный вектор, содержащий под знаком суммы по  $a$  выражения вида  $g_a (r_a m_a)$ , имеет только две компоненты вместо необходимых трех и поэтому также не может нас удовлетворить. Аналогичным образом могут быть проанализированы и все другие моменты  $T_{LM}^{(sl)}$  с  $s = 2$ . Как оказывается, требуемым условиям удовлетворяет лишь тензор второго ранга  $T_{2M}^{(22)}$  (тороидный квадруполь), который в данном случае имеет три независимые компоненты. В декартовом виде этот тензор представляется в виде суммы

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \sum_a \{x_{ai} [r_a m_a]_k\}, \quad (53)$$

где фигурные скобки обозначают симметризацию по индексам  $i$  и  $k$ :  $\{a_{ik}\} = \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki})$ . Нетрудно показать, что для ромбического агрегата все три диагональные компоненты этого тензора равны нулю, а недиагональные выражаются через  $T_{\alpha\beta j}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{1}{2} (T_{223} - T_{113}), \\ \gamma_{13} = \gamma_{31} &= \frac{1}{4} T_{112}, \quad \gamma_{23} = \gamma_{32} = -\frac{1}{4} T_{221}. \end{aligned} \quad (54)$$

Таким образом, магнитное состояние ромбического агрегата описывается следующими независимыми мультипольными моментами (мультипольными координатами состояния):  $\mu, \sigma, \tau, \kappa_{\alpha\beta}, \gamma_{ik}$ .

В качестве примера вычислим мультипольные координаты для двух состояний — основного состояния (вихревое намагничивание) и однородно намагниченного агрегата (возникающего при наличии очень сильного поля). В основном состоянии (рис.3) магнитные моменты имеют компоненты:  $m_1 = -m_3 = (0; \mu_0; 0)$ ,  $m_2 = -m_4 = (-\mu_0; 0; 0)$ . Как можно видеть из (50), в этом случае векторы  $T$  и  $T_{\alpha\beta}$  обращаются в нуль, а векторы  $T_\alpha$  имеют компоненты:  $T_1 = (0; 2l_1 \mu_0; 0)$ ,  $T_2 = (-2l_2 \mu_0; 0; 0)$ . Поэтому, в соответствии с приведенными выше формулами, мультипольные координаты этого состояния имеют следующие значения:  $\mu = 0, \sigma = 0, \tau = \mu_0 (l_1 + l_2); \kappa_{11} = \kappa_{22} = 0; \kappa_{12} = \mu_0 (l_1 - l_2), \gamma_{ik} = 0$ . Отметим, что для симметричного агрегата, когда  $l_1 = l_2$ , квадрупольный момент обращается

в нуль и вектор  $\tau$  становится единственной величиной, описывающей это состояние.

В сильном магнитном поле, ориентированном вдоль некоторого единичного вектора  $\mathbf{h}$ , магнитные моменты частиц направлены по полю и могут быть записаны в виде:  $\mathbf{m}_a = \mu_0 \mathbf{h}$  (состояние однородного намагничивания). В этом состоянии векторы  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}_\alpha$  и  $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$  согласно (50) имеют следующие значения:  $\mathbf{T} = 4\mu_0 \mathbf{h}$ ;  $\mathbf{T}_\alpha = 0$ ;  $T_{11} = 2l_1^2 \mu_0 \mathbf{h}$ ;  $T_{22} = 2l_2^2 \mathbf{h}$ , при этом  $\mu = 4\mu_0 \mathbf{h}$ ,  $\sigma = 0$ ;  $\tau = 0$ ;  $\kappa_{\alpha\beta} = 0$ , а тензор тороидно-квадрупольного момента в соответствии с (54) имеет компоненты:

$$\gamma_{12} = (l_2^2 - l_1^2) \mu_0 h_z, \quad \gamma_{13} = \frac{1}{2} l_1^2 \mu_0 h_y, \quad \gamma_{23} = -\frac{1}{2} l_2^2 \mu_0 h_x.$$

Для описания агрегата в терминах «токовых» магнитных координат, задаваемых тензорами  $Q_{j_1 \dots j_s}$ , исходим из уравнения (39), связывающего магнитные моменты  $\mathbf{m}_a$  и тензоры  $Q_{j_1 \dots j_s}$ . Как и в случае мультипольного описания, будем использовать греческие индексы для обозначения координат частиц в плоскости агрегата. Независимыми переменными будем считать вектор  $Q_j$  (три переменных), тензор  $Q_{j_1}$ , который имеет только шесть независимых компонент  $Q_{j\alpha}$  или, в «векторном» виде —  $Q_\alpha$  (ср. с использованными выше обозначениями:  $T_{ij} \rightarrow T_{aj} \rightarrow T_\alpha$ ), и, наконец, неприводимый тензор второго ранга  $f_{ik}$ , вложенный в тензор третьего ранга  $Q_{j_1 i_2}$  следующим образом:

$$Q_{jik} = \frac{1}{4} (e_{jil} f_{kl} + e_{jkl} f_{il}). \quad (55)$$

При этом считается, что диагональные элементы тензора  $f_{ik}$  равны нулю, то есть он имеет только три независимые компоненты (отметим, что связь между компонентами тензоров  $Q_{j_1 i_2}$  и  $f_{ik}$  полностью аналогична связи между рассмотренными выше тензорами  $T_{i_1 i_2}$  и  $\gamma_{ik}$ ). Таким образом, мы определили двенадцать новых переменных, задающих магнитное состояние агрегата.

Связь между новыми и старыми переменными может быть записана в виде

$$\mathbf{m}_a = \mathbf{Q} + Q_\beta x_{a\beta} + \frac{1}{2} [r_a f_\beta] x_{a\beta}. \quad (56)$$

Обратные соотношения — между новыми и старыми переменными — можно найти, подставляя в (56) явные значения координат частиц рассматриваемого агрегата и решая получившуюся систему уравнений относительно  $Q$ ,  $Q_\beta$  и  $f_\beta$ . В результате получим

$$Q = \hat{a}(m_1 + m_3) + \hat{b}(m_2 + m_4),$$

$$Q_1 = \frac{1}{2l_1}(m_1 - m_3), \quad Q_2 = \frac{1}{2l_2}(m_2 - m_4), \quad (57)$$

$$f_{ik} = C_{ik}(m_{1j} + m_{3j} - m_{2j} - m_{4j}), \quad i \neq k,$$

где  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  — диагональные матрицы, имеющие вид:  $\text{diag } \hat{a} = \left(\frac{1}{2}; 0; l_2^2/2(l_1^2 + l_2^2)\right)$  и  $\text{diag } \hat{b} = \left(0; \frac{1}{2}; l_1^2/2(l_1^2 + l_2^2)\right)$ . В последнем из равенств в (57) индекс  $j$  в правой части — дополнительный к индексам  $i$  и  $k$ , т.е., если, например,  $i = 1, k = 2$ , то  $j = 3$  и т.д.; коэффициенты  $C_{ik}$  имеют значения:  $C_{12} = -1/(l_1^2 + l_2^2)$ ,  $C_{13} = 1/l_1^2$ ,  $C_{23} = 1/l_2^2$ . С помощью равенств (57) нетрудно найти значения магнитного заряда и тока, которые являются неприводимыми частями (скалярной и векторной) тензора  $Q_{j\alpha}$ :

$$e_m = \frac{1}{3}(Q_{11} + Q_{22}),$$

$$i = \frac{1}{2c} \left( -Q_{32}; \frac{1}{2}Q_{31}; \frac{1}{2}(Q_{12} - Q_{21}) \right). \quad (58)$$

В качестве примера укажем значения найденных параметров для основного состояния агрегата (вихревое распределение магнитных моментов):  $Q_1 = m_1/l_1$ ;  $Q_2 = m_2/l_2$ ;  $Q = 0$ ;  $f_\alpha = 0$  и для состояния однородного намагничивания:  $Q = \mu_0 h$ ;  $Q_1 = Q_2 = 0$ ;  $f_\alpha = 0$ .

Рассмотрим, наконец, приближенные значения дипольного заряда и тока, которые могут быть вычислены с помощью процедуры, описанной в п.3.3. Ограничиваясь простейшим приближением, представим распределение намагниченности в виде (25), причем, в силу линейной зависимости координат частиц плоского агрегата, оставляем только две компоненты радиуса-вектора  $x, y$ , и в результате получим

$$m(\mathbf{r}) = b_0 + b_\alpha x_\alpha \quad (59)$$

с тем же смыслом индекса  $\alpha$ , что и выше в этом разделе. Для определения коэффициентов  $b_0, b_\alpha$ , как это описано в п.3.3, умножим уравнение (59) справа и слева на  $x_\beta$ , а затем положим  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$  и просуммируем по  $a$ . Тензор

$N_{\alpha j}$ , который согласно (38) мы получим в левой части, в точности совпадает с введенным выше в равенстве (51) тензором  $T_{\alpha j}$ . Матрица  $L_{ik}$  в данном случае превращается в матрицу второго порядка  $L_{\alpha\beta}$  и в выбранной системе координат (рис.3) оказывается диагональной, в результате общее решение (32) можно записать в виде

$$\mathbf{b}_0 = \mu/4; \quad \mathbf{b}_\alpha = L_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{T}_\beta = \mathbf{Q}_\alpha, \quad (60)$$

где учтено, что  $L_{11}^{-1} = 1/2l_1^2$ ,  $L_{22}^{-1} = 1/2l_2^2$ ,  $L_{12}^{-1} = L_{21}^{-1} = 0$ , а также использован явный вид (51) и (56) тензоров  $T_\alpha$  и  $Q_\alpha$ . Значения дипольного заряда и тока в данном случае совпадают с приведенным выше точным выражением (58); для основного состояния они приведены в п.2.3.

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АГРЕГАТОВ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Введенные в предыдущем разделе параметры магнитного состояния агрегатов, состоящих из магнитных диполей, можно использовать для описания их взаимодействия с внешним магнитным полем и между собой. Как и ранее, будем считать заданными магнитную и пространственную конфигурации агрегата, то есть мы предполагаем известными местоположение  $\mathbf{r}_a$  и ориентацию магнитного момента  $\mathbf{m}_a$  каждого из диполей. Энергия взаимодействия системы диполей с неоднородным внешним полем  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  может быть записана в виде

$$\mathcal{E} = - \sum_a (\mathbf{m}_a \mathbf{H}_a), \quad (61)$$

где  $\mathbf{H}_a$  обозначает поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r}_a$ , то есть  $\mathbf{H}_a = \mathbf{H}(\mathbf{r}_a)$ . В дальнейшем мы будем называть совокупность векторов  $\{\mathbf{H}_a\}$  конфигурацией магнитного поля. Очевидно, что конфигурация поля зависит не только от исходной функции  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , но также и от расположения диполей. Можно также сказать, что  $\{\mathbf{H}_a\}$  — это те поля, которые реально действуют на частицы агрегата («действующие поля»).

**3.1. Параметры конфигурации приложенного поля.** Для интегрального описания совокупности векторов  $\{\mathbf{H}_a\}$  могут быть использованы величины, аналогичные тем, которые были введены в предыдущем разделе для описания магнитной конфигурации  $\{\mathbf{m}_a\}$ . К числу этих величин относятся: 1) моменты неоднородного поля, которые аналогичны мультипольным моментам и 2) производные поля по координатам, ана-



логичные дипольным зарядам и токам. Общая формула для момента порядка  $s$  имеет вид (ср. (36))

$$A_{i_1 i_2 \dots j} = \sum_a x_{a i_1} x_{a i_2} \dots x_{a i_s} H_{a j}. \quad (62)$$

Простейшими моментами — моментами первого порядка — являются: скалярный момент  $\psi$  (аналогичный моменту  $\sigma$ , определенному выражением (7)):

$$\psi = \sum_a (r_a H_a), \quad (63)$$

векторный момент (аналогичный тороидному моменту  $\tau$  (6)):

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_a [r_a H_a], \quad (64)$$

и тензорный момент (аналог квадрупольного момента  $\kappa_{ik}$  (5)):

$$\beta_{ik} = \frac{1}{2} \sum \left( x_{a i} H_{a k} + x_{a k} H_{a i} - \frac{2}{3} (r_a H_a) \delta_{ik} \right). \quad (65)$$

Отметим, что объемной плотностью векторного момента  $\alpha$  является векторный потенциал магнитного поля, а скаляра  $\psi$  — скалярный потенциал, что аналогично свяжем моментов поля намагниченности с его потенциалами (см. текст после формул (17) и (18)).

Так же, как и в случае мультипольных моментов  $T_{i_1 \dots i_j}$ , не все моменты поля  $A_{i_1 \dots i_j}$  являются независимыми величинами. Поскольку координаты «состояния поля»  $\{H_a\}$  включают конечное число переменных (их число равно  $3n$ ), то среди всех компонентов тензоров  $A_{i_1 \dots i_j}$  также только  $3n$  независимых, а все остальные могут быть выражены через них. Используя, как и в п.3.4, обобщенное обозначение для координат поля  $H_K$ ,  $K = 1, \dots, 3n$ , а для отобранных независимых моментов — обозначение  $A_J$ , мы можем написать связь между ними в виде

$$A_J = \sum_K U_{JK} H_K, \quad (66)$$

где вид матрицы  $U_{JK}$  можно установить, сравнивая выражения (62) и (66) для данных значений  $A_J$ . В качестве  $A_J$  выбирают моменты низкого порядка.

Значения производных поля порядка  $s$  также могут служить для параметризации полевой конфигурации  $\{H_a\}$ . Подобно коэффициентам

$Q_{j_1 \dots j_s}$ , которые описывают магнитную конфигурацию агрегата, эти величины определены как коэффициенты в следующем выражении (ср. (39), (40)):

$$H_{aj} = G_j + G_{j_1} x_{a_1} + G_{j_1 i_2} x_{a_1} x_{a_2} + \dots + G_{j_1 \dots i_s} x_{a_1} \dots x_{a_s}. \quad (67)$$

Как и в рассмотренном выше случае разложения поля намагниченности  $\{m_a\}$ , здесь предполагается, что в сумме (67) содержится конечное число членов. Если подобно тому, как это сделано в (40), выделить из каждого тензора  $G_{j_1 \dots}$  его неприводимые части — тензоры  $G_{LM}^{(s)}$ , то первые члены суммы (67) можно записать в виде

$$H_a = G^{(0)} + G^{(1)} r_a + [G^{(1)}] r_a + \dots, \quad (68)$$

где мы использовали декартовы компоненты неприводимых тензоров и оставили только один верхний индекс, который показывает порядок  $s$ .

Следует отметить, что хотя исходное поле  $H(r)$  удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} H = 0; \operatorname{rot} H = 0, \quad (69)$$

это не означает, что скаляр  $G^{(1)}$  и вектор  $G^{(1)}$  в уравнении (68), которые имеют смысл первых производных поля по координатам (ср. (44)), равны нулю. Дело в том, что действующее поле  $H'(r)$ , которое определяется по значениям  $\{H_a\}$  исходного поля в точках  $r_a$ , может существенно отличаться от самого этого поля  $H(r)$ . Так, например, на рис. 4 пунктиром показаны силовые линии исходного магнитного поля  $H(r)$ , которое в соответствии с уравнениями Максвелла (69) является одновременно соленоидальным и потенциальным. Если же в этом поле находится двухчастичный агрегат, расположенный так, как это показано на рис. 4, то конфигурация поля, которая в данном случае задается двумя векторами  $H_1$  и  $H_2$ , такова, что действующему полю  $H'(r)$ , которое может быть найдено по значениям  $H_1$  и  $H_2$ , естественно приписать вихревую структуру.

Силовые линии этого поля представляют собой концентрические окружности. Сам способ вычисления действующего поля  $H'(r)$  вполне аналогичен описанному в п. 2.3 способу вычисления поля намагниченности  $m(r)$ . Это поле можно также получить, считая, что точное выражение (67) справедливо не только в точках  $r_a$ , но и во всем объеме, занятом частицами агрегата.

3.2. Энергия агрегата во внешнем поле. Возвращаясь к выражению для энергии агрегата во внешнем поле (61), подставим вместо  $H_a$  разло-

жение (68). Если учесть определение мультипольных моментов (5) — (7), то выражение (61) в этом случае может быть переписано в виде

$$\xi = -\mu G^{(0)} - \sigma G^{(1)} - (\tau G^{(1)}) - \kappa_{ik} G_{ik}^{(1)} - \dots \quad (70)$$

Аналогичным образом, используя представление (40) для магнитных моментов  $m_a$ , которое мы здесь представим в декартовом виде, выражение для энергии (61) можно записать в эквивалентной форме как

$$\xi = -\mu \langle \mathbf{H} \rangle - e_m \psi - \frac{1}{c} \mathbf{j}_m \alpha - p_{ik} \beta_{ik} - \dots, \quad (71)$$

где

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{n} \sum_a \mathbf{H}_a.$$

Таким образом, мы использовали введенные параметры для вычисления энергии частиц, причем, как видно из сравнения полученных формул, между параметрами имеется своего рода дополнтельность: если для описания магнитной конфигурации взяты интегральные параметры, то для конфигурации поля естественно использовать дифференциальные, и наоборот.

**3.3. Разложение поля по параметру  $l/L$ .** До сих пор в изложении не было сделано каких-либо приближений. Будем теперь предполагать, что поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  имеет масштаб неоднородности  $L$  много больший, чем размер агрегата  $l$ , т.е. имеет место неравенство

$$l \ll L. \quad (72)$$

При выполнении этого условия исходное неоднородное поле можно разложить в степенной ряд

$$H(\mathbf{r}) = H(0) - (\mathbf{r}\nabla) H(0) + \dots + \frac{(-1)^s}{s!} (\mathbf{r}\nabla)^s H(0) + \dots, \quad (73)$$

где производные вычисляются в точке  $\mathbf{r} = 0$  (т.е. в центре агрегата). В дальнейшем будем использовать для этих величин краткое обозначение

$$H_{i_1 i_2 \dots i_s}^{(s)} = \frac{1}{s!} \left[ \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \dots \nabla_{i_s} H_j(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r}=0}. \quad (74)$$

Так как поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнениям Максвелла (69), то, как легко проверить, тензоры  $H_{i_1 \dots i_s}^{(s)}$  во-первых, оказываются симметричными по всем своим индексам, а не только по индексам  $i_1 \dots i_s$ , как это следует из их определения (74). Во-вторых, свертка по индексу  $j$  и любому из индексов  $i_k$  равна нулю, т.е. имеют место соотношения

$$H_{i_1 i_2 \dots i_j}^{(s)} = H_{j i_2 \dots i_s i_1}^{(s)}; \quad H_{j i_2 \dots i_j}^{(s)} = 0. \quad (75)$$

Отсюда следует, что все тензоры второго ранга  $H_{j i_1 \dots i_s}^{(s)}$  являются неприводимыми. Используя обозначение (74), разложение для поля (63) можно переписать в виде

$$H_j(\mathbf{r}) = H_j^{(0)} - H_{j i_1}^{(1)} x_{i_1} + H_{j i_1 i_2}^{(2)} x_{i_1} x_{i_2} + \dots \quad (76)$$

Подставляя полученное выражение (76) в выражение для энергии (61), можно преобразовать его к виду

$$\xi = -\mu_j H_j^{(0)} - \kappa_{jk} H_{jk}^{(1)} - \lambda_{jkl} H_{jkl}^{(2)} - \nu_{ijkl} H_{ijkl}^{(3)} - \dots, \quad (77)$$

где  $\kappa_{jk}$  — тензор квадрупольного момента агрегата, а  $\lambda_{jkl}, \nu_{ijkl}, \dots$  — неприводимые тензоры третьего, четвертого, ... рангов, соответствующие октупольному, гексадекапольному и другим мультипольным моментам более высокого ранга. Таким образом, в разложении (77) отсутствуют моменты тороидного ряда. Отсюда, казалось бы, следует, что нечетные моменты вообще не играют роли в описании взаимодействия агрегатов магнитных частиц с внешним полем. Однако, как мы увидим, в действительности это не так.

Дело в том, что агрегаты магнитных частиц содержат конечное число диполей и поэтому число их магнитных степеней свободы ограничено (в отличие, например, от идеализированного тороидного момента, рассматривавшегося в работах [20]—[22], который в этом смысле имеет бесконечное число степеней свободы, так как его можно представлять себе как, например, непрерывное распределение диполей по кольцу). Как было описано в п.2.4, в этом случае мультипольные моменты оказываются линейно зависимыми, т.е. если выбрать некоторую систему независимых моментов, то все остальные будут через них линейно выражаться. Если в число независимых моментов включен тороидный момент (что является естественным, так как с помощью этого момента наиболее просто описывается основное состояние агрегата), то зависимые моменты будут выражаться через тороидный момент, и таким образом он войдет в выражение для энергии агрегата во внешнем поле.

**3.4. Пример: квадратный агрегат во внешнем поле.** В качестве примера рассмотрим агрегат из четырех частиц в форме квадрата, который находится в основном магнитном состоянии, показанном на рис.3. В соответствии с результатами п.2.5 в качестве переменных состояния этого агрегата могут быть выбраны следующие величины:  $\mu, \sigma, \tau, \kappa_{\alpha\beta}$  (всего

двенадцать параметров). Но в основном состоянии отличен от нуля только тороидный момент  $\tau$ , причем обращение уравнения связи (38) между старыми ( $m_a$ ) и новыми ( $\mu, \sigma, \tau, \kappa_{\alpha\beta}$ ) переменными в данном случае приводит к соотношению

$$m_a = \frac{1}{2l^2} [\tau r_a], \quad (78)$$

где  $2l$  — диагональ квадрата и где согласно результатам п.3.5  $\tau = 2l\mu_0 e_z$  (здесь  $e_z$  — единичный вектор, направленный по оси  $z$  в соответствии с выбором осей координат, показанным на рис.3). С другой стороны, как легко проверить, в данном магнитном состоянии среди моментов дипольного ряда отличен от нуля момент четвертого порядка  $v_{ijkl}$ , симметричный по всем индексам, который определен соотношением

$$v_{ijkl} = \sum_a \{x_{ai} x_{aj} x_{ak} m_{al}\}, \quad (79)$$

где фигурные скобки обозначают операцию симметризации тензора по всем индексам. Поскольку момент  $v_{ijkl}$  оказывается зависимым, он определенным образом выражается через выбранные независимые моменты (мы не приводим здесь общих формул этой связи), а в рассматриваемом состоянии он выражается только через тороидный момент, как единственный отличный от нуля. Подставляя в (79) вместо векторов  $m_a$  их выражение через тороидный момент (78) и суммируя по координатам диполей, показанных на рис.3, получаем

$$v_{ijkl} = \tau l^2 (\{e_{xi} e_{xj} e_{xk} e_{yl}\} - \{e_{yi} e_{yj} e_{yk} e_{xl}\}), \quad (80)$$

где  $e_x$  и  $e_y$  — единичные векторы, направленные по осям системы координат (рис.3). Подставляя (80) в (76), окончательно найдем

$$\xi = -(\tau G^{(1)}), \quad (81)$$

где  $G^{(1)}$  — эффективный вихрь магнитного поля, который в рассматриваемом приближении равен

$$G_x^{(1)} = G_y^{(1)} = 0; \quad G_z^{(1)} = l^2 (H_{xxx}^{(3)} - H_{xyy}^{(3)}), \quad (82)$$

причем компоненты тензора  $H_{ijkl}^{(3)}$  указаны в системе осей  $e_x, e_y, e_z$ .

Отметим, что аналогичный результат можно получить, если вместо интегрального момента  $\tau$  использовать дипольную плотность тока  $j_m$ . Энергия взаимодействия в этом случае может быть записана в виде

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}(\mathbf{j}_m \alpha), \quad (83)$$

где  $-\mathbf{j}_m = c \tau / l^2$ , а  $\alpha = \mathbf{G}^{(1)} / l^2$ . Появление производных высокого порядка в выражении (82) для вихря действующего магнитного поля обусловлено здесь высокой симметрией агрегата. Например, для менее симметричного агрегата в форме ромба эффективный вихрь выражается через производные первого порядка  $H_{ji}^{(1)}$ . Таким же путем может быть рассмотрен, в частности, не только эффективный вихрь поля, но и эффективная расходимость (скаляр  $\psi$ ).

**3.5. Разложение параметров конфигурации поля.** В общем случае производные действующего поля  $G_{j i_1 \dots i_s}$  представляются в виде разложения по степеням параметра  $l/L$ . Общая процедура таких разложений состоит в следующей последовательности действий. Сначала, с помощью разложения (76), следует найти значения действующего поля в точках  $\mathbf{r}_a$ . Затем, используя формулы (62) и (67), необходимо провести вычисление искомым параметров. Этим путем легко могут быть найдены интегральные моменты поля  $A_{i_1 \dots i_j}$ . Действительно, в соответствии с (62) и (76) получим

$$A_{i_1 \dots i_j} = H_j^{(0)} \sum a x_{a i_1} \dots x_{a i_s} + H_{j k_1}^{(1)} \sum a x_{a i_1} \dots x_{a i_s} x_{a k_1} + \dots \quad (84)$$

Для вычисления «дифференциальных» параметров  $G_{j i_1 \dots i_k}$  приходится решать систему уравнений (67) с  $3l$  неизвестными  $G_{j i_1 \dots i_k}$ , которую в данном случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} & G_j + G_{j i_1} x_{a i_1} + \dots + G_{j i_1 \dots i_s} x_{a i_1} \dots x_{a i_s} = \\ & = H_j^{(0)} + H_{j k_1}^{(1)} x_{a k_1} + \dots + H_{j k_1 \dots k_p}^{(p)} x_{a k_1} \dots x_{a k_p}. \end{aligned} \quad (85)$$

Хотя, на первый взгляд, правая и левая части этой системы совпадают (с точностью до обозначений градиентов поля), в действительности число слагаемых в левой части определяется числом независимых параметров, которые выбраны для описания конфигурации магнитного поля, а число членов в правой части определяется выбранной степенью приближения по параметру разложения  $l/L$ . Поэтому, несмотря на то, что тензоры градиентов поля  $H_{j k_1 \dots k_p}^{(p)}$  симметричны по всем индексам, тензоры эффективного градиента  $G_{j i_1 \dots i_k}$  в общем случае оказываются симметричными

только по индексам  $i_1, \dots, i_k$ , как это следует из их определения. То же самое относится и к сверткам тензоров  $G_{j_1 \dots i_k}$  по индексу  $j$  и какому-нибудь из индексов  $i$ : в общем случае они оказываются отличными от нуля. Отсюда следует, в частности, что тензор второго ранга  $G_{j_1}$  может содержать несимметричную часть и может иметь не равную нулю свертку. Это означает, что данная конфигурация магнитного поля обладает эффективным вихрем  $G^{(1)}$  и эффективной дивергенцией  $G^{(1)}$ , хотя, как следует из уравнений Максвелла, исходное статическое магнитное поле является потенциальным и соленоидальным. Возможность такого решения качественно показана на рис.4 и продемонстрирована с помощью прямых вычислений для квадратного агрегата в основном состоянии.

Если по каким-либо причинам решение системы уравнений (85) представляет трудности, то для вычисления действующего поля  $H'(r)$  можно также использовать приближенный метод, так, как это было описано в п.2.3 применительно к магнитной конфигурации  $\{m_a\}$ .

**3.6. Выбор представления магнитной конфигурации.** Для более полного понимания представляется полезным сформулировать полученные в этом разделе результаты с помощью обозначений Дирака [46]. Магнитное состояние агрегата будем описывать  $3l$ -мерным вектором (матричной строкой)  $\langle M |$  с компонентами  $M_j$ , а конфигурацию поля — вектором (матричным столбцом)  $| H \rangle$  с компонентами  $H_j$ . «Наблюдаемая» величина — энергия взаимодействия агрегата с полем — может быть записана в виде так называемого «полного скобочного выражения»

$$\mathcal{E} = - \langle M | H \rangle. \quad (86)$$

Для вектора состояния магнитных диполей  $\langle M |$  может быть использовано мультипольное «представление»  $\langle T |$ , которое связано с  $\langle M |$  невырожденным линейным преобразованием:

$$\langle M | = \langle T | \hat{U}. \quad (87)$$

Подстановка (87) в выражение (86) позволяет представить энергию взаимодействия агрегата с магнитным полем в виде

$$\mathcal{E} = - \langle T | G \rangle, \quad (88)$$

где введен вектор конфигурации магнитного поля в новом представлении (представление поля с помощью эффективных производных)

$$| G \rangle = \hat{U} | H \rangle. \quad (89)$$

Как уже было сказано, вместо системы моментов  $\langle T |$  может быть выбрана другая система мультиполей  $\langle T' |$ , что на этом языке означает выбор другого представления состояния:

$$\langle T | = \langle T' | \hat{U}', \quad (90)$$

где  $\hat{U}'$  — некоторая невырожденная матрица. Сам выбор системы моментов для описания состояния ( $\langle T |$  или  $\langle T' |$ ), с формальной точки зрения, может быть сделан совершенно произвольно. В частности, эта система может и не включать в себя моменты тороидного ряда. Однако, как будет показано далее, само магнитное состояние агрегата не может быть произвольным: оно определяется минимумом энергии взаимодействия магнитных диполей. При этом, как уже говорилось, основному состоянию соответствует глобальный минимум энергии, а остальным («стационарным») состояниям — локальные минимумы. Понятно, что описание магнитной конфигурации в представлении стационарных состояний («энергетическом представлении») является наиболее естественным. Поэтому, исходя из этих соображений, среди всех возможных мультипольных представлений магнитного состояния —  $\langle M |, \langle T |, \langle T' |, \dots$  предпочтительным является то, которое наиболее близко к основному состоянию. С этой точки зрения выбор «тороидного представления» (т.е. включение в систему мультиполей тороидного момента) оправдан тем, что в основном состоянии взаимодействующие магнитные частицы стремятся образовать структуры с замкнутым магнитным потоком, что как раз означает наличие в этом состоянии тороидного момента.

Разложение вектора действующего поля  $|H\rangle$  по малому параметру  $l/L$ , записанное в форме (76), также можно интерпретировать как некоторое линейное преобразование переменных. Действительно, полагая в (76)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$ , слева мы получим векторы  $\mathbf{H}_a$ , а все уравнение можно интерпретировать как преобразование от переменных  $\mathbf{H}_a$  к набору переменных  $H_j^{(0)}, H_{j_1}^{(1)}, \dots, H_{j_1 j_2 \dots j_p}^{(p)}$ . Как нетрудно подсчитать, число этих переменных равно

$$\nu = \sum_{k=0}^p (2k+3) = (p+1)(p+3).$$

Таким образом, учитывая члены разложения вплоть до членов порядка  $p$ , мы можем параметризовать поле  $\nu$ -мерным вектором градиентов  $|H^{(p)}\rangle$ . Соотношение (76) (с  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a$ ) следует рассматривать как линейную связь



между  $3l$ -мерным вектором  $|H\rangle$  и  $\nu$ -мерным вектором  $|H^{(p)}\rangle$ , которую можно записать в виде

$$|H\rangle = \hat{W}|H^{(p)}\rangle, \quad (91)$$

где матрица  $W$  неунитарна и, вообще говоря, не квадратная и даже может быть вырожденной. Подставив полученное соотношение в уравнение (89), получим

$$|G\rangle = \hat{U}\hat{W}|H^{(p)}\rangle. \quad (92)$$

Это соотношение в символическом виде представляет уравнение (85). Учитывая перечисленные выше свойства матриц  $\hat{W}$  и  $\hat{U}$ , трудно ожидать соответствия между градиентами действующего поля  $|G\rangle$  и градиентами  $|H^{(p)}\rangle$ . В частности, наличие некоторых компонент у одного не предполагает подобных компонент у другого, и наоборот.

Совершенно аналогичные рассуждения могут быть проведены и в том случае, когда в качестве переменных состояния используются «производные» поля намагничённости — тензоры  $Q_{j_1, \dots, j_s}$ . Вектор состояния в этом представлении мы обозначим символом  $\langle Q|$ . Связь между представлениями  $\langle M|$  и  $\langle Q|$  также задается некоторой невырожденной матрицей  $\hat{V}$ :

$$\langle M| = \langle Q|\hat{V}. \quad (93)$$

Роль параметров поля в этом случае будут играть его интегральные моменты, причем энергия  $\mathcal{E}$  может быть записана в виде

$$\mathcal{E} = -\langle Q|A\rangle, \quad (94)$$

где обозначено

$$|A\rangle = \hat{V}|H\rangle. \quad (95)$$

Как и в случае мультиполей, выбор параметров состояния неоднозначен, а наиболее естественные параметры определяются из тех же соображений, что и в случае мультипольного представления.

**3.7. Поле «конечного» тороида на больших расстояниях.** Кроме рассмотренной задачи о выражении энергии агрегата во внешнем поле через введенные параметры, представляют интерес еще две задачи — вычисление поля агрегата на больших расстояниях и взаимодействие агрегатов между собой. Для решения первой задачи будем исходить из того, что магнитное поле системы точечных диполей может быть представлено в виде суммы

$$H(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{[3\mathbf{R}_a (m_a \mathbf{R}_a) - m_a \mathbf{R}_a^2]}{R_a^5}, \quad (96)$$

где вектор  $\mathbf{R}_a$  направлен из точки расположения  $a$ -го диполя в точку наблюдения, а вектор  $\mathbf{r}$  — из центра агрегата в точку наблюдения, причем  $\mathbf{R}_a = \mathbf{r} - \mathbf{r}_a$ , где, как и ранее,  $\mathbf{r}_a$  — вектор  $a$ -го диполя относительно центра агрегата. Формулу (96) можно также переписать в эквивалентном виде:

$$H(\mathbf{r}) = \sum_a (m_a \nabla_a) \nabla_a \frac{1}{R_a}, \quad (97)$$

где  $\nabla_a$  — оператор производной по компонентам вектора  $\mathbf{R}_a$ .

С формальной точки зрения формулы (96), (97) можно рассматривать как некоторую линейную функцию вектора состояния  $|M\rangle$ , которую можно записать в виде

$$H(\mathbf{r}) = \langle M | X(\mathbf{r}), \quad (98)$$

где  $|X(\mathbf{r})\rangle$  — некоторые  $3n$ -мерные векторы. Переходя в этом выражении к другому представлению состояния  $\langle M |$ , мы можем получить точное значение поля в точке  $\mathbf{r}$ , создаваемое независимыми мультиполями (в число которых мы предполагаем включенными и тороидные моменты).

Будем теперь считать, что расстояние от точки наблюдения до агрегата настолько велико, что выполняется неравенство  $r \gg r_a$ , и поэтому выражение для поля можно приближенно записать в виде ряда по степеням  $r_a/r$ :

$$H(\mathbf{r}) = \left\{ (\mu_k \nabla_k - \kappa_{ik} \nabla_i \nabla_k + \lambda_{ikl} \nabla_i \nabla_k \nabla_l - \nu_{ijkl} \nabla_i \nabla_j \nabla_k \nabla_l) \nabla \frac{1}{r}, \right. \quad (99)$$

где, как и в (77),  $\mu, \kappa, \lambda, \nu, \dots$  — симметричные тензоры; оператор  $\nabla$  обозначает дифференцирование по координатам вектора  $\mathbf{r}$ . Выражая эти тензоры через выбранные независимые мультипольные параметры, можно получить искомое выражение для магнитного поля на больших расстояниях.

В качестве конкретного примера снова рассмотрим четырехчастичный квадратный агрегат в основном состоянии. Используя полученное выше выражение (80) для компонент симметричного тензора четвертого ранга  $\nu_{ijkl}$  через компоненты тороидного момента (остальные тензоры —  $\mu, \kappa, \lambda$  — в этом случае равны нулю), после вычисления производных по координатам в (99), в первом исчезающем приближении получим

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{105}{r^6} \tau l^2 \left( \left( 3n_x^2 n_y - n_y^3 \right) \mathbf{e}_x - \left( 3n_x n_y^2 - n_x^3 \right) \mathbf{e}_y + \right. \\ \left. + 9n_x n_y \left( n_x^2 - n_y^2 \right) \mathbf{n} \right), \quad (100)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный по вектору  $\mathbf{r}$ . Таким образом, в данном случае поле тороидного момента убывает как  $1/r^6$ . В общем случае степень убывания поля зависит от формы агрегата.

**3.8. Тороидный агрегат в центре тороидной системы источников поля.** Другой асимптотический предел, также представляющий интерес, — это вычисление поля вблизи центра системы диполей. Эта задача представляет интерес в связи с необходимостью подбора источников, которые бы создавали магнитное поле заданной конфигурации. Будем представлять систему катушек с током или систему постоянных магнитов как некоторое распределение магнитных диполей  $\{m_a\}$ , и предположим, что агрегат из магнитных частиц находится в центре этого макроскопического «агрегата».

В рассматриваемом случае малым параметром разложения является отношение  $r/r_a$ , так как здесь  $r$  порядка размеров микроагрегата магнитных частиц ферросuspензии, то есть  $r \sim l$ , а  $r_a$  — это размер системы катушек с током ( $r_a \sim L$ ). Раскладывая правую часть выражения (96) в ряд по степеням малого параметра  $l/L$ , получим значение магнитного поля вблизи центра системы в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_a \left( 1 - (r \nabla_a') + \frac{1}{2!} (r \nabla_a')^2 + \dots \right) (m_a \nabla_a') \nabla_a' \frac{1}{r_a}, \quad (101)$$

где символ  $\nabla_a'$  обозначает дифференцирование по компонентам радиус-вектора  $\mathbf{r}_a$ . Сравнивая это разложение с общей формулой (76), можно видеть, что в данном случае тензор градиента магнитного поля в центре системы имеет вид

$$H_{j_1 \dots j_p}^{(p)} = \frac{(-1)^p}{p!} \sum_a (m_a \nabla_a') \nabla_{a_j'} \nabla_{a_{j_1}'} \dots \nabla_{a_{j_p}'} \frac{1}{r_a}. \quad (102)$$

Этим выражением можно пользоваться для вычисления градиентов применительно к конкретным экспериментальным устройствам, создающим неоднородное магнитное поле на образце.

В качестве примера приведем вычисления для системы четырех одинаковых магнитных диполей (например, катушек с током), расположенных в вершинах квадрата с диагональю  $L$  и ориентированных таким образом, чтобы это распределение магнитных моментов обладало только

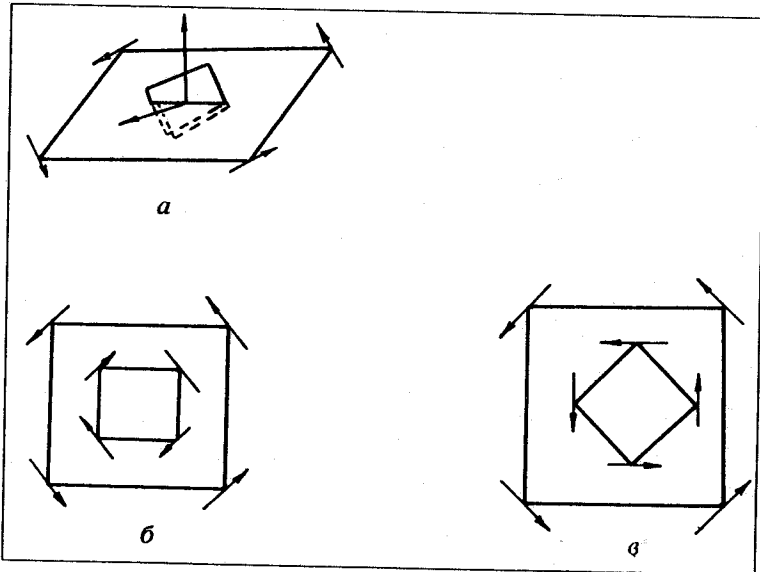


Рис.5. Взаимное расположение осей координат системы катушек  $(x, y)$  и агрегата магнитных частиц  $(x', y')$  в общем положении (а) и в положении, соответствующем минимуму энергии при параллельной (б) и антипараллельной (в) ориентации тороидных моментов

тороидным моментом  $\tau$  (рис.5,а), а все остальные мультипольные моменты были или равны нулю, или выражались бы через  $\tau$ . Нетрудно убедиться, что в данном случае постоянная часть магнитного поля  $H^{(0)}$  и градиенты первого и второго порядков  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$  обращаются в нуль, а первый неисчезающий член появляется в уравнении (101) только в третьем порядке. Используя формулу (77), связывающую магнитные моменты катушек с тороидным моментом системы, и проводя суммирование в выражении для градиента третьего порядка  $H_{j_1 i_1 i_2 i_3}^{(3)}$ , задаваемого общей формулой (18), после простых вычислений получаем

$$H(\mathbf{r}) = -\frac{32\tau_z}{2L^7} (y(3x^2 - y^2) \mathbf{e}_x + x(x^2 - 3y^2) \mathbf{e}_y), \quad (103)$$

где  $x, y$  — проекции радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  на оси  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$ , показанные на рис.5,а.

Воспользуемся полученной формулой для поля, чтобы вычислить значение энергии квадратного агрегата магнитных частиц суспензии в поле рассматриваемой системы катушек. При этом мы считаем, что агрегат обладает только тороидным моментом  $\tau'$ , а остальные независимые моменты, описывающие его магнитное состояние, равны нулю. Для вычисления энергии можно воспользоваться либо общим выражением для энергии агрегата во внешнем поле (61) и значением поля (103), взятым в местах расположения составляющих частиц агрегата, либо полученной выше формулой (81), согласно которой эффективный вихрь поля, действующего на квадратный агрегат, выражен через градиент третьего порядка, а энергия затем находится по формуле (80) как произведение тороидного момента  $\tau'$  на эффективный вихрь  $G^{(1)}$ . В результате этих вычислений энергия взаимодействия двух тороидных моментов  $\tau'$  и  $\tau$  — системы катушек и микроагрегата, расположенного в ее центре, — может быть найдена в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\tau = \frac{35l^2}{2L^7} (\tau e_z) (\tau' e_z') & \left[ c_{12}c_{21} (3c_{11}^2 - c_{21}^2 - c_{12}^2 + 3c_{22}^2) + \right. \\ & \left. + c_{11}c_{22} (c_{11}^2 - 3c_{21}^2 - 3c_{12}^2 + c_{22}^2) \right], \end{aligned} \quad (104)$$

где  $c_{ik} = (e_i e_k')$  — элементы матрицы преобразования от одной системы координат  $(e_x, e_y, e_z)$ , связанной с системой катушек, к другой  $(e_x', e_y', e_z')$ , связанной с микроагрегатом.

Выражение для энергии (104) зависит от взаимной ориентации агрегатов и их тороидных моментов. Предположим, что оси координат  $e_z$  и  $e_z'$  параллельны. В этом случае матрица преобразования имеет элементы, равные  $c_{11} = c_{22} = \cos \varphi$ ,  $c_{12} = -c_{21} = \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между осями  $e_x$  и  $e_x'$  (рис.5,а). С учетом этого выражение (104) может быть преобразовано к виду

$$\mathcal{E}_\tau = 280 \frac{l^2}{L^7} (\tau_z \tau_z') \left( \cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi + \frac{1}{8} \right). \quad (105)$$

Как легко показать, функция от угла  $\varphi$ , стоящая в этом выражении в круглых скобках, на интервале углов  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  имеет три максимума в точках  $\varphi = 0; \pm \pi/2$  и два минимума при  $\varphi = \pm \pi/4$ . Отсюда следует, что при параллельных тороидных моментах  $(\tau \parallel \tau')$  энергетически выгодна такая ориентация агрегатов, при которой  $\varphi = \pm \pi/4$  (рис.5,б), а при антипараллельной ориентации  $\tau$  и  $\tau'$  выгодно расположение с  $\varphi = 0; \pm \pi/2$  (рис.5,в). Этот результат находится в соответствии с

простыми физическими соображениями. В случае параллельных тороидных моментов выгодна взаимная ориентация диполей, при которой моменты одной системы замыкают магнитные потоки в промежутках между дипольными моментами другой. При антипараллельном расположении дипольные моменты частиц попарно замыкаются друг на друга. Любопытно, что значение энергии в точке минимума в обоих случаях одинаково и поэтому оказывается одинаково выгодной как параллельная, так и антипараллельная ориентация тороидных моментов систем. Различие между ними состоит только в различной ориентации самих агрегатов.

Порядок величины энергии тороидного взаимодействия  $\xi$  оказывается значительно меньше, чем энергия взаимодействия двух диполей  $\mu$  и  $\mu'$ , находящихся на расстоянии  $L$  ( $\xi_\mu \sim \mu\mu'/L^3$ ), такой порядок величины имеет, например, одиночная частица суспензии (эмбрион) с моментом  $\mu'$ , находящаяся на расстоянии  $L$  от катушки с током). Действительно, учитывая, что  $\tau \sim L\mu$ ,  $\tau' \sim l\mu'$ , из формулы (105) получим, что в точке минимума энергии тороидное взаимодействие имеет вид

$$\xi_\tau \sim 30 \xi_\mu (l/L)^3, \tag{106}$$

то есть отношение  $\xi_\tau / \xi_\mu$  на порядок больше, чем  $(l/L)^3$ . Для оценки укажем, что если, например, в качестве источника неоднородного магнитного поля используются тонкие магнитные проволочки с поперечным намагничиванием, как это делается в последнее время при изучении малых магнитных моментов молекулярных и надмолекулярных структур клетки, клеточных фрагментов и органелл [47], то размер внешнего устройства  $L$  составит несколько микрометров ( $L \sim 10^{-4}$  см). При размерах агрегата  $l \sim 10^{-5}$  см отношение энергий  $\xi_\tau / \xi_\mu$  составит  $10^{-2}$ .

**3.9. Взаимодействия тороидных агрегатов на больших расстояниях.** Рассмотрим, наконец, взаимодействие агрегатов между собой. Пусть  $\{m_a\}$  и  $\{m_b'\}$  — заданные дипольные моменты двух агрегатов, которые мы будем здесь рассматривать как жесткие образования. Энергия дипольного взаимодействия между частицами агрегатов имеет вид

$$\xi = - \sum_a \sum_b (m_a \nabla_{ab}) (m_b' \nabla_{ab}) \frac{1}{r_{ab}}. \tag{107}$$

В этом выражении опущена внутренняя энергия агрегатов, так как нас здесь интересует только взаимодействие агрегатов между собой. С помощью введенных выше обобщенных обозначений выражение (107) можно переписать в виде

$$\xi = - \langle M | \hat{Z} | M' \rangle, \tag{108}$$

где  $\langle M |$  и  $| M' \rangle$  — векторы состояния первой и второй системы диполей, а  $\hat{Z}$  — матрица, зависящая от взаимного расположения частиц. Энергия взаимодействия может быть записана также в мультипольном представлении

$$\xi = - \langle T | \hat{U} \hat{Z} \hat{U}' | T' \rangle, \quad (109)$$

где  $\hat{U}$  и  $\hat{U}'$  — матрицы перехода к новому представлению. Таким образом, энергия может быть выражена через систему независимых мультипольных моментов, описывающих магнитное состояние каждого из агрегатов. В частности, это дает возможность оценить энергию агрегатов на больших расстояниях друг от друга.

Для примера оценим асимптотическую зависимость энергии от расстояния для двух четырехчастичных агрегатов, каждый из которых находится в основном состоянии. Будем считать, что расстояние между центрами агрегатов  $L$  много больше, чем размеры самих агрегатов  $l \sim l' \ll L$ . При разложении энергии (107) в ряд по параметру  $l/L$  будут появляться только мультипольные моменты магнитодипольного ряда (ср. приведенное выше выражение (99)), которые обозначены символами  $\mu, \kappa, \lambda, \nu, \dots$ . Для двух рассматриваемых агрегатов отличны от нуля только гексадекапольные моменты  $\nu$  и  $\nu'$ , которые однозначно связаны с их тороидными моментами  $\tau$  и  $\tau'$  в соответствии с формулой (80). Поэтому в первом исчезающем приближении взаимодействие между этими агрегатами проявляется только как гексадекаполь-гексадекапольное:

$$\xi \sim \frac{\nu \nu'}{L^9} \sim \frac{\tau \tau' l^2 l'^2}{L^9}. \quad (110)$$

Таким образом, это взаимодействие очень быстро (как  $1/L^9$ ) убывает с расстоянием между агрегатами, и поэтому с хорошей степенью точности им можно пренебречь. В частности, это оправдывает применимость модели магнитной суспензии, рассматриваемой как «газ» невзаимодействующих агрегатов магнитных частиц.

#### 4. ТОРОИДНАЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ СУСПЕНЗИИ

4.1. Модель жестких агрегатов. Как уже было указано во введении, агрегирование магнитных частиц существенно меняет свойства суспензии. Предположим, что плотность числа частиц (эмбрионов)  $N$  является заданной величиной, и рассмотрим на простом примере как меняется восприимчивость при образовании агрегатов. В слабом магнитном поле в

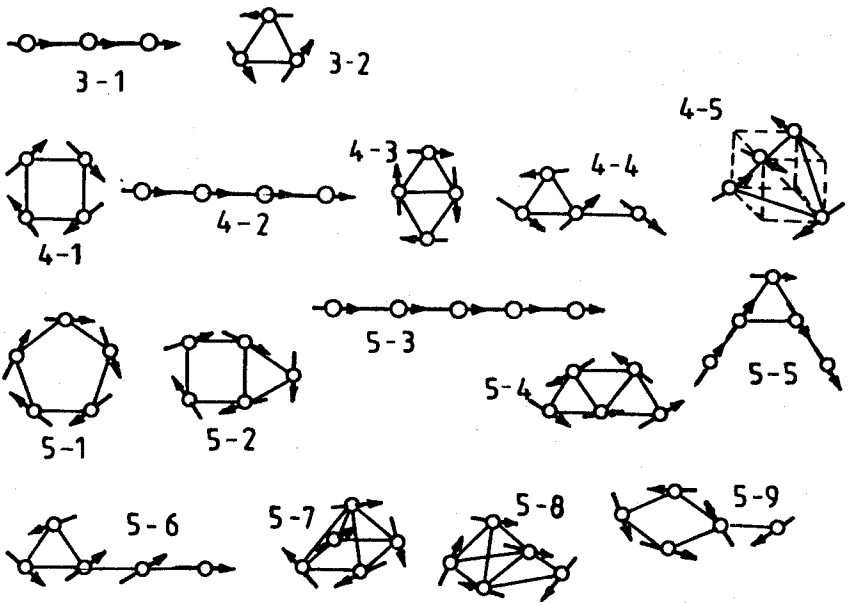


Рис.6. Возможные формы дипольных агрегатов магнитных частиц с числом частиц  $N = 3, 4, 5$ . Агрегаты пронумерованы символами  $N - i$  в порядке уменьшения их энергии связи при данном  $N$

соответствии с формулой (111) намагниченность неагрегированной суспензии имеет вид

$$M = \chi_0 H; \quad \chi_0 = \mu_0^2 N / 3kT, \quad (111)$$

где  $\chi_0$  — магнитная восприимчивость суспензии,  $\mu_0$  — абсолютная величина магнитного момента эмбриона,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура. Допустим теперь, что в суспензии образовались агрегаты из трех частиц. При этом эффективная плотность числа частиц уменьшается в три раза, а магнитный момент каждого агрегата зависит от его типа. Если образование агрегатов происходит за счет магнитных сил, то, как показано на рис.6, 3-1, магнитный момент отдельного агрегата будет равен  $3\mu_0$ , и восприимчивость агрегированной суспензии в соответствии с формулой (111)

$$\chi = (3\mu_0)^2 (N/3) / 3kT = \mu_0^2 N / kT, \quad (112)$$

то есть она увеличится в три раза по сравнению с неагрегированной суспензией. Если же образование агрегатов происходит за счет немагнитных



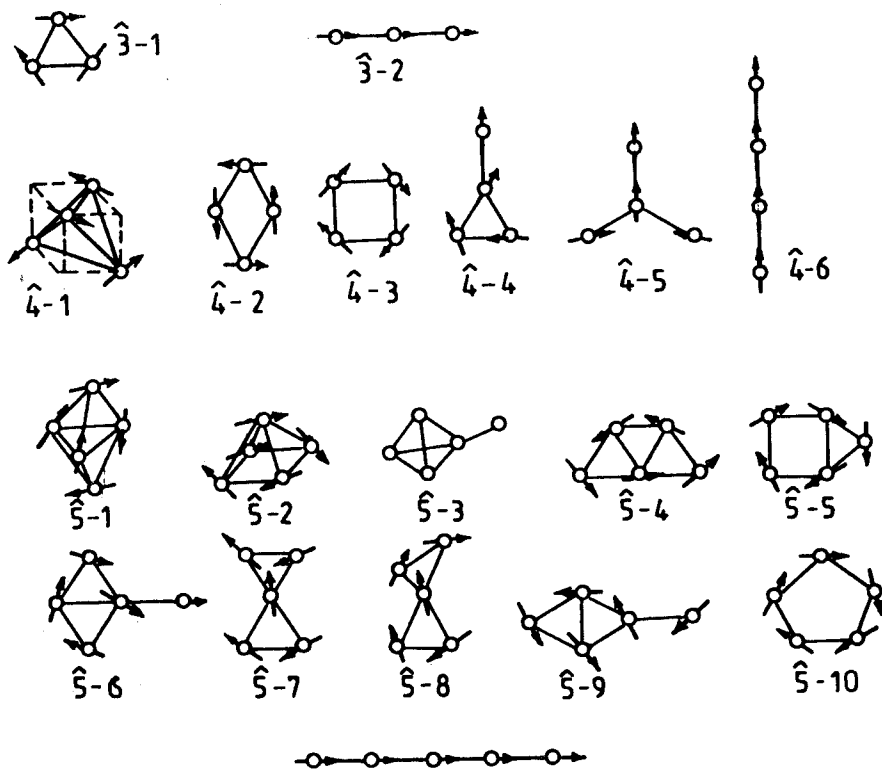


Рис.7. Возможные формы «немагнитных» агрегатов с числом частиц  $N \leq 5$ . Агрегаты пронумерованы символами  $\hat{N} - i$  в порядке уменьшения их энергии связи при данном  $N$

сил, то, как можно видеть из рис.7,  $3-1$ , магнитный момент агрегата вообще будет равен нулю и, соответственно, будет равна нулю магнитная восприимчивость. Однако в этом последнем случае суспензия может поляризоваться вихревым магнитным полем, что описывается с помощью новой ее характеристики — торoidalной восприимчивости.

В общем случае, как это было показано в предыдущих разделах, агрегаты обладают как магнитным, так и торoidalным моментом. Поэтому они могут приобрести торoidalную поляризацию при наложении однородного магнитного поля, или, наоборот, магнитную поляризацию в вихревом магнитном поле. Связь между магнитным и торoidalным моментами суспензии, которые мы будем обозначать  $M$  и  $T$ , с одной стороны, и прило-

женными полями  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  — с другой, в линейном приближении может быть записана в виде

$$\begin{aligned} M_i &= \chi_{ik}^{(M)} H_k + \chi_{ik}^{(MT)} G_k, \\ T_i &= \chi_{ik}^{(TM)} H_k + \chi_{ik}^{(T)} G_k, \end{aligned} \quad (113)$$

где введены магнитная  $\chi^{(M)}$  и тороидная  $\chi^{(T)}$  восприимчивости, а также «перекрестные» восприимчивости. Все эти величины в общем случае являются функциями температуры и амплитуды приложенных полей, а также зависят от числа эмбрионов и формы агрегата. Вычисление восприимчивостей суспензии представляет в общем случае сложную задачу, поэтому мы ограничимся наиболее важными, но достаточно простыми моделями.

Выбор той или иной модели агрегата зависит от характера взаимодействия между составляющими его частицами. Далее мы будем использовать модель агрегата с фиксированной формой (или с фиксированным относительным расположением частиц внутри агрегата). Эта модель применима в том случае, если средняя энергия взаимодействия между частицами  $\bar{U}$  много больше тепловой энергии и больше энергии взаимодействия с внешними полями:

$$\bar{U} \gg kT, \quad \bar{U} \gg \mu_0 H. \quad (114)$$

Выделим теперь из энергии  $\bar{U}$  среднюю энергию магнитного взаимодействия между частицами  $\bar{U}_m$ . Если неравенства (114) выполняются также и для магнитной энергии, т.е.

$$\bar{U}_m \gg kT, \quad \bar{U}_m \gg \mu_0 H, \quad (115)$$

то можно считать также, что и магнитные моменты частиц имеют фиксированные значения, то есть они вморожены в «тело» агрегата.

Другая модель, которая здесь может быть рассмотрена, — это модель агрегата с фиксированной пространственной структурой, но с подвижными магнитными моментами эмбрионов. Чтобы эта модель была справедлива, неравенства (114) должны по-прежнему сохраняться, а неравенства (115) должны быть заменены на приближенные равенства. Очевидно, в данном случае предполагается, что формообразование агрегата происходит за счет немагнитных сил, которые велики по сравнению с диполь-дипольным взаимодействием.

Если второе из неравенств в (114) заменить на приближенное равенство, то в этом случае тепловое движение еще не разрушает самих агрегатов, однако под действием приложенного поля «размягчаются» не только магнитные, но и пространственные степени свободы, т.е. агрегаты

могут изменять свою форму. В таком сильном поле форма агрегатов из компактной становится вытянутой, т.е. в этом случае возникнут так называемые цепочечные агрегаты. Эта модель достаточно хорошо описана в литературе (см. обзоры и монографии [1—11]), и поэтому мы не будем ее рассматривать. Кроме того, цепочечные агрегаты не обладают тороидными моментами и поэтому они не представляют для нас интереса и с этой точки зрения. Укажем, наконец, что при выполнении обратных неравенств в соотношениях (114) тепловое движение разрушит агрегаты, и мы возвратимся к случаю неагрегированной суспензии, который также подробно освещен в литературе.

**4.2. Поляризация суспензии во внешнем поле (модель замороженных диполей).** Взвешенные частицы магнитной суспензии совершают броуновское движение, поэтому для вычисления наблюдаемых величин необходимо произвести усреднение по тепловым флуктуациям. Для жестких агрегатов с замороженными магнитными моментами эмбрионов основную роль играет вращательное броуновское движение. При этом агрегат поворачивается как целое, оставаясь неизменным по форме и не меняя своей внутренней магнитной структуры. В этом случае энергию внутреннего взаимодействия агрегата можно считать постоянной величиной, и, следовательно, ее можно не учитывать в функции распределения по углам ориентации. Таким образом, эту функцию можно записать в виде

$$W(\Omega) = C \exp((\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})), \quad (116)$$

где для энергии, стоящей в показателе экспоненты, использовано выражение  $U_f = -\boldsymbol{\mu} \mathbf{H} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{G}$ , и введены обозначения для безразмерных полей

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} / kT, \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{G} / kT. \quad (117)$$

Здесь буквами  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  обозначены соответственно магнитный и тороидный моменты агрегата, а  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{n}$  — параллельные им единичные векторы. Постоянная в равенстве (116) должна определяться из условия нормировки

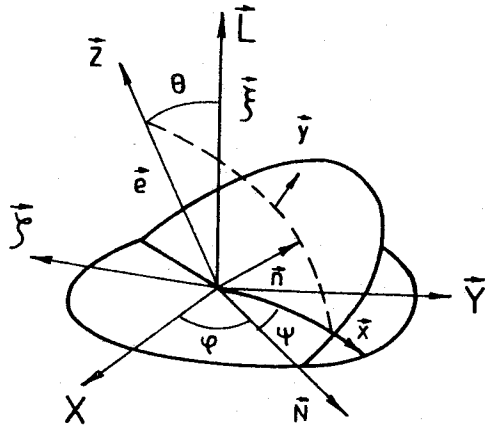
$$\int W(\Omega) d\Omega = 1. \quad (118)$$

Под  $\Omega$  понимается совокупность углов Эйлера  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  (рис.8).

Векторы полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  фиксированы в лабораторной системе координат  $S$ , а единичные векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{n}$  неподвижны относительно системы отсчета  $S_0$ , жестко связанной с агрегатом (рис.8). Таким образом, компоненты векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{n}$  оказываются зависящими от углов Эйлера, определяющих ориентацию одной системы координат относительно другой.

Средние магнитный и тороидный моменты суспензии (отнесенные к единице объема) вычисляются с помощью функции распределения следующим образом:

Рис.8. Расположение осей координат подвижной и неподвижной систем. Магнитный и тороидный моменты агрегата жестко связаны с подвижной системой координат и поэтому их компоненты относительно неподвижной системы координат (относительно которой неподвижны однородное и вихревое магнитные поля) зависят от углов Эйлера



$$\mathbf{M} = N(\boldsymbol{\mu}) = \mu N \int \mathbf{e} W(\Omega) d\Omega, \quad \mathbf{T} = N(\boldsymbol{\tau}) = \tau N \int \mathbf{n} W(\Omega) d\Omega. \quad (119)$$

Найдем эти величины для случая слабых полей (или, что то же, для случая высоких температур), когда выполняются условия  $\xi \ll 1, \zeta \ll 1$ . В этом приближении функция распределения (116) приближенно может быть записана в виде

$$W(\Omega) \approx \frac{1}{8\pi^2} (1 + (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\zeta})). \quad (120)$$

Учитывая значения интегралов

$$\begin{aligned} \int \mathbf{e} d\Omega = \int \mathbf{n} d\Omega = 0, \quad \frac{1}{8\pi^2} \int e_i n_k d\Omega &= \frac{1}{3} (\mathbf{e} \mathbf{n}) \delta_{ik}, \\ \frac{1}{8\pi^2} \int e_i e_k d\Omega &= \frac{1}{8\pi^2} \int n_i n_k d\Omega = \frac{1}{3} \delta_{ik}, \end{aligned} \quad (121)$$

получим

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} \mu N (\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{e} \mathbf{n}) \boldsymbol{\zeta}), \quad \mathbf{T} = \frac{1}{3} \tau N ((\mathbf{e} \mathbf{n}) \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}). \quad (122)$$

Из этих выражений на основе определений (113) могут быть найдены восприимчивости суспензии (для преобразований следует использовать определение (113) векторов  $\boldsymbol{\xi}$  и  $\boldsymbol{\zeta}$ ):

$$\begin{aligned} \chi_{ik}^{(M)} &= (\mu^2 N / 3kT) \delta_{ik}, \quad \chi_{ik}^{(T)} = (\tau^2 N / 3kT) \delta_{ik}, \\ \chi_{ik}^{(MT)} &= \chi_{ik}^{(TM)} = (\mu \tau N (\mathbf{e} \mathbf{n}) / 3kT) \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (123)$$

Отметим, что в данном приближении перекрестные восприимчивости обращаются в нуль при взаимно перпендикулярных магнитном и тороидном моментах агрегата.

В общем случае произвольно ориентированных и не малых полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  интегралы (119) могут быть выражены через так называемые обобщенные функции Бесселя [53]. Мы не будем здесь приводить соответствующих общих громоздких выражений и ограничимся некоторыми частными случаями. При параллельных полях  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  функция распределения может быть представлена в виде

$$W(\Omega) = \frac{1}{\text{sh } \xi'} \exp(e' \xi'), \quad (124)$$

где единичный вектор  $e'$  и поле  $\xi'$  определены равенствами

$$\begin{aligned} e' &= (e\xi + n\zeta) / (\xi^2 + 2\xi\zeta(en) + \zeta^2)^{1/2}, \\ \xi' &= \xi (1 + 2(\zeta/\xi)(en) + (\zeta/\xi)^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (125)$$

После простых вычислений (см. подробнее [54]) магнитный и тороидный моменты суспензии получим в виде

$$\mathbf{M} = \mu N (ee') L_1(\xi') \mathbf{h}', \quad \mathbf{T} = \tau N (ne') L_1(\xi') \mathbf{h}', \quad (126)$$

где  $L_1(\xi)$  — функция Ланжевена, определенная соотношением (1),  $\mathbf{h}'$  — единичный вектор, направленный по полю  $\xi'$ .

Столь же прост случай, когда параллельны между собой магнитный и тороидный моменты агрегата ( $n = e$ ). Магнитный и тороидный моменты суспензии имеют тот же вид (126), где, однако, следует считать, что

$$e' = n = e, \quad \xi' = \xi + \zeta. \quad (127)$$

Относительно просто может быть также рассмотрен случай, когда является слабым одно из полей  $\xi$  или  $\zeta$ . Будем считать, что  $\zeta \ll 1$ . Это позволяет записать функцию распределения в виде

$$W(\Omega) = \frac{1}{\text{sh } \xi} e^{(e\xi)} (1 + (n\zeta)). \quad (128)$$

Для вычисления моментов воспользуемся формулами для средних от произвольного вектора  $p_i$  и неприводимого тензора второго ранга  $q_{ik}$  по распределению  $\exp(e\xi)/\text{sh } \xi$ , полученными в [54]:

$$\langle p_i \rangle_0 = L_1(\xi) (ep) \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \xi/\xi, \quad \langle q_{ik} \rangle_0 = L_2(\xi) (q_{ij} e_j e_i) \left( h_i h_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right), \quad (129)$$

где обозначено  $\langle \dots \rangle_0 = \int \dots \exp(e\xi) d\Omega / \text{sh } \xi$ ,  $L_2(\xi) = 1 - 3L_1(\xi)/\xi$ .

После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mu N \left\{ L_1 \mathbf{h} + \frac{1}{3} (\mathbf{en}) \xi + \frac{2}{3} (\mathbf{en}) L_2 \left[ (\mathbf{h}\xi) \mathbf{h} - \frac{1}{3} \xi \right] \right\}, \\ \mathbf{T} &= \tau N \left\{ (\mathbf{en}) L_1 \mathbf{h} + \frac{1}{3} \xi + \left( (\mathbf{en})^2 - \frac{1}{3} \right) L_2 \left[ (\mathbf{h}\xi) \mathbf{h} - \frac{1}{3} \xi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (130)$$

где для краткости опущены аргументы у функций  $L_1$  и  $L_2$  и введен единичный вектор  $\mathbf{h} = \xi/\xi$ . Полученные выше формулы (122) могут быть найдены из (130) в пределе  $\xi \rightarrow 0$  с учетом того, что при малых  $\xi$  приближенно имеем  $L_1 \approx \xi/3$ ;  $L_2 \approx \xi^2/15$ . В обратном предельном случае больших полей ( $\xi \gg 1$ ) имеем  $L_1 \approx 1$ ,  $L_2 \approx 1$ , что позволяет легко получить из (130) значения моментов в этом пределе. Отметим также, что в отсутствие вихревого поля ( $\zeta = 0$ ) из (130) следует

$$\mathbf{M} = \mu N L_1 \mathbf{h}, \quad \mathbf{T} = \tau N (\mathbf{en}) L_1 \mathbf{h}. \quad (131)$$

Все полученные формулы относятся к агрегатам только одного типа. В действительности в суспензии имеется целый набор агрегатов разных сортов, причем функция распределения по числу частиц в агрегате меняется с течением времени (происходит «старение» магнитной суспензии). При данном числе частиц существует несколько равновесных форм, отличающихся друг от друга как по энергии связи, так и по магнитным параметрам (см. рис.6 и 7). Будем считать, что энергия связи агрегата  $a$ -го сорта, состоящего из  $n$  частиц, равна  $E_{na}$ , а его магнитный и тороидный моменты равны, соответственно,  $\mu_{na}$  и  $\tau_{na}$ . Из предыдущего рассмотрения следует, что вклад в намагниченность и тороидный момент суспензии от этих агрегатов равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{na} &= N_{na} \mathbf{m} (\xi_{na}, \zeta_{na}, \theta_{na}), \\ \mathbf{T}_{na} &= N_{na} \mathbf{t} (\xi_{na}, \zeta_{na}, \theta_{na}), \end{aligned} \quad (132)$$

где  $N_{na}$  — число рассматриваемых агрегатов в единице объема,  $\theta_{na}$  — угол между векторами  $\mathbf{e}_{na}$  и  $\mathbf{n}_{na}$ . Для усреднения по распределению агрегатов разного сорта, но с данным числом частиц  $n$  воспользуемся функцией распределения

$$N_{na} = N_n e^{-E_{na}/kT} / \sum_a e^{-E_{na}/kT}, \quad (133)$$

где  $N_n$  — число агрегатов с данным  $n$ .

Для вычисления величины  $N_n$  необходимо решить задачу кинетики агрегации. Наиболее известная модель была построена Смолуховским. Предполагая, что агрегация частиц проходит по типу химической реакции полимеризации  $x_1 + x_n = x_{n+1}$  с некоторой заданной константой времени  $t_0$ , можно найти зависимость  $N_n$  от времени в виде (формула Смолуховского)

$$N_n(t) = N_n(0) \frac{(t/t_0)^{n-1}}{1 + (t/t_0)^{n+1}}, \quad (134)$$

где  $N_n(0)$  — начальное число эмбрионов,  $t_0$  — время, в течение которого агрегирует  $1/2N_n(0)$ .

В результате интересующие нас моменты могут быть найдены с учетом распределения агрегатов:

$$M = \sum_{n,a} N_{na} m (\xi_{na}, \zeta_{na}, \theta_{na}), \quad (135)$$

$$T = \sum_{n,a} N_{na} t (\xi_{na}, \zeta_{na}, \theta_{na}).$$

Эти вычисления были проделаны численно. На рис.9 показана зависимость намагниченности суспензии и ее тороидного момента от времени для различных температур и полей.

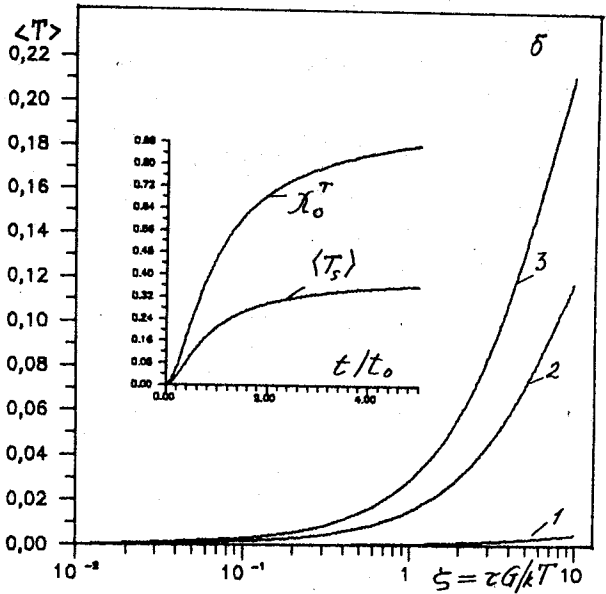
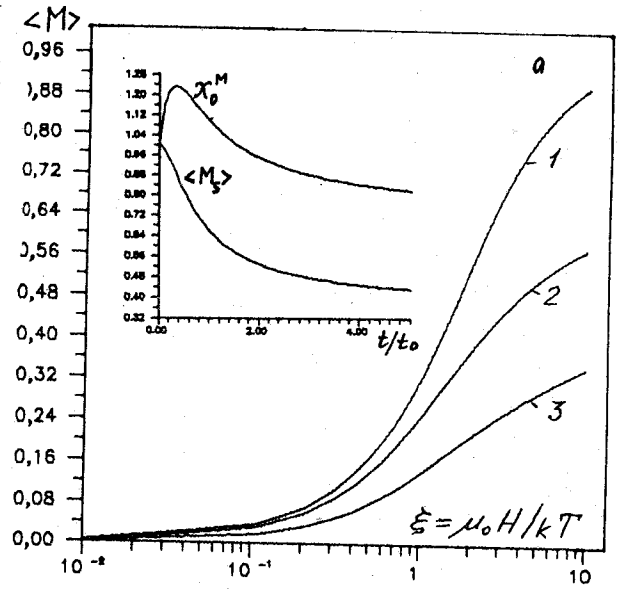
4.3. Модель подвижных диполей. Если считать, что магнитные моменты частиц жестко связаны с пространственной конфигурацией агрегата, как это предполагалось в предыдущем разделе, то влияние внешних полей на ориентационную диффузию частиц будет максимальным. В другом предельном случае, когда магнитные моменты эмбрионов слабо связаны между собой и могут свободно ориентироваться под влиянием внешнего поля (предел суперпарамагнитных агрегатов), внешние поля вообще не оказывают влияния на броуновскую диффузию частиц, и путем магнитных измерений нельзя узнать об агрегативной структуре суспензии. Этот случай не представляет для нас интереса, так как он сводится к рассмотрению системы независимых частиц.

В общем случае для нахождения средних значений интересующих нас моментов нужно использовать функцию распределения вида

$$dW(m_1, \dots, m_n, \Omega) = C e^{-U(m_1, \dots, m_n, \Omega)/kT} dm_1 dm_2 \dots dm_n d\Omega, \quad (136)$$

где  $U(m_1, \dots, m_n, \Omega)$  — энергия магнитного взаимодействия эмбрионов между собой и с внешними полями. При этом интегрирование по моментам  $m_a$  отдельных частиц (эмбрионов) должно производиться с учетом

Рис. 9. Зависимость магнитного (а) и тороидного (б) моментов от безразмерных полей  $\xi$  и  $\zeta$  с учетом коагуляции частиц. Кривые 1—3 соответствуют значениям безразмерного времени  $t/t_0$ , равного, соответственно, 0,1; 1 и 5. Слева на рисунках а и б показана зависимость от времени магнитной и тороидной начальных восприимчивостей  $\chi_0^M$  и  $\chi_0^T$ , которые пропорциональны углу наклона кривых 1, 2 и 3 при малых значениях полей  $\xi$  и  $\zeta$ . Там же показана зависимость от времени предельных значений намагниченности суспензии и ее тороидного момента (при  $\xi \rightarrow \infty$  и  $\zeta \rightarrow \infty$  соответственно). Как можно видеть из рисунка, при коагуляции частиц с течением времени магнитные параметры суспензии уменьшаются, а тороидные — растут





постоянства длины этих векторов. Вычисление с помощью такой функции распределения встречает большие трудности как при аналитическом, так и при численном расчете, поэтому обычно применяются приближенные методы вычислений.

Если внутренние поля на частицах агрегата велики по сравнению с внешними полями, то измерения моментов агрегата можно учесть, введя его магнитную и тороидную поляризуемости в соответствии с определением

$$\mu_i = \mu_i^{(0)} + \kappa_{ik}^{(m)} H_k + \kappa_{ik}^{(mr)} G_k, \quad \tau_i = \tau_i^{(0)} + \kappa_{ik}^{(\tau m)} H_k + \kappa_{ik}^{(\tau)} G_k, \quad (137)$$

где  $\mu_i^{(0)}$  и  $\tau_i^{(0)}$  — значения  $\mu$  и  $\tau$  в отсутствие поля, а тензоры поляризуемости зависят от формы агрегата и имеют главные оси, жестко связанные с пространственным расположением частиц. Записывая энергию агрегата во внешнем поле в виде  $U = -(\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}) - (\boldsymbol{\tau} \mathbf{G})$  и подставляя в это выражение значения  $\mu$  и  $\tau$  из (137), получим

$$U = -\mu^{(0)} \mathbf{H} - \tau^{(0)} \mathbf{G} - \kappa_{ik}^{(m)} H_i H_k - \kappa_{ik}^{(\tau)} G_i G_k - \left( \kappa_{ik}^{(mr)} + \kappa_{ki}^{(\tau m)} \right) G_k H_i. \quad (138)$$

Отметим, что в этом выражении можно опустить свертки тензоров, стоящих перед  $H_i H_k$ ,  $G_i G_k$  и  $G_i H_k$ , так как эти величины не зависят от углов ориентации агрегата.

Ограничившись случаем слабых полей, функцию распределения  $W(\Omega)$  можно записать в виде  $W(\Omega) \approx C(1 - U/kT)$ . Используя значение энергии (138) и значение моментов (137), мы можем вычислить средние магнитный и тороидный моменты суспензии (для агрегатов данного сорта):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mu N \left\{ \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \kappa_{ik}^{(m)} \kappa_{ik}^{(m)} \frac{H^2}{\mu^2} \right] \boldsymbol{\xi} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{3} \mathbf{e} \mathbf{n} + \frac{1}{30} \kappa_{ik}^{(m)} \left( \kappa_{ik}^{(\tau m)} + 3\kappa_{ik}^{(mr)} \right) \frac{H^2}{\mu \tau} \right] \boldsymbol{\zeta} \right\}, \\ \mathbf{T} = \tau N \left\{ \left[ \frac{1}{3} \mathbf{e} \mathbf{n} + \frac{2}{15} \kappa_{ik}^{(\tau m)} \kappa_{ik}^{(mr)} \frac{H^2}{\mu \tau} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \kappa_{ik}^{(\tau m)} \left( \kappa_{ik}^{(m)} + \kappa_{ik}^{(mr)} \right) \frac{H^2}{\tau^2} \right] - \frac{1}{15} \kappa_{ik}^{(m)} \kappa_{ik}^{(\tau)} \frac{H^2}{\tau^2} \right] \boldsymbol{\zeta} \right\}. \end{aligned} \quad (139)$$

Эти формулы получены при следующих предположениях:  $\kappa_{ik}^{(mr)}$  и  $\kappa_{ik}^{(\tau m)}$  симметричны по индексам  $i, k$ , что выполняется для большинства типов агрегатов,  $\mathbf{G} \perp \mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  учитывается в первом порядке. Наиболее важный

качественный результат, который следует из этих формул, заключается в том, что, в отличие от случая неагрегированной суспензии, магнитные моменты агрегатов могут изменяться под действием внешнего поля, поэтому зависимость средних значений (139) от ланжевеновского аргумента, который обычно используется для интерпретации результатов, носит более сложный характер, чем это было бы для неагрегированных суспензий или для суспензии агрегатов с «замороженными» моментами. Наиболее ясно это можно видеть для случая, когда в отсутствие поля агрегаты вообще не имели магнитных моментов ( $\mu^{(0)} = 0$ ). Тогда на начальном участке кривой  $M(H)$  будет наблюдаться нелинейная зависимость от поля. Именно такого рода зависимости чаще всего получают при измерениях на агрегированной суспензии [1—4]. Для интерпретации результатов некоторые авторы (см., например, [34]) вводят эффективные константы анизотропии частиц суспензии и т.п. Для полного решения вопроса о том, какой именно механизм возникновения квадратичной зависимости намагниченности от поля на начальном участке кривой играет главную роль — разброс частиц неагрегированной суспензии по размерам или агрегирование частиц и «затрудненная» поляризация агрегатов, необходимо провести измерения тороидной восприимчивости суспензии: очевидно, что одиночные частицы не дадут вклада в такую восприимчивость.

При немалых значениях полей магнитный и тороидный моменты могут быть найдены путем численного интегрирования. Однако использование функции распределения (136) приводит к необходимости вычисления многомерных интегралов, что представляет значительные вычислительные трудности. Вместо этого для вычисления средних можно воспользоваться следующей приближенной процедурой. Будем считать, что агрегаты покоятся, а поля  $H$  и  $G$  случайным образом вращаются вокруг них. При этом будем считать поля, а также их взаимную ориентацию заданными. Очевидно, что в этом случае функция распределения будет зависеть от трех углов Эйлера  $\Omega$ , определяющих ориентацию репера, который можно построить на векторах  $H$  и  $G$  относительно неподвижного агрегата (в том случае, когда векторы  $H$  и  $G$  параллельны, задача упрощается, так как достаточно задать только два угла Эйлера вместо трех). При каждой заданной ориентации полей мы можем найти распределение магнитных диполей агрегата численно, вычисляя минимум энергии взаимодействия. В результате при каждом  $\Omega$  могут быть найдены  $E(\Omega, G, H)$ ,  $\mu(\Omega, G, H)$  и  $\tau(\Omega, G, H)$ . После этого усреднение по  $\Omega$  можно провести, пользуясь функцией распределения

$$dW(\Omega) = C \exp \{ - E(\Omega, G, H)/kT \} d\Omega. \quad (140)$$

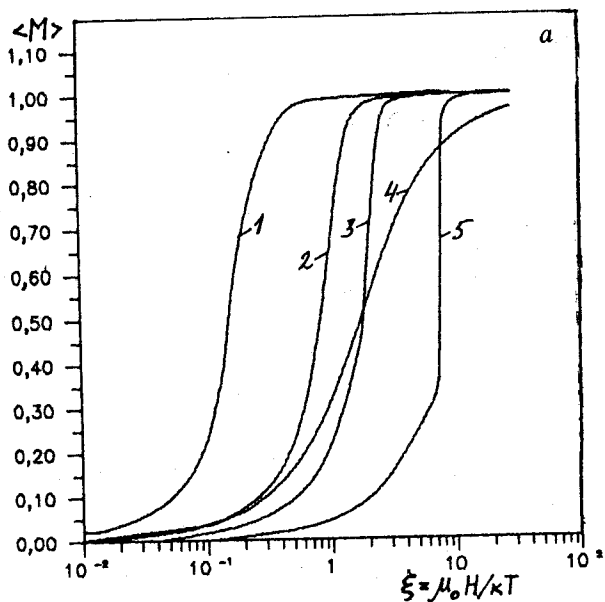
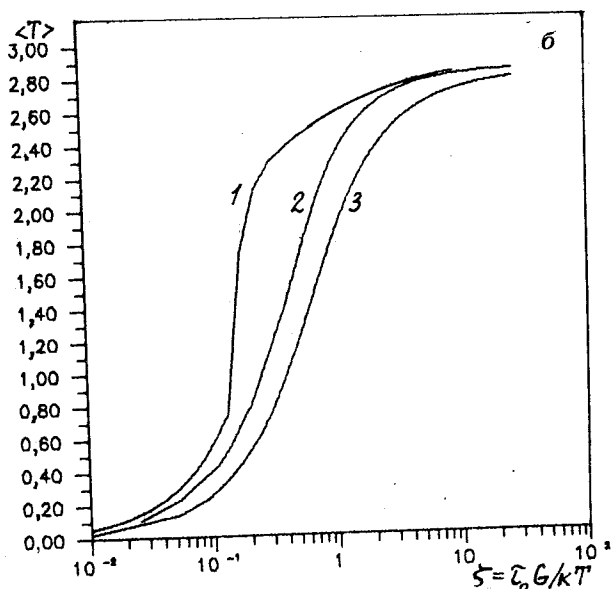


Рис.10. Зависимость намагниченности (а) и тороидного момента (б) суспензии, состоящей из четырехчастичных агрегатов в форме квадрата с подвижными диполями от безразмерных полей  $\xi$  и  $\zeta$  для разных значений приведенной температуры  $\beta = \mu_0^2 / a^3 kT$  (кривые 1—3 и 5 на рисунке а соответствуют значениям  $\beta = 0,1; 0,5; 1$  и 5, а кривые 1,2 на рисунке б — значениям  $\beta = 0,1$  и 4). Для сравнения на рисунках а и б показана функция Ланжевена (кривые 4 и 3 соответственно), которые описывают предельные случаи суперпарамагнитных агрегатов (а) и жестких агрегатов (б)



Численные расчеты такого типа были проведены для агрегатов, состоящих из четырех частиц в форме квадрата [52]. Зависимость средних магнитного и тороидного моментов показана на рис. 10. Для сравнения на том же рисунке те же зависимости изображены для жесткого агрегата с замороженными диполями и для суперпарамагнитного агрегата. Как можно видеть из этих данных, особенно сильное отличие проявляется на начальном участке кривой.

**4.4. Измерение тороидной восприимчивости суспензии.** Тороидные моменты являются сравнительно новыми физическими величинами, и поэтому здесь рассмотрим принципиальную схему установки для измерения тороидной восприимчивости образцов. Предварительно напомним, что измерение магнитного момента производится по следующей схеме. При измерениях магнитный момент образца тем или иным способом приводится в движение (с помощью «измеряющего» поля, вращением или вибрацией самого образца и т.п.) по отношению к измерительной катушке, в которой благодаря этому индуцируется ЭДС. По величине ЭДС можно судить о намагниченности образца. Тип используемой катушки и величину ЭДС можно оценить следующим образом.

Предположим для простоты, что исследуемая система представляет собой точечный магнитный диполь  $M$ . Как известно, неподвижный диполь создает вокруг себя магнитное поле, равное

$$H = \frac{3(Mr) r - Mr^2}{r^5}. \quad (141)$$

Силовые линии поля показаны на рис. 11. Если момент  $M$  изменяется со временем, то будет изменяться со временем и поле  $H$ , при этом в окружающем пространстве возникнет вихревое электрическое поле, которое в соответствии с уравнением Максвелла равно

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \dot{H} = -\frac{3(\dot{M}r) r - \dot{M}r^2}{cr^5}. \quad (142)$$

Таким образом, силовые линии вектора  $F = \text{rot } E$  распределены вокруг источника  $\dot{M}$  точно так же, как и линии магнитного поля вокруг своего источника  $M$  (рис. 11). ЭДС, индуцируемая в измерительном контуре, может быть найдена

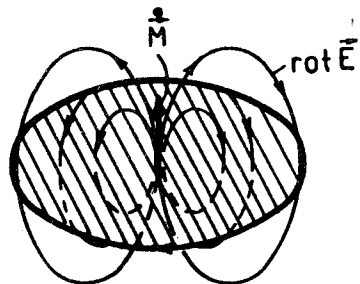


Рис. 11. Силовые линии вихревого электрического поля вокруг колеблющегося магнитного диполя. Жирной линией изображен виток приемной катушки

путем интегрирования поля  $\text{rot } E$  по поверхности, натянутой на этот контур. Показанная на рис.11 структура силовых линий говорит о том, что контур должен быть расположен относительно  $M$  так, как это изображено на этом же рисунке. При таком расположении поток вектора  $\text{rot } E$  через контур будет максимальным. Практически приемная катушка, состоящая из нескольких витков, может иметь вид цилиндрического соленоида.

Рассмотрим таким же способом точечный тороидный момент  $T$ . Покоящийся тороид не создает вокруг себя ни электрического, ни магнитного поля, а только лишь поле векторного потенциала [55]:

$$A = \frac{3 (\text{Tr}) r - Tr^2}{r^5} \Big|_{r \neq 0} + \frac{8\pi}{3} T \delta(r). \quad (143)$$

Предположим теперь, что момент  $T$  изменяется со временем. Как известно, изменяющийся со временем векторный потенциал приводит к появлению электрического поля, которое, согласно (143), равно

$$E = -\frac{1}{c} \dot{A} = -\frac{1}{c} \frac{3 (\dot{\text{Tr}}) r - \dot{T} r^2}{r^5}. \quad (144)$$

Однако, как легко видеть, это поле безвихревое, и поэтому оно не может индуцировать ЭДС в каком-либо контуре. Если, однако, и само поле  $E$  изменяется со временем, то оно является источником для вихревого магнитного поля:

$$\text{rot } H = \frac{1}{c} \dot{E} = -\frac{1}{c^2} \ddot{A}. \quad (145)$$

Представив векторный потенциал (143) в виде

$$A = \text{rot} \frac{[\text{Tr}]}{r^3}, \quad (146)$$

из (145) находим, что само магнитное поле в этом случае равно

$$H = -\frac{1}{c^2} \frac{[\ddot{\text{Tr}}]}{r^3}, \quad (147)$$

а индуцируемое им вихревое электрическое поле имеет вид

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c^3} \frac{[\ddot{\text{Tr}}]}{r^3}. \quad (148)$$

Силовые линии этого поля показаны на рис.12. Они имеют вид окружностей, центры которых лежат на оси, проходящей через вектор  $\ddot{\text{T}}$ . Из этого следует, что приемная катушка должна иметь вид тороидного соленоида. Два витка этой катушки (1 и 2) показаны на рис.12.

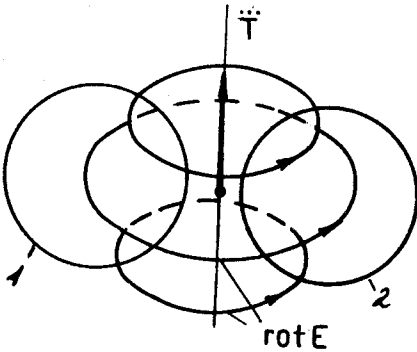


Рис.12. Силовые линии вихревого электрического поля вокруг колеблющегося тороидного диполя. Витки приемной катушки изображены жирной линией

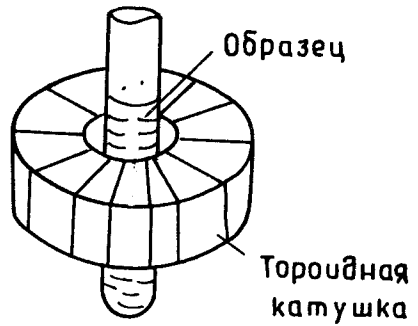


Рис.13. Схема расположения образца и приемной катушки для измерения тороидной восприимчивости

Отметим, что для возбуждения вихревого магнитного поля на образце также может использоваться тороидная катушка (рис.13). Как легко показать, при пропускании через нее переменного тока в области расположения образца возникнет переменное электрическое поле, благодаря которому на образце будет возбуждено вихревое магнитное поле, как это следует из уравнения Максвелла (145).

Для оценки тока, индуцируемого в проводнике, помещенном в центре малой катушки, можно использовать приближенные формулы

$$A(0) = \frac{8\pi}{3} T \delta(r), \tag{143a}$$

$$E(0) = -\frac{8\pi}{3c} \dot{T} \delta(r), \quad j = \sigma E. \tag{144a}$$

## 5. ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЕ АГРЕГАТОВ ВИХРЕВЫМ ПОЛЕМ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОРОИДНОСТИ ДЛЯ ЗАПИСИ ИНФОРМАЦИИ

5.1. Частицы для магнитной записи. Мелкие магнитные частицы являются основными единицами хранения информации магнитных записывающих сред. За счет большой энергии анизотропии в таких частицах существуют два эквивалентных направления намагниченности, отделенных друг от друга достаточно высоким потенциальным барьером. Величина барьера обычно характеризуется величиной поля

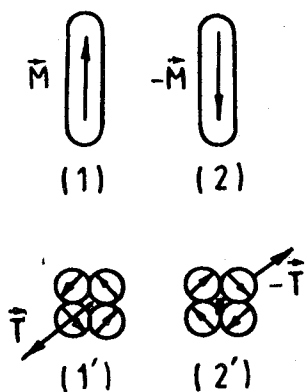


Рис.14. При перемагничивании дипольной частицы из состояния (1) в состояние (2) ее магнитный момент изменяет ориентацию на противоположную. Агрегаты магнитных частиц с замкнутым потоком не обладают суммарными магнитными моментами, но могут иметь противоположные направления вихревого намагничивания (1') и (2'). При перемагничивании агрегата из состояния (1') в состояние (2') его тороидный момент изменяет знак на обратный

перемагничивания, которое называется коэрцитивным полем  $H_c$ . В процессе записи частица намагничивается в том или ином направлении, а затем может оставаться в этом

состоянии продолжительное время, обеспечивая тем самым хранение информации. Для увеличения плотности записи информации естественно пытаться идти по пути уменьшения размеров используемых частиц. Однако, как показывает детальный анализ, проведенный в работе [48], при уменьшении размеров частиц значительно уменьшается коэрцитивное поле  $H_c$ , что понижает стабильность магнитной записи. Как показано в [48], минимальный объем частицы оксида железа составляет  $V \sim 3 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3$ . При этом для обеспечения достаточной энергии анизотропии (со значением  $H_c \sim 900 \text{ Э}$ ), должны быть использованы сильно вытянутые частицы с отношением длины к диаметру 10:1. При этих размерах площадь, занимаемая дипольной частицей на носителе, составляет примерно  $S_d \sim 10^{-11} \text{ см}^2$ , однако это не означает, что та же площадь приходится на один бит информации. Практически достигнутая максимальная плотность записи составляет 1 Гбит/кв.дюйм [49], что примерно соответствует площади  $S_{db} \sim 10^{-8} \text{ см}^2$  на 1 бит информации. Это значение заметно отличается от площади, занимаемой одной частицей ( $S_{db} \gg S_d$ ), по той причине, что намагниченная частица создает вокруг себя поле рассеяния, которое искажает магнитную структуру среды и реальная плотность записи ограничена зоной, где это поле существенно отлично от нуля.

В этом разделе рассмотрена принципиально иная возможность реализации магнитной записи [50], когда основными записывающими единицами среды являются агрегаты мелких магнитных частиц, не имеющие суммарного магнитного момента. Такие агрегаты могут быть образованы в процессе приготовления записывающей среды до полимеризации несущей матрицы, когда магнитные частицы взвешены в несущей жидкости.

Величина и форма агрегатов может регулироваться путем подбора количества поверхностно-активных веществ (сурфактантов), обычно добавляемых во взвесь (суспензию) для предотвращения слипания магнитных частиц. Из-за сильного диполь-дипольного взаимодействия агрегаты образуют магнитные структуры с замкнутым магнитным потоком. Такая структура характеризуется определенным направлением «закрутки» магнитных моментов частиц (рис.14) и описывается магнитным тороидным моментом [20—22]:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_a [r_a m_a],$$

где  $r_a$  и  $m_a$  — радиус-вектор и дипольный момент одной частицы внутри агрегата. При наложении вихревого магнитного поля агрегат может изменить ориентацию тороидного момента на противоположную (рис.14), что и обеспечивает магнитную запись в рассматриваемом случае.

Оценим поле  $H_r$ , необходимое для перемагничивания отдельной частицы внутри агрегата. Эта величина играет роль, аналогичную роли коэрцитивного поля для дипольных частиц, и дает оценку долговечности записанной информации. Будем предполагать, что агрегат состоит из мелких магнитных частиц оксида железа, полученных методом нанотехнологии. Согласно экспериментальным данным [51] в этом случае частицы по форме представляют собой слабо вытянутые сфероиды со средним размером порядка  $8 \times 12$  нм и имеют намагниченность насыщения  $M_s$ , равную 300 ед/сс, а коэрцитивное поле  $H_c$  — порядка 20—60 Э. Отметим, что такие частицы заведомо непригодны для «дипольной» записи, так как имеют слишком малое коэрцитивное поле. Искомое поле  $H_r$  можно считать равным сумме полей  $H_c$  и  $H_d$ , где  $H_d$  — суммарное поле, которое действует на рассматриваемую частицу со стороны окружающих ее дипольных частиц. Пренебрегая малой величиной  $H_c$ , величину этого поля можно оценить как

$$H_r \sim H_d \sim Nm/r^3,$$

где  $N$  — число частиц в агрегате,  $r$  — среднее расстояние между частицами, которое для оценки мы принимаем равным диаметру частицы  $d$ ,  $m = M_s V$  — дипольный момент частицы, где  $V \sim d^3$ . Используя эти оценки, найдем, что в соответствии с (162)

$$H_r \sim NM_s.$$

Принимая  $N \approx 4$ , а  $M_s = 300$  ед/сс, получаем оценку  $H_r \sim 1200$  Э. Таким образом, поле перемагничивания частицы внутри агрегата в этом



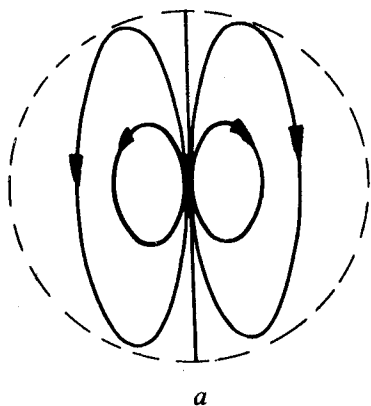


Рис.15. Относительные размеры и поля рассеяния для вытянутой дипольной частицы (а) и агрегата однодоменных магнитных частиц (б). Пунктиром показаны области, где отличны от нуля поля рассеяния той и другой частицы. Эти области соответствуют площади, приходящейся на 1 бит информации

случае имеет значение, вполне достаточное для того, чтобы обеспечить стабильность хранения записанной информации даже при использовании более мелких частиц, чем в случае обычной записи. Кроме того, для перемангничивания агрегата в целом необходимо неоднородное поле определенной (вихревой) конфигурации, что дополнительно обеспечивает надежность хранения информации от случайных воздействий.

Агрегаты с замкнутым магнитным потоком создают слабое поле рассеяния, которое значительно быстрее убывает с расстоянием, чем поле рассеяния дипольных частиц, и поэтому они очень слабо взаимодействуют между собой. Для примера укажем, что если энергия взаимодействия двух диполей зависит от расстояния между ними как  $1/r^3$ , то энергия взаимодействия двух агрегатов в форме квадрата убывает как  $1/r^7$ . За счет этого может быть значительно повышена удельная плотность магнитной записи, оцениваемая, как это было указано выше, по области поля рассеяния. Для сравнения на рис.15,а показана дипольная частица размером  $10 \times 100$  нм (такие частицы используются для высокоплотной магнитной записи), а на рис.15,б в том же масштабе показан агрегат из четырех однодоменных частиц размером около 10 нм. Агрегат и частица занимают примерно одинаковые площади (около  $10^3$  нм<sup>2</sup>), однако области, где поля рассеяния отличны от нуля, значительно отличаются друг от друга. Поэтому площадь, приходящаяся на один бит информации, оцениваемая по площади поля рассеяния, создаваемого записывающей единицей (на рисунке эта область показана пунктиром), в первом случае оказывается на три порядка больше размеров самой частицы, а во втором — примерно равна площади агрегата. Таким образом, использование «тороидных» носителей информации дает принципиальную возможность значительно (на два-три порядка) повысить плотность магнитной записи с одновременным повышением надежности ее хранения.

Однако, указанные преимущества могут быть реализованы только при условии соответствующего видоизменения метода записи и воспроизведения информации. Этот вопрос также обсуждается ниже. Сначала рассматривается задача о перемагничивании агрегата магнитных частиц вихревым магнитным полем. Для этой цели используется приближенный метод, основанный на введении тороидного параметра порядка. Эта же задача решалась численно с помощью развитых в последнее время методов микромагнетизма [42], которые были несколько модифицированы для наших целей. Приведена зависимость вихревого поля, перемагничивающего кольцевой агрегат (точнее, «коэрцитивный вихрь»  $G_c$ ), от магнитных свойств частиц и геометрической формы агрегата. Кроме того, найдена зависимость  $G_c$  от величины приложенного однородного магнитного поля  $H$  и показано, что величина вихря  $G_c$  может быть значительно уменьшена, если в процессе перемагничивания на агрегат накладывается однородное поле. Отсюда следует, что для «тороидной» записи можно использовать слабые источники вихревого магнитного поля.

**5.2. Перемагничивание агрегата «основной гармоникой» внешнего поля.** Для анализа возможностей перемагничивания агрегата будем приближенно описывать его магнитное состояние двумя векторами — магнитным и тороидным моментами  $\mu$  и  $\tau$ . В этом случае энергия агрегата во внешнем поле  $U$  может быть приближенно записана в виде суммы слагаемых, учитывающих все виды его внутренних взаимодействий и взаимодействий его намагниченности и тороидности с полем:  $a_{ik}\mu_i\mu_k$ ,  $b_{ik}\tau_i\mu_k$ ,  $c_{ik}\tau_i\tau_k$ ,  $-\mu_iH_i$  и  $-\tau_iG_i$ . Если вместо двух трехмерных векторов  $\tau$  и  $\mu$  ввести шестимерный вектор  $|\psi\rangle$ , который в силу условия ограниченности абсолютных величин магнитных моментов эмбрионов можно считать нормированным на единицу:  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ , то энергию  $U$  можно записать в виде  $U = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle + \langle f|\psi\rangle$ , где «оператор Гамильтона»  $\hat{H}$  определенным образом выражается через 3-тензоры  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  и  $c_{ik}$ , а 6-вектор  $\langle f|$  — через компоненты векторов поля  $H$  и  $G$ . Разложим вектор состояния  $|\psi\rangle$  по собственным состояниям  $|\psi_n\rangle$  ( $n = 0, 1, \dots, 5$ ) гамильтониана  $\hat{H}$ :

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |\psi_n\rangle. \tag{149}$$

В силу эрмитовости оператора Гамильтона  $\hat{H}$  базисные векторы  $|\psi_n\rangle$  образуют ортонормированный набор:  $\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}$ , что дает возможность выразить коэффициенты  $C_n$  в (149) через проекции состояния  $|\psi\rangle$  на  $|\psi_n\rangle$ :

$$C_n = \langle \psi_n | \psi \rangle. \quad (150)$$

Используя разложение (149), мы можем записать выражение  $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$  в виде  $\sum C_n^2 E_n$ , а произведение  $\langle f | \psi \rangle$  как  $\sum f_n C_n$ , где

$$f_n = \langle \psi_n | f \rangle, \quad (151)$$

а длину вектора  $|\psi\rangle$  — величину  $\langle \psi | \psi \rangle$  — в виде  $\sum C_n^2$ . Для упрощения записи будем обозначать в дальнейшем длину вектора  $|\psi\rangle$  символом  $C$ , то есть, например,  $\langle \psi | \psi \rangle = C^2$ . С учетом этих преобразований, энергия агрегата может быть теперь записана в виде [50]:

$$U = \sum_n \left( E_n \frac{C_n^2}{C^2} - f_n \frac{C_n}{C} \right). \quad (152)$$

Коэффициенты  $f_n$ , определенные соотношением (151), мы будем в дальнейшем называть амплитудами «гармоник» поля. Это название оправдывается тем, что величины  $f_n$  определяют вклады различных «гармоник»  $|\psi_n\rangle$  в разложение произвольной конфигурации поля

$$|f\rangle = \sum f_n |\psi_n\rangle. \quad (153)$$

Для того чтобы «включить» ту или иную «гармонику» поля, необходимо создать соответствующую ей конфигурацию полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$ , то есть задаться определенными величинами и ориентациями этих векторов в соответствии с известной формой агрегата.

Рассмотрим теперь условия перемагничивания агрегата при наложении основной гармоники поля, то есть будем считать, что конфигурация полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  выбрана таким образом, чтобы все коэффициенты  $f_n$ , кроме  $f_0$ , были равны нулю. Предположим, что агрегат в отсутствие поля находился в состоянии  $|\psi_0\rangle$ , то есть коэффициент  $C_0 = -1$ , а все остальные коэффициенты  $C_n$  с  $n \neq 0$  были равны нулю. Если внешнее поле  $|f\rangle = f_0 |\psi_0\rangle$  имеет ориентацию, прямо противоположную начальному состоянию агрегата, то есть коэффициент  $f_0$  положителен ( $f_0 \geq 0$ ), то при определенной величине амплитуды поля  $f_0$  агрегат перейдет из состояния  $|\psi_0\rangle$  в состояние  $|\psi_0\rangle$ . При этом магнитные частицы сменят свою ориентацию на противоположную, то есть агрегат перемагнитится.

Состояния  $|\psi_0\rangle$  и  $|\psi_0\rangle$  являются двумя противоположными полюсами шестимерной сферы, заданной уравнением  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  в  $|\psi\rangle$ -пространстве. Процесс перемагничивания агрегата во внешнем поле мы можем

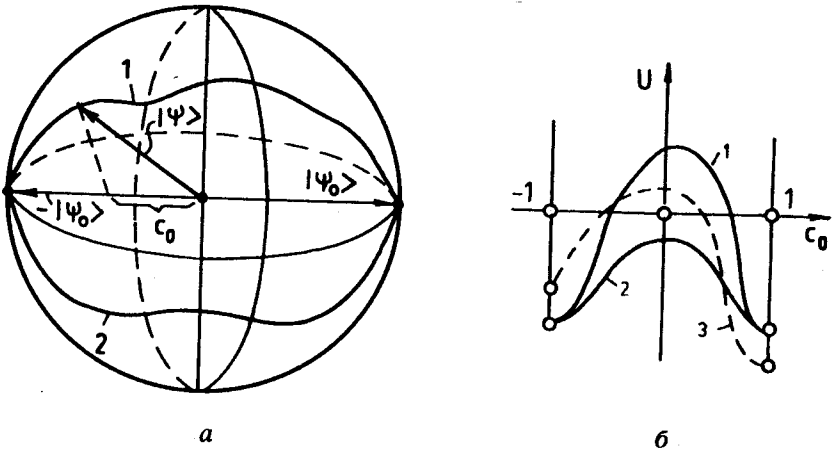


Рис. 16. При движении конца вектора состояния  $|\psi\rangle$  по поверхности сферы единичного радиуса в 6-мерном пространстве из точки  $-|\psi_0\rangle$  в точку  $|\psi_0\rangle$  (а — 6-мерная сфера заменена 3-мерной) одновременно изменяются потенциал  $U$  и проекция  $C_0$  вектора  $|\psi\rangle$  на ось  $|\psi_0\rangle$ . Зависимость  $U$  от  $C_0$  в отсутствие внешнего поля для двух траекторий схематически показана на графике б — кривые 1 и 2. При наложении на агрегат неоднородного магнитного поля вдоль «направления»  $|\psi_0\rangle$  значение энергии в одном из минимумов на кривой, в точке  $C_0 = -1$ , повышается, а в другом — понижается (кривая 3). Состояние  $-|\psi_0\rangle$  оказывается метастабильным

рассматривать как перемещение точки по поверхности этой сферы из одного полюса в другой по некоторой траектории (рис. 16, а). При каждом значении вектора  $|\psi\rangle$ , соответствующем точкам траектории на сфере, мы можем вычислить энергию агрегата  $U(|\psi\rangle)$  [50], а также найти проекцию этого вектора  $|\psi\rangle$  на состояние  $|\psi_0\rangle$ . Таким образом, каждой траектории мы можем сопоставить некоторую функцию  $U = U(C_0)$ . На рис. 16, б эта функция изображена схематически для двух разных траекторий (кривые 1 и 2) для случая, когда внешнее поле отсутствует. При этом точкам  $C_0 = \pm 1$  соответствует минимальное значение энергии  $E_0$ , так как по определению векторы  $|\psi_0\rangle$  и  $-|\psi_0\rangle$  описывают два основных состояния системы. При наложении поля вдоль направления  $+|\psi_0\rangle$  минимум в точке  $C_0 = -1$  становится более мелким, а в точке  $C_0 = +1$  наоборот — более глубоким (штриховая кривая 3 рис. 16, б). Таким образом, если система до наложения поля находилась в состоянии  $-|\psi_0\rangle$ , ко-

торое соответствовало глобальному минимуму потенциала, то при наличии поля это состояние становится метастабильным. При некотором (критическом) значении поля система испытает переход (первого рода) в состояние  $|\psi_0\rangle$ . Таким образом, рассматриваемая система обладает гистерезисным поведением, что и дает возможность использовать агрегаты магнитных частиц для магнитной записи. Критическое поле перехода, вообще говоря, зависит от пути перехода. Далее мы найдем минимальное значение критического поля, которое в данном случае будет определять стабильность хранимой информации, записанной на тороидных носителях.

Для определения амплитуды поля перемагничивания мы должны вычислить первую и вторую производные потенциала (152) по параметрам  $C_n$ , приравнять их нулю и решать получившуюся систему уравнений. Из равенства нулю первой производной

$$\frac{\partial U}{\partial C_n} = 0$$

могут быть найдены стационарные состояния системы при наличии внешнего поля, а из равенства нулю второй производной

$$\frac{\partial^2 U}{\partial C_n \partial C_m} = 0$$

может быть найдено критическое поле  $f_0^*$ . После вычисления производных получим соотношения

$$[2(E_n - U) - (\sum_m f_m C_m)] C_n = f_n, \quad (154)$$

$$[2(E_n - U) - (\sum_l f_l C_l)] \delta_{nm} - (f_n C_m + f_m C_n) + (\sum_l f_l C_l) C_n C_m = 0. \quad (155)$$

Так как в рассматриваемом случае  $f_n = f_0 \delta_{n0}$ , уравнение (154) имеет решения  $C_0 = \pm 1$ ;  $C_n = 0$ . При этом, как легко видеть из (154), состояния  $\pm |\psi_0\rangle$  имеют энергии  $E_{\pm} = E_0 \pm f_0$  соответственно. Таким образом, внешнее поле снимает вырождение энергии по состояниям  $|\psi_0\rangle$  и  $-|\psi_0\rangle$ .

Выясним теперь, при каком значении поля произойдет переход из метастабильного состояния  $-|\psi_0\rangle$  в состояние  $|\psi_0\rangle$ . Для этого подставим в выражение (155)  $f_n = f_0 \delta_{n0}$  ( $f_0 > 0$ ),  $C_0 = -1$ ,  $C_n = 0$  ( $n \neq 0$ ) (то есть мы ищем устойчивость состояния  $-|\psi_0\rangle$ ). После простых преобразований

получим, что уравнение (154) удовлетворяется, если выполняется условие

$$f_0^* = 2(E_n - E_0) \quad (n \neq 0). \quad (156)$$

Таким образом, мы получили целый спектр критических полей. Минимальное значение критического поля, при котором возможен рассматриваемый переход, имеет значение, равное

$$f_{0\min}^* = 2(E_1 - E_0). \quad (157)$$

Этой формулой величина поля перемагничивания определена для агрегата заданной формы и при заданном расположении осей анизотропии: оно оказывается равным удвоенной разности собственных значений гамильтониана  $\hat{H}$  в основном и первом «возбужденном» состояниях. Это поле играет для агрегатов ту же самую роль, что и коэрцитивное поле  $H_c$  для дипольных частиц. Поэтому по величине этого поля мы можем судить об устойчивости магнитной записи к случайным внешним воздействиям.

**5.3. Перемагничивание агрегата двумя гармониками поля.** Допустим теперь, что внешнее поле имеет конфигурацию, описываемую двумя гармониками, то есть из всех коэффициентов  $f_n$  в (153) отличны от нуля только  $f_0$  и  $f_k$ , а все остальные  $f_n$  с  $n \neq 0, n \neq k$  равны нулю. Очевидно, что теперь мы должны искать решение уравнений (154), (155) на двумерном подпространстве фазового пространства системы, натянутом на векторы  $|\psi_0\rangle$  и  $|\psi_k\rangle$ . Действительно, при выполнении условия

$$[2(E_n - U) - f_0 C_0 - f_k C_k] \neq 0. \quad (158)$$

однородные уравнения (154) для коэффициентов  $C_n$  с  $n \neq 0, n \neq k$  имеют только нулевые решения ( $C_n = 0$ ). Поскольку, с другой стороны, любой вектор состояния нормирован, то коэффициенты  $C_0$  и  $C_k$  связаны условием  $C_0^2 + C_k^2 = 1$ . Если ввести параметр  $\theta$  таким образом, чтобы было  $C_0 = \cos \theta$ ;  $C_k = \sin \theta$ , то условие нормировки будет удовлетворяться автоматически.

Для вычисления критического поля в данном случае удобно исходить непосредственно из выражения для энергии (152). Оставляя в сумме по  $n$  только два слагаемых — с  $n = 0$  и  $n = k$  и выражая коэффициенты  $C_0$  и  $C_k$  через  $\theta$ , получаем

$$U = E_0 + (E_k - E_0) \sin^2 \theta - f_0 \cos \theta - f_k \sin \theta. \quad (159)$$

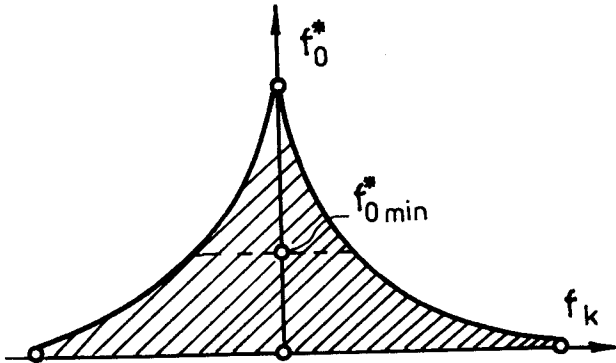


Рис.17. Зависимость критического поля перемagnичивания агрегата  $f_0^*$  от амплитуды второй (дополнительной) гармоники  $f_k$ . Заштрихована область, где возможно существование метастабильных состояний. В верхней части (до пунктирной горизонтальной линии, проведенной на уровне, соответствующем минимальному критическому полю перемagnичивания в отсутствие дополнительной гармоники  $f_{0\min}^*$ ) кривая может изменить свою форму в зависимости от того, по какой траектории будет двигаться фазовая точка при переходе из метастабильного состояния в положение глобального минимума энергии

Легко видеть, что это выражение формально совпадает с энергией одноосного ферромагнетика в магнитном поле, причем величина  $E_k - E_0$  играет роль энергии анизотропии, а  $f_0$  и  $f_k$  — компонентом внешнего поля по осям  $x$  и  $z$  (см. [53] §41). Важно отметить, что наш случай соответствует анизотропии типа «легкая ось», так как величина  $E_k - E_0$ , играющая роль константы анизотропии, положительна: действительно, поскольку  $E_0$  — это энергия основного состояния, то выполняется условие  $E_0 < E_k$ .

В работе [53] получено уравнение нейтральной кривой, которая на плоскости  $f_0, f_k$  отделяет область возможных метастабильных состояний. В наших обозначениях уравнение этой кривой имеет вид

$$f_0^{2/3} + f_k^{2/3} = [2(E_k - E_0)]^{2/3}. \quad (160)$$

На рис.17 нейтральная кривая показана только для положительных значений  $f_0$  (в отрицательной области она имеет такой же вид). Метаста-

бильные состояния возможны в заштрихованной области магнитных полей.

В дальнейшем мы будем интерпретировать рассматриваемую кривую как зависимость поля перемагничивания  $f_0^*$  от амплитуды «дополнительного» поля  $f_k$ . Согласно полученным результатам мы можем сказать, что при наложении дополнительного поля  $f_k$  поле перемагничивания  $f_0^*$  агрегата, который первоначально находился в состоянии  $-\psi_0$ , понижается в соответствии с кривой на рис. 17.

Здесь следует сделать замечание, касающееся значения поля перемагничивания  $f_0^*$  при  $f_k = 0$ . Из формулы (160) следует, что это поле равно  $f_0^*|_{f_k=0} = 2(E_k - E_0)$ . Однако в предыдущем разделе было показано, что при возбуждении перехода основной гармоникой поля критическое поле зависит от траектории перехода, и существует целый спектр критических полей. Если предположить, что перемагничивание происходит при минимальном значении поля  $f_{0\min}^*$ , которое определяется формулой (157), то кривая на рис. 17 в верхней части будет иметь «плато», как это показано на том же рисунке штриховой линией. В общем случае можно только утверждать, что в своей верхней части критическая кривая лежит в области, ограниченной криволинейным треугольником, между вершиной и «плато».

Полученный результат имеет важное практическое значение. Действительно, для перемагничивания агрегатов вихревым магнитным полем в отсутствие «подмагничивающего» однородного поля потребовался бы источник, создающий неоднородное (вихревое) поле очень большой величины. Как показано в п. 5.1, поле перемагничивания одной частицы внутри агрегата  $H_r$  составляет по порядку величины около  $10^3$  Э. При размерах агрегата порядка  $d \sim 10^{-6}$  см критический вихрь  $G_c$ , который оценивается как  $H_r/d$ , составит очень большую величину:  $G_c \sim 10^9$  Э/см. Однако, если в момент записи накладывается однородное магнитное поле, то, как показано выше, критический вихрь может быть значительно уменьшен и доведен до разумных значений —  $G_c \sim 10-10^2$  Э/см.

Отметим также, что качественный результат — понижение величины критического поля  $f_0^*$  при наложении дополнительной (не основной) гармоники — остается справедливым и в том случае, если агрегат перемагничивается некоторой более сложной комбинацией гармоник, вклю-



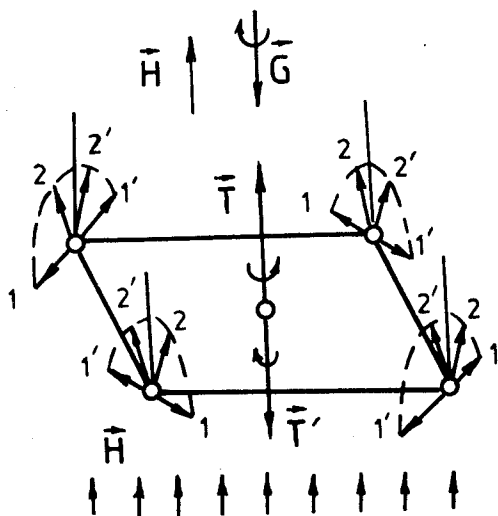


Рис.18. Тороидное перемангничивание агрегата магнитных частиц в форме квадрата. В основном состоянии магнитные моменты частиц имеют ориентацию, отмеченную цифрой 1, а агрегат в целом обладает тороидным моментом  $T_0$ . В перемангниченном состоянии моменты частиц ориентированы в направлении 1', а тороидный момент  $T_0'$  — прямо противоположен начальному. Для перемангничивания агрегата необходимо приложить вихревое поле с вихрем  $G$ , ориентированным противоположно начальному значению тороидного момента и имеющим величину, большую критического значения  $G_c$ . При наложении однородного поля  $H$  частицы будут иметь ориентацию, отмеченную цифрой 2, а в перемангниченном состоянии — 2'. Для перемангничивания агрегата из состояния 2 в состояние 2' требуется значительно меньшее вихревое поле, чем из состояния 1 — в 1'

чающей не одно, а несколько дополнительных полей  $f_k$ . Этот результат также важен с практической точки зрения. Дело в том, что на носителе могут существовать агрегаты различной формы и поэтому заданная конфигурация внешних полей  $H$  и  $G$  воспринимается каждым из них в виде своей комбинации гармоник (напомним, что гармоники определяются формой агрегата). Тем не менее всегда можно подобрать внешние поля таким образом, чтобы перемангничивание агрегатов происходило в желаемом режиме.

Развитые в последнее время методы микромагнетизма (см. например, [42]) позволяют также моделировать процесс перемангничивания агрегата численно [50]. В предположении, что основное состояние известно, можно перейти к решению задачи о перемангничивании агрегата внешним магнитным полем. В общем случае эта задача решается следующим образом. Задавшись некоторым направлением магнитного поля и вихря поля, мы постепенно увеличиваем эти поля с некоторым шагом, который задает точность определения поля перемангничивания. Зная начальное состояние (за которое мы всегда выбираем основное состояние), можно найти эффективное поле, действующее на каждую частицу, определить приращение вектора  $\Delta m_a$ , и повторять эту процедуру до тех пор, пока не будет найдено положение минимума потенциала  $U$ , соответствующее распре-

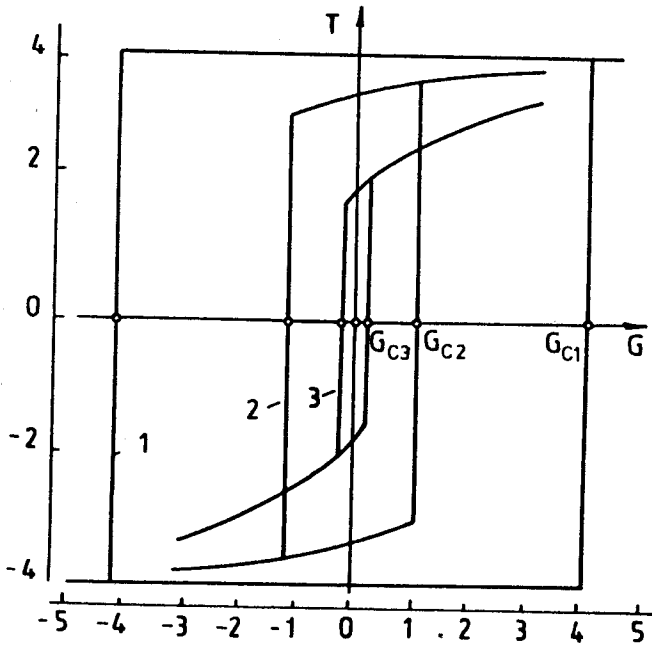


Рис. 19. Кривые гистерезиса (1—3) торoidalного перемагничивания агрегата магнитных частиц в форме квадрата (см. рис. 18), полученные путем численного моделирования. Кривые 1—3 получены при значениях поля  $H_1 = 0$ ,  $H_2 = 3$  и  $H_3 = 5$  соответственно. В отсутствие поля в основном состоянии торoidalный момент агрегата может иметь два значения, противоположные по направлению друг к другу. Под действием вихря поля  $G$ , направленного противоположно начальной ориентации торoidalного момента  $T$  (рис. 18), агрегат перемагничивается, когда величина вихря достигает критического значения  $G_c$ .

делению магнитных моментов частиц при наличии внешнего магнитного поля. Одновременно вычисляются магнитный и торoidalный моменты агрегата. Перемагничивание происходит в том случае, когда эти величины скачком изменяют свое начальное направление.

В качестве конкретного примера в [50] рассмотрена задача о перемагничивании агрегата, имеющего форму квадрата, под действием вихревого магнитного поля. В основном состоянии этот агрегат имеет конфигурацию, которая показана на рис. 18. Эта конфигурация описывается торoidalным моментом  $T$ , направленным перпендикулярно плоскости

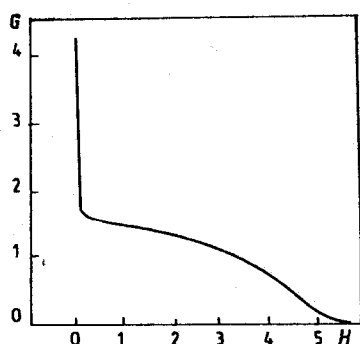


Рис.20. Зависимость критического вихря поля  $G_c$  от величины однородного поля  $H$ , параллельного  $G$ , для агрегата в форме квадрата (рис.18), полученная путем численного моделирования. Кривая находится в качественном соответствии с кривой, изображенной на рис.17

агрегата. Если вихрь магнитного поля  $G$  направлен в сторону, противоположную начальному направлению тороидного момента, то при постепенном его увеличении до значения  $G_c$  тороидный момент

скачком изменит свою ориентацию на прямо противоположную, то есть будет параллелен вектору  $G$  (рис.18). Кривые перемагничивания этого агрегата показаны на рис.19. Как и следует из общих рассуждений, проведенных в разд.2, в данном случае наблюдается явление гистерезиса.

При наложении однородного поля  $H$  в направлении, параллельном вектору  $G$ , величина критического поля уменьшается. Кривые тороидного перемагничивания при наличии внешнего поля показаны на рис.19, а зависимость  $G_c = G_c(H)$  — на рис.20. Уменьшение величины критического поля  $G_c$  при наложении однородного магнитного поля может быть понято из следующей наглядной картины. Под действием однородного поля происходит поворот моментов частиц из положения 1 в положение 2 в направлении поля  $H$  (рис.18). В этом положении облегчается вихревое перемагничивание частиц, так как оно сводится к повороту моментов на небольшой угол вокруг осей, лежащих в плоскости агрегата.

Следует отметить, что зависимость критического поля  $G_c$  от  $H$  в целом соответствует той, которая была получена с помощью приближенного рассмотрения (ср. «теоретическую» кривую на рис.17 с «экспериментальной» на рис.20). Таким образом, численные расчеты подтверждают общие выводы, сделанные в предыдущем разделе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенцвейг Р. — Феррогидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
2. Блум Э.Я., Майоров М.И., Цеберс А.О. — Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989.
3. Шлиомис М.И. — УФН, 1974, т.112, в.3, с.427.
4. Poplevell J., Abu Aishen B., Ayoub N.Y. — J. Appl. Phys., 1988, vol.64, No.10, p.5852.
5. Ayoub N.Y., Abu Aishen B., Debabneh M. et al. — IEEE Trans. Magn., 1989, vol.25, No.5, p.3860. Holmes M., O'Grady K., Poplewell J. — J. Mag. Mag. Mat., 1990, vol.85, p.47.
6. Yusuf N.A. — J. Phys. D, 1989, vol.22, No.12, p.1916.

7. Yusuf N.A., Abu Sufia H., Abu-Aljarayesh I., Mahmud S. — *J. Mag. Mag. Mat.*, 1990, vol.85, p.85.
8. Никитин В.П. — *Магн. гидрод.*, 1990, т.1, с.49.
9. Inaba N., Miyajima H., Taketomi H., Chikazumi S. — *IEEE Trans. Magn.*, 1990, vol.25, No.5, p.3866.
10. Martinet A. — *Aggregat. Process Solut.*, Amsterdam, 1983, p.503.
11. Krueger D.A. — *IEEE Trans. Magn.*, 1980, vol.16, No.2, p.251.
12. Sonntag H., Strange K. — *Coagulation Kinetics and Structure Formation*. Berlin, VED Deu. Verl. Wissensch., 1987.
13. Биби́к Е.Е. — *Реология дисперсных систем*. Л.: Из-во ЛГУ, 1982.
14. De Gennes P.G., Pincus P.A. — *Phys. Condens. Mat.*, 1970, vol.11, No.3, p.189.
15. Doi M., Chen D. — *J. Chem. Phys.*, 1989, vol.90, No.10, p.5271. Doi M., Chen D. — *Front. Macromol. Sci. Proc. IUPAC 32nd Int. Symp. Macromol.*, Kyoto, 1988. Oxford, 1989, p.313. Sano K., Doi M. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1983, vol.52, No.8, p.2810.
16. Lozovik Yu.E., Mandelstam V.A. — *Phys. Lett. A.*, 1989, vol.138, No.4—5, p.204. Лозовик Ю.И., Манделштам В.А. — *Препринт АН СССР, Институт спектроскопии*, No.4, 1984. Menear S., Bradburry A., Chantrell R.W. — *J. Mag. Mag. Mat.*, 1984, vol.43, p.166. Miles J.J., Gerber R., Chantrell R.W., Parker M.R. — *IEEE Trans. Mag.*, 1988, vol.24, No.2, p.1668.
17. Rozman R., Janssen J.J.M., Rekvelde M.Th. — *J. Mag. Mag. Mat.*, 1990, vol.85, No.1—3, p.97. Rozman R., Janssen J.J.M., Rekvelde M.Th. — *J. Appl. Phys.*, 1990, vol.67, No.6, p.3072. Itoh S., Endoh Y., Charles S.W. — *J. Mag. Mag. Mat.*, vol.111, No.1—2, p.56.
18. Bjornholm S. — *Comtemp. Phys.*, 1990, vol.31, No.5, p.309.
19. Вонсовский С.В. — *Магнетизм*. М.: Наука, 1971.
20. Дубовик В.М., Чешков А.А. — *ЭЧАЯ*, 1974, т.5, вып.3, с.791. Dubovik V.M., Shabanov S.V. — In: *Essays on the Formal Aspects of Electromagnetic Theory*, Ed. A.Lakhtakia, Singapore: WS, 1992, p.21.
21. Дубовик В.М., Тосунян Л.А. — *ЭЧАЯ*, 1983, т.14, вып.5, с.1193.
22. Dubovik V.M., Tugushev V.V. — *Phys. Reports*, 1990, vol.187, No.4, p.145.
23. Skjeltorp A.T. — *Ann. Rev. Mater. Sci.*, 1989, vol.19, p.511. Skjeltorp A.T., Helgesen G. — *Proc NATO Adv. Study Inst. Gargese*, 18—31 July, 1989 — Dordrecht, 1988, p.56.
24. Jordan P.C. — *J. Appl. Phys.*, 1973, vol.25, No.4, p.96.
25. Pincus P. — *Thermomechanics of Magnetic Fluids*. Ed. B.Bercovsky. Washington; London: Hemisphere Publ. Co. 1978, p.87.
26. Scholten P.C. — *Thermomechanics of Magnetic Fluids*. Ed. B.Bercovsky. Washington; London: Hemisphere Publ. Co. 1978, p.1.
27. Scholten P.C. — *IEEE Trans. Mag.*, 1980, vol.16, No.2, p.221.
28. Ericsson A.B., Jonson M. — *Phys. Rev. B*, 1989, vol.40, No.1, p.884. Ericsson A.B., Jonson M. — *Phys. Rev. Lett.*, 1989, vol.62, No.14, p.1698-9.
29. Inoue H., Fukke H., Katsumoto M. — *IEEE Trans. Mag.*, 1990, vol.26, No.1, p.75.
30. Klein R., Weitz D.A., Lin M.Y. et al. — *Progr. Colloid & Polym. Sci.*, 1990, vol.91, p.161-8.
31. Helgesen G., Skjeltorp A.T., Mors P.M. et al. — *Phys. Rev. Lett.*, 1988, vol.61, No.15, p.1736.
32. Иванов А.Г., Агабекян Э.М. — *Магн. гидрод.*, 1989, 3, с.114.
33. Fanin P.C., Charles S.W. — *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1989, vol.22, No.1, p.187.
34. Пшеничников А.Ф., Лебедев А.В. — *ЖЭТФ*, 1989, т.95, в.3, с.869.
35. Хиженков П.К., Дорман В.Л., Барьяхтар В.Г. — *Магн. гидрод.*, 1989, 1, с.35.
36. Мартынов С.И. — *Магн. гидрод.*, 1989, № 1, с.47.
37. Ли Цзун-дао. — *Математические методы в физике*: Пер. с англ. М.: Мир, 1965. (Lee T.D. *Mathematical Methods of Physics*, N.Y., 1960).
38. Marcus P.S. — *Astrophysical Radiation Hydrodynamics*, Eds. K.H.A.Winkler, M.I.Norman: Proc. NATO Adv. Res. Workshop, 1986, p.359-86.

39. Gray C.G. — *Am. J. Phys.*, 1978, vol.46, No.2, p.169. Gray C.G., Nickel B.G. — *Am. J. Phys.*, 1978, vol.46, No.7, p.535.
40. Сковорода А.А. — *ЖЭТФ*, 1990, т.97, вып.1, с.179.
41. Васильев Б.В., Поцелуйко А.А., Пынько В.Г. — *ФММ*, 1983, т.55, с.1026.
42. Schabes M.E., Bertram H.N. — *J. Appl. Phys.*, 1988, vol.64, No.3, p.1347.
43. Naketani Y., Uesaka Y., Hayashi N. — *Jap. J. Appl. Phys.*, 1989, vol.28, No.12, p.2485.
44. Uesaka Y. — *J. Appl. Phys.*, 1990, vol.67, No.9, p.5146-8.
45. Fredkin D.R., Kochler T.R. — *J. Appl. Phys.*, 1990, vol.67, No.9, p.5544.
46. Дирак П.А.М. — *Принципы квантовой механики*, М.: Наука: 1960 (Пер. с англ. Dirac P.A.M. — *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, Clarendon Press, 1958).
47. Шалыгин А.Н., Кротов К.А. — *УФН*, 1990, 160. вып.7, с.83.
48. Shagrock M.P. — *IEEE Trans. Mag.*, 1990, vol.26, No.1, p.193.
49. Yogi K., Gorman G.L., Gastelio G. — *IEEE Trans. Mag.*, 1990, vol.26, No.5, p.2271.
50. Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М. — *Препринт ОИЯИ Р17-92-541*, Дубна, 1992.
51. Krenizan C.F., Klabunde K.J. Sorensen C.M., Hadjipanayis G.C. — *Chemistry of Materials*, 1990, vol.2, No.1, p.70.
52. Martsenyuk M.A., Martsenyuk N.M., Syutkin S.V. — *Thesis of the 6-th International Conference on Magnetic Fluids*. Paris, 1992.
53. Blum L., Torruella A.J. — *J. Chem. Phys.*, 1988, vol.89., No.8, p.4976.
54. Марценюк М.А. — *ЖЭТФ*, 1974, т.66, вып.6, с.2279.
55. Dubovik V.M. — *JINR Rapid Communications*, No.3 [36]—89, Dubna, 1989, p.39.