«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1993, ТОМ 24, ВЫП.5

УДК 511.3+517.2+517.5+517.9
+538.9+539.1

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ БОГОЛЮБОВ. ОЧЕРК НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Н.Н.Боголюбов (мл.), Д.П.Санкович

Математический институт им.В.А.Стеклова РАН, Москва

Статья содержит обзор основных научных результатов выдающегося математика и физика-теоретика академика Н.Н.Боголюбова. Показано значение фундаментальных исследований Боголюбова для развития современной математической физики.

This paper contains the review of the main scientific results of the distinguished mathematician and physicist-theorist, Academician N.N.Bogolubov. A significance of the fundamental investigations of Bogolubov for a development of the modern mathematical physics is described.

1. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ЖИЗНИ И НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Н.Н.БОГОЛЮБОВА

13 февраля 1992 года ушел из жизни выдающийся математик и физик-теоретик современности академик Н.Н.Боголюбов.

Николай Николаевич Боголюбов родился 21 августа 1909 г. в Нижнем Новгороде в семье священника. Математические способности проявились у мальчика необычайно рано и уже в тринадцатилетнем возрасте он начинает посещать в Киеве, куда переехали его родители в 1912 г., семинар основателя киевской алгебраической школы академика Д.А.Граве (1863—1939). Через некоторое время Н.Н.Боголюбов приступает к работе под руководством замечательного русского ученого академика Николая Митрофановича Крылова (1879—1955). Общие научные интересы крепко и надолго связали учителя и ученика. Их совместная работа длилась более 20 лет и принесла ряд выдающихся результатов в области математики и механики, имеющих огромное научное значение и поднявших международный авторитет отечественной науки. Уже в 1924 г. юный ученый пишет свою первую научную работу «О поведении решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности», а с 18 июня 1925 г. в результате усилий Крылова специальным решением Малого Президиума Укрглавнауки Н.Н.Боголюбов становится аспирантом научно-исследовательской кафедры математики в Киеве. Научным руководителем утверждается Н.М.Крылов.

В 1928 г. Боголюбов успешно защищает кандидатскую диссертацию на тему «Приложение прямых методов вариационного исчисления к исследованию нерегулярных случаев простейшей задачи» и становится научным сотрудником АН УССР. Успешно развивая в дальнейшем эту тематику, Боголюбов удостаивается весьма престижной премии им.Мерлани Академии наук Болоньи (Италия) и в 1930 г. по представлению академиков Д.А.Граве и Н.М.Крылова получает степень доктора наук без защиты диссертации («honoris causa»).

В 1936 г. Боголюбову присвоено звание профессора. С 1936 г. по 1950 г. он руководит кафедрой математической физики КГУ им.Т.Г.Шевченко. В 1939 г. Боголюбов избирается членом-корреспондентом, а в 1948 г. — действительным членом АН УССР.

С 1943 г. по 1992 г. Н.Н.Боголюбов является профессором МГУ им. М.В.Ломоносова. В 1947 г. за исследования в области нелинейной механики и статистической физики, изложенные в монографиях «О некоторых статистических методах в математической физике» и «Проблемы динамической теории в статистической физике», Н.Н.Боголюбов удостаивается Государственной премии первой степени и в этом же году избирается членом-корреспондентом АН СССР. С 1949 г. судьба Боголюбова прочно связана с Математическим институтом им.В.А.Стеклова (Москва), где он становится заведующим отделом, а с 1983 г. — директором института. В 1952 г. Боголюбову присуждается Государственная премия первой степени за исследования в области теоретической физики. В 1953 г. он избирается действительным членом АН СССР. В этом же году Боголюбов становится заведующим кафедрой теоретической физики МГУ, а впоследствии — заведующим кафедрой квантовой статистики физического факультета МГУ (до 1991г.).

С 1956 г. по 1965 г. Н.Н.Боголюбов является директором Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) в Дубне, а с 1965 г. по 1989 г. — директором ОИЯИ.

В 1957 г. Боголюбову присуждается премия им.М.В.Ломоносова за исследования по теории сверхпроводимости, в 1958 г. — Ленинская премия за разработку нового метода в квантовой теории поля и статистической физике, приведшего, в частности, к обоснованию теории сверхтекучести и сверхпроводимости.

В 1963 г. Н.Н.Боголюбов избирается членом Президиума АН СССР и академиком-секретарем Отделения математики, он занимает эти ответственные посты до 1988 г.

В 1983 г. Боголюбову присуждается золотая медаль и премия им.М.А.Лаврентьева АН СССР, а в 1984 г. совместно с А.А.Логуновым и

Д.В.Ширковым он удостаивается Государственной премии СССР в области науки и техники за цикл работ «Метод ренормализационной группы в теории полей». В этом же году Боголюбов награждается золотой медалью имени М.В.Ломоносова АН СССР за выдающиеся достижения в области математики и теоретической физики.

В последние годы, не прекращая активной плодотворной научной деятельности, Н.Н.Боголюбов по мере возможностей вел и научно-общественную работу, являясь советником при Президиуме АН СССР (с 1988 г.), почетным директором ОИЯИ и Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР (с 1989 г.).

Заслуги Н.Н.Боголюбова в развитии математики, механики и теоретической физики, подготовке научных кадров были отмечены двумя золотыми звездами Героя Социалистического Труда, пятью орденами Ленина, другими государственными наградами СССР, Болгарии, ГДР, КНДР, Монголии, Польши, Чехословакии.

Выдающиеся труды Боголюбова навсегда вошли в золотой фонд мировой науки, стали классикой физики и математики. Он был избран иностранным членом многих академий наук: Американской академии искусств и наук в Бостоне (1960), Болгарской академии наук (1961), Польской академии наук (1962), Академии наук ГДР (1966), Гейдельбергской академии наук, ФРГ (1968), Национальной академии наук США (1969), Венгерской академии наук (1979), Чехословацкой академии наук (1980), Академии наук МНР (1983), Академии наук Индии (1983). Н.Н.Боголюбов получил степень почетного доктора ряда университетов мира: Аллахабадского, Индия (1958), Берлинского, ГДР (1960), Чикагского, США (1967), Туринского, Италия (1969), Краковской академии, ПНР (1969), Вроцлавского, ПНР (1970), Бухарестского, СРР (1971), Хельсинкского, Финляндия (1973), Университета Улан-Батора, МНР (1974), Варшавского, ПНР (1977).

Исследования Боголюбова были высоко оценены в мире многочисленными престижными премиями и медалями: премия Академии наук Болоньи, Италия (1930), премия им.Д.Хайнеманна Американского физического общества (1966), золотая медаль им.Г.Гельмгольца Академии наук ГДР (1969), золотая медаль Макса Планка физического общества ФРГ (1973), золотая медаль им.Б.Франклина, США (1974), золотая медаль «За заслуги перед наукой и человечеством» Словацкой академии наук, ЧССР (1975), премия им. А.П.Карпинского, ФРГ (1981), медаль П.Дирака (1992, посмертно).

В 1987 г. Ученый совет Международного центра теоретической физики в Триесте учредил премию им. Н.Н.Боголюбова за выдающиеся заслуги в деле развития научных исследований в области математики и физики твердого тела для ученых из развивающихся стран.

Выдающийся ученый, великий гражданин и патриот своей Родины Н.Н.Боголюбов вел большую общественную работу, являясь депутатом Верховного Совета страны, был активным участником Пагуошского движения за мир. Возглавляя ОИЯИ в Дубне, Математический институт им.В.А.Стеклова в Москве, Н.Н.Боголюбов действенно способствовал тому, что эти институты заняли ведущие места среди мировых научных центров.

Энциклопедические знания, неизменная доброжелательность и научная щедрость, хорошо знакомые нескольким поколениям исследователей, привели к формированию вокруг Боголюбова ряда научных школ: по математической физике и нелинейной механике в Киеве, по теоретической и математической физике в Москве, Дубне, Львове. Его ученики работают в Киеве, Москве, Дубне, Тбилиси, Львове, Баку, Ереване, Петербурге, Нижнем Новгороде, в других городах нашей страны и за ее рубежами.

Память о Николае Николаевиче Боголюбове, крупнейшем ученом, великом труженике, обаятельном человеке, будет всегда жить в сердцах и делах его учеников, друзей, всех, кому посчастливилось соприкоснуться с деятельностью нашего замечательного современника.

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (1925—1932)

Первые работы Н.Н.Боголюбова были посвящены некоторым актуальным вопросам приближенного решения дифференциальных уравнений, в частности, обоснованию так называемого принципа Рэлея. Развитый Боголюбовым совместно со своим учителем академиком Н.М.Крыловым аппроксимационный метод был использован для нахождения собственных чисел и собственных функций граничной задачи, что равносильно некоторой вариационной проблеме. Кроме того, этот аппроксимационный метод нашел свое применение и к решению уравнений в частных производных. Развитые методы приближенного решения дифференциальных уравнений позволили получить важные практические результаты для ряда технических и инженерных проблем.

Уже на заре возникновения дифференциального исчисления математики 18 века ввели переход к пределу в уравнениях движения дискретной системы и отсюда получили известные уравнения математической физики для предельной непрерывной системы. Исследование разностного уравнения дискретной системы обычно проще, чем решение соответствующего дифференциального уравнения. При этом, однако, возникает необходимость показать, что решения разностного уравнения стремятся к решениям соответствующего дифференциального уравнения (принцип Рэлея). Математики и в особенности физики, руководствуясь интуицией, использовали принцип Рэлея как эвристический метод для исследования некоторых важных задач математической физики, в особенности для так называемых граничных задач. Здесь можно указать известные работы Рэлея, Пуанкаре, Штурма. Боголюбов и Крылов внесли существенный вклад в обоснование принципа Рэлея, в вычисление порядка малости ошибки, которая появляется в решении n-го приближения соответствующего дифференциального уравнения.

Первой работой на эту тему явилась статья [1] «О принципе Рэлея в теории дифференциальных уравнений математической физики и об одном эйлеровом методе в вариационном исчислении» (1926). Данная статья была первой совместной работой Боголюбова и Крылова, открывшей длинный ряд их дальнейших исследований в теории приближенного решения дифференциальных уравнений, нелинейной механике и теории динамических систем. В этой статье рассматривается случай дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \lambda q(x)y + f(x), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Задача состоит в вычислении порядка малости выражения $|y(x_k) - y^{(n)}(x_k)| \equiv |y_k - y_k^{(n)}|$, где $y_k^{(n)}$ — решения системы в конечных разностях:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2} = \lambda q(x_k)y_k^{(n)} + f(x_k), \ k = 0,1,2,\dots,n-2, \\ y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0, \ \Delta x = n^{-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь нисходящие разности $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $\Delta^2 z_k = \Delta z_{k+1} - \Delta z_k, \dots$, λ — параметр. Предполагается, что $f'(x)$ и $q'(x)$ удовлетворяют условию Липшица. Для искомой разности получено выражение

$$y_k - y_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-2} z_k^{(i)} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j^{(n)} g_j z_j^{(n)} \Delta t}{\lambda - \lambda_i^{(n)}} + \varepsilon_k^{(n)}, \tag{3}$$

где $z_k^{(i)}$, $i = 1,2,\dots, n-2$, являются решениями однородной системы в конечных разностях:

$$\frac{\Delta^2 z_i^{(k)}}{\Delta x^2} = \lambda_k^{(n)} q_i z_i^{(k)}; \quad z_0 = z_n = 0; \quad k = 1,2,\dots, n-2. \tag{4}$$

Далее показано, что порядки малости $|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}|$ и $|\varphi_k - \varphi_k^{(n)}|$ равны n^{-1}, где λ_k и $\varphi_k \equiv \varphi(x_k)$ — k-е характеристическое число и характеристическая функция соответствующего (1) однородного уравнения, а $\lambda_k^{(n)}$ и $\varphi_k^{(n)} \equiv \varphi^{(n)}(x_k)$ — k-е разностное характеристическое число и характеристическая функция задачи (4). С использованием формулы (3) было показано, что $|y_k^{(n)} - y_k| \le M|\varepsilon_k^{(n)}|$, а порядок малости $|\varepsilon_k^{(n)}|$ равен n^{-2}. M —постоянная, зависящая от $|\lambda - \lambda_k|$, где λ_k — характеристическое число, ближайшее к рассматриваемому значению параметра λ.

Таким образом, принцип Рэлея в случае задачи (1) обоснован.

Далее Боголюбов и Крылов связывают задачу (1) и соответствующую разностную задачу (2) с принципом минимума, при котором граничная задача рассматривается как уравнение Эйлера, соответствующее условию минимума функционала $I[y]$ для (1) и суммы $S(y_i^{(n)})$ для (2). И в этом случае можно определить порядок малости соответствующих величин и обосновать принцип Рэлея.

Рассматривая простейшую вариационную задачу минимизации интеграла

$$\int_0^1 f(x, y, \frac{dy}{dx})dx = I[y], \tag{5}$$

Боголюбов показывает, что при определенных условиях уравнения Эйлера для экстремума (5) при заданных граничных условиях являются предельными для соответствующих конечно-разностных уравнений при тех же граничных условиях.

Боголюбов рассматривает граничную задачу двух измерений

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - q(x,y)u = f(x,y), \; q(x,y) > 0, \\ u(x,y) = 0, \; \text{если} \; (x,y) \in C, \end{cases} \tag{6}$$

где C — квадрат с вершинами (0,0), (1,0), (0,1), (1,1).

Соответствующая разностная задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta^2 u_{i,j}^{(n)}}{\Delta x^2} + \dfrac{\Delta^2 u_{i,j}^{(n)}}{\Delta y^2} - q(x_i,y_j)u_{i,j}^{(n)} = f(x_i,y_j), \\ u_{i,j}^{(n)} = 0, \text{ если } (\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \in C. \end{cases}$$

Показано, что если $q(x,y)$, $f(x,y)$ имеют производные до 3-го порядка включительно по совокупности аргументов, то порядок малости $|u - u_{i,j}^{(n)}|$ равен $1/\sqrt{n}$.

Решение проблем, связанных с обоснованием принципа Рэлея, естественно привело Боголюбова к задаче приближенного решения дифференциальных уравнений. В работе [2] Боголюбов рассматривает уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y,x) \tag{7}$$

с начальными условиями $y(0) = a$, $y'(0) = b$, где $f(y,x)$ удовлетворяет относительно y условию Липшица, непрерывна относительно x и ограничена при ограниченных y и x. Для приближенного решения (7) Боголюбов приводит эту задачу с начальными условиями к виду

$$y(x) = \int_0^x (x - \xi)f(y,(\xi),\xi)d\xi + a + bx.$$

Далее, обозначив выражением

$$\sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} F((x_i)\Delta x_i \tag{8}$$

некоторую формулу приближенного вычисления интеграла

$$\int_0^x F(\xi)d\xi,$$

что соответствует делению интервала (0,1) точками, Боголюбов рассматривает уравнения

$$y_n(x_k) = \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)}(x_k - x_i)f(y_n(x_i), x_i)\Delta x_i + a + bx_k.$$

Взяв n достаточно большим и выбрав надлежащим образом формулу (8) (например, используя формулу Лапласа), получаем схему приближенного вычисления $y(x)$. Далее Боголюбов изучает степень точности полученных приближений и показывает, что

$$|y(x_k) - y_n(x_k)| \le E_n \exp\left(A\lambda \frac{k}{n}\right) + \eta_n E_n,$$

где

$$A = \max |A_i^{(k)}|, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\lambda = \max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|, \quad 0 \le x \le 1, \quad -N \le y \le N,$$

$$E_n = \max \left| \int_0^{x_k} (x_k - \xi) f(y(\xi), \xi) d\xi - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} (x_k - x_i) f(y(x_i), x_i) \Delta x_i \right|,$$

а η_n стремится к нулю вместе с n. Вычисляя E_n, мы таким образом определяем максимум погрешности, которую совершаем, взяв $y_n(x_k)$ вместо $y(x_k)$. Боголюбов приводит формулу для оценки E_n сверху. В случае формулы Лапласа для (8) возникает известная к тому времени формула Штермера. В общем случае E_n при $n \to \infty$ имеет тот же порядок малости, что и $1/n$. Аналогичный способ рассуждений применен к приближенному решению интегрального уравнения с переменными пределами

$$y(x) = \int_0^x \phi(x, t, y(t)) dt. \tag{9}$$

Соответствующая приближенная формула

$$y_n(x_k) = \sum_{i=0}^{k-1} A_i^{(k)} \phi(x_k, x_i, y_n(x_i))$$

позволяет получить приближенное решение (9). Доказано, что если $\phi(x, t, y)$ удовлетворяет относительно x, t, y условиям Липшица, то погрешность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и соответствующий процесс Штермера сходится.

В работе [3] (ее результаты были получены фактически в 1925 г.) Боголюбов впервые обращает внимание на изучение задачи о вычислении вынужденных колебаний, удовлетворяющих нелинейным дифференциальным уравнениям. Позднее решение подобных задач привело к созданию совместно с Крыловым нового раздела математической физики — нелинейной механики.

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \gamma x^3 = k \sin \omega t. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$x\left(\frac{2\pi}{\omega} + t\right) = x(t). \tag{11}$$

Предполагая также, что

$$x(0) = 0, \tag{12}$$

мы приходим к задаче Дюффинга (1918), который решает ее методом последовательных приближений. В качестве первого приближения он берет $x(t) = A \sin \omega t$, где A определяется по методу Ритца, то есть посредством минимизации интеграла (при $x = A \sin \omega t$):

$$j[x] = \int\limits_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\gamma x^4}{4} + xk \sin \omega t\right) dt.$$

Последующие приближения ищутся из уравнений

$$\ddot{x}_n = -\alpha x_{n-1} + \gamma x_{n-1}^3 + k \sin \omega t,$$

$$x_n\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = x_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Применяя этот метод, Дюффинг не доказывает его сходимости. Боголюбов решает данную проблему при условии, что система является резонансной, т.е. $\alpha < 8\pi^{-2}\omega^2$. Доказано, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_\infty(t), \quad \lim_{n\to\infty} \ddot{x}_n(t) = \overline{x_\infty(t)}.$$

Причем имеет место соотношение $\overline{x_\infty(t)} = \ddot{x}_\infty(t)$, а $x_\infty(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (10) и условиям (11), (12).

В работе [4] Боголюбовым доказано существование такого интеграла дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа

$$\begin{cases} A_0 u_{xx} + A_1 u_{xt} + A_2 u_{tt} + A_3 u_x + A_4 u_t + A_5 u = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

который вместе со своими производными, входящими в уравнение, возрастает на бесконечности не быстрее чем $\exp(Mt)$, где M — некоторая постоянная. Предполагается, что функции $A_0, A_1, \ldots, A_5$ зависят только от x, и выполнены неравенства $A_0 < -\alpha$, $A_2 > \alpha$, $A_5 > 0$, где α — некоторое фиксированное положительное число. Попутно получены мажорационные оценки n-го приближения решения задачи (13).

Боголюбов и Крылов успешно применили разработанные ими методы мажорационных оценок при приближенном решении широкого класса задач математической физики к практически важным проблемам электротехники, строительной механики. Например, в работе [5] рассмотрена дифференциальная система, которая встречается при исследовании статики балки, лежащей на упругом основании. Дано решение вопроса о получении практически наиболее приемлемых мажораций для прогибов и моментов, т.е. о наименее мажорированном ограничении интеграла, а также второй производной интеграла дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\left(EI\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx^2}+ky=q,\quad k>0.$$

Рассмотрены различные типы граничных условий, отвечающих защемленным концам балки, свободно лежащей балке и шарнирно опертой по концам балке.

В 1932 г. вышла книга Боголюбова и Крылова «Исследование продольной устойчивости аэроплана» [6], которая была одним из первых практических руководств по важнейшей для того времени технической проблеме. Причем бесспорной ценностью этой книги явилось то, что она написана крупными математиками, создателями мощного математического метода приближенного решения широкого класса дифференциальных уравнений с граничными условиями и интегральных уравнений.

Сведение многих граничных задач для дифференциальных уравнений к задачам определения экстремума соответствующих функционалов привело Н.Н.Боголюбова к необходимости более детального исследования вопросов, возникающих в вариационном исчислении. При этом важнейшее значение приобретали именно прямые методы вариационного исчисления.

3. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (1926—1932)

Ранний этап научной деятельности Н.Н.Боголюбова был связан с некоторыми вопросами вариационного исчисления, послужившими темой кандидатской диссертации «Применение прямых методов вариационного исчисления к исследованию нерегулярных случаев простейшей задачи»

(1928). Результаты молодого ученого в этой классической области математики [7,8], имеющей столь же долгую историю, как и история исчисления бесконечно малых, сразу же приобрели широкую международную известность и были удостоены в 1930 г. премии имени Мерлани Академии наук Болоньи. В этом же году Президиум АН СССР присудил Боголюбову за данный цикл работ ученую степень доктора математики. Исследования Боголюбова в области вариационного исчисления нашли свое полное отражение в монографии [9].

Еще в конце 17 и начале 18 вв. такие знаменитые геометры, как Ньютон, Иоанн и Якоб Бернулли, Лейбниц, Маклорен,обратили внимание на особый род математических вопросов, в которых требовалось определить вид кривой линии или поверхности при условии, чтобы некоторая величина, зависящая от вида кривой или поверхности, была наибольшей или наименьшей. Впервые подобный вопрос встречается в ньютоновских «Началах» [10] в связи с задачей определения формы поверхности тела вращения, испытывающего наименьшее сопротивление движению со стороны окружающей его среды. Общий метод решения подобных вопросов был дан Эйлером (1744) и усовершенствован Лагранжем, который и назвал его вариационным исчислением. В начале 70-х годов прошлого столетия работы Вейерштрасса и Дарбу придали необходимую четкость и строгость основным проблемам вариационного исчисления и заложили основы так называемых классических методов вариационного исчисления, базирующихся на теории дифференциальных уравнений. С помощью классических методов вопрос об экстремуме какого-либо интеграла сводится к доказательству существования соответствующих решений дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа. Нетривиально здесь то, что задача рассматриваемого типа может и не иметь решений. Применение классических методов, таким образом, осложнено невозможностью во многих важных случаях установить существование решений соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому возникло стремление к построению для вариационного исчисления новых автономных (прямых) методов, независимых от теории дифференциальных уравнений. При этом особенно важно, что ряд задач теории дифференциальных уравнений может быть сведен к задачам вариационного исчисления, т.е. прямые методы вариационного исчисления дают возможность решения важных вопросов теории дифференциальных уравнений. Основы прямых вариационных методов были заложены Гильбертом, Каратеодори, Лебегом, Адамаром, Тонелли.

Сущность прямых методов может быть изложена [9] на примере так называемой простейшей задачи вариационного исчисления — задачи об абсолютном минимуме интеграла Лебега

$$I(y) = \int_a^b f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx \tag{14}$$

в пространстве G всех функций $y(x)$, имеющих почти всюду на интервале (a, b) интегрируемую первую производную и удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = a_1$, $y(b) = b_1$, где a, b, a_1, b_1 — некоторые постоянные числа. $f(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Пусть N — некоторое определенное положительное число и пусть для всех y, z и всех $x \in (a,b)$ выполнено условие $f(x, y, z) \geq -N$. Тогда, очевидно, $I(y) \geq N(a-b)$, т.е. величина $I(y)$ имеет в пространстве G точную нижнюю грань i. При этом $i \geq N(a-b)$. Следовательно, в пространстве G существует так называемая минимизирующая последовательность $y_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$, для которой $I(y_n(x)) \to i$ при $n \to \infty$.

Наложив на $f(x,y,z)$ более ограничительное, чем выше, условие

$$f(x,y,z) \geq \alpha\ |z|^{1+\beta} - N, \tag{15}$$

где α, β, N — положительные числа, из которых α и β не равны нулю, а x, y, z принимают все возможные значения из интервалов (a, b), $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ соответственно, можно показать, что последовательность $y_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на (a, b). Таким образом, в силу теоремы Арцела из нее можно выбрать последовательность $u_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$, равномерно сходящуюся в интервале (a, b): $u_n(x) \to u(x)$, $n \to \infty$, где $u(x)$ — некоторая функция из G.

Последний шаг наших построений состоит в установлении соотношения

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n(x)) = I(u(x)), \tag{16}$$

на основании которого можно было бы получить $I(u(x)) = i$, т.е., что предельная функция минимизирующей последовательности $u(x)$ дает абсолютный минимум $I(y)$. Именно на этом этапе возникают серьезные затруднения. Они связаны с тем, что в общем случае величина $I(y(x))$ не обладает относительно своего аргумента (функции $y(x)$) свойством непрерывности, даже для дважды непрерывно дифференцируемой $f(x,y,z)$. Для доказательства (16) в случае простейшей задачи вариационного исчисления, кроме установленного соотношения $u_n(x) \to u(x)$, $a < x < b$, $n \to \infty$, необходимо установить, что почти всюду на (a,b) выполняется и соотношение

$$u_n'(x) \to u'(x), \quad a < x < b, \; n \to \infty. \tag{17}$$

В общем случае доказать (17), а следовательно, и (16) невозможно. Однако это можно сделать при некоторых определенных предположениях, в частности, в так называемом регулярном случае, когда справедливо условие

$$f''_{z^2}(x,y,z) \ge \gamma > 0$$

для всех $x \in (a,b)$ и для произвольных y, z.

Несмотря на важность регулярного случая, необходимо отметить, что он чрезмерно ограничителен. Для установления справедливости (16) известный итальянский математик Тонелли применил к величине $I(y)$ понятие полунепрерывности, введенное в анализе Бэром.

В рассматриваемом нами случае для полунепрерывности всюду в пространстве G необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (15) и условие

$$f''_{z^2}(x,y,z) \ge 0, \tag{18}$$

где x, y, z — произвольные числа из интервалов (a,b), $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$ соответственно. Условие (18) введено Тонелли и названо им условием квазирегулярности. Условие (18) немного более общо́, чем введенное выше условие регулярности. Однако и в регулярное, и в квазирегулярное условия не включен наиболее интересный случай, когда функция $f''_{z^2}(x,y,z)$ может менять знак. Сложность этой задачи вариационного исчисления подчеркивается, между прочим, и тем, что тогда эйлерово соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь сингулярность

$$y'' = \frac{A(x,y,y')}{f''_{y'^2}(x,y,y')},$$

где $A(x,y,y')$ — некоторая регулярная функция своих аргументов.

Боголюбову принадлежит заслуга создания прямого метода, пригодного для изучения этой наиболее сложной, неквазирегулярной задачи вариационного исчисления. Попытки других исследователей в этом направлении заканчивались неудачей вследствие серьезных математических трудностей.

Идея использованного Боголюбовым метода состоит в построении связанного специальным образом с исходным функционалом (14) так называемого интеграла Гильберта и последующем исследовании соответствующего уравнения Эйлера. Поясним более подробно схему этого построения.

Определим сначала для каждой функции пространства G специальную величину $H(y)$, играющую основную роль в методе Боголюбова. Пусть $y_0(x)$ — произвольная функция из G. Для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ построим пространство $G_\varepsilon(y_0)$ всех функций $y(x)$ из G, для которых $|y(x) - y_0(x)| \le \varepsilon$ во всем интервале (a, b). Пусть $i_\varepsilon(y_0)$ — нижняя грань $I(y)$ в пространстве $G_\varepsilon(y_0)$. Легко заметить, что, когда ε, уменьшаясь, стремится к нулю, $i_\varepsilon(y_0)$ все время возрастает (так как пространство $G_\varepsilon(y_0)$ все время сужается). Следовательно, существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} i_\varepsilon(y_0) = H(y_0)$$

(конечный или бесконечный). Таким образом, $H(y)$ имеет значение для произвольной функции $y(x) \in G$ (точно так же, как и величина $I(y)$). Можно показать, что величина $H(y)$ полунепрерывна (снизу) всюду в G и нижние грани i_H, i, соответственно, величин $H(y)$, $I(y)$ в G равны одна другой:

$$i = i_H. \tag{19}$$

В силу полунепрерывности $H(y)$ и при выполнении условия (15) доказывается, что в G всегда существует такая функция $u(x)$, которая дает абсолютный минимум величине $H(y)$ в этом пространстве $H(u) = i_H$, откуда на основании (19) получаем

$$H(u) = i. \tag{20}$$

Следовательно, если для функции $u(x)$ выполнено равенство $H(u) = I(u)$, то (20) показывает, что в этом случае функция $u(x)$ дает абсолютный минимум в пространстве G также величине $I(y)$. Более того, можно показать, что для того, чтобы существовало решение задачи абсолютного минимума функционала $I(y)$ в пространстве G, необходимо и достаточно, чтобы среди функций, которые дают величине $I(y)$ в G абсолютный минимум, существовала по крайней мере одна такая функция $u(x)$, для которой $I(u) = H(u)$.

Определим теперь интеграл Гильберта, соответствующий исходному интегралу (14):

$$J(y) = \int_a^b \phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx. \tag{21}$$

Функционал (21) полунепрерывен всюду в G. Боголюбов доказывает, что если функция $f(x,y,z)$ удовлетворяет, например, условию

$$f(x,y,z) \leq A(x,y)|z|^{1+\beta} + B(x,y), \tag{22}$$

где $A(x,y)$, $B(x,y)$ — ограниченные функции своих аргументов, а $\beta > 0$, то $H(y) = J(y)$. Следовательно, очень сложную по определению величину (предел последовательности нижних граней) $H(y)$ можно представить в виде интеграла (21) того же самого вида, как и исходный интеграл (14), причем его подынтегральная функция $\phi(x,y,z)$ строится исходя из $f(x,y,z)$ при помощи процесса, просто объяснимого с геометрической точки зрения.

Боголюбовым доказано, что для того, чтобы задача об абсолютном минимуме интеграла $I(y)$ в G имела решение, необходимо и достаточно, чтобы среди решений (всегда существующих) задачи о минимуме интеграла $J(y)$ в G существовала такая функция $u_0(x)$, которая почти нигде в интервале (a, b) не совпадает с отрезками так называемых сингулярных функций. Далее доказывается, что всюду в G существует решение уравнения Эйлера для исходной задачи, состоящее из конечного числа экстремалей. Более того, какое бы ни было малое число $\varepsilon > 0$, всегда можно найти такое решение уравнения Эйлера, которое дает интегралу $I(y)$ значение, отличающееся от нижней грани i не больше чем на ε.

В работе [8] Боголюбов развивает описанные методы для случая криволинейного интеграла, зависящего от производных второго порядка и заданного параметрически:

$$I(C) = \int_{(C)} F(x, y, x', y', x'', y'')dt.$$

Подводя итог нашему обзору ранних работ Боголюбова по прямым методам вариационного исчисления, следует отметить, что уже в этих работах молодого ученого ясно виден характерный для всех его исследований научный стиль, состоящий в сочетании математической строгости с максимальной подробностью и ясностью изложения.

4. ТЕОРИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (1930—1990)

В 1930 г. появилась статья Н.Н.Боголюбова «О приближении функций тригонометрическими суммами» [11], а в следующем 1931 г. — «О тригонометрическом приближении функций на бесконечном интервале» [12]. В этих работах Боголюбов дает новое построение теории равномерных почти периодических функций, доказывая ряд теорем об их тригонометрической аппроксимации. Боголюбов показывает, что основные теоремы теории почти периодических функций являются результатами более общей теории, относящейся к произвольным ограниченным функциям. Согласно теоремам Боголюбова произвольная ограниченная функция в определенных линейных комбинациях ведет себя как тригонометрическая сумма и в определенном смысле имеет свойство почти периодичности.

Вопрос о приближении функций на всей действительной оси тригонометрическими суммами является предметом давних и многочисленных исследований математиков. В 1923 г., обобщая понятие периодичности, датский математик Х.Бор (младший брат известного физика, одного из создателей квантовой теории, лауреата Нобелевской премии Н.Бора) ввел понятие равномерной почти периодической функции. Некоторая непрерывная на всей действительной оси функция $f(t)$ называется равномерной почти периодической функцией, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $L_\varepsilon > 0$, что в каждом интервале длины L_ε существует почти период для ε, то есть такое число τ_ε, что для каждого $t \in (-\infty, +\infty)$ $|f(t + \tau_\varepsilon) - f(t)| \leq \varepsilon$. Исходя из этого определения, Бор доказал так называемую теорему о равномерной тригонометрической аппроксимации, а именно:

Теорема 4.1. Для любой равномерной почти периодической функции $f(t)$ каждому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такие в общем случае комплексные числа $A_1, A_2, \ldots, A_N$ (коэффициенты Фурье) и такие действительные числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$ (показатели Фурье), что равномерно при $-\infty < t < +\infty$

$$|f(t) - \sum_{n=1}^{N} A_n \exp(i\nu_n t)| \leq \varepsilon.$$

В дальнейшем были сделаны различные обобщения понятия почти периодической функции Бора и доказаны соответствующие теоремы о тригонометрической аппроксимации (Н.Винер (1925), Г.Вейль (1927), К.Валле-Пуссен (1927), С.Бохнер (1927)). Боголюбов показывает, что эти теоремы можно рассматривать как прямые следствия некоторого общего предложения.

Рассмотрим последовательности чисел

$$p_s^{(m)}(\varepsilon),\ q_s^{(m)}(\varepsilon),\ \tau_s^{(m)}(\varepsilon),\ \delta_s^{(m)}(\varepsilon),\ s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m,\ m = 1,2,\ldots,$$

зависящие от положительного числа ε, не равного нулю. Предположим, что эти последовательности удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} \tau_{s+1}^{(m)}(\varepsilon) - \tau_s^{(m)}(\varepsilon) \geq \alpha(\varepsilon), \; |\tau_{\pm m}^{(m)}(\varepsilon)| \leq A(\varepsilon)m, \; \sum\limits_{s=-m}^{m} |p_s^{(m)}(\varepsilon)|^2 m \leq B(\varepsilon), \\ \delta_{s+1}^{(m)}(\varepsilon) - \delta_s^{(m)}(\varepsilon) \geq \alpha(\varepsilon), \; |\delta_{\pm m}^{(m)}(\varepsilon)| \leq A(\varepsilon)m, \; \sum\limits_{s=-m}^{m} |q_s^{(m)}(\varepsilon)|^2 m \leq B(\varepsilon), \end{cases} \tag{23}$$

где $\alpha(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ являются конечными, отличными от нуля, положительными числами. Для каждого числа $\varepsilon > 0$ и целого числа $n_\varepsilon > 0$ обозначим через $P_\varepsilon(t)$ тригонометрическую сумму

$$P_\varepsilon(t) = A_1 e^{i\lambda_1 t} + \ldots + A_{n_\varepsilon} e^{i\lambda_{n_\varepsilon} t}.$$

Боголюбов доказывает следующие теоремы.

Теорема 4.2. Если числа $p_s^{(m)}(\varepsilon)$, $q_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\tau_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\delta_s^{(m)}(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (23), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число m_ε, что при $m \geq m_\varepsilon$

$$\int_{t-1}^{t+1} \left| f(t) - \sum_{s=-m}^{m} \sum_{r=-m}^{m} p_s^{(m)}(\varepsilon) q_r^{(m)}(\varepsilon) f\left(t + \tau_s^{(m)}(\varepsilon) + \delta_r^{(m)}(\varepsilon)\right) \right|^2 dt \leq \varepsilon,$$

и если к тому же при любом $T > 0$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt \leq C = \text{const},$$

то каждому положительному числу η можно поставить в соответствие такую тригонометрическую сумму $P_\eta(t)$, что

$$\int_{t-1}^{t+1} |f(t) - P_\eta(t)|^2 dt \leq \eta.$$

Теорема 4.3. Если числа $p_s^{(m)}(\varepsilon)$, $q_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\tau_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\delta_s^{(m)}(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (23), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число m, что

$$\left| f(t) - \sum_{s=-m}^{m} \sum_{r=-m}^{m} p_s^{(m)}(\varepsilon) q_r^{(m)}(\varepsilon) f\left(t + \tau_s^{(m)}(\varepsilon) + \delta_r^{(m)}(\varepsilon)\right) \right| \leq \varepsilon, \tag{24}$$

и если к тому же при любом $T > 0$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt \le C = \text{const}, \quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f'(t)|^2dt \le D = \text{const},$$

то каждому положительному числу ε можно поставить в соответствие такую тригонометрическую сумму $P_\varepsilon(t)$, что $|f(t) - P_\varepsilon(t)| \le \varepsilon$.

Теорема 4.4. Пусть числа $p_s^{(m)}(\varepsilon)$, $q_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\tau_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\delta_s^{(m)}(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (1), а также условиям

$$\sum_{s=-m}^{m}|p_s^{(m)}(\varepsilon)| \le E = \text{const}, \quad \sum_{s=-m}^{m}|q_s^{(m)}(\varepsilon)| \le E = \text{const},$$

пусть функция $f(t)$ удовлетворяет неравенству (24), справедливому для каждого целого $m \ge m_\varepsilon$. Тогда, если $f(t)$ равномерно непрерывна и ограничена на всей вещественной оси, то каждому числу $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такую тригонометрическую сумму $P_\varepsilon(t)$, что $|f(t) - P_\varepsilon(t)| \le \varepsilon$.

Теорема 4.5. Если каждому числу $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такие числа $l(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$, $k(\varepsilon)$ (где $k(\varepsilon)$ — целое), что в каждом интервале длины $l(\varepsilon)$ существуют числа $\tau_{r,\varepsilon}$ $(r = 1,2,\dots, k(\varepsilon))$, которым можно поставить в соответствие числа $A_{r,\varepsilon}$ $(r = 1,2,\dots, k(\varepsilon))$ так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\left|f(t) - \sum_{r=1}^{k(\varepsilon)} A_{r,\varepsilon}f(t + \tau_{r,\varepsilon})\right| \le \varepsilon, \quad |A_{r,\varepsilon}| \le A(\varepsilon),$$

$$\tau_{r+1,\varepsilon} - \tau_{r,\varepsilon} \ge \alpha(\varepsilon), \quad A(\varepsilon)(1 + k(\varepsilon)) \le A = \text{const},$$

если к тому же $f(t)$ является функцией непрерывной и ограниченной в каждом интервале, тогда эту функцию можно равномерно аппроксимировать тригонометрическими суммами.

Теорема 4.6. Если каждому числу $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такие числа $l(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$, $k(\varepsilon)$ (где $k(\varepsilon)$ — целое), что во всяком интервале длины $l(\varepsilon)$ существуют числа $\tau_{r,\varepsilon}$ $(r = 1,2,\dots, k(\varepsilon))$, которым можно поставить в соответствие числа $A_{r,\varepsilon}$ $(r = 1,2,\dots, k(\varepsilon))$ так, что

$$\int_{t-1}^{t+1}\left|f(t)-\sum_{r=1}^{k(\varepsilon)}A_{r,\varepsilon}f(t+\tau_{r,\varepsilon})\right|^2 dt \le \varepsilon,\quad |A_{r,\varepsilon}| \le A(\varepsilon),$$

$$\tau_{r+1,\varepsilon}-\tau_{r,\varepsilon} \le \alpha(\varepsilon),\quad A(\varepsilon)(1+k(\varepsilon)) \le A = \text{const},$$

если к тому же

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt \le C = \text{const},\quad T \to \infty,$$

то каждому положительному числу ε можно поставить в соответствие такую тригонометрическую сумму $P_\varepsilon(t)$, что для всякого вещественного значения t

$$\int_{t-1}^{t+1}|f(t)-P_\varepsilon(t)|^2dt \le \varepsilon.$$

Приведенные теоремы 4.2—4.6 Боголюбова обобщают теоремы Бора и Винера о тригонометрической аппроксимации почти периодических функций. Теорема Бора следует из приведенной теоремы 4.5, а теорема Винера — из теоремы 4.6, если в боголюбовских теоремах положить $k(\varepsilon) = 1$, $A_{r,\varepsilon} = 1$, $A = 2$.

В работе [13] 1939 г. Боголюбов дает новое, весьма элементарное доказательство теоремы о равномерной тригонометрической аппроксимации почти периодических функций. При этом им устанавливаются такие чисто арифметические свойства почти периодов, которые дают возможность приблизить определение Бора почти периодических функций к определению так называемых квазипериодических функций, для которых установление тригонометрической аппроксимации тривиально.

Понятие квазипериодических функций было введено замечательным рижским математиком П.Болем (1893). Согласно этому определению непрерывная функция $f(t)$, определенная на всей вещественной оси, является квазипериодической, если существуют такие линейно независимые действительные числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, что любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие η_ε таким образом, что любое число τ_ε, которое удовлетворяет условию $R(\tau_\varepsilon\omega_k) \le \eta_\varepsilon$ $(k = 1,2,\dots, m)$, является почти периодом (для ε), то есть для него $|f(t+\tau_\varepsilon) - f(t)| \le \varepsilon$ $(-\infty < t < \infty)$. Мы обозначили $R(x) = |x - E(x)|$, где $E(x)$ — ближайшее к x целое число. Из этого определения вытекает, что любую квазипериодическую функцию можно представить в виде

$$f(t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t, ..., \omega_m t), \tag{25}$$

где $F(x_1, x_2, ..., x_m)$ — непрерывная периодическая функция переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ с периодом l по каждому аргументу.

Из (25) непосредственно вытекает теорема о равномерной аппроксимации квазипериодической функции тригонометрическими суммами вида

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \exp(i \nu_n t),$$

где $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_N$ — линейные комбинации из «основных частот» $2\pi\omega_1$, $2\pi\omega_2$, ..., $2\pi\omega_m$.

Для того чтобы в теории почти периодических функций получить аналог «основных частот» функций Боля, Боголюбов доказывает следующую фундаментальную теорему.

Теорема 4.7. Если G — относительно плотное множество на вещественной оси, то любым достаточно малым положительным ε, η можно поставить в соответствие линейно независимые действительные числа ω_1, ω_2, ...,ω_s так, что если некоторое действительное число τ удовлетворяет неравенствам

$$R(\tau\, \omega_1) \le \varepsilon,\ R(\tau\, \omega_2) \le \varepsilon, ...,\ R(\tau\, \omega_1) \le \varepsilon, \tag{26}$$

то оно должно также удовлетворять неравенству

$$|\tau - \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 + \tau_4| \le \eta,$$

где τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 — некоторые точки из G.

Напомним, что множество G называется относительно плотным, если существует такое $L > 0$, что в каждом интервале длины L находится по крайней мере одна точка множества G.

Возвращаясь к теории почти периодических функций, заметим, что любая почти периодическая функция $f(t)$ является равномерно непрерывной в том смысле, что любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такое $\rho_\varepsilon > 0$, что если $|t' - t''| \le \rho_\varepsilon$, то $|f(t') - f(t'')| \le \varepsilon$.

Пусть теперь G — множество всех почти периодов для $\varepsilon/8$. Тогда, очевидно, все комбинации типа $\tau_1 \pm \tau_2 \pm \tau_3 \pm \tau_4$ ($\tau_1, ..., \tau_4 \in G$) являются почти периодами для $\varepsilon/2$. С другой стороны, в силу почти периодичности $f(t)$ множество G относительно плотное. Поэтому можно применить теорему 4.7. Полагая $\eta = \rho_{\varepsilon/2}$, убеждаемся, что любому достаточно малому ε можно поставить в соответствие линейно независимые числа («основные частоты») $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ так, что каждое τ, удовлетворяющее неравенствам $R(\tau\,\omega_1) = \varepsilon, \ldots, R(\tau\,\omega_s) \le \varepsilon$, является почти периодом для ε. Отличие «основных частот» $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ в теории почти периодических функций от теории квазипериодических функций Боля в том, что для почти периодических функций число s «основных частот» зависит от ε и может стремиться к бесконечности при $\varepsilon \to 0$. В квазипериодическом же случае s фиксировано. Однако это не мешает в почти периодическом случае для любого $\varepsilon > 0$ и любой боровской функции $f(t)$ построить соответствующую непрерывную функцию $F_\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, периодичную с периодом l по каждому из аргументов и такую, что $|f(t) - F_\varepsilon(\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, \omega_s t)| \le \varepsilon$. Из последнего неравенства немедленно вытекает теорема равномерной тригонометрической аппроксимации почти периодических функций.

В 1990 г. Н.Н.Боголюбов возвращается к исследованиям 1939 г. по теории почти периодических функций [14] и делает важные уточнения полученных ранее результатов. В частности, им дано явное построение функции $F_\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, фигурирующей в квазипериодической аппроксимации почти периодической функции. Для некоторого $\rho \in [0, 1/2]$ Боголюбов вводит функцию

$$\theta_\rho(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{R(x)}{\rho}, & \text{если } R(x) \le \rho, \\ 0, & \text{если } R(x) > \rho. \end{cases}$$

Полагая $\phi(x_2, \ldots, x_s) = \theta_\rho(x_1) \ldots \theta_\rho(x_s)$, он доказывает, что

$$F_\varepsilon(x_1, \ldots, x_s) = \lim_{T \to \infty} \frac{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \phi(\omega_1\tau - x_1, \ldots, \omega_s\tau - x_s) f(\tau)\,d\tau}{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \phi(\omega_1\tau, \ldots, \omega_s\tau)\,d\tau}, \tag{27}$$

и предел в правой части (27) существует.

Таким образом, мы видим, что глубокие исследования Н.Н.Боголюбова по аппроксимации равномерных почти периодических функций дали новый оригинальный подход в теории этих функций, так как все основные свойства равномерных почти периодических функций просто следуют из теоремы аппроксимации. Здесь важно то, что доказательство теоремы аппроксимации Боголюбовым не опирается не только на равенство Парсеваля, но и вообще почти ни на какие свойства равномерных почти периодических функций. Более того, исследуя арифметические свойства почти периодов, Боголюбов показал непосредственно, не прибегая к теореме аппроксимации и к аппарату теории рядов Фурье, что почти периоды равномерной почти периодической функции суть все решения системы неравенств вида (26) при некоторых $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. А это эквивалентно основной теореме для равномерных почти периодических функций. В дальнейшем результаты Боголюбова по теории почти периодических функций нашли важное применение в проблемах нелинейной механики.

5. НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА (1932—1969)

В 1932 г. Н.Н.Боголюбов совместно с Н.М.Крыловым приступил к разработке проблем теории нелинейных колебаний, названной ими нелинейной механикой [15]. В течение пяти лет Боголюбову и Крылову удалось внести выдающийся вклад в этот раздел математической физики. Исследования при этом велись в двух направлениях: создание асимптотических методов интегрирования нелинейных уравнений, описывающих колебательные процессы, и математическое обоснование этих методов, сводящееся к исследованию общей теории динамических систем.

Решение систем нелинейных дифференциальных уравнений является классическим и одним из наиболее важных для приложений разделов математики. При этом выделенное значение имеют задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям с малым или большим параметром. Подобные уравнения, содержащие малый параметр (возмущенные системы), впервые возникли в астрономии. По-видимому, Эйлер (1772) был первым, кто сделал попытку их исследования при рассмотрении движения Луны. Уже Делоне (1860), используя метод последовательных канонических преобразований, установил важность устранения неограниченных (секулярных) членов в рядах решения в теории движения Луны. В 1882 г. Линдстедт показал значение развития асимптотических методов, дающих возможность исключить секулярные и смешанные секулярные члены при исследовании возмущенных гармонических осцилляторов. Проблема Линдстедта заключается в получении решения уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t),$$

где ε — параметр, $0 < \varepsilon < 1$. Решение ищется в виде рядов

$$x = x_0(t) + \varepsilon\, x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0(t) + \varepsilon\, \dot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \dot{x}_2(t) + \ldots,$$

где $x_j(t)$, $\dot{x}_j(t)$ $(j = 0,1,2,\ldots)$ — ограниченные функции при всех $t \in \mathbf{R}$. Линдстедт строил опорное решение $x_0(t) = a\cos(\omega t + \delta)$, $\dot{x}_0(t) = -a\omega\sin(\omega t + \delta)$, где ω — вначале неизвестная величина, представимая степенным рядом $\omega = \omega_0 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$, а $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ — константы, зависящие от ω_0, a и функции f. Основную трудность при таком подходе составляет выбор опорной частоты и доказательство сходимости соответствующих формальных рядов.

Пуанкаре и Ляпунов в конце 19 века разработали строгие методы для исследования периодических решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром. Однако, как с математической, так и с физической точки зрения, эти решения образуют сравнительно узкий класс ограниченных решений. Боголюбов и Крылов ставят вопрос о квазипериодических (условно периодических) решениях уравнений, соответствующих автопериодическим колебательным системам. В работе [16] они устанавливают существование и основные свойства стационарных квазипериодических колебаний в автопериодических системах с одной и двумя степенями свободы.

Рассматривается уравнение нелинейных колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\, f(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \tag{28}$$

где ε — параметр, $f(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$ — аналитическая функция, разлагающаяся в степенной ряд при достаточно малых значениях ε:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(t, x, \dot{x}).$$

Предполагается, что функции f_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ являются целыми полиномами по отношению к x, $\dot{x}$, $\cos t$, $\sin t$. Исследуются два случая: нерезонансный (ω иррационально) и резонансный ($\omega = \frac{r}{s} + \varepsilon\sigma$, где r и s — целые числа). С помощью особого итерационного метода строятся формальные решения уравнения (28) в виде разложений по ε, вообще говоря, расходящихся. Хотя и можно использовать эти формальные разложения как источники приближенных вычислений и оценок ошибок, получающихся при отбрасывании членов выше некоторого порядка, но все же больший интерес имеет установление связи первого приближения с точным решением рассматриваемого уравнения.

Сначала с помощью специального алгоритма строятся приближенные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \frac{\varepsilon}{\omega} F(a_n) + \varepsilon^2 F_1(a_n) + \ldots + \varepsilon^n F_{n-1}(a_n) + \varepsilon^{n+1} R^{(n)}(a_n, \theta_n, t, \varepsilon), \\ \dot{\theta}_n = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega a_n} \phi(a_n) + \varepsilon^2 \phi_1(a_n) + \ldots + \varepsilon^n \phi_{n-1}(a_n) + \varepsilon^{n+1} S^{(n)}(a_n, \theta_n, t, \varepsilon). \end{cases}$$

Здесь важно отметить, что приближенные уравнения для a_n, θ_n получаются из точных уравнений для a_{n-1}, θ_{n-1} после «усреднения» правых частей этих точных уравнений по обеим угловым переменным (т.е. после взятия в соответствующем разложении Фурье только постоянного члена) и отбрасывания членов порядка малости ε^{n+1}.

Далее Боголюбов и Крылов рассматривают первое приближение в этой схеме и устанавливают ряд свойств точных решений (28) на бесконечном интервале.

Уравнения первого приближения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\overline{a}} = \frac{\varepsilon}{\omega} F(\overline{a}), \\ \dot{\overline{\theta}} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega \overline{a}} \phi(\overline{a}). \end{cases} \tag{29}$$

Допустим теперь, что уравнение $F(a) = 0$ имеет простой (не равный нулю) корень a_0: $F'(a_0) \neq 0$. Предположим для определенности, что $F'(a_0) < 0$. В этом случае уравнения (29) имеют стационарное решение $\overline{a} = a_0$, $\overline{\theta} = \nu t + \psi$, где ψ — произвольная постоянная интегрирования, а $\nu = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega a_0} \phi(a_0)$. Соответствующее приближенное стационарное решение для уравнения (28) есть

$$x = a_0 \sin(\nu t + \psi) + \varepsilon \sum_{\substack{n,m \\ n^2 + (m^2-1)^2 \neq 0}} \frac{f_{n,m}(a_0)\, e^{im\psi}}{\omega^2 - (n + m\omega)^2} e^{i(n+m\nu)t}. \tag{30}$$

Используя ряд тонких рассуждений, Боголюбов и Крылов доказывают следующую замечательную теорему.

Теорема 5.1. Если алгебраическое уравнение $F(a) = 0$ имеет простой, не равный нулю корень a_0, то рассматриваемое дифференциальное уравнение (28) при достаточно малых ε имеет семейство точных стационарных решений вида $x = z(t, \nu(\varepsilon)t)$, где $\nu(\varepsilon)$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица и периодическая по θ, φ с периодом 2π. Начальные значения x_0, x'_0 этих стационарных решений лежат в соседстве порядка ε с областью Г начальных значений приближенных стационарных решений (3). При иррациональных значениях $\nu(\varepsilon)$ точные стационарные решения являются квазипериодическими функциями в смысле Боля (с двумя основными частотами) и образуют множество, зависящее непрерывно от произвольной постоянной ψ. При рациональных же значениях функции $\nu(\varepsilon)$ рассматриваемые стационарные решения являются обычными периодическими функциями и образуют, вообще говоря, дискретное множество.

Далее, используя теорию Пуанкаре — Данжуа, Боголюбов и Крылов устанавливают теорему устойчивости в рассматриваемом случае. Если алгебраическое уравнение $F(a) = 0$ имеет не равный нулю корень a_0, причем $F'(a_0) < 0$, то при достаточно малом ε всякое решение дифференциального уравнения (28), начальные значения которого x_0, x'_0 лежат в соседстве с областью Г начальных значений приближенных стационарных решений (30), стремится при $t \to +\infty$ к одному из точных стационарных решений вида $x = z(t, \nu(\varepsilon)t)$.

Боголюбов и Крылов, изучая аналитическую структуру описанных выше стационарных решений вида $x = z(t, \nu(\varepsilon)t)$ в зависимости от параметра ε, устанавливают, что в общем случае эти семейства решений неаналитичны в своей зависимости от ε. Таким образом, определенные ранее формальные разложения

$$z(\theta, \varphi) = z_0(\theta, \varphi) + \varepsilon z_1(\theta, \varphi) + \ldots + \varepsilon^n z_n(\theta, \varphi) + \ldots =$$
$$= a_0 \sin(\varphi + \psi) + \varepsilon \sum_{\substack{n,m \\ n^2+(m^2-1)^2 \neq 0}} \frac{f_{n,m}(a_0)\, e^{im\psi}}{\omega^2 - (n + m\omega)^2} e^{i(n\theta + m\varphi)} + \ldots,$$

где φ — постоянная интегрирования,

$$\nu = \omega + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega a_0}\phi(a_0) + \ldots,$$

являются вообще расходящимися при сколь угодно малых ε. Исследуя асимптотические свойства полученных формальных разложений, Боголюбов и Крылов получают эффективные оценки аппроксимации n-го порядка:

$$|\nu(\varepsilon) - (\omega + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^n\omega_n)| < C_{n-1}\varepsilon^{n+1},$$

$$|z(\theta, \varphi) - z_0(\theta, \varphi) - \varepsilon z_1(\theta, \varphi) - \ldots - \varepsilon^n z_n(\theta, \varphi)| <$$
$$< C_n^*\varepsilon^{n+2}N + K_n^* D(\nu, N) + L_n^*\varepsilon^{n+1},$$

где C_n, C_n^*, K_n^*, L_n^* — определенные постоянные, которые не зависят ни от ε, ни от N; N — произвольное целое положительное число; $D(\nu, N)$ связано с задачей распределения дробных частей чисел вида αn.

До сих пор рассматривался так называемый нерезонансный случай, когда ω иррационально. Боголюбов и Крылов развили свои методы и на случай, когда ω близко к рациональным числам вида r/s, где r и s — целые числа, фигурирующие в знаменателях конечных сумм

$$\sum_{\substack{n,m \\ n^2+m^2\neq 0}} L_{n,m} \frac{e^{i(nt+m\theta)}}{i(n + m\omega)}, \qquad \sum_{\substack{n,m \\ n^2+m^2\neq 0}} M_{n,m} \frac{e^{i(nt+m\theta)}}{i(n + m\omega)}.$$

Доказано, что и в резонансном случае имеют место утверждения, совершенно аналогичные нерезонансному.

Боголюбов и Крылов рассмотрели также случай двух степеней свободы:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \varepsilon f_k(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), \ k = 1,2.$$

И здесь ими получены асимптотические формулы для оценки ошибок n-го приближения и доказаны теоремы, устанавливающие связь точных стационарных решений со стационарными решениями первого приближения.

Разрабатывая асимптотические методы, Боголюбов и Крылов уделили особое внимание построению простых и эффективных приемов, позволяющих получать приближенные формулы. К этим приемам относятся принцип эквивалентной линеаризации и символические методы [17].

Описанные нами асимптотические методы были эффективно применены Боголюбовым к решению ряда актуальных задач. Им получены формулы второго приближения для определения частоты стационарных колебаний в электронных генераторах, позволяющие определить влияние обертонов на стабильность частоты, исследовались резонансы деления частоты, внутренние резонансы в системах со многими степенями свободы. Теория резонанса сыграла огромную роль в вопросах использования нелинейных элементов для борьбы с резонансом в машиностроении. Асимптотические методы Боголюбова — Крылова применялись для решения задач о продольной устойчивости самолета, колебаниях и устойчивости стержней и т.д.

Помимо решения чисто прикладных задач нелинейной механики Боголюбов посвятил ряд работ строгому обоснованию асимптотических методов. Еще в работе [16] было отмечено, что уравнения первого приближения (29) получаются из точных путем усреднения правых частей точных уравнений по времени. Поскольку же качественное поведение исходной системы в существенных своих чертах определяется свойствами системы первого приближения («усредненной»), то строгое обоснование принципа усреднения представляется чрезвычайно важным. Этот вопрос был детально разработан в монографии «О некоторых статистических методах в математической физике» [18]. Остановимся более подробно на результатах Боголюбова в этом направлении.

Во многих случаях, с помощью простых замен переменных, дифференциальные уравнения колебаний могут быть приведены к одной общей форме вида

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon\, X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{31}$$

где ε — малый параметр. Для упрощения записи условимся рассматривать совокупности n величин $(x_1, \ldots, x_n)$, $(X_1, \ldots, X_n)$ как точки n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ и обозначать их соответственно через x и X. В методе усреднения системе (31) сопоставляется система усредненных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\, X_0(\xi), \tag{32}$$

где

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0 X(t, x)dt.$$

Предполагается, что среднее в правой части последнего соотношения существует. Отметим, что в той или иной форме принцип усреднения уже давно применялся для получения приближенных решений в работах основоположников небесной механики. Боголюбову принадлежит заслуга решения проблемы обоснования принципа усреднения. Причем эта проблема поставлена и решена в двух аспектах. Во-первых, при рассмотрении решения $x = x(t)$ точных уравнений (31) и решения $\xi = \xi(t)$ усредненных уравнений, совпадающих при $t = 0$, найдены условия, при которых для достаточно малого ε величина $|x(t) - \xi(t)|$ может быть сделана сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале $[0, t_0]$. Во-вторых, установлено соответствие между свойствами точных и приближенных решений, которые зависят от их поведения на бесконечном интервале времени $[0, +\infty)$. Боголюбовым доказана следующая важная теорема.

Теорема 5.2. Если функция $X(t, x)$ удовлетворяет условиям:

(а) для некоторой области $D \subset \mathbf{R}^n$ можно указать такие положительные постоянные M и λ, что для всех вещественных $t \geq 0$ и для любых точек x, x', x'' из D удовлетворяются неравенства

$$|X(t, x)| \leq M, \quad |X(t, x') - X(t, x'')| \leq \lambda |x' - x''|,$$

(б) равномерно по отношению к x в области D существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)dt = X_0(x),$$

тогда любым, сколь угодно малым положительным ρ, η и сколь угодно большому L можно сопоставить такое положительное ε_0, что если $\xi(t)$ есть решение уравнения (32), определенное в интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области D вместе со своей ρ-окрестностью, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < L/\varepsilon$ справедливо неравенство $|x(t) - \xi(t)| < \eta$, в котором $x(t)$ есть решение уравнения (31), совпадающее с $\xi(t)$ при $t = 0$.

Заметим, что для ограниченной области D в условии (б) можно исключить требование равномерности по x и сформулировать условие существования предела в каждой точке этой области. Кроме того, в случае ограниченности области D условие (б) будет удовлетворено, если $X(t, x)$ для каждого $x \in D$ оказывается почти периодической функцией t.

Боголюбов отмечает, что полученный результат может быть обобщен и на случаи, когда уравнение (31) рассматривается в бесконечномерном пространстве. Этот случай интересен для обоснования принципа усреднения применительно к уравнениям в частных производных и к различным типам функциональных уравнений. В этом направлении ряд важных результатов получен в работах как советских, так и зарубежных математиков (Митропольский, Неймарк, Дилиберто, Хейл, Лефшец, Уизем). Интересно, что в зарубежной литературе метод усреднения часто называют методом усреднения Боголюбова — Уизема.

Боголюбов доказал ряд замечательных теорем о соответствии свойств решений уравнений (31) и (32) на всем бесконечномерном временном интервале [18]. При этом фактически были заложены основы так называемого метода интегральных многообразий в нелинейной механике, получившего бурное развитие в СССР и за рубежом, особенно с 1961 г. после обзорного доклада Н.Н.Боголюбова и Ю.А.Митропольского [20] на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в Киеве (1961). В работе «О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики», прочитанной в качестве лекций на летней математической школе (г. Канев, июнь 1963 г.), Боголюбовым были рассмотрены вопросы существования интегральных многообразий тороидального типа, обладающих свойством асимптотического притяжения близких траекторий, и распространения этих результатов на случаи высших размерностей. Тем самым вопрос об исследовании стационарных колебательных процессов приводится к вопросу об изучении структуры траекторий, лежащих на таких интегральных многообразиях. Эта работа была посвящена вопросам существования квазипериодических решений и установлению их свойств аналитичности по отношению к малому параметру на основе объединения метода В.И.Арнольда [19а], Ю.Мазера [19б] с методом Боголюбова [19в] доказательства существования интегральных многообразий. Подробное изложение метода интегральных многообразий с обзором результатов отечественных и зарубежных исследований содержится в книге [19].

Завершая наше беглое изложение основных результатов Боголюбова в теории нелинейных колебаний, следует сказать, что развитые им методы асимптотического исследования нелинейных дифференциальных уравнений, приведшие к доказательству ряда фундаментальных теорем о геометрическом поведении интегральных кривых систем дифференциальных уравнений, явились естественным и мощным развитием исследований А.Пуанкаре в области небесной механики. Круг вопросов, связанных с этими проблемами, составляет основу математической физики, истоки которой восходят к трудам Ньютона, Эйлера, Лагранжа, Пуассона. Заслуги Боголюбова в развитии современной математической физики несомненны, а его имя занимает достойное место в ряду имен этих замечательных математиков.

6. ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (1935—1947)

Исследование проблем нелинейной механики, связанных с системами дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{33}$$

где правые части являются непрерывными функциями точки $p(x_1, \ldots, x_n)$ в некоторой замкнутой области D n-мерного евклидова пространства E_n, неизбежно привело Боголюбова и Крылова к вопросам общей теории динамических систем. В 1935 г. вышла первая краткая работа по этой тематике [21]. Боголюбов и Крылов внесли фундаментальный вклад в абстрактную теорию динамических систем и эргодическую теорию. Ими доказана теорема о существовании инвариантной меры, введено важное понятие об эргодическом множестве, установлены теоремы о разбиении инвариантной меры на неразложимые инвариантные меры, локализованные в эргодических множествах, рассмотрены проблемы эргодической теории стохастических систем, для которых изменение фазового состояния, в отличие от систем классической механики, слабо детерминировано и удовлетворяет лишь некоторым вероятностным законам. Работы Боголюбова по абстрактной теории динамических систем во многом опередили свое время, а их значение и возможные применения еще недостаточно оценены.

Основы современной общей (абстрактной) теории динамических систем (в особенности систем с инвариантной мерой) были заложены А.Пуанкаре в знаменитой работе «Новые методы небесной механики. III» (гл. XXVI). Дальнейшее развитие этой теории связано главным образом с именами Биркгофа, Хопфа, Каратеодори, Хинчина, Маркова, Боголюбова и Крылова. Абстрактное определение динамической системы (Марков, 1931) возникло из обобщения определения динамической системы при помощи дифференциальных уравнений (33). Динамическая система есть однопараметрическая группа $f(p, t)$ $(-\infty < t < \infty)$ преобразований метрического пространства R $(p \in R)$ на себя $(f(p, t) \in R)$, удовлетворяющая условиям: а) $f(p, 0) = p$, б) $f(p, t)$ непрерывна по совокупности переменных p и t, в) $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$ (свойство группы). Образ множества A из R при преобразовании группы, соответствующем данному t, будем обозначать $f(A, t)$. В теории динамических систем важное место занимают так называемые эргодические теоремы, касающиеся некоторых средних по времени и их связи со средними по пространству.

Пусть в R введена мера Каратеодори. Эта мера μA для любого $A \subset R$ определяется аксиомами:

1) $\mu A \geq 0$, причем существуют множества положительной конечной меры и мера пустого множества $\varnothing$ равна 0;

2) если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$;

3) для любой счетной последовательности множества имеет место неравенство

$$\mu \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n;$$

4) если $\rho(A, B) > 0$, то $\mu(A + B) = \mu A + \mu B$.

Определенная в пространстве R мера μ называется инвариантной (относительно динамической системы $f(p, t)$), если для любого μ-измеримого множества A имеет место равенство $\mu f(A,t) = \mu A$ $(-\infty < t < \infty)$. Инвариантная мера является естественным обобщением интегрального инварианта, использованного Пуанкаре для доказательства его классической теоремы о рекуррентности движений в системах Лиувилля.

В предположении существования инвариантной меры μ в пространстве R динамической системы имеют место так называемые теоремы о возвращении Пуанкаре — Каратеодори (1919).

Теорема 6.1. Пусть $A \subset R$ — измеримое множество, $\mu A > 0$. Тогда найдутся значения t $(t > t_0)$ такие, что $\mu\,[A \cap f(A,t)\,] > 0$.

Теорема 6.2. Если мера всего пространства R конечна, то почти все точки (по мере μ) устойчивы по Пуассону.

Хинчин (1933) дал количественную оценку меры возвращающихся множеств. Именно он показал в случае $\mu R = 1$, что неравенство $\mu\,[A \cap f(A,t)\,] > \lambda(\mu A)^2$ при любом $\lambda < 1$ выполняется для относительно плотного множества значений t. Хопф (1930) обобщил вторую теорему Пуанкаре — Каратеодори о возвращении точек на случай, когда мера всего пространства R бесконечна.

Теорема 6.3. Пусть дано локально-компактное метрическое пространство R динамической системы со счетной базой; в нем определена инвариантная мера μ такая, что $\mu R = \infty$, а для любого компактного множества $F \subset R$ мера μF конечна. Тогда почти все точки $p \in R$ при $t \to \infty$ либо устойчивы по Пуассону, либо являются уходящими, т.е. дают начало траекториям, не имеющим предельных точек при $t \to \infty$.

Наконец, Биркгоф (1931) доказал так называемую эргодическую теорему, положившую начало целой статистической теории динамических систем.

Теорема 6.4. Если в пространстве R определена инвариантная мера μ, причем $\mu R = 1$, то для любой абсолютно суммируемой функции $\varphi(p)$ существует временное среднее

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(f(p,t))dt \tag{34}$$

за исключением, быть может, точек $p \in \mathfrak{E}$, где $\mu\,\mathfrak{E} = 0$. Если, кроме того, предположить, что система $f(p, t)$ транзитивна, то временное среднее (34) имеет одно и то же значение почти для всех точек $p \in R$.

Напомним, что система $f(p, t)$, $p \in R$, называется транзитивной по отношению к мере μ, если R нельзя представить как сумму двух измеримых инвариантных множеств положительной меры без общих точек, иначе: если A инвариантно, измеримо и $\mu A > 0$, то $\mu(R - A) = 0$.

Из сформулированных выше важнейших теорем теории динамических систем мы видим, что в них действительно существенным условием является наличие инвариантной меры. В 1937 г. Боголюбов и Крылов [22] для весьма широкого класса динамических систем дали построение меры, инвариантной относительно данной динамической системы. Ими была доказана следующая теорема.

Теорема 6.5. Пусть μ — любая нормированная мера, определенная в компактном метрическом пространстве R. Тогда последовательность мер

$$\phi_\tau A = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \mu[f(A, -t)]dt, \quad \tau \to \infty$$

компактна и каждая предельная мера этой последовательности является инвариантной нормированной мерой.

При доказательстве этой теоремы Боголюбов и Крылов существенно использовали то, что множество нормированных мер в компактном пространстве R компактно.

Наряду с глубоким исследованием эргодических свойств классических динамических систем, Боголюбов и Крылов, начиная с 1937 г., проявляют интерес к задачам, в которых на движение этих систем оказывает влияние статистическое изменение каких-либо параметров.

В классической механике обычно изучают различные движения точки на поверхности Ω $2n$-мерного евклидова пространства, определяемой уравнением $H(q_1,..., q_n, p_1,..., p_n) = E$, где $P = (q_1,..., q_n, p_1,..., p_n)$ — фаза, то есть совокупность координат и импульсов консервативной системы с n степенями свободы и функцией Гамильтона H. Дифференциальные уравнения движения определяют преобразование $P \to P_t$ пространства Ω на себя. P_t — фаза в момент времени t, когда в нулевой момент система имела фазу P. Рассматривается случай дискретного времени, при котором мы наблюдаем за фазой в моменты $t = t_n = n\tau$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$. Тогда эволюция P запишется в виде $P_n = T^n P$, где T — взаимно однозначное преобразование Ω на себя, то есть $T\Omega = \Omega$. В общем случае Ω — метрическое сепарабельное и связное пространство с мерой $m(U)$, определенной на Ω и инвариантной относительно преобразования T. Предположим, что $m(\Omega)$ конечна, а $m(\mathcal{O}) > 0$ для всякого открытого непустого множества $\mathcal{O} \subset \Omega$.

Во многих важных случаях (особенно в задачах с большим числом частиц) начальная фаза P неточно определена. Поэтому после достаточно длительного промежутка времени ($n >> 1$) конечная фаза P_n полностью не определена. Мы сталкиваемся с проблемой изучения таких динамических свойств, которые верны с вероятностью, равной 1, то есть свойств, которые, не будучи справедливы для всех движений, все же имеют единичную вероятность (Гиббс, Пуанкаре). После М.Бореля такие свойства стали трактоваться как свойства, справедливые почти всюду в стандартном смысле теории меры множеств. В случае транзитивной меры $m(U)$ Биркгоф доказал, что для всякой ограниченной и m-измеримой функции $f(P)$ почти всюду в Ω

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^{-k} P) = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} f(P) dm. \tag{35}$$

Именно соотношение (35), устанавливающее связь между средними по времени и пространству, как раз и является доказательством эргодической гипотезы, необходимой для обоснования статистической механики.

До сих пор статистические понятия вводились только за счет неопределенности начальной фазы P, а оператор эволюции T предполагался полностью определенным. В действительности T зависит от какого-то количества параметров α (то есть $T = T_\alpha$), и их значения нам тоже известны лишь в некотором приближении. Поэтому нет смысла говорить о каком-то особенном положении точки α (совокупность параметров) в некотором метрическом сепарабельном пространстве G, так же как нет смысла говорить о каком-то особенном положении первоначальной фазы P в Ω. Итак, возникает возможность изучения свойств движения T_α, справедливых почти всюду в G. Именно эта проблема и была поставлена Боголюбовым и Крыловым в серии работ [23—25].

Предполагается, что точка $\alpha \in G$ также изменяется во время движения, только, возможно, в очень узких пределах. Тогда при $t = t_n$: $P_n = T_{\alpha_{n-1}} \ldots T_{\alpha_0} P$, α_0 — начальное положение α, P — начальное положение фазы. Пусть $G_\infty = G \times G \times \ldots \times G \times \ldots$ и точка этого пространства Σ представляет собой последовательность вида $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, где $\alpha_n \in G$ при любом $n = 0,1,2,\ldots$. Тогда $P_n = P_n\,(P, \Sigma)$. Так как Σ в G_∞ не полностью определена, то мы будем изучать свойства, имеющие место почти всюду в G_∞. Для изучения этих свойств в G_∞ вводится мера ν с помощью известного приема композиции мер.

Пусть μ — мера в G, а области $A_i \subset G$ $(i = 0,1,\ldots)$. Пусть

$$U = A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n \times \ldots . \tag{36}$$

Определим $\nu(U) = \mu(A_0)\,\mu(A_1)\ldots\mu(A_n)\ldots$. Если $\mathfrak{U} \subset G_\infty$, а U_i — такие множества вида (36), что $\mathfrak{U} \subset U_1 + \ldots + U_r$, то по определению $\nu(\mathfrak{U}) = \lim\inf\{\nu(U_1) + \ldots + \nu(U_r)\}$. Введем пространство $\Gamma = \Omega \times G_\infty$, точкой которого Π является совокупность точки $P \in \Omega$ и точки $\Sigma \in G_\infty$. Мера M в Γ определяется стандартным образом: $M(U) = m(A)\,\nu(B)$, где $U = A \times B$, $A \subset \Omega$, $B \subset G_\infty$. В соответствии с вышесказанным Боголюбов и Крылов изучают динамические свойства, имеющие место почти всюду в Γ.

Прежде всего, пространство Γ расширяется до пространства $\bar{\Gamma} = \Omega \times \ldots \times G \times \ldots \times G \times \ldots$. Точка ω из $\bar{\Gamma}$ есть последовательность вида $P, \ldots, \alpha_{-n}, \ldots, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, где $P \in \Omega$, $\alpha_k \in G$. Пусть $\bar{M}$ — мера в $\bar{\Gamma}$. Рассмотрим преобразование $\bar{\Gamma}$ в себя: $\omega' = \xi\,\omega$, при котором $\omega = (P, \alpha_k) \to \omega' = (P', \alpha_k')$ и $P' = T_{\alpha_0} P$, $\alpha_k' = \alpha_{k+1}$. Доказано, что мера $\bar{M}$ инвариантна относительно ξ и мы можем применить теорему Биркгофа. Поэтому для любой ограниченной и $\bar{M}$-измеримой функции $\phi(\omega)$ почти всюду в $\bar{\Gamma}$:

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \phi(\xi^k\omega) = \phi^*(\omega),\\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \phi(\xi^{-k}\omega) = \phi^*(\omega),\end{gathered} \tag{37}$$

где $\phi^*(\omega)$ ограничена и $\bar{M}$-измерима.

Далее Боголюбов и Крылов вводят понятия множества U, квазивариантного относительно класса операторов T_α, когда почти всюду в G: $U \cong T_\alpha U$. Мера m на Ω является квазитранзитивной, если Ω невозможно разделить на два квазиинвариантных множества без общих точек положительной меры. Доказано, что если мера m квазитранзитивна, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(P_k, \Sigma_k) = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} \int_{G_\infty} F(P, \Sigma)\,dm\,d\nu \tag{38}$$

для любой ограниченной и M-измеримой функции $F(P, \Sigma)$. Последнее соотношение есть как раз условие эргодичности. Таким образом, задача сводится к установлению условия, достаточного для квазитранзитивности меры m. Боголюбов и Крылов доказывают, что это условие состоит в том, что выражение

$$\int_G f(T_\alpha P)\,d\mu(\alpha)$$

является непрерывной функцией P в Ω для любой ограниченной и m-измеримой функции $f(P)$ (условие (A)) [23].

Таким образом, справедливость эргодического свойства (38) для рассматриваемой консервативной системы, динамика которой зависит от набора параметров α, вытекает из условия (A), которое связано с усреднением лишь в пространстве G.

В работе [24] рассматривается случай неконсервативных систем, т.е. мера m в пространстве фаз Ω уже не постоянна относительно любого оператора T_α, а преобразование T_α в Ω может и не быть взаимно однозначным. Для этого случая Боголюбов и Крылов также рассматривают задачу обоснования эргодической гипотезы, но вместо условия (A) вводят следующее условие: для всякой функции $f(P)$, m-суммируемой в Ω, должно выполняться неравенство

$$\left| \int_G f(T_\alpha P) d\mu(\alpha) \right| \leq C \int_\Omega |f(P)|\, dm(P), \quad P \in G, \; C = \mathrm{const}. \tag{39}$$

В [25] Боголюбов и Крылов, пользуясь идеями работ [23,24], изучают повторные итерации вида

$$\begin{gathered} \varphi_k^{(1)} = \omega_k^{(0)} + \varphi_k + f_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_r), \quad k = 1,2,\ldots, r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_k^{(m+1)} = \omega_k^{(m)} + \varphi_k^{(m)} + f_k(\varphi_1^{(m)}, \ldots, \varphi_r^{(m)}), \quad k = 1,2,\ldots,r, \end{gathered} \tag{40}$$

где $\omega_k^{(i)}$ — постоянные параметры, статистически колеблющиеся в пределах $\nu_k - \varepsilon \leq \omega_k^{(m)} \leq \nu_k + \varepsilon$, $k = 1,2,\ldots,r$, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — точки на торе Ω. Рассмотрен случай, когда преобразование (40) сохраняет объем. Устанавливается, что почти всюду в $G_\infty = G \times G \times \ldots$, где G — евклидов параллелепипед $\nu_k - \varepsilon \leq \omega_k \leq \nu_k + \varepsilon$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) = \frac{1}{V} \int_\Omega f(P) dP \tag{41}$$

для любой ограниченной и измеримой функции $f(P)$. $P = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ — точка тора Ω объемом V. Взяв в (41) $f(P) = \nu_s + f_s(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, имеем, что почти для всякого ряда $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(\alpha = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in G)$ существуют числа вращения

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_s^{(n)}}{n} = \nu_s + \frac{1}{(2\pi)^r} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f_s(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) d\varphi_1 \ldots d\varphi_r.$$

Доказано, что всякое неисключительное движение на торе образует всюду плотное множество. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ — последовательные значения , удовлетворяющие неравенству

$$|\varphi_s - \varphi_s^{(k)}| \leq \varepsilon, \ s = 1,2,\ldots,r.$$

Тогда доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^r.$$

Кроме того, любопытно, что в отличие от почти периодических и даже рекуррентных движений в смысле Биркгофа эти почти периоды $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ не образуют относительно плотного ряда.

Наряду с вопросами эргодической теории динамических систем классической механики, Боголюбов и Крылов исследовали системы, для которых изменение фазового состояния слабо детерминировано и удовлетворяет лишь некоторым вероятностным законам [26].

Рассматривается система в метрическом, сепарабельном и связном пространстве, для которой существуют определенные вероятности $P_t(x; U)$ того, что система, находясь в начальный момент времени в состоянии x, окажется в момент времени t в одном из состояний измеримого по Борелю множества U. Боголюбов и Крылов в рамках ансамбля Гиббса обобщают для таких стохастических систем такие основные понятия эргодической теории, как инвариантная мера и метрическая транзитивность.

В работах [27,28] Боголюбов и Крылов распространили понятие метрической транзитивности на стохастические системы, взяв в качестве транзитивных мер неразложимые инвариантные меры. Ими рассмотрены стохастические системы, для которых функциональная операция, преобразующая любую функцию $f(x)$ в функцию

$$\int_\Omega f(y)P_t\,(x,\, dy)(t > 0),$$

имеет радиус сходимости Фредгольма, больший 1. Показано, что множество всех инвариантных мер представляет собой конечномерный симплекс, что дает возможность не только обобщить на стохастические системы все результаты классической механики, но и получить еще более далеко идущие следствия: ограниченность числа эргодических множеств, совпадение любого движения со стационарным через некоторое время, существование среднего по времени и его совпадение с одним из возможных средних по пространству.

В работе [29] Боголюбов обобщает результаты [22] на более широкий класс непрерывных групп преобразований компактного метризованного пространства Ω. Им доказана теорема о существовании инвариантной (относительно H_G) меры на пространстве Ω. Дано обобщение на случай группы H_G определения транзитивных мер. Доказаны теоремы о существовании этих мер и о возможности приближения, в определенном смысле, произвольных инвариантных мер комбинациями транзитивных мер. Рассмотрен вопрос о разбиении Ω на сумму эргодических множеств.

Исследование инвариантных мер на группах привело Боголюбова к изучению инвариантных средних для вполне непрерывных операторов на так называемых полуупорядоченных пространствах [30]. В 1940 г. на киевской конференции по функциональному анализу и теории функций были доложены теоремы, ранее установленные Боголюбовым и Крыловым для интегральных уравнений, связанных с теорией марковских процессов.

Линейный функционал на полуупорядоченном пространстве E называется инвариантным средним вполне непрерывного оператора T, если $m(x)$ — положительный функционал ($m(x) > 0$ при всех $x > \theta$), $m(u) = 1$ и $m(Tx) = m(x) = T^*m(x)$. Здесь θ — нулевой элемент E, u — единичный элемент E, T^* — сопряженный оператор. Доказано, что совокупность всех инвариантных средних положительного вполне непрерывного оператора с нормой 1 образует симплекс в пространстве E^* линейных на E функционалов. Если, кроме того, $Tu = u$, то все характеристические числа T, модуль которых равен 1, являются корнями уравнения $\lambda^N = 1$, где N — целое положительное число. Доказанные теоремы особенно важны при изучении проблемы транзитивности инвариантных мер на группах.

В работах [31,32] Боголюбов и Крылов исследуют асимптотическое поведение ($N \to \infty$) сумм вида

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

в областях, определенных некоторыми ограничительными неравенствами, и устанавливают связь рассматриваемых сумм со средними значениями

$$\int f(x)\,\rho(x)dx,$$

взятыми по всему пространству с весовой функцией $\rho(x)$ — аналогом плотности распределения.

Результаты Боголюбова по абстрактной теории динамических систем и нелинейной механике помимо самостоятельного интереса послужили отправной точкой в исследовании широкого круга вопросов статистической механики, к разработке которых Боголюбов приступил в 1939 г. в совместной работе с Н.М.Крыловым, посвященной уравнению Фоккера — Планка [33]. Начиная с 1945 г. проблемы статистической механики в различных ее аспектах стали доминирующими в творчестве Боголюбова. Этим проблемам были посвящены усилия выдающегося ученого вплоть до последних дней его жизни.

7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (1939—1991)

Исследования Н.Н.Боголюбова по статистической механике охватывают почти все ее вопросы, включающие обоснование статистической механики, равновесную статистическую механику классических и квантовых систем, неравновесную статистическую механику. Во всех этих разделах Боголюбовым получены фундаментальные результаты, являющиеся основой современных методов изучения систем большого числа частиц.

К первому кругу вопросов статистической механики, которые привлекли внимание Боголюбова, относится фундаментальная задача о взаимодействии двух подсистем или, точнее, задача о поведении механической системы (классической или квантовой), уравнения движения которой могут быть точно проинтегрированы, находящейся под воздействием внешнего возмущения. В качестве внешнего возмущения может быть взята либо зависящая от времени внешняя случайная возмущающая сила, либо может быть рассмотрена более общая ситуация, когда наша невозмущенная система взаимодействует с другой макроскопической системой (так называемым термостатом). Решение подобной задачи в разных ее вариантах постоянно привлекало внимание Боголюбова, начиная с первой работы [33] на эту тему, написанной в соавторстве с Н.М.Крыловым.

В данной работе рассмотрена проблема вывода фундаментальных для статистической механики уравнений Фоккера — Планка как приближенных уравнений, основанных на спектральных свойствах гамильтониана возмущений. При этом существенно, что этой работой был открыт путь для пересмотра основ теории стохастических систем, в которой к тому времени не существовало метода последовательного вывода стохастических уравнений типа уравнений Фоккера — Планка как приближенных уравнений в единой схеме классической или квантовой механики без каких-либо априорных допущений о существовании вероятностей переходов из одного состояния рассматриваемой динамической системы в другое.

Дальнейшее развитие исследование задачи о поведении системы, подверженной внешнему случайному воздействию, нашло в замечательной послевоенной работе Н.Н.Боголюбова [18]. Им рассмотрены задачи о влиянии случайной силы на гармонический вибратор и об установлении статистического равновесия в системе, связанной с термостатом.

Один из основных принципов статистической механики состоит в том, что в системе, связанной с термостатом, устанавливается статистическое равновесие. Однако данный принцип чрезвычайно трудно проиллюстрировать даже на каком-либо частном примере. А ведь проблема макроскопической необратимости является, по-видимому, ключевым пунктом наших представлений о физической реальности. В работе [18] Боголюбов как раз и исследовал эту проблему, исходя из микроскопических обратимых уравнений классической механики.

Дальнейшее детальное исследование проблемы о возможности стохастического процесса в динамической системе, на которую оказывает влияние большая система, было осуществлено Боголюбовым в 70-х годах и опубликовано в работе [34]. В этой работе в рамках классической механики рассмотрена кинетика и гидродинамика малой системы S, например, просто отдельной частицы, слабо взаимодействующей с большой системой Σ. В случае одной частицы ее лиувиллиан $\hat{\mathfrak{L}}_s^0 = -v_0 \frac{\partial}{\partial r_0}$, а лиувиллиан взаимодействия этой частицы с частицами термостата Σ имеет вид

$$\hat{\mathfrak{L}}_{S\Sigma} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \phi(r_0 - r_j)}{\partial r_0} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial v_0} - \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial v_j} \right),$$

где $\phi(r)$ — некая радиально-симметричная функция, пропорциональная малому параметру, m — масса частицы S, M —масса какой-либо частицы из Σ. Напомним, что оператор Лиувилля (лиувиллиан) $\hat{\mathfrak{L}}$ можно определить с помощью скобок Пуассона $\hat{\mathfrak{L}}D = [H,D]$, где H — гамильтониан, а D — произвольная функция в соответствующем фазовом пространстве. В [34] рассмотрен также важный частный случай, когда взаимодействие между S- и Σ-частицами можно определить как взаимодействие непроницаемых шаров: $\phi(r) \to \infty$ при $r < a$, $\phi(r) = 0$ при $R \geq a$, a — расстояние между центрами частиц в момент соударения. Боголюбовым получено приближенное кинетическое уравнение для приведенного распределения вероятности в S-системе $f_t(S)$. Это есть немарковское уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \hat{\mathfrak{L}}^0_S f_t + \int_0^t K(t-\tau) f_\tau d\tau. \tag{42}$$

Ядро $K(t)$ в (42) есть определенная сложная функция, являющаяся средним по равновесному гиббсовскому распределению термостата. Дальнейшая задача состоит в упрощении или в явном вычислении этого ядра в конкретных случаях. Боголюбову удалось получить такое выражение для $K(t)$, в которое уже явно входят переменные S- и Σ-систем в максимально разделенном виде. При этом возникает необходимость вычисления равновесных средних только по термостатным переменным Σ, что и проводится далее. Получено явное выражение для $K(t)$ в случае взаимодействия непроницаемых шаров и в случае кулоновского взаимодействия между S- и Σ-системами. В работе рассмотрены два случая начальных данных, когда при $t = 0$ функция распределения всей системы $S + \Sigma$ $D_0(S, \Sigma) = f_0(S) D_{\text{eq}}(\Sigma)$ и когда $D_0(S, \Sigma) = h(S) D_{\text{eq}}(S, \Sigma)$, где $D_{\text{eq}}(\Sigma)$ и $D_{\text{eq}}(S, \Sigma)$ — равновесные функции распределения для Σ и для $S + \Sigma$ соответственно. Второй из этих случаев необходим для рассмотрения модели непроницаемых шаров. В этой модели Боголюбовым выведено линеаризованное уравнение Навье — Стокса и вычислены его коэффициенты. В гидродинамическом приближении получены явные выражения для равновесных временных корреляционных средних.

Методы Боголюбова исследования задачи о взаимодействии «малой» и «большой» подсистем послужили мощным стимулом для многих авторов в решении этой проблемы. Различные ее аспекты рассматривались как отечественными, так и зарубежными учеными (см., например, [35—38]).

Одним из важных для физики примеров взаимодействия двух подсистем является задача о взаимодействии частицы с квантовым полем. В этом случае обычно рассматривают гамильтониан $H = H_p + H_\nu + H_{\text{int}}$, в котором H_p соответствует собственной энергии частицы (или, более общо, S-подсистеме), H_ν —энергия квантового (фононного) поля (Σ), H_{int} — энергия взаимодействия S и Σ. Обычно квантовое поле может быть разложено на взаимодействующие осцилляторы, т.е.

$$H_\nu = \frac{1}{2} \sum_p \hbar \omega_p (b_p b_p^+ + b_p^+ b_p),$$

где ω_p — частота осцилляторов, b_p, b_p^+ — операторы с перестановочными соотношениями статистики Бозе — Эйнштейна. Для нерелятивистской частицы $H_p = p^2/2m$. Типичная форма энергии взаимодействия имеет вид

$$H_{\text{int}} = \sum_p \, [U_p \, \mathrm{e}^{ipr} b_p + U_p^* \, \mathrm{e}^{-ipr} b_p^+],$$

где U_p, $U_p^* \sim V^{-1/2}$, V — объем системы, в котором происходит взаимодействие S- и Σ-подсистем.

В работе [39] Боголюбов изучил данную модель с помощью особой формы теории возмущений в так называемом случае адиабатической связи, когда в качестве малого возмущения рассматривается не энергия взаимодействия, а кинетическая энергия поля, т.е. формально можно считать, что $U_p = \varepsilon B_p$, а $\hbar\,\omega_p = \varepsilon^2 \nu_p$, ε — малый параметр. Данная форма теории возмущений была разработана Боголюбовым совместно с С.В.Тябликовым [40]. Идея метода состоит в специальной замене переменных в исходном гамильтониане, при которой в преобразованном гамильтониане $\tilde{H}$ уже не будет содержаться одна из канонически сопряженных переменных, отвечающая системе. Физически это соответствует трансляционной инвариантности исходного гамильтониана. Выражение для $\tilde{H}$ получается в виде ряда по степеням ε. Волновое уравнение $(H - E)\Psi = 0$ решается теперь с помощью обычной схемы теории возмущений. Боголюбов находит энергию основного состояния и эффективную массу частицы в первом приближении, уточняя соответствующие результаты С.И.Пекара (1946) и Л.Д.Ландау и С.И.Пекара (1948).

В 1978 г. [41] Боголюбов изучает кинетические аспекты задачи о взаимодействии динамической системы с фононным полем.

В работах [42,44] Н.Н.Боголюбов совместно с Н.Н.Боголюбовым (мл.) развил функциональный вариационный метод исследования поляронной модели. Введена важная для возможных аппроксимаций линейная модель полярона. Предложен специальный метод так называемых T-произведений для вычисления термодинамических равновесных характеристик данной задачи. Подробно вычисляются корреляционные функции, функции Грина и свободная энергия. На основе вариационной техники рассмотрена возможность сведения обычного поляронного гамильтониана к аппроксимирующему точно решаемому модельному «линейному» гамильтониану. Использование метода расчета средних от T-произведений, предложенного Боголюбовым, сказывается гораздо проще и эффективнее, чем сходное вычисление с помощью континуальных интегралов или интегралов Фейнмана [43].

В 1990 г. Боголюбов возвращается к проблеме полярона [54]. Используя специальный вариационный принцип и существенно упрощая методы своей работы [39], Боголюбов строит теорию полярона во втором порядке по малому параметру ε адиабатической аппроксимации. При этом попутно им получена следующая изящная формула для эффективной массы полярона M в вариационном приближении:

$$M = m + \frac{1}{3(2\pi)^3} \int df \, \frac{f^2 \mathcal{L}^2(f)}{\omega_f^4} \left| \int dx \, \varphi_0^2(x) \, e^{-ifx} \right|^2,$$

где $\varphi_0(x)$ — решение соответствующей вариационной задачи.

В 1946 г. появляются замечательные работы Боголюбова [45—47], в которых сформулирован способ решения проблем кинетики, исходя из механики совокупности молекул.

Основы кинетической теории были заложены более ста лет назад Максвеллом (1866) и Больцманом (1872). Опубликование в 1902 г. «Основных принципов статистической механики» Дж.Гиббсом ознаменовало рождение нового раздела физики — статистической механики. Классические методы кинетической теории, восходящие к Больцману, построены на полном пренебрежении корреляцией между динамическими состояниями пар молекул (гипотеза молекулярного хаоса — Stosszahlansatz), и к тому же в них рассматривают динамический процесс инерциального движения молекул и стохастический процесс их соударений как не интерферирующие, ввиду чего в кинетическом уравнении член соударений приписывается к конвекционному члену чисто феноменологически. Боголюбов предлагает метод решения проблем кинетики и гидродинамики, позволяющий получать кинетические и гидродинамические уравнения с единой, последовательно микроскопической точки зрения. С помощью этого метода можно уточнять формулы классической кинетической теории наподобие того, как для случая статистического равновесия это делается в теории Урсела — Майера. Боголюбов впервые вводит важное в неравновесной статистической механике понятие сокращенного описания, связанное с представлением о временах релаксации исходной системы многих взаимодействующих частиц. Фактически появление работ Боголюбова по неравновесной статистической механике классических систем ознаменовало новый этап развития статистической механики — этап, на котором статистическая механика стала одним из важнейших и наиболее сложных разделов математической физики.

Боголюбов рассматривает совокупность N одинаковых одноатомных классических молекул, заключенных в некотором конечном макроскопическом объеме V. Динамическое состояние каждой i-молекулы определяется ее положением $q_i = (q_i^\alpha)$ и импульсом $p_i = (p_i^\alpha)$, $\alpha = 1,2,3$. Динамическая эволюция системы полностью определена каноническими уравнениями

$$\frac{\partial q_i^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha}, \quad \frac{\partial p_i^\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i^\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3; \; i = 1,2,\dots, N.$$

Гамильтониан H обычно рассматривается как сумма индивидуальных энергий молекул T и взаимных потенциалов пар молекул ϕ:

$$H = \sum_{s=1}^{N} H_s(x_1, x_2,\dots, x_s);$$

$$H_s = \sum_{i=1}^{s} T(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le s} \phi(|q_i - q_j|).$$

Обычно $T(p) = p^2/2m$ — кинетическая энергия молекулы. В соответствии с идеей статистического описания вводится функция распределения всей системы $D = D(t, x_1,\dots, x_N)$, где $x_i = (q_i, p_i)$. Далее Боголюбов вводит s-частичные функции распределения

$$F_s(t, x_1,\dots, x_s) = V^s \int_{\Omega_V} \dots \int D(t, x_1,\dots, x_N)dx_{s+1} \dots dx_N,$$

где Ω_V — фазовое пространство одной молекулы. Кинетическое уравнение — уравнение для F_1 (иногда для F_2). Основной вопрос кинетической теории состоит в получении замкнутого уравнения для этой одночастичной функции распределения, то есть такого уравнения, куда бы не входили высшие (F_2, F_3, ..., ...) функции распределения. Используя методы, ранее разработанные им в нелинейной механике, Боголюбов дает последовательный рецепт построения кинетических уравнений, в которых в дальнейшем естественно возникают уравнения гидродинамики.

Прежде всего с помощью уравнения Лиувилля для D и определения s-частичных функций распределения F_s просто выводится так называемая цепочка уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона (ББГКИ-иерархия), являющаяся точной системой зацепляющихся уравнений для F_s. В термодинамическом пределе ($N \to \infty$, $V \to \infty$, $n^{-1} \equiv v = V/N$) она имеет вид

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v}\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{s} \phi(q_i - q_{s+1}|); F_{s+1}\right] dx_{s+1}.$$

Здесь

$$H_s = H_s(x_1,\ldots, x_s) = \sum_{i=1}^{s} T(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le s} \phi(|q_i - q_j|),$$

$[\ldots ; \ldots]$ — скобка Пуассона.

Боголюбов, применяя схему функциональных производных, использованную им для случая статистического равновесия [48], показывает, как можно изучать функции F_s и уравнения для них путем введения производящего функционала:

$$L_n(t,u) = \int\limits_{\Omega} \ldots \int dx_1 \ldots dx_N D(t, x_1,\ldots, x_N) \prod_{j=1}^{N} (1 + vu(x_j)),$$

где $u(x)$ — произвольные регулярные функции, заданные на всем фазовом пространстве Ω одной молекулы и достаточно быстро стремящиеся к нулю при возрастании $|q|$, $|p|$.

Исходя из иерархии ББГКИ, Боголюбов получает формальные выражения для F_s через F_1 и так называемый оператор соударений $S_t^{(s)}$: $S_t^{(s)}\psi(x_1,\ldots, x_s) = \psi(X_1,\ldots, X_s)$, где $X_j(t, x_1,\ldots, x_s)$ $(j = 1,2,\ldots, s)$ — решение уравнений Гамильтона для s молекул, находящихся при $t = 0$ в точках $x_1, x_2,\ldots, x_s$ фазового пространства. Для F_1 выполняется формально точное уравнение, являющееся, так же как и выражение для F_s, рядом по степеням v^{-1}. Кинетическое уравнение первого приближения для пространственно однородного случая $F_1(t, q, p) = w(t, p)$ есть при этом классическое кинетическое уравнение Больцмана.

Боголюбов, используя выведенное им приближенное кинетическое уравнение, приходит к уравнениям гидродинамики. При этом удается строить поправки как к уравнению состояния, так и к коэффициентам вязкости и теплопроводности, расположенным по степеням плотности. В стационарном случае схема Боголюбова приводит к известным разложениям Урсела — Майера (1941). Используя разложение по степеням малости энергии взаимодействия, Боголюбов получает в качестве первого приближения уравнения Ландау и Власова. Боголюбов также рассматривает случай кулоновского взаимодействия молекул.

При выводе кинетических уравнений Боголюбов предложил так называемый принцип ослабления корреляций, в котором условие ослабления корреляций используется в качестве граничного условия, благодаря чему явная структура интеграла столкновений получается уже на динамическом уровне:

$$S_{-\tau}^{(s)}\left\{F_s - \prod_{j=1}^{s} F_1(t, x_j)\right\} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty,$$

где $S_{-\tau}^{(s)}$ заменяет координаты $q_1,...,q_s$ координатами $q_1 - \dfrac{p_1}{m}\tau,...,q_s - \dfrac{p_s}{m}\tau$ соответственно.

Использование при выводе кинетических и гидродинамических уравнений схемы метода усреднения нелинейной механики естественно привело Боголюбова к понятию иерархии времен релаксации. В эволюции s-частичных функций распределения имеется два процесса — «медленный» процесс изменения одночастичной функции распределения с эффективной длительностью порядка $t_r = \nu u_{\text{ср}}^{-1} r_0^{-2}$ (r_0 — радиус взаимодействия молекул, $u_{\text{ср}}$ — средняя скорость молекулы) и «быстрый» процесс синхронизации корреляционных функций с эффективной длительностью порядка $t_k = r_0 u_{\text{ср}}^{-1}$. Таким образом, при $t >> t_k$ s-частичная функция распределения $F_s(t, x_1,..., x_s)$ синхронизуется через одночастичную функцию $F_1(t, x)$:

$$F_s \sim \prod_{j=1}^{s} F_1.$$

Аналогично, рассматривая эволюцию $F_1(t, x)$, мы опять замечаем два процесса — «медленный» процесс изменения гидродинамических функций ρ, u, θ (плотность, скорость, кинетическая энергия) и «быстрый» процесс изменения F_1. Быстрый процесс проявляется в синхронизации с гидродинамическими функциями за время порядка t_r. Итак, при $t < t_k$ мы имеем чисто динамический процесс, описываемый в рамках механики совокупности молекул, при $t > t_k$ мы можем воспользоваться кинетическими уравнениями в той или иной приближенной форме, а при $t > t_r$ уже наступает так называемый гидродинамический этап эволюции и мы можем использовать уравнения гидродинамики.

Заметим, что идея времен релаксации появилась в контексте статистической механики впервые в работе Боголюбова [18] при изучении процесса стохастической эволюции гармонического осциллятора, находящегося во внешнем случайном поле.

Рассматривая системы большого числа частиц, для получения точных термодинамических соотношений, необходимо совершать в рассматриваемой системе термодинамический предельный переход. Боголюбов уделял большое внимание строгому математическому обоснованию такого предельного перехода к бесконечному числу степеней свободы в бесконечном объеме для классических систем [49,50]. Отметим, что в статье [49] впервые начато математически строгое изучение термодинамического предельного перехода для корреляционных функций.

В связи с проблемами кинетической теории отметим важную работу Боголюбова [52]. В ней показано, что уравнение Больцмана — Энскога, описывающее кинетику системы, состоящей из упругих шаров диаметром a, которое всегда рассматривалось как приближенное уравнение в случае малой плотности, имеет микроскопические решения, соответствующие точному движению частиц.

Результаты Боголюбова по неравновесной и равновесной теории классических статистических систем являются основой многочисленных современных методов статистической механики [36,51,53]. Фундаментальная монография Боголюбова «Проблемы динамической теории в статистической физике», наряду с «Лекциями по теории газов» Больцмана и гиббсовскими «Основными принципами статистической механики», на многие годы определила развитие статистической физики, являясь учебником для начинающих исследователей и источником новых идей для активно действующих специалистов.

В 1947 г. научные интересы Н.Н.Боголюбова обращаются на проблемы квантовой статистической механики. Прежде всего совместно с К.П.Гуровым [55] он проводит обобщение метода построения кинетических уравнений на основе динамики молекул на квантовый случай слабого взаимодействия.

Проблема постpения кинетики неидеальных систем бозевских частиц тесно связана с вопросом об их равновесных свойствах. Построение микроскопической теории сверхтекучести, являющейся фундаментальным свойством бозевских систем, привлекло внимание Боголюбова в 1947 г. В этом же году в печати появились две его работы [56,57], в которых дана замечательная по простоте и последовательности приближенная схема метода вторичного квантования в применении к модели неидеального бозе-газа.

Явление сверхтекучести было открыто П.Л.Капицей в 1938 г. Оказалось, что ниже абсолютной температуры 2,19 К жидкий гелий He II становится состоящим как бы из двух компонент: сверхтекучей, совершенно лишенной вязкости, и нормальной. При уменьшении температуры количество сверхтекучей компоненты возрастает. Феноменологическая теория, объясняющая это явление, была предложена Тиссой (1938) и в несколько иной форме — Л.Ландау (1941). Ландау эмпирически ввел предположение о характере спектра элементарных возбуждений в жидком гелии, состоящем из двух ветвей: фононной, где $\varepsilon(p) = cp$, и ротонной, где $\varepsilon(p) = \Delta + (p - p_0)^2/2\mu$ (Δ, c, p_0 — некоторые постоянные, μ — эффективная масса). Именно фононный характер спектра при малых импульсах и обеспечивает возможность образования «связанного» коллектива бозонов, совершающего сверхтекучее движение. Боголюбову [58] принадлежит заслуга микроскопического доказательства того, что при некоторых условиях в слабонеидеальном газе Бозе — Эйнштейна «вырожденный конденсат» может двигаться без трения относительно элементарных возбуждений с произвольной, достаточно малой скоростью $u \le \min\limits_{(p)} \frac{\varepsilon(p)}{|p|}$. В идеальном газе, где не учитывается взаимодействие между бозонами, $\varepsilon(p) = p^2/2m$, $\min\limits_{(p)} \frac{\varepsilon(p)}{|p|} = 0$ и явление сверхтекучести отсутствует. Кроме того, Боголюбов получил выражение для спектра $\varepsilon(p)$ элементарных возбуждений, из которого следует вывод о единстве спектра фонон-ротонных возбуждений.

В 1963 г. Боголюбов [59] дал последовательный вывод уравнений гидродинамики сверхтекучей идеальной жидкости, исходя из уравнений движения системы одинаковых бозе-частиц, и получил на этом пути так называемое гидродинамическое приближение для функций Грина. Он обобщил вывод уравнений гидродинамики для нормальной компоненты [55] на случай наличия сверхтекучей компоненты. Система уравнений гидродинамики для сверхтекучей жидкости представлена Боголюбовым в следующем виде:

$$m\,\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r^{(\alpha)}}\left\{m\left(v_s v_n - \frac{v_n^2}{2}\right) + \Lambda + U\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{\beta}\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\beta)})}{\partial r^{(\beta)}} - ia(\xi^* - \xi) = 0,$$

$$m\left\{\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r^{(\beta)}} (\rho_s v_s^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\alpha)} v_n^{(\beta)}\right\} +$$

$$+ \frac{\partial P}{\partial r^{(\alpha)}} + \rho \frac{\partial U}{\partial r^{(\alpha)}} - ima^*(\xi^* - \xi) v_s^{(\alpha)} = 0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial(\rho v_n^{(\beta)} S)}{\partial r^{\beta)}} = 0,$$

где ρ, ρ_s, ρ_n — плотности жидкости, ее сверхтекучей и нормальной компонент ($\rho = \rho_s + \rho_n$), v_s, v_n — скорости сверхтекучей и нормальной компонент, давление $P = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho}$, энтропия $S = -\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\Lambda = F + \rho \frac{\partial F}{\partial \rho}$, $F = F(\rho, \theta)$ — свободная энергия, U — внешнее поле, ξ, ξ^* связаны с источниками частиц, $a = |\langle \psi(t, r) \rangle|$ и $\psi(t, r)$ — бозевский оператор уничтожения. Ранее в случае $U = 0$, $\xi = 0$ эту систему получил Ландау (1941), исходя из феноменологических соображений. Ландау использовал квантование уравнений гидродинамики, не учитывая статистики. При этом из его теории следовало существование энергетической щели, фононов, ротонов и т.д., что делало правдоподобным объяснение сверхтекучести квантовой гидродинамикой. Однако из метода Ландау следовало, что He^3, как и He^4, испытывает фазовый переход, и поэтому конденсация Бозе — Эйнштейна не является его причиной. Фейнман [60] показал, «что квантовая гидродинамика не предсказывает спектра возбуждений, как это ранее полагали Ландау и другие исследователи», поскольку «гидродинамика Ландау должна приводить к множеству низколежащих возбуждений, так что эта теория не объясняет сверхтекучести. Ошибка Ландау состоит в том, что, неявно предполагая различимость частиц, он пренебрег эффектами статистики» [61].

Боголюбов, линеаризуя гидродинамические уравнения (43) вблизи покоящегося состояния статистического равновесия, получил так называемые «акустические» уравнения и связал гидродинамические величины, получаемые из этих линеаризованных уравнений, с функциями Грина. При этом им получены явные выражения для функций Грина $\langle\langle a_k, a_{-k} \rangle\rangle_E$ и $\langle\langle a_k, a_k^+ \rangle\rangle_E$, и, в частности, установлено, что эти функции имеют полюсы, соответствующие двум типам элементарных возбуждений $\varepsilon = c_0 p$ и $\varepsilon = c_1 p$, где c_0 стремится к обычной скорости звука как при $\rho_s \to 0$, так и при $\theta \to 0$, а c_1 — специфическая для сверхтекучей жидкости скорость «второго звука», стремящаяся к нулю при $\rho_s \to 0$.

Таким образом, Боголюбов фактически дал микроскопическое объяснение явления сверхтекучести в He^4, связанного с образованием термодинамически устойчивого конденсата в этой системе при достаточно низких температурах, и построил систему гидродинамических уравнений во всей области температур. Теория Боголюбова дала возможность последовательно описать энергетический спектр сверхтекучей системы и объяснить соотношения между сверхтекучими и нормальными состояниями. Глубокая физическая интуиция позволила Боголюбову сделать блестящее предположение о том, что силы отталкивания между бозонами благоприятствуют сверхтекучести, а силы притяжения — препятствуют. Этот вывод Боголюбова далеко выходит за рамки рассмотренной им модели и в дальнейшем (см., например, [51]) послужил основой для введения такого важного понятия классической и квантовой статистики, как устойчивость взаимодействий.

В 1949 г. Н.Н.Боголюбов обобщил свои результаты, связанные с построением молекулярной теории сверхтекучести и теории полярной модели металла (совместно с С.В.Тябликовым [62—64]) в монографии [65]. Данная книга явилась первым систематическим изложением основных положений методов статистической механики квантовых систем (метод статистических операторов комплексов молекул и тесно связанный с ним метод приближенного вторичного квантования). Боголюбов при этом отошел от общепринятой схемы изложения, тесно связав представление вторичного квантования с теорией статистических операторов. Метод Боголюбова построения секулярного уравнения для полярной модели металла существенно улучшил метод Гайтлера — Лондона и по своей сути явился специальной формой метода Ритца. Для решения полученного секулярного уравнения Боголюбов использовал метод приближенной ортогонализации пробных волновых функций и, соответственно, метод теории возмущений для определения энергетического спектра задачи. В [65] установлены важные соотношения, связывающие фермионные, бозонные и спиновые операторы. Построено решение секулярных уравнений во втором и третьем приближениях. Существенно, что именно третье приближение дает возможность изучения свойств электрического тока. Методы, разработанные в [65], послужили основой дальнейшего активного развития микроскопической теории ферромагнетизма. Кроме того, идея о том, что при определенных предпосылках можно представить энергетический спектр фермиевской системы в виде совокупности элементарных возбуждений, подчиняющихся статистике Бозе, послужила базой для построения Боголюбовым микроскопической теории сверхпроводимости.

Явление сверхпроводимости было экспериментально обнаружено основателем физики низких температур голландским ученым Камерлинг-Оннесом в 1911 г. Оно состоит в том, что некоторые металлы, если их сильно охладить (для чистого металла — до температур от 0,35 К у гафния, до 8 К у ниобия, у сплавов ниобия с оловом — до 18 К), полностью теряют сопротивление электрическому току. Феноменологическая теория сверхпроводимости была построена Ф. и Г.Лондонами в 1935 г. и улучшена Пиппардом в 1953 г. Но эта теория не давала механизма явления и вопрос о микроскопическом объяснении сверхпроводимости исходя из основных начал квантовой механики остался открытым. В 1950 г. Фрелих высказал смелую идею о том, что явление сверхпроводимости определяется, главным образом, взаимодействием электронов с фононами (колебаниями) кристаллической решетки, то есть тем самым взаимодействием, которое в нормальных условиях по теории Блоха обуславливает обычное сопротивление металла. Фрелих предложил модельный гамильтониан, носящий его имя:

$$H = H_B + H_F + H_{BF}, \tag{44}$$

$$H_B = \sum_p \omega(p) b_p^+ b_p,$$

$$H_F = \sum_{p;\,\sigma} E(p) a_{p,\sigma}^+ a_{p,\sigma},$$

$$H_{BF} = g \sum_{p,\,q;\,\sigma} \sqrt{\frac{\omega(1)}{2V}}\, |a_{p,\sigma}^+ a_{p+q,\sigma} b_q^+ + a_{p+q}^+ a_{p,\sigma} b_q|,$$

где $a_{p,\sigma}^+$, $a_{p,\sigma}$ — ферми-операторы с импульсом p и спином σ, b_p^+, b_p — бозе-операторы, V — объем, g — константа связи, $E(p)$ — энергия электрона, $\omega(p)$ — энергия фонона.

Динамическая система, определяемая гамильтонианом (44), весьма сложна для математического описания. Фрелиху не удалось решить сформулированную им задачу и построить микроскопическую теорию сверхпроводимости. Хотя предсказанная им обратная пропорциональность температуры фазового перехода из нормального состояния в сверхпроводящее квадратному корню из массы атома решетки («изотопический» эффект) обнадежила физиков в справедливости гипотезы Фрелиха.

Следующий шаг в построении микроскопической теории сверхпроводимости был сделан Шафротом, Батлером и Блаттом (1954). Эти ученые развили представление о важности парных корреляций электронов, приводящих к образованию своеобразных «квазимолекул», состоящих из двух электронов и поэтому подчиняющихся статистике Бозе. Появление конденсата в системе квазимолекул и есть, по их мнению, возникновение сверхпроводимости. Поскольку конденсатная квазимолекула имеет нулевой полный импульс, то электроны, ее составляющие, имеют противоположные импульсы. Для образования таких квазимолекул по Шафроту, Батлеру и Блатту необходимо эффективное фрелиховское притяжение двух электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми.

В дальнейшем Купер (1956) и Бардин, Купер, Шриффер (1957) построили модельный гамильтониан, в котором взаимодействие электронов через фононы заменено прямым взаимодействием электронов. Для упрощения учитывалось взаимодействие только между парами электронов с нулевым суммарным импульсом. Используя вариационный принцип, они установили, что энергии возбужденных состояний отделены щелью от энергии основного состояния, что и дает свойство сверхпроводимости.

Еще до того, как в Москве стала известна подробная работа Бардина, Купера и Шриффера, в конце сентября 1957 г. Боголюбову удалось показать, что метод, разработанный им в теории сверхтекучести, может быть обобщен и на исходную в теории сверхпроводимости модель Фрелиха [66].

Рассматривая гамильтониан (44), Боголюбов с помощью метода компенсации опасных диаграмм, отвечающих рождению из вакуума пары частиц с противоположными импульсами и спинами, получил формулы для расчета основного сверхпроводящего состояния и его возмущений фермиевского типа со щелью. В работе [67] Боголюбов исследовал явление сверхпроводимости, исходя из гамильтониана прямого взаимодействия электронов Бардина:

$$H = \sum_{k,s} E(k) a^+_{k,s} a_{k,s} - \frac{J}{V} \sum_{\substack{k_1,k_2 \\ k_1',k_2'}} \theta(k_1)\,\theta(k_2)\,\theta(k_1')\,\theta(k_2') \times$$

$$\times\, \Delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2')\, a^+_{k_1,-1/2}\, a^+_{k_2,1/2}\, a_{k_1',1/2}\, a_{k_2',-1/2}\,,$$

где

$$\theta(k) = \begin{cases} 1, & E(k_F) - \omega < E(k) < E(k_F) + \omega, \\ 0, & |E(k) - E(k_F)| > \omega, \end{cases}$$

$$\Delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases}$$

$E(k)$— радиально-симметричная функция, J, ω — параметры Бардина. Используя метод суммирования диаграмм определенного класса и метод приближенного вторичного квантования, Боголюбов получил результаты Бардина, Купера, Шриффера, в частности, выражение для щели ($\theta = 0$):

$$E(k_F) = 2\omega \exp\left(-\frac{1}{\rho}\right), \text{ где } \rho = \frac{J}{2\pi^2}\left(k^2 \frac{dk}{dE}\right)_{k=k_F}.$$

В работах [68—70] Боголюбов с соавторами дал асимптотически точное (в термодинамическом пределе) решение модели БКШ теории сверхпроводимости

$$H = \sum_p T_p a_p^+ a_p - \frac{1}{2V} \sum_{p,q} J(p, q) a_p^+ a_{-p}^+ a_{-q} a_q, \tag{45}$$

где $p = (k, \sigma)$, k — импульс, σ — спиновый индекс, $T_p = p^2/2m - \mu$, μ — химический потенциал, $J(p, q) = J(q, p) = -J(-p, q)$ — действительная функция. Замечательно, что точное решение модели с гамильтонианом (45) дало основу для дальнейшего развития целого направления, так называемого метода аппроксимирующего гамильтониана [71,72]. Совместно с В.В.Толмачевым и Д.В.Ширковым [73] Боголюбов исследовал влияние кулоновского отталкивания электронов на сверхпроводимость.

Таким образом, в работах Н.Н.Боголюбова, независимо от работы Бардина, Купера, Шриффера, была построена последовательно микроскопическая теория сверхпроводимости как сверхтекучести ферми-систем. В 1958 г. на основе этого представления Боголюбов открыл новый фундаментальный эффект сверхтекучести ядерной материи [74], являющийся основой современной теории ядра.

Исследование модельных задач в теории сверхпроводимости привело Боголюбова к формулировке специального метода компенсации опасных диаграмм и вариационного принципа в проблеме многих тел — принципа Хартри — Фока — Боголюбова [75—77], когда минимум энергии находят на более широком, чем в методе Хартри — Фока, классе функций, включающих волновые функции пар частиц.

В последние годы Н.Н.Боголюбов с учениками снова вернулся к проблеме сверхпроводимости, сделав попытку применить развитые им ранее методы к объяснению так называемой высокотемпературной сверхпроводимости [78—81]. Полученные в этих работах результаты представляются важными как с точки зрения развития методов Боголюбова в приложении к конкретным моделям, претендующим на микроскопическое описание высокотемпературной сверхпроводимости, так и с точки зрения возможности использования традиционных механизмов к объяснению этого нетривиального явления.

Рассматривая вопрос об асимптотически точном решении задачи, описываемой модельным гамильтонианом БКШ [69], Боголюбов применил специальный технический прием, когда в исходный гамильтониан взаимодействия (45) вводится дополнительный оператор νU, где

$$U = \frac{1}{2}\sum_p h_p(a_{-p}a_p + a_p^+ a_{-p}^+), \quad \nu \geq 0.$$

Этот оператор играет вспомогательную роль при отборе нужных решений, обеспечивающих наличие сверхпроводящей фазы при достаточно низких температурах. В окончательных результатах полагают $\nu = 0$. Этот, на первый взгляд, чисто технический прием дал возможность Боголюбову разработать мощный метод теории фазовых переходов, известный теперь как метод квазисредних Боголюбова [82,83].

Идея метода квазисредних основана на том, что в задачах статистической механики, благодаря наличию аддитивных законов сохранения, всегда имеется так называемое вырождение. Например, в случае ферромагнетика Гейзенберга при температурах ниже точки Кюри величина суммарного вектора намагничивания отлична от нуля, направление же его может быть взято произвольно. В этом смысле состояние статистического равновесия является вырожденным. Аналогичная ситуация имеет место и в других системах, допускающих фазовый переход: сверхпроводники, сверхтекучие бозевские системы и т.д. Во всех этих системах при достаточно низких температурах добавление к гамильтониану бесконечно малых источников, снимающих вырождение (и, соответственно, нарушающих тот или иной аддитивный закон сохранения), вызывает конечное приращение средних значений динамических переменных. Блестящая физическая интуиция позволила Боголюбову оформить эти идеи в виде общего принципа [82]. Пусть мы имеем некоторую макроскопическую систему с гамильтонианом H. Добавим к H бесконечно малые члены, соответствующие полям или источникам и нарушающие аддитивные законы сохранения, и получим, таким образом, некоторый гамильтониан $H_{\nu,\ \nu\to 0}$. Тогда, если все средние значения получают лишь бесконечно малые приращения, будем говорить, что рассматриваемое состояние статистического равновесия не вырождено. В противном случае, когда $\prec A \succ \equiv \lim_{\nu\to 0} \langle A\rangle_{H_\nu} \neq \langle A\rangle$, будем говорить о вырождении. Величина $\prec A \succ$ называется квазисредней. Важно, что при определении квазисредней следует сначала выполнить термодинамический предельный переход $V \to \infty$, а затем уже устремить ν к нулю.

Далее Боголюбов указывает, что при использовании обычной техники теории возмущений для случая вырожденных состояний статистического равновесия следует прежде всего снять вырождение или, что то же самое, рассматривать функции Грина, построенные из квазисредних, а не из обычных средних. В соединении с развитым Боголюбовым методом двухвременных температурных функций Грина [84] метод квазисредних, по существу, является универсальным средством изучения систем, основное состояние которых неустойчиво относительно малых возмущений. Боголюбов доказал, что при спонтанном нарушении симметрии в системе всегда возникает дальний порядок, то есть фазовый переход. В частности, в модели неидеального бозе-газа Боголюбов получил фундаментальный строгий результат, известный как теорема об особенностях типа $1/q^2$. Согласно этой теореме функции Грина имеют особенности типа const/q^2 в окрестности $q \sim 0$. Более точно, имеет место неравенство

$$\left| \langle\langle a_q, a_q^+ \rangle\rangle_{E=0} \right| \geq \frac{\rho_0 \mu}{4\pi\rho q^2},$$

где $\rho_0 = V^{-1}\langle a_0^+ a_0 \rangle$ — плотность конденсата, ρ — плотность числа частиц в системе, μ — масса бозона. Данная теорема позволила решить принципиальный вопрос о структуре энергетического спектра низколежащих элементарных возбуждений в неидеальных бозе- и ферми-системах, а также доказать отсутствие фазового перехода в одно- и двумерных моделях неидеальных бозе-газов. Метод квазисредних Боголюбова является, пожалуй, единственным строгим, конструктивным и достаточно общим методом теории фазовых переходов. Этот метод нашел широкое применение в теории поля [85—87], где на его основе получен такой впечатляющий результат, как построение единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. В последнее время метод квазисредних получил новое развитие в теории фазовых переходов [88,89]. В частности, специальная форма этого метода позволила обобщить теорему Боголюбова об особенностях типа $1/q^2$ и строго доказать существование бозе-конденсата для ряда нетривиальных моделей неидеального бозе-газа [90,91].

Многие вопросы квантовой статистической механики, изучению которых Н.Н.Боголюбов посвятил свои многолетние усилия, нашли подробное освещение в книге [92]. Эта книга является одним из лучших и наиболее последовательных изложений фундаментальных проблем квантовой статистики в современной научной литературе.

Подводя итог нашего обзора научной деятельности Н.Н.Боголюбова в области статистической физики, следует, безусловно, отметить не только его выдающийся вклад в развитие буквально всех основных направлений этого сложнейшего раздела математической физики, но и огромные заслуги в становлении целых научных школ по статистической механике в нашей стране (Москва, Дубна, Киев, С.-Петербург, Львов) и за ее пределами (Бельгия, Болгария, Вьетнам, Германия, Голландия). Трудно найти отечественного специалиста по статистической механике, не считающего себя учеником Николая Николаевича, и еще сложнее найти научную работу, в которой так или иначе не использовались бы фундаментальные идеи и методы Н.Н.Боголюбова по статистической механике.

8. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ (1950—1987)

С начала 50-х годов Н.Н.Боголюбов обращает свое внимание на проблемы квантовой теории поля. К тому времени в этой области теоретической физики существовал лишь один эффективный вычислительный аппарат — теория возмущений. Эта теория традиционно развивалась в рамках канонической теории поля, в которой постулируются гамильтониан или лагранжиан как определенная функция поля, и соответствующие уравнения движения решаются путем разложения всех входящих в них величин в степенные ряды по константе связи. Однако для нетривиальных локальных релятивистских систем многие коэффициенты разложения оказываются расходящимися. Включая в уравнения движения и гамильтониан компенсирующие члены с бесконечными коэффициентами (процедура «перенормировки»), можно сделать эти расходящиеся коэффициенты конечными. При этом оказывается, что исходные уравнения движения не имеют решений, а уравнения, имеющие решения, на первый взгляд, выглядят бессмысленными. Для устранения этого порока используются псевдонаглядные рассуждения о возможности ренормировки массы или заряда частиц.

Боголюбов, основываясь на глубоких физических идеях, построил математически корректную схему современной квантово-полевой теории возмущений, так называемую R-операцию Боголюбова. Он отказался от обычного гамильтонова формализма и принял за основу теории гейзенбергову S-матрицу рассеяния (Гейзенберг, 1932). Как показало дальнейшее развитие, именно R-операция оказывается той формой теории возмущений, которая наиболее удобна при исследовании основных проблем квантовой теории поля. Таким образом, можно сказать, что Боголюбов предложил новый эффективный подход к аксиоматической теории поля, который, наряду с другими методами (например, схемой Лемана, Симанзика, Циммермана, 1955), заложил фундамент современных исследований.

В работах [93—95] Боголюбов показал, что S-матрицу можно во всех порядках теории возмущений восстановить по лагранжиану взаимодействия, требуя лишь выполнения основных физических принципов теории — релятивистской инвариантности, спектральности, унитарности и причинности.

В работе [93] Боголюбов исходил из общепринятого представления о взаимодействии, в котором волновой вектор ϕ рассматривается как функция четырех скалярных переменных τ, ξ^{α} $(\alpha = 1,2,3)$, характеризующих пространственноподобную гиперповерхность

$$x_0\xi^0 - \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \xi^\alpha = \tau$$

с единичным времениподобным вектором ξ. Основные волновые уравнения — уравнения Шредингера — Боголюбов записывает в виде

$$i\hbar \frac{\partial\phi(\tau, \xi)}{\partial\tau} = H(\tau, \xi)\, \phi(\tau, \xi), \tag{46}$$

$$i\hbar \frac{\partial\phi(\tau, \xi)}{\partial\xi^\alpha} = H_\alpha(\tau, \xi)\, \phi(\tau, \xi) \quad (\alpha = 1,2,3), \tag{47}$$

где операторы H, H_α должны быть эрмитовыми и удовлетворять условию совместимости уравнений (46), (47). Кроме того, Боголюбов формулирует требования релятивистской ковариантности этих уравнений относительно лоренцевских преобразований пространства $x \to Lx$ $(L = L_r L_{tr})$ и получает выражение для компонент полного импульса и момента, учитывая взаимодействие частиц. Для решения основной в данном подходе проблемы фактического построения операторов H, H_α, удовлетворяющих указанным требованиям, Боголюбов становится на точку зрения матрицы рассеяния (S-матрицы), введенной в квантовую теорию Гейзенбергом. Рассматривая формальное разложение

$$S(\tau, \xi) = 1 + \frac{1}{i\hbar} S_1(\tau, \xi) + \ldots + \frac{1}{(i\hbar)^n} S_n(\tau, \xi) + \ldots, \tag{48}$$

такое, что

$$U_L^+ S_n(\tau, \xi)\, U_L = S_n(\tau + a\xi, L_r\xi),$$

$$S_1^+ = S_1, \quad S_n + (-1)^n S_n^+ + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} S_k S_{n-k}^+ = 0,$$

где U_L — унитарный оператор, с помощью которого преобразуются операторы свободных частиц при лоренцевских преобразованиях, Боголюбов получает формальное выражение для H и H_α в виде рядов по $S_n(\tau, \xi)$.

В работе [94] Боголюбов конкретизирует общий прием построения операторов H и H_α, намеченный в [93], полагая в разложении (48)

$$S_n(\tau, \xi) = \frac{1}{n!} \int f(\tau - x_1\xi) \dots f(\tau - x_n\xi)\, H_n(x_1, ..., x_n)\, dx_1 \dots dx_n\,,$$

причем симметричные по $x_1, ..., x_n$ операторы $H_n(x_1, ..., x_n)$ при лоренцевских преобразованиях преобразуются как скаляры, то есть $U_L^{\,+} H_n(x_1, ..., x_n) U_L = H_n(Lx_1, ..., Lx_n)$, и удовлетворяют условиям

$$H_n(x_1, ..., x_n) + (-1)^n H_n^{\,+}(x_1, ..., x_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \sigma H_k(x_1, ..., x_k)\, H_{n-k}^{\,+}(x_{k+1}, ..., x_n) = 0,$$

а σ обозначает симметризацию по отношению к $x_1, ..., x_n$. Обычные уравнения квантовой теории поля получаются, если взять $H_1(x) = H(x)$ и $H_r(x_1, ..., x_r) = P\{H(x_1) \dots H(x_r)\}$, где P — хронологическое произведение, а $H(x)$ — плотность обычного гамильтониана взаимодействия. При этом оказывается, что отдельные члены формального разложения (48) для S-матрицы — расходящиеся. Используя идеи Штюкельберга (1951), Дайсона (1951), Дайсона — Салама (1949, 1951), Боголюбов формулирует регулярный способ устранения расходимостей, связанных с появлением в коэффициентах при соответствующих «плотностях» произведений сингулярных функций с совпадающими особенностями, так называемых причинных сингулярных функций [94—97].

Общая идея регуляризации сформулирована в работе [95] и состоит в том, что причинные сингулярные функции следует рассматривать как линейные функционалы на соответствующих пространствах. Затем проводится расширение этих линейных функционалов на класс произвольных регулярных функций.

В работах [96,97] совместно с О.С.Парасюком Боголюбов дал последовательную аксиоматическую реализацию идеи регуляризации, введя над каждой диаграммой $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_s$, где $G_1(x_1, ..., x_{\nu_1})$, $G_2(x_{\nu_1+1}, ..., x_{\nu_2}), \dots, G_s(x_{\nu_s+1}, ..., x_n)$ — некоторое фиксированное разбиение G на базисные узлы $G_1, G_2, ..., G_s$, так называемую R-операцию Боголюбова [96]. Причинные сингулярные функции $\Delta^c(x)$ определяются как «несобственный предел» регуляризованных функций (т.е. слабый предел функционалов):

$$\operatorname{reg} \Delta^c(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} Z(k) \int_0^\infty I(\alpha) e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha\, dk$$

при $M_j \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, где

$$I(\alpha) = 1 + \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{-i\alpha(M_j^2 - m^2)},$$

$Z(k)$ — полином, $kx = k_0 x^0 - kx$, числа c_j ограничены при $M_j \to \infty$ и, кроме того, удовлетворяют линейным условиям типа

$$\sum M_i^{2l} c_i = 0; \quad l = 0,1,2, \ldots, h.$$

Произведение

$$\prod_l \operatorname{reg} \Delta_l^c(x_r - x_s)$$

можно рассматривать как вклад диаграммы $G\,(x_1, \ldots, x_n)$, линиям в которой соответствуют отдельные множители $\operatorname{reg} \Delta_l^c$. Установив в работе [96] основные свойства R-операции, в [97] Боголюбов и Парасюк доказали две основные теоремы, из которых вытекает схема корректного определения произведения любого числа причинных сингулярных функций, а следовательно, и возможность устранения расходимостей из коэффициентных функций S-матрицы. Построенная таким образом теория возмущений явилась, по существу, первой последовательной чисто аксиоматической схемой в квантовой теории поля. Подробное и ясное изложение этой схемы, а также многих других фундаментальных проблем квантовой теории поля, содержится в книге «Введение в теорию квантованных полей», написанной Боголюбовым совместно с Д.В.Ширковым в 1957 г. [98]. Эта монография стала основным учебником по квантовой теории поля как в нашей стране (к 1984 г. вышло уже четыре издания), так и за рубежом. Идеи Боголюбова в теории возмущений нашли свое дальнейшее развитие в работах многочисленных отечественных и зарубежных ученых. Отметим особо в этой связи прекрасные исследования К.Хеппа [99] и О.Штейнмана [100].

В дальнейшем оказалось, что мультипликативные перенормировки в квантовой теории поля образуют так называемую ренормализационную группу. Этот факт впервые обнаружили Штюкельберг и Петерман в 1953 г. Наличие ренормализационной группы накладывает своеобразные ограничения на структуру функций Грина и их зависимость от констант связи. Боголюбов совместно с Ширковым в случае спинорной электродинамики использовал метод ренормгруппы для получения конкретных сведений об ультрафиолетовой асимптотике функций Грина путем восстановления инвариантной по отношению к этой группе формы [101,102]. Впоследствии метод ренормгруппы в квантовой теории поля успешно развивался в работах учеников Боголюбова А.А.Логунова и Д.В.Ширкова.

Н.Н.Боголюбов одним из первых, следуя идеям Гейзенберга, Фейнмана и Штюкельберга, начал развивать направление в квантовой механике, которое позднее получило название аксиоматического метода построения квантовой теории поля. На этом пути не предполагается слабость взаимодействия, что лишает нас возможности применять ту или иную форму теории возмущений. Боголюбовский формализм опирается только на понятие матрицы рассеяния без обращения к понятиям гамильтоновой динамики и уравнению Шредингера. Вместо них в основу закладываются физические требования ковариантности, унитарности, причинности. Штюкельбергу не удалось получить достаточно ясной и общей формулировки условия причинности, в связи с чем его идеи не нашли широкого распространения. Боголюбов [103] дал строгое определение условия причинности для S-матрицы в явном виде, используя понятие «включения» и «выключения» взаимодействия с помощью функции $g(x)$ со значениями в интервале $(0,1)$. Лагранжиан взаимодействия $\mathfrak{L}(x)$ заменяется произведением $g(x)\mathfrak{L}(x)$. Функция $g(x)$ предполагается отличной от нуля в некоторой конечной пространственно-временной области, то есть в достаточно отдаленном прошлом и будущем поля являются свободными, а матрица рассеяния $S(g)$ интерпретируется как матрица рассеяния для случая взаимодействия, включенного с интенсивностью g. Реальный случай рассматривается с помощью предельного перехода, при котором область, где $g = 1$, неограниченно расширяется, охватывая в пределе все пространство-время. Обычная матрица рассеяния есть при этом $S = S(1)$.

Условие ковариантности оператора $S(g)$ записывается в виде

$$S(Lg) = U_L S(g) U_L^{-1},$$

где L — преобразование из неоднородной группы Лоренца $x \to Lx$, а $g(x) \to Lg(x) = g(L^{-1}x)$, U_L — унитарный оператор, $\phi(g) \to \phi'(Lg) = U_L\phi(g)$.

Условие унитарности очевидно: $S^+(g)\,S(g) = \mathbf{1}$. Условие причинности должно выражать тот факт, что изменение закона взаимодействия в какой-либо пространственно-временной области может оказать влияние на эволюцию системы лишь в последующие моменты времени. В соответствии с этим общепринятым в современной физике представлением

Боголюбов дает следующую формулировку условия причинности [98]: «Если имеются две функции $g''(y)$ и $g'(y)$, совпадающие при y^0, меньшем некоторого t, то произведение $S(g'')\, S^+(g')$ не должно зависеть от состояния системы при $y^0 < t$».

Боголюбов далее формулирует условие причинности в дифференциальной форме («условие микропричинности Боголюбова»):

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\, S^+(g)\right) = 0 \text{ при } x \lesssim y. \qquad (49)$$

Здесь фигурируют вариационные производные, а символ $x \lesssim 0$ означает пространственноподобную область, где либо $x^0 < 0$, либо $|x^0| < |x|$. Условия релятивистской ковариантности, унитарности и причинности в совокупности представляют достаточное основание для построения S-матрицы.

В дальнейшем при разработке метода дисперсионных соотношений (1956) Боголюбов отказывается от введения S-матрицы с помощью общепринятого представления об адиабатическом включении и выключении взаимодействия, связанного с употреблением вспомогательной функции $g(x)$. Боголюбов возвращается к более реалистическому первоначальному определению Гейзенберга, в котором S-матрица состоит из элементов, являющихся амплитудами вероятности перехода от одного состояния при $t = -\infty$ к другому состоянию при $t = +\infty$. В каждом из этих состояний может находиться как система «бесконечно» удаленных друг от друга отдельных элементарных частиц, так и их комплексов связанных состояний. В основу аксиоматики теории поля Боголюбов закладывает две группы положений [98]: а) общие свойства, характерные для весьма обширного класса возможных теорий, и б) специальные свойства локальности, связанные, в частности, с условием микроскопической причинности в форме

$$\frac{\delta}{\delta u_\alpha(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta u_\beta(y)}\, S^+\right) = 0 \text{ при } x \lesssim y, \qquad (50)$$

где функциональные производные от S-матрицы по квантованным полям определены как пределы соответствующих функциональных производных по аддитивным классическим добавкам $\eta(x)$ к квантованным $u(x)$ при $\eta(x) = 0$, т.е.

$$\frac{\delta^k S}{\delta u_{\alpha_1}(x_1)\ldots\delta u_{\alpha_k}(x_k)} = \left\{\frac{\delta^k}{\delta \eta_{\alpha_1}(x_1)\ldots\delta \eta_{\alpha_k}(x_k)}\, S(\eta)\right\}_{\eta=0},$$

где $S(\eta)$ получено из S с помощью замены $u_i(x) \to u_i(x) + \eta_i(x)$. Фактически (50) отличается от (49) тем, что при получении (50) роль функционального аргумента вместо $g(x)$ играют классические внешние поля.

Сформулированные Боголюбовым общие и локальные свойства являются аксиомами, лежащими в основе квантовой теории поля. Эти аксиомы позволили получить большое число строгих следствий общего характера, таких как одномерные спектральные представления одночастичных функций Грина (представление Челлена — Лемана), четырех- (или пяти)мерные спектральные представления для амплитуды рассеяния (представление Йоста — Лемана — Дайсона) и, наконец, дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния вперед, связывающие между собой только наблюдаемые на опыте величины.

В отличие от более ранних работ Челлена (1952) и Лемана (1954), в которых использованные методы содержали формальные манипуляции с бесконечными постоянными ренормировок, аксиоматика Боголюбова позволила применить строгие методы аналитического продолжения на комплексную плоскость. Эти методы послужили основой последовательного обоснования дисперсионных соотношений [104—106] и открыли новый этап сильных взаимодействий. Эта теория получила из метода дисперсионных соотношений новый язык, в котором амплитуда рассеяния (важнейший объект теории сильных взаимодействий) стала рассматриваться как единая аналитическая функция переменных рассеяния.

Метод дисперсионных соотношений в квантовой теории поля был предложен Гелл-Манном, Голдбергером и Тиррингом (1954). Он состоит в получении соотношений между эрмитовой частью амплитуды рассеяния и определенного рода интегралом по энергии от ее антиэрмитовой части. Привлекательность этого метода обусловлена двумя причинами. Во-первых, дисперсионные соотношения носят общий характер и возникают независимо от конкретных деталей теории; существенно в основном лишь требование микропричинности. Во-вторых, дисперсионные соотношения связывают величины, поддающиеся непосредственному измерению, что дает не только ясные практические выводы, но и не менее важные преимущества в обосновании общих принципов локальной квантовой теории поля в виде прямого экспериментального подтверждения.

Если $f(p)$ — некоторая комплекснозначная (вообще говоря, обобщенная) функция действительной переменной p, то стандартное дисперсионное соотношение имеет вид

$$\operatorname{Re} f(p) = \frac{1}{\pi}\, \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(p')}{p'-p}\, dp'.$$

Для получения такого рода соотношений применяется формула Коши, в связи с чем возникает проблема аналитического продолжения $f(p)$ в комплексную область. Именно эта проблема и была решена Боголюбовым с соавторами. В работе [104] на случай обобщенных функций одной переменной была распространена теорема о том, что функция $f(p)$ из $L^2(-\infty, +\infty)$ имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, такое, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(p+iq)|^2 dp < K$$

тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье $F(x)$ обращается в нуль при $x < 0$. При этом аналитическое продолжение обладает свойствами:

$$f(p+iq) \to f(p) \text{ в смысле обобщенных функций,}$$

$$|f(p+iq)| \leq A_0(\delta)|p|^m + A_1(\delta)|p|^{m+1} + \ldots + A_m(\delta),\ q \geq \delta > 0,$$

где m — целое положительное число, A_i — вещественные постоянные, зависящие только от δ. В работах [105,106] проблема аналитического продолжения была решена для случая, когда число независимых переменных больше единицы. Был доказан ряд теорем об аналитическом продолжении обобщенных функций. Основная теорема, опубликованная в [106] (Дополнение А, теорема VI) стала базой нового направления в теории обобщенных функций многих комплексных переменных [107] и получила имя Боголюбова. Часто эту теорему называют теоремой Боголюбова «об острие клина».

Данная теорема о совместном аналитическом продолжении пары функций, голоморфных в областях специального вида («клиньях»), впервые сообщенная Н.Н.Боголюбовым в 1956 г. на конференции в Сиэтле и первоначально доказанная для внутренних потребностей релятивистской квантовой теории поля, превратилась в наиболее известную и глубокую теорему многомерного комплексного анализа. В дальнейшем были предложены различные варианты формулировок и доказательств, все более отдалявшие теорему «об острие клина» от физического контекста и делавшие ее одной из основных существенно многомерных теорем об аналитическом продолжении (Бремерман, Оме, Тэйлор, 1958, в этой работе впервые было дано название теореме Боголюбова — теорема «об острие клина»; Йост, Леман, 1957; Дайсон, 1958). В дальнейшем теорема «об острие клина» стимулировала создание теории гиперфункций Сато (1958), а позднее — теории фурье-ультрагиперфункций (Пари, Моримото, 1973). Развитие и обобщение теоремы «об острие клина» были сделаны Мартино (1964), Моримото (1970), Бросом и Ягольницером (1973, 1976). Обзор развития теоремы «об острие клина» можно найти в статьях [108,109].

Приведем одну из современных формулировок теоремы «об острие клина» [107].

Теорема 8.1. Пусть функция $f(z)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n) = x + iy$ голоморфна в открытом множестве $T_\eta^c = [z: |z| < \eta,\ \eta \in C]$, где C — такой открытый конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в 0, что $C \cap (-C) \neq \varnothing$, открытое множество $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ содержится в шаре $|x| < \eta$ и для любой основной функции $\varphi(x)$ из $D(\mathcal{O})$ существует

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in C}} \int f(x + iy)\, \varphi(x) dx,$$

не зависящий от способа стремления $y \to 0$, $y \in C$. Тогда $f(z)$ допускает аналитическое продолжение в область $T_\eta^c \cup \tilde{\mathcal{O}}$: $\tilde{\mathcal{O}} = \bigcup_{\xi \in \mathcal{O}} [z: |z - \xi| < \theta \Delta_{\mathcal{O}}(\xi)]$, где $\tilde{\mathcal{O}}$ — комплексная окрестность $\mathcal{O}$, $0 < \theta < 1$ — постоянная, зависящая только от конуса C, а $\Delta_{\mathcal{O}}(\xi)$ — расстояние от точки ξ до границы множества $\mathcal{O}$.

Первоначальная формулировка Боголюбова получается при $\eta = \infty$ и некоторых предположениях о росте $f(z)$. В роли конуса C выступает световой конус в $\mathbf{R}^4$.

После фундаментальных исследований Боголюбова метод дисперсионных соотношений получил большое развитие. Отметим в этой связи работы Логунова и Степанова (1956), Логунова, Тавхелидзе, Соловьева (1957), Чу, Голдбергера, Лоу и Намбу (1957), Владимирова и Логунова (1959), Оме и Тэйлора (1959).

Плодотворные идеи Боголюбова по аксиоматической теории поля дали важные результаты не только в теории сильных взаимодействий для строгого обоснования дисперсионных соотношений и получения ряда физических следствий (например, кроссинг-симметрия физических процессов). В работах Боголюбова и его учеников были намечены самые разные и широкие применения аксиоматического метода, такие как асимптотические оценки при высоких энергиях, описание низкоэнергетических областей с привлечением условия унитарности, проблемы масштабной инвариантности и автомодельности при высоких энергиях, асимптотическое поведение вблизи светового конуса. Подробное изложение аксиоматического метода Боголюбова в квантовой теории поля, его связь с другими аксиоматическими методами можно найти в книге [110], ставшей, наряду с фундаментальным исследованием [98], неотъемлемой частью библиотеки любого физика-теоретика.

В середине 60-х годов Н.Н.Боголюбов с сотрудниками получил серию важных результатов в области теории симметрии элементарных частиц [111, 112]. В этих работах было впервые предложено нерелятивистское кварковое уравнение, описывающее барионы и мезоны как составные частицы, и рассчитаны магнитные моменты адронов и некоторые другие эффекты в рамках этого представления. Боголюбовым было введено в научный обиход представление о дополнительном квантовом числе — цвете для кварков. Данное представление устранило ряд трудностей, связанных с вопросами о статистике кварков, об их квантовых числах, и явилось основой для построения квантовой хромодинамики — современной калибровочной теории сильных взаимодействий. Впоследствии Боголюбов с группой сотрудников [112] предложил и исследовал релятивистски-инвариантное уравнение для адронов как составных частиц. На этой основе удалось получить ряд важных результатов по электромагнитным и слабым формфакторам адронов и абсолютным значениям их магнитных моментов.

Основы теории симметрии элементарных частиц были предметом многолетнего курса лекций, прочитанных Николаем Николаевичем на физическом факультете МГУ им М.В.Ломоносова [113]. Замечательные по глубине и ясности изложения, эти лекции выдающегося, активно работавшего ученого и умелого педагога вызывали неподдельный энтузиазм слушателей и служили для них прекрасным введением в важный раздел современной физики.

Вклад Н.Н.Боголюбова в разработку принципиальных проблем квантовой теории поля и физики элементарных частиц, соединивший в себе характерные для всего творчества этого ученого глубокую физическую интуицию и блестящее владение адекватным проблеме математическим аппаратом, занимает достойное место в современной теоретической физике.

9. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Заканчивая наш краткий обзор богатого научного наследия Н.Н.Боголюбова, необходимо отметить поразительную цельность его творчества. С первых и до последних работ прослеживается логическое единство как в постановке решаемых Боголюбовым проблем, так и в методах их решения. При этом ученый ставит перед собой максимальные цели, добиваясь поразительных успехов в их достижении, — истинные признаки таланта. Научные идеи и методы Боголюбова получили широкое признание в мире и еще долго будут являться бесценным источником вдохновения и мощным стимулом творчества для его многочисленных благодарных последователей.

Мы можем лишь добавить, что в истории мировой науки найдется немного ученых, способных столь полно охватить различные разделы математики и физики, получая при этом выдающиеся результаты в каждом из этих разделов. Тем с большим уважением благодарное потомство будет вспоминать имя Боголюбова. Тем большая ответственность лежит на этом потомстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. **Боголюбов М.М., Крилов М.М.** — Про Rayleigh'в принцип в теорії диференціальних рівнянь математичної фізики та про одну Ейлерову методу в варіяційнім численні. Тр.фіз.-мат.від. ВУАН, 1926, т.3, вып.3, с.39—57.
2. **Боголюбов М.М.** — Про наближене розв'язування диференціальних рівнянь. Тр.фіз.-мат.від.ВУАН, 1927, т.5, вып.5, Зб. праць Ін-ту техн. мех-ки, 2, с.357—365.
3. **Боголюбов М.М.** — Про обчислення вимушених хитань, що справджують певні нелінійні диференціальні рівняння. Тр. фіз.-мат.від.ВУАН, 1927, т.5, вып.5, Зб. праць Ін-ту техн. мех-ки, 2, с.367—370.
4. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — О некоторых теоремах, касающихся существования интегралов дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, № 3, с.323—344.
5. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — Определение максимальных значений некоторых величин (прогибов, моментов и т.д.) с помощью специальных методов, выработанных для снижения мажораций этих величин. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, №6, с.771—785.
6. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — Исследование продольной устойчивости аэроплана. М.-Л.: Гос.авиаавтотрактиздат, 1932.
7. **Bogolubov N.N.** — Sur quelques methodes nouvelles daus le calcul des variations. Ann.Mat. Pura Appl. 1929—1930, ser.IV, t.7, p.249—271.
8. **Bogolubov N.N.** — Sur l'application desdmethodes directes a quelques problems du calcul des variations. Ann. Mat. Pura Appl. 1931, ser.IV, t.9, Fs.3/4, p.195—241.
9. **Боголюбов М.М.** — Нові методи в варіяційному численні. Харків—Київ: Техтеоретвидав, 1932.
10. **Ньютон И.** — Математические начала натуральной философии. Книга II, отдел VII. М.: Наука, 1989.
11. **Боголюбов Н.Н.** — О приближении функций тригонометрическими суммами. ДАН СССР, 1930, №6, с.147—152.

*Полная библиография научных трудов Н.Н.Боголюбова до 1988 г. включительно имеется в сборнике [114]. После 1988 г. Боголюбовым были опубликованы работы [14,54,79—81], цитированные в данном обзоре. Избранные работы Боголюбова содержатся в трехтомнике [115].

12. **Боголюбов Н.Н.** — О тригонометрическом приближении функций на бесконечном интервале. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, сер.VII, 1, с.23—54; №2, с.149—160.
13. **Боголюбов М.М.** — Деякі арифметичні властивості майже періодів. Записки кафедри математичної фізики. 1939, т.4, с.185—194.
14. **Bogolubov N.N.** — On an Arithmetical Theorem and Its Application on the Theory of Almost Periodic Functions. JINR Communication E5-90-557, Dubna, 1990.
15. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — Основные проблемы нелинейной механики. М.-Л.: ГТТИ, 1932.
16. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев: Изд.-во ВУАН, 1934.
17. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — Введение в нелинейную механику. Киев: Изд.-во АН УССР, 1937.
18. **Боголюбов Н.Н.** — О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд.-во АН УССР, 1945.
19. **Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.** — Интегрируемые многоообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.
19а. **Арнольд В.И.** —Известия АН СССР, 1961, т.25, с.21.
19б. **Moser J.** — In: Proc. of National Academy of Sciences USA, 1961, vol.47, No.11, p.182.
19в. **Боголюбов Н.Н.** — Первая летняя математическая школа. Канев, 1963. Киев: Наукова думка, 1964.
20. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** — Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1955.
21. **Bogolubov N.N., Krilov N.M.** — Les mesures invariantes et la transitivitè. C.R.Acad.Sci., Paris. 1935, т.201, No.27, p.1454—1456.
22. **Боголюбов М.М., Крилов М.М.** — Загальна теорія міри в нелінійній механіці. Збірник праць з нелінійної механіки. Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. 1937, т.3, с.55—112.
23. **Боголюбов М.М., Крилов М.М.** — Наслідки дії статичної зміни параметрів на рух динамічних консервативных систем протягом досить тривалих періодів часу. Збирник праць з нелінійної механіки. Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. 1937, т.3, с.119-135.
24. **Боголюбов М.М., Крилов М.М.** — Наслідки дії статичної змині параметрів відносно ергодичних властивостей динамічних неконсервативних систем. Збірник праць з нелінійної механіки. Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. 1937, т.3, с.154—171.
25. **Боголюбов М.М., Крилов М.М.** — При повторювані ітерації зі змінними параметрами. Збірник праць з нелінійної механики. Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. 1937, т.3, с.191—200.
26. **Боголюбов М.М., Крилов М.М.** — Про деякі проблеми ергодичної теорії стохастичних систем. Записки кафедри математичної фізики. 1939, т.4, с.243—287.
27. **Bogolubov N.N., Krilov N.N.** — Sur les properiètès egodiques do l'equation de Smoluchovsky. Bull. de la Soc.math. de France. 1936, т.LXIV, p.45—46.
28. **Bogolubov N.N., Krilov N.M.** — Sur les probabilitè en chaine. C.R.Acad.Sci. Paris, 1937, т.204, No.19, p.1386—1388.
29. **Боголюбов М.М.** — Про деякі ергодичні властивості суцільних груп перетворень. Наукові записки КДУ ім.Т.Г.Шевченка. Фізико-математичний збірник. 1939, т.4, вып.5, с.45—52.
30. **Боголюбов Н.Н., Крейн С.Г.** — О положительных вполне непрерывных операторах. Сборник трудов Института математики АН УССР, 1947, №9, с.130—139.
31. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — О приложении метода наименьшего спуска к доказательству некоторых асимптотических неравенств. Наукові записки КДУ ім.Т.Г.Шевченка. Фізико-математичний збірник. 1939, т.4, вып.5, с.221—250.

32. **Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.** — Об асимптотических неравенствах, приложимых к некоторым вопросам статистической динамики систем с весьма большим числом степеней свободы. Наукові записки механіко-математичного факультету КДУ ім.Т.Г.Шевченка. 1941, т.5, с.49—68.
33. **Боголюбов М.М., Крилов М.М.** — Про рівняння Фоккера-Планка, що виводяться в теорії пертурбацій методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана. Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. 1939, т.4, с.5—80.
34. **Bogolubov N.N.** — On the Stochastic Processes in the Dynamical Systems. JINR Comm., E17-10514, Dubna, 1977.
35. **Зубарев Д.Н.** — Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
36. **Zwanzig R.** — Statistical Mechanics of Irreversibility. Lectures in Theoretical Physics (Boulder). New York, London: Interscience publ. 1960, vol.3, p.67—102.
37. **Davies E.B.** — Quantum Theory of Open Systems. London: Academic Press, 1976.
38. **Haake F.** — Statistical Treatment of Open Systems by Generalized Master Equation. Springer Tracts in Modern Physics. 1973, vol.66, p.1—98.
39. **Боголюбов Н.Н.** — Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем. УМЖ, 1950, т.2, №2, с.3—24.
40. **Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В.** — Об одном применении теории возмущений к полярной модели металла. ЖЭТФ, 1949, т.19, вып.3, с.251—255.
41. **Bogolubov N.N.** — Kinetic Equations for the Electron-Phonon System. JINR Communication, E17-11822, Dubna, 1978.
42. **Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.)** — Кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с фононным полем. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.2, с.245—300.
43. **Devreese J.** — The Polaron Problem and the Boltzmann Equation. JINR Comm., D-12831, Dubna, 1979.
44. **Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.)** — Аспекты теории полярона. Сообщение ОИЯИ, Р17-81-65, Дубна, 1981.
Bogolubov N.N., Bogolubov N.N., Jr. — Some aspects of Polaron Theory. Singapore: World Scientific. Lect.Notes, vol.4, 1988.
45. **Боголюбов Н.Н.** — Кинетические уравнения. ЖЭТФ, 1946, т.16, вып.8, с.691—702.
46. **Боголюбов Н.Н.** — Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: Гос.техн.-теоретич.изд., 1946.
47. **Боголюбов Н.Н.** — Разложение по степеням малого параметра в теории статистического равновесия. ЖЭТФ, 1946, т.16, вып.8, с.681—690.
48. **Боголюбов Н.Н.** — Метод функциональных производных в статистической механике. Сб. трудов Института математики АН УССР. 1947, №8, с.177—190.
49. **Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И.** — О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия. ДАН СССР, 1949, т.66, №3, с.321—324.
50. **Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И.** — Математическое описание равновесного состояния классических систем, основанное на каноническом формализме. ТМФ, 1969, т.1, №2, с.251—274.
51. **Рюэль Д.** — Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1871.
52. **Боголюбов Н.Н.** — Микроскопические решения уравнения Больцмана — Энскога в кинетической теории для упругих шаров. ТМФ, 1975, т.24, №2, с.242—247.
53. **Боголюбов Н.Н. (мл.), Садовников Б.И.** — Некоторые вопросы статистической механики. М.: Высшая школа, 1975.
54. **Bogolubov N.N.** — Some Remarks on the Polaron Theory. JINR Comm. E2-90-535, Dubna, 1990. То же: Proc. of the Workshop on «Advances in Theoretical Physics». Vietri sul Mare, Italy, October 1990, p.23—27.

55. **Боголюбов Н.Н., Гуров К.П.** — Кинетические уравнения в квантовой механике. ЖЭТФ, 1947, т.17, вып.7, с.614—628.
56. **Боголюбов Н.Н.** — К теории сверхтекучести. Изв. АН СССР, сер.физ. 1947, т.11, №1, с.77—90.
57. **Боголюбов Н.Н.** — Энергетические уровни неидеального Бозе-Эйнштейновского газа. Вестник МГУ, 1947, №7, с.43—56.
58. **Боголюбов Н.Н.** — Кинетические уравнения в теории сверхтекучести. ЖЭТФ, 1948, т.18, вып.7, с.622—630.
59. **Боголюбов Н.Н.** — К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Препринт ОИЯИ Р-1395, Дубна, 1963.
60. **Feinman R.P.** — Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium. In: Progress in Low Temperature Physics, vol.1. New York, ed.C.J.Gorter, 1955.
61. **Фейнман Р.** — Статистическая механика. М.: Мир, 1975.
62. **Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В.** — Метод теории возмущений вырожденного уровня в полярной модели металла. Вестник МГУ, 1949, №3, с.35-48.
63. **Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В.** — Об одном применении теории возмущений к полярной модели металла. ЖЭТФ, 1949, т.19, вып.3, с.251—255.
64. **Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В.** — Приближенный метод нахождения низших энергетических уровней электронов в металлах. ЖЭТФ, 1949, т.19, вып.3, с.256—268.
65. **Боголюбов Н.Н.** — Лекции по квантовой статистике. Вопросы статистической механики квантовых систем. Киев: Рад. школа, 1949.
66. **Боголюбов Н.Н.** — О новом методе в теории сверхпроводимости.I. Препринт ОИЯИ, Р-94, Дубна, 1957. То же: ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.58—65.
67. **Боголюбов Н.Н.** — О новом методе в теории сверхпроводимости.III. ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.73—79.
68. **Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н., Церковников Ю.А.** — К теории фазового перехода. ДАН СССР, 1957, т.117, №5, с.788—791.
69. **Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н., Церковников Ю.А.** — Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, 1960, т.39, вып.1(7), с.120—129.
70. **Боголюбов Н.Н.** — К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, 1969, Р-511 ЛТФ, Дубна, с.1—90.
71. **Боголюбов Н.Н. (мл.)** — Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974.
   Bogolubov N.N., Jr. — A Method for Studying Model Hamiltonians. New York: Pergamon Press Int. Ser. of Monographs in Natural Phylosophy, vol.43, 1972.
72. **Боголюбов Н.Н. (мл.) и др.** — Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София: Изд-во БАН, 1981.
73. **Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.** — Новый метод в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, Р-139, Дубна, 1958.
74. **Боголюбов Н.Н.** — К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи. ДАН СССР, 1958, т.119, №1, с.52—55.
75. **Боголюбов Н.Н.** — Об одном вариационном принципе в задаче многих тел. ДАН СССР, 1958, т.119, №2, с.244—246.
76. **Боголюбов Н.Н., Соловьев В.Г.** — Об одном вариационном принципе в проблеме многих тел. ДАН СССР, 1959, т.124, №5, с.1011—1014.
77. **Боголюбов Н.Н.** — О принципе компенсации и методе самосогласованного поля. УФН, 1959, т.67, вып.4, с.549—580.
78. **Bogolubov N.N., Aksenov V.L., Plakida N.M.** — On the Theory of Superconductivity in a Model of Oxide Metals. JINR Comm., D17-88-76, Dubna, 1988.
79. **Боголюбов Н.Н., Москаленко В.А.** — К вопросу о существовании сверхпроводимости в модели Хаббарда. Краткие сообщения ОИЯИ, 5[44]-90, Дубна, 1990.

80. **Боголюбов Н.Н., Москаленко В.А.** — Сверхпроводящее состояние модели Хаббарда. ДАН СССР, 1991, т.316, №5, с.1107—1111.
81. **Боголюбов Н.Н., Москаленко В.А.** — К вопросу о существовании сверхпроводимости в модели Хаббарда. ТМФ, 1991, т.86, №1, с.16—30.
82. **Боголюбов Н.Н.** — Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Д-781 ЛТФ, Дубна, 1961.
83. **Боголюбов Н.Н.** — О принципе ослабления корреляций и методе квазисредних. Препринт ОИЯИ, Д-549 ЛТФ, Дубна, 1961.
84. **Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В.** — Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике. ДАН СССР, 1959, т.126, №1, с.53—56.
85. **Вайнберг С.** — Идейные основы единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. УФН, 1980, т.132, вып.2, с.201—217.
86. **Goldstone J.** — Field Theories of Superconductor Solutions. Nuovo Cimento, 1961, vol.19, No.1, p.154—162.
87. **Higgs P.W.** — Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons. Phys.Rev., 1966, vol.145, No.4, p.1156—1163.
88. **Fröhlich J.** — The Pure Phases (Harmonic Functions) of Generalized Processes or: Mathematical Physics of Phase Transitions and Symmetry Breaking. Bull. of Amer.Math.Soc., 1978, vol.84, No.2, p.165—192.
89. **Dyson F.J., Lieb E.H., Simon B.** — Phase Transitions in Quantum Spin Systems with Isotropic and Non-Isotropic Interactions. J.Stat.Phys., 1978, vol.18, p.335—383.
90. **Санкович Д.П.** — Гауссова доминантность и фазовые переходы в системах с непрерывной симметрией. ТМФ, 1989, т.79, №3, с.460—471.
91. **Bogolubov N.N., Jr., Sankovich D.P.** — Upper Bound on the Two-Point Correlation Function of a System of Coupled Anharmonic Oscillators. Mod.Phys.Lett.B, 1991, vol.5, No.1, p.51—56.
92. **Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.)** — Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
Bogolubov N.N., Bogolubov N.N, Jr. — Introduction to Quantum Statistical Mechanics. Singapore: World Scient.Publ., 1982.
93. **Боголюбов Н.Н.** — К вопросу об основных уравнениях релятивистской квантовой теории поля. ДАН СССР, 1951, т.81, №5, с.757—760.
94. **Боголюбов Н.Н.** — Об одном классе основных уравнений релятивистской квантовой теории поля. ДАН СССР, 1951, т.81, №6, с.1015—1018.
95. **Боголюбов Н.Н.** — Уравнения в вариациях квантовой теории поля. ДАН СССР, 1952, т.82, №2, с.217—220.
96. **Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С.** — К теории умножения причинных сингулярных функций. ДАН СССР, 1955, т.100, №1, с.25—28.
97. **Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С.** — О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функций. ДАН СССР, 1955, т.100, № 3, с.429—432.
98. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Гостехиздат, 1957.
99. **Hepp K.** — Theorie de la Renormalisation. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1969.
100. **Steinmann O.** — Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory. Lect.Notes in Physics, vol.11. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.
101. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — О ренормализационной группе в квантовой электродинамике. ДАН СССР, 1955, т.103, №2, с.203—206.
102. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Группа мультипликативной ренормировки в квантовой теории поля ЖЭТФ, 1956, т.30, №1, с.77-86.
103. **Боголюбов Н.Н.** — Условие причинности в квантовой теории поля. Изв. АН СССР, сер.физ., 1955, т.19, №2, с.237—246.

104. **Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С.** — Об аналитическом продолжении обобщенных функций. ДАН СССР, 1956, т.109, №4, с.717—719.
105. **Боголюбов Н.Н., Владимиров В.С.** — Об аналитическом продолжении обобщенных функций. Изв. АН СССР, сер. матем. 1958, т.22, № 1, с.15—48.
106. **Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К.** — Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
107. **Владимиров В.С.** — Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
108. **Morimoto M.** — Edge of the Wedge Theorem and Hyperfunction. Lect.Notes in Math., 1973, vol.287, p.41—81.
109. **Владимиров В.С.** — Теорема «об острие клина» Боголюбова, ее развитие и применение. Сб. «Проблемы теоретической физики». М.: Наука, 1969, с.61—67.
110. **Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.** — Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969;
Bogolubov N.N., Logunov A.A., Todorov I.T. — Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory. London: Benjamin, 1975.
111. **Боголюбов Н.Н., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н.** — К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц. Препринт ОИЯИ, Д-1968 ЛТФ, Дубна, 1965.
112. **Боголюбов Н.Н., Нгуен Ван Хьеу, Д.Стоянов, Б.В.Струминский, Тавхелидзе А.Н., Шелест В.П.** — Релятивистски-инвариантные уравнения для составных частиц и формфакторы. Препринт ОИЯИ, Д-2075 ЛТФ, Дубна, 1965.
113. **Боголюбов Н.Н.** — Лекции по теории симметрии элементарных частиц. М.: МГУ, 1966, ч.1—2.
114. **Николай Николаевич Боголюбов.** — Вступительная статья академика В.С.Владимирова, академика А.А.Логунова. ОИЯИ, Дубна, 1989.
115. **Боголюбов Н.Н.** — Избранные труды. В 3-х томах (Редкол.: Ю.А.Митропольский (гл. ред.) и др.), т.1, Киев: Наукова думка, 1969; т.2, Киев: Наукова думка, 1970; т.3, Киев: Наукова думка, 1971.
Bogolubov N.N. — Selected Works. Classical of Soviet Mathematics, vol.1,2. New York: Cordon and Breach, 1990.