«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1993, ТОМ 24, ВЫП.5

УДК 530.12 + 531.51

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

А.А.Логунов

Институт физики высоких энергий, Протвино

Дается изложение основных принципов релятивистской теории гравитации, формулируются законы сохранения энергии-импульса, выводятся уравнения гравитационного поля и предсказывается существование скрытой массы во Вселенной.

Basic principles of the relativistic theory of gravity are expounded; energy-momentum conservation laws are formulated; equations for the gravitational field are derived; and the hidden mass is predicted to exist in the Universe.

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна, основные уравнения которой были построены Гильбертом и Эйнштейном в 1915 г., открыла новый этап в изучении гравитационных явлений. Однако эта теория почти с момента рождения, наряду с успехами, столкнулась с принципиальными трудностями в определении физических характеристик гравитационного поля и, как следствие, в формулировке законов сохранения энергии-импульса. Эйнштейн ясно понимал фундаментальное значение законов сохранения энергии-импульса, более того, он считал, что источником гравитационного поля должен быть суммарный тензор вещества и гравитационного поля вместе взятых. Так, в 1913 г. он писал, что «тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям». В этой же работе Эйнштейн пришел к убеждению, что «в общем случае гравитационное поле характеризуется десятью пространственно-временными функциями», компонентами метрического тензора риманова пространства $g_{\mu\nu}$. Однако на этом пути построения теории Эйнштейну не удалось сделать источником поля тензор вещества и гравитационного поля, поскольку вместо тензора гравитационного поля в ОТО возник псевдотензор. В 1918 г. Шредингер показал, что при соответствующем выборе системы координат все компоненты псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, вне сферически-симметричного источника, можно обратить в нуль. Эйнштейн по этому поводу писал: «Что же касается соображений Шредингера, то их убедительность заключается в аналогии с электродинамикой, в которой напряжения и плотность энергии любого поля отличны от нуля. Однако я не могу найти причину, почему так же должно обстоять дело и для гравитационных полей. Гравитационные поля можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии». Эйнштейн, как мы видим, отказался от концепции классического поля типа Фарадея — Максвелла, обладающего плотностью энергии-импульса, в применении к гравитационному полю, хотя и сделал важный шаг, связав гравитационное поле с тензорной величиной. В качестве такой величины Эйнштейн взял метрический тензор риманова пространства $g_{\mu\nu}$. Такой ход мысли для Эйнштейна, по-видимому, был вполне естественным, поскольку его взгляды на гравитационное поле сформировались под влиянием им же введенного принципа эквивалентности сил инерции и гравитации: «Для бесконечно малой области координаты всегда можно выбрать таким образом, что гравитационное поле будет отсутствовать в ней». Эту мысль он подчеркивал неоднократно, так, например, в 1923 г. он писал: «Для любой бесконечно малой окрестности точки в произвольном поле тяготения можно указать локальную систему координат в таком состоянии движения, что по отношению к этой локальной системе координат не существует поля тяготения (локальная инерциальная система)». Так возникло представление, что гравитационное поле нельзя локализовать. Наличие псевдотензора энергии-импульса, по мнению Эйнштейна, находится в полном соответствии с принципом эквивалентности.

Но предыдущее утверждение Эйнштейна в действительности не выполняется в ОТО, поскольку физической характеристикой поля в этой теории необходимо считать тензор кривизны риманова пространства. Ясным осознанием этого мы обязаны Сингу, который писал: «Если мы принимаем идею о том, что пространство-время является римановым четырехмерным пространством (а если мы релятивисты, так мы должны это сделать), то, очевидно, первая наша задача будет состоять в том, чтобы прочувствовать эту четырехмерность, подобно тому, как мореплаватели далеких времен должны были ощутить сферичность океана. И первое, что нам нужно осмыслить, — это тензор Римана, поскольку этот тензор и есть гравитационное поле: если он обращается в нуль (и только в этом случае), — поля не существует. И, однако, что довольно странно, этот важнейший факт был отодвинут на задний план». Далее он отмечал:

«В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно; оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя». Таким образом, согласно ОТО вещество (все поля материи, кроме гравитационного) характеризуется тензором энергии-импульса, а гравитационное поле — тензором кривизны Римана. Причем если первый имеет второй ранг, то второй — четвертый ранг, т.е. фактически в ОТО возникло принципиальное различие между характеристиками вещества и гравитационного поля. Введение в ОТО псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля не помогло Эйнштейну сохранить в его теории законы сохранения энергии-импульса. Это обстоятельство предельно ясно понимал Гильберт, который по этому поводу писал в 1917 г.: «...я утверждаю, что для общей теории относительности, т.е. в случае общей инвариантности гамильтоновой функции, уравнений энергии, которые ... соответствуют уравнениям энергии в ортогонально-инвариантных теориях, вообще не существует, я даже мог бы отметить это обстоятельство как характерную черту общей теории относительности». В ОТО, в силу отсутствия десятипараметрической группы движения пространства-времени, в принципе нельзя ввести законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, подобные тем, какие имеют место в любой другой физической теории. Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения являются фундаментальными законами природы. Именно эти законы вводят единые универсальные физические характеристики для всех форм материи, которые позволяют количественно рассмотреть превращение одних форм материи в другие. В этой связи естественно стремление построить такую теорию гравитации, в которой имели бы место все законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения и в которой гравитационное поле обладало бы плотностью энергии-импульса, подобно тому, как это имеет место для электромагнитного поля Фарадея — Максвелла. В ОТО скалярная плотность лагранжиана гравитационного поля содержит вторые производные от поля, в отличие от всех других физических теорий. Около пятидесяти лет назад Розен в работе [1] показал, что если наряду с римановой метрикой $g_{\mu\nu}$ ввести метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, то всегда можно построить скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля, относительно произвольных координатных преобразований, которая будет содержать производные не выше первого порядка. Он, в частности, построил такую плотность лагранжиана, которая приводит к уравнениям Гильберта — Эйнштейна. Так возник двуметрический формализм. Однако такой подход сразу усложнил проблему построения теории гравитации, поскольку, используя тензоры $\gamma_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$, можно написать довольно-таки большое количество скалярных плотностей, относительно произвольных координатных преобразований, и совершенно не ясно, какую скалярную плотность необходимо выбрать в качестве плотности лагранжиана для построения теории гравитации. Натан Розен, следуя этому пути, выбирал в качестве плотности лагранжиана разные скалярные плотности и на их основе строил различные теории гравитации, которые, естественно, дают, вообще говоря, и разные предсказания для тех или иных гравитационных эффектов. Ниже мы увидим, что в рамках специальной теории относительности, которая описывает явления как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета, с помощью принципа геометризации, отражающего универсальность гравитационного взаимодействия поля с веществом, нам удастся объединить идею Пуанкаре о гравитационном поле [2], как физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, с идеей Эйнштейна о римановой геометрии пространства-времени. Именно принцип геометризации поможет найти бесконечномерную некоммутативную калибровочную группу, которая позволит построить плотность лагранжиана собственно гравитационного поля. Все это привело к релятивистской теории гравитации (РТГ) [3], обладающей всеми законами сохранения, как это имеет место во всех других физических теориях. Ниже мы дадим подробное изложение основных принципов и уравнений теории. Релятивистская теория гравитации является полевой теорией в такой же степени, как и классическая электродинамика, поэтому ее можно было бы назвать классической гравидинамикой.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РТГ

Переходя к построению теории гравитационного поля, мы будем исходить из следующих основных положений.

Положение 1. В основе РТГ лежит специальная теория относительности, что означает, что пространство Минковского (псевдоевклидова геометрия пространства-времени) есть фундаментальное пространство для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Это положение является необходимым и достаточным, чтобы имели место как законы сохранения энергии-импульса, так и законы сохранения момента количества движения для вещества и гравитационного поля вместе взятых. Иными словами, пространство Минковского отражает динамические свойства, общие для всех форм материи. Это обеспечивает для них существование единых физических характеристик, которые позволяют количественно описать превращение одних форм материи в другие. Пространство Минковского нельзя считать априорно существующим, поскольку оно отражает свойства материи, а следовательно, оно неотделимо от нее. Пространство Минковского имеет глубокое физическое содержание, так как оно определяет универсальные свойства материи, такие как энергия, импульс, момент количества движения. Гравитационное поле описывается симметрическим тензором второго ранга $\Phi^{\mu\nu}$ и является реальным физическим полем, обладающим плотностью энергии-импульса, массой покоя m и поляризационными состояниями, соответствующими спину 2 и 0. Исключение из состояний поля $\Phi^{\mu\nu}$ представлений, соответствующих спину 1 и $0'$, осуществляется подчинением компонент уравнению поля:

$$D_\mu \Phi^{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

где D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского. Уравнение (1), помимо исключения нефизических состояний поля, вводит в теорию метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, что позволяет отделить силы инерции от действия гравитационного поля. Выбором диагональной метрики $\gamma_{\mu\nu}$ можно полностью исключить действие сил инерции. Метрика пространства Минковского позволяет ввести понятия эталонной длины и промежутка времени при отсутствии гравитационного поля. Далее мы увидим, что взаимодействие тензорного гравитационного поля с веществом можно ввести таким образом, чтобы оно как бы деформировало пространство Минковского, изменяя метрические свойства, без нарушения причинности.

Положение II. Принцип геометризации. Поскольку гравитационное поле описывается симметрическим тензором второго ранга $\Phi^{\mu\nu}$, а его взаимодействие с другими полями можно считать универсальным, открывается уникальная возможность «подключить» это поле в плотности лагранжиана вещества непосредственно к тензору по правилу

$$L_M(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \Phi_A) \to L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A), \tag{2}$$

где

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\Phi}^{\mu\nu}, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\, \Phi^{\mu\nu}, \tag{3}$$

Φ_A — поля вещества, $g = \det g_{\mu\nu}$, $\gamma = \det \gamma_{\mu\nu}$, $\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\sigma$. Подъем и опускание индексов у поля осуществляется с помощью $\gamma_{\mu\nu}$, а у тензора $g^{\mu\nu}$ — с помощью метрического тензора риманова пространства. Под веществом мы понимаем все формы материи за исключением гравитационного поля. Такой вид взаимодействия гравитационного поля с веществом вводит понятие эффективного риманова пространства, в котором происходит движение вещества, и называется принципом геометризации. Согласно принципу геометризации движение вещества под действием гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$ в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ тождественно его движению в эффективном римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$. Эффективное риманово пространство имеет, в буквальном смысле слова, полевое происхождение, обязанное присутствию гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$. Поскольку метрические свойства при наличии гравитационного поля определяются тензором эффективного риманова пространства, а без гравитационного поля — тензором $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, то данная теория способна дать ответ на вопрос, как изменяются размеры тела и ход часов при действии гравитационного поля. Если теория не содержит тензор $\gamma_{\mu\nu}$ в уравнениях поля, то она в принципе не может ответить на такие вопросы. В ОТО гравитационное поле характеризуется метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, в нашей теории оно определяется тензорной величиной $\Phi^{\mu\nu}$, а эффективное риманово пространство строится с помощью поля $\Phi^{\mu\nu}$, а также метрического тензора $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского, фиксирующего определенный выбор системы координат. В нашей теории существуют галилеевы (инерциальные) системы координат, а поэтому ускорение имеет абсолютный характер. Движение пробного тела в эффективном римановом пространстве происходит по геодезической линии этого пространства, но оно не является свободным, поскольку вызвано действием гравитационного поля. Если бы пробное тело было заряженным, то оно бы излучало электромагнитные волны, поскольку его движение в поле происходило бы с ускорением. Так как эффективное риманово пространство создается гравитационным полем $\Phi^{\mu\nu}$, находящимся в пространстве Минковского, то оно всегда может быть задано (и это очень важно) в одной системе координат. Это означает, что мы будем иметь дело только с такими римановыми пространствами, которые задаются в одной карте. С нашей точки зрения, полностью исключаются римановы пространства со сложной топологией, поскольку они не полевого происхождения. Следует отметить, что, поскольку вещество движется в эффективном римановом пространстве, в уравнения движения вещества не войдет метрический тензор пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Пространство Минковского будет сказываться на движении вещества только через метрический тензор риманова пространства $g_{\mu\nu}$, определяемый из уравнений, в которые входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$.

2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Поскольку плотность лагранжиана вещества имеет вид

$$L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A), \tag{4}$$

то легко найти калибровочную группу преобразований, при которых плотность лагранжиана вещества меняется только на дивергенцию. Для этой цели воспользуемся инвариантностью действия

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)\, d^4x \tag{5}$$

при произвольном бесконечно малом изменении координат

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x), \tag{6}$$

где ξ^{α} — бесконечно малый четырехвектор смещения.

При этих координатных преобразованиях полевые функции $\tilde{g}^{\mu\nu}$, Φ_A изменяются следующим образом:

$$\begin{gathered}\tilde{g}'^{\mu\nu}(x') = \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta_\xi\, \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \xi^{\alpha}(x)\, D_\alpha\, \tilde{g}^{\mu\nu}(x),\\ \Phi'_A(x') = \Phi_A(x) + \delta_\xi\, \Phi_A(x) + \xi^{\alpha}(x) D_\alpha \Phi_A(x),\end{gathered} \tag{7}$$

где выражения

$$\begin{gathered}\delta_\xi\, \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha\, \xi^{\nu}(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha\, \xi^{\mu}(x) - D_\alpha(\xi^{\alpha}\, \tilde{g}^{\mu\nu}),\\ \delta_\xi\, \Phi_A(x) = -\xi^{\alpha}(x) D_\alpha \Phi_A(x) + F^{B;\,\alpha}_{A;\,\beta} \Phi_B(x) D_\alpha\, \xi^{\beta}(x)\end{gathered} \tag{8}$$

являются вариациями Ли.

Операторы δ_ξ удовлетворяют условиям алгебры Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}](\cdot) = \delta_{\xi_3}(\cdot) \tag{9}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\xi_1}, [\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_3}]] + [\delta_{\xi_3}, [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]] + [\delta_{\xi_2}, [\delta_{\xi_3}, \delta_{\xi_1}]] = 0,$$

где

$$\xi_3^{\nu}(x) = \xi_1^{\mu} D_\mu\, \xi_2^{\nu} - \xi_2^{\mu} D_\mu\, \xi_1^{\nu} = \xi_1^{\mu} \partial_\mu\, \xi_2^{\nu} - \xi_2^{\mu} \partial_\mu \xi_1^{\nu}. \tag{10}$$

Для того чтобы имело место (9), необходимо выполнение следующих условий:

$$F^{B;\,\mu}_{A;\,\nu}\,F^{C;\,\alpha}_{B;\,\beta} - F^{B;\,\alpha}_{A;\,\beta}\,F^{C;\,\mu}_{B;\,\nu} = f^{\mu\alpha;\,\tau}_{\nu\beta;\,\sigma}\,F^{C;\,\sigma}_{A;\,\tau}, \tag{11}$$

где структурные постоянные f равны

$$f^{\mu\alpha;\,\tau}_{\nu\beta;\,\sigma} = \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\alpha}_{\sigma}\,\delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\,\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\tau}_{\beta}. \tag{12}$$

Легко убедиться, что они удовлетворяют тождеству Якоби

$$f^{\alpha\nu;\,\sigma}_{\beta\mu;\,\tau}\,f^{\tau\rho;\,\omega}_{\sigma\varepsilon;\,s} + f^{\nu\rho;\,\sigma}_{\mu\varepsilon;\,\tau}\,f^{\tau\alpha;\,\omega}_{\sigma\beta;\,s} + f^{\rho\alpha;\,\sigma}_{\varepsilon\beta;\,\tau}\,f^{\tau\nu;\,\omega}_{\sigma\mu;\,s} = 0 \tag{13}$$

и обладают свойством антисимметрии

$$f^{\alpha\nu;\,\rho}_{\beta\mu;\sigma} = -f^{\nu\alpha;\,\rho}_{\mu\beta;\,\sigma}.$$

При координатном преобразовании (6) вариация действия равна нулю:

$$\delta_c\,S_M = \int_{\Omega'} L'_M(x')d^4x' - \int_{\Omega} L_M(x)\,d^4x = 0. \tag{14}$$

Первый интеграл в (14) можно записать в виде

$$\int_{\Omega'} L'_M(x')d^4x' = \int_{\Omega} J L'_M(x')d^4x,$$

где

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right).$$

В первом порядке по ξ^{α} детерминант J равен

$$J = 1 + \partial_{\alpha}\,\xi^{\alpha}(x). \tag{15}$$

Учитывая разложение

$$L'_M(x') = L'_M(x) + \xi^{\alpha}(x)\,\frac{\partial L_M}{\partial x^{\alpha}},$$

а также (15), выражение для вариации можно представить в форме

$$\delta_c\,S_M = \int_{\Omega} [\delta L_M(x) + \partial_{\alpha}(\xi^{\alpha}L_M(x))]\,d^4x = 0.$$

В силу произвольности объема интегрирования Ω имеем тождество

$$\delta L_M(x) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x) L_M(x)), \tag{16}$$

где вариация Ли δL_M равна

$$\delta L_M(x) = \frac{\partial L_M}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) + $$

$$+ \frac{\partial L_M}{\partial \Phi_A} \delta \Phi_A + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \Phi_A)} \delta(\partial_\alpha \Phi_A). \tag{17}$$

Отсюда, в частности, следует, что если скалярная плотность зависит только от $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и ее производных $\partial_\alpha(\tilde{g}^{\mu\nu})$, то при преобразовании (8) она также изменится только на дивергенцию

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x) L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x))), \tag{16a}$$

где вариация Ли δL равна

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = \frac{\partial L}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}). \tag{17a}$$

Вариации Ли (8) были установлены в контексте координатных преобразований (6). Однако можно встать и на другую точку зрения, согласно которой преобразования (8) можно рассматривать как калибровочные. В этом случае произвольный бесконечно малый четырехвектор $\xi^\alpha(x)$ будет уже калибровочным вектором, а не вектором смещения координат. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть отличие калибровочной группы от группы координатных преобразований, для группового параметра мы будем использовать обозначение $\varepsilon^\alpha(x)$, а преобразования полевых функций

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta \tilde{g}^{\mu\nu}(x),$$

$$\Phi_A(x) \to \Phi_A(x) + \delta \Phi_A(x) \tag{18}$$

с приращениями

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

$$\delta_\varepsilon \Phi_A(x) = -\varepsilon^\alpha(x) D_\alpha \Phi_A(x) + F_{A;\,\beta}^{B;\,\alpha} \Phi_B(x) D_\alpha \varepsilon^\beta(x) \tag{19}$$

будем называть калибровочными преобразованиями.

В полном соответствии с формулами (9) и (10) операторы удовлетворяют той же алгебре Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}](\cdot) = \delta_{\varepsilon_3}(\cdot) \tag{20}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\varepsilon_1}, [\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_3}]] + [\delta_{\varepsilon_3}, [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]] + [\delta_{\varepsilon_2}, [\delta_{\varepsilon_3}, \delta_{\varepsilon_1}]] = 0. \qquad (21)$$

Здесь, аналогично предыдущему, имеем

$$\varepsilon_3^\nu(x) = \varepsilon_1^\mu D_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu D_\mu \varepsilon_1^\nu = \varepsilon_1^\mu \partial_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu \partial_\mu \varepsilon_1^\nu.$$

Калибровочная группа возникла из геометризованной структуры скалярной плотности лагранжиана вещества $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)$, которая в силу тождества (16) изменяется только на дивергенцию при калибровочных преобразованиях (19). Таким образом, принцип геометризации, который определил универсальный характер взаимодействия вещества и гравитационного поля, дал нам возможность сформулировать некоммутативную бесконечномерную калибровочную группу (19). Существенная разница между калибровочными и координатными преобразованиями проявится в решающем месте теории, при построении скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля. Разница возникает из-за того, что при калибровочном преобразовании метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, в силу (3) имеем

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \delta_\varepsilon \tilde{\Phi}^{\mu\nu}(x).$$

На основании (19) следует преобразование для поля

$$\delta_\varepsilon \tilde{\Phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

но это преобразование для поля существенно отличается от его преобразования при смещении координат:

$$\delta_\xi \tilde{\Phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\Phi}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{\Phi}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \tilde{\Phi}^{\mu\nu}).$$

При калибровочных преобразованиях (19) уравнения движения для вещества не изменяются, поскольку при любых таких преобразованиях плотность лагранжиана вещества изменяется только на дивергенцию.

3. ПЛОТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как известно, используя только тензор $g_{\mu\nu}$, невозможно построить скалярную плотность лагранжиана собственно гравитационного поля относительно произвольных координатных преобразований в виде квадратичной формы производных не выше первого порядка. Поэтому в такую плотность лагранжиана будет обязательно входить, наряду с метрикой $g_{\mu\nu}$, также и метрика $\gamma_{\mu\nu}$. Но так как при калибровочном преобразовании (19) метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, чтобы при этом преобразовании плотность лагранжиана собственно гравитационного поля изменялась только на дивергенцию, должны возникнуть сильные ограничения на ее структуру. Именно здесь и возникает принципиальная разница между калибровочными и координатными преобразованиями. В то время как координатные преобразования не накладывают почти никаких ограничений на структуру скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля, калибровочные преобразования позволяют нам найти плотность лагранжиана. Прямой общий метод построения лагранжиана приведен в монографии [3]. Здесь мы изберем более простой метод построения лагранжиана. На основании (16а) заключаем, что простейшие скалярные плотности $\sqrt{-g}$ и $\tilde{R} = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства, при калибровочном преобразовании (19) изменяются следующим образом:

$$\sqrt{-g} \to \sqrt{-g} - D_\nu(\varepsilon^\nu\sqrt{-g}), \tag{22}$$

$$\tilde{R} \to \tilde{R} - D_\nu(\varepsilon^\nu\tilde{R}). \tag{23}$$

Скалярная плотность $\tilde{R}$ выражается через символы Кристоффеля

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{24}$$

следующим образом:

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}) - \partial_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\sigma}). \tag{25}$$

Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорными величинами, каждое слагаемое в (25) не является скалярной плотностью. Однако, если ввести тензорные величины $G^\lambda_{\mu\nu}$:

$$G^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}), \tag{26}$$

то скалярную плотность можно тождественно записать в виде

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}G^\sigma_{\nu\lambda}) - D_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}G^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}G^\nu_{\mu\sigma}). \tag{27}$$

Заметим, что в (27) каждая группа членов в отдельности ведет себя при произвольных координатных преобразованиях как скалярная плотность. С учетом (22) и (23) выражение

$$\lambda_1(\tilde{R} + D_\nu Q^\nu) + \lambda_2\sqrt{-g} \tag{28}$$

при произвольных калибровочных преобразованиях изменяется только на дивергенцию. Выбирая векторную плотность Q^{ν} равной

$$Q^{\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma} G^{\nu}_{\mu\sigma},$$

мы исключим из предыдущего выражения члены с производными выше первого порядка и получим следующую плотность лагранжиана:

$$-\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu} G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma} G^{\sigma}_{\nu\lambda}) + \lambda_2 \sqrt{-g}. \tag{29}$$

Таким образом, мы видим, что требование, чтобы плотность лагранжиана собственно гравитационного поля, при калибровочном преобразовании (19), изменялась только на дивергенцию, однозначно определяет структуру плотности лагранжиана (29). Но если ограничиться только этой плотностью, то уравнения гравитационного поля будут калибровочно-инвариантными, а метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ не войдет в систему уравнений, определяемых плотностью лагранжиана (29). Поскольку в таком подходе исчезает метрика пространства Минковского, то и исключается возможность представления гравитационного поля как физического поля типа Фарадея — Максвелла в пространстве Минковского. При плотности лагранжиана (29) введение метрики $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью уравнений (1), не спасает положение, поскольку физические величины: интервал и тензор кривизны риманова пространства, а также тензор $t_g^{\mu\nu}$ гравитационного поля будут зависеть от выбора калибровки, что физически недопустимо. Для того чтобы сохранить представления о поле в пространстве Минковского и исключить такую неоднозначность, необходимо добавить в плотность лагранжиана гравитационного поля член, нарушающий калибровочную группу. На первый взгляд, может показаться, что здесь возникает большой произвол в выборе плотности лагранжиана гравитационного поля, так как нарушить группу можно весьма различными способами. Однако оказывается, что это не так, поскольку наше физическое требование на поляризационные свойства гравитационного поля как поля со спинами 2 и 0, накладываемое уравнениями (1), приводит к тому, что член, нарушающий группу (19), должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения (1) являлись следствиями системы уравнений гравитационного поля и полей вещества, ибо только в этом случае у нас не возникает переопределенная система дифференциальных уравнений. Для этой цели в скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля введем член

$$\gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu}, \tag{30}$$

который при наличии условий (1) и при преобразованиях (19) изменяется также на дивергенцию, но только на классе векторов, удовлетворяющих условию

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \varepsilon^\sigma(x) = 0. \tag{31}$$

Почти аналогичная ситуация имеет место в электродинамике с массой покоя фотона, отличной от нуля. С учетом (28)—(30) общая скалярная плотность лагранжиана имеет вид

$$L_g = -\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu} G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma} G^\sigma_{\nu\lambda}) + \lambda_2 \sqrt{-g} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4 \sqrt{-\gamma}. \tag{32}$$

Последний член в (32) мы ввели, чтобы с его помощью обратить в нуль плотность лагранжиана при отсутствии гравитационного поля. Сужение класса калибровочных векторов из-за введения члена (30) автоматически приводит к тому, что уравнения (1) будут следствиями уравнений гравитационного поля. В этом мы непосредственно убедимся ниже. Согласно принципу наименьшего действия уравнения для собственно гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda_2 g_{\mu\nu} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} = 0, \tag{33}$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda G^\lambda_{\mu\nu} - D_\mu G^\lambda_{\nu\lambda} + G^\sigma_{\mu\nu} G^\lambda_{\sigma\lambda} - G^\sigma_{\mu\lambda} G^\lambda_{\nu\sigma}. \tag{34}$$

Поскольку в случае отсутствия гравитационного поля уравнения (33) должны тождественно выполняться, отсюда следует соотношение

$$\lambda_2 = -2\lambda_3. \tag{35}$$

Найдем теперь плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского:

$$t_g^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\right)\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} + \\ + \lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \tag{36}$$

где

$$J^{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta (\gamma^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu} \tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta}). \tag{37}$$

Если в выражении (36) учесть динамические уравнения (33), то мы получим уравнение для собственно гравитационного поля

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu}. \tag{38}$$

Для того чтобы это уравнение в случае отсутствия гравитационного поля удовлетворялось тождественно, необходимо положить

$$\lambda_4 = -2\lambda_3 . \tag{39}$$

Поскольку для собственно гравитационного поля всегда имеет место равенство

$$D_\mu t_g^{\mu\nu} = 0, \tag{40}$$

из уравнения (38) следует

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{41}$$

Таким образом, уравнения (1), определяющие поляризационные состояния поля, непосредственно следуют из уравнений (38). С учетом уравнений (41) полевые уравнения (38) можно записать следующим образом:

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}. \tag{42}$$

В галилеевых координатах это уравнение имеет простой вид:

$$\Box \tilde{\Phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}. \tag{43}$$

Числовому фактору $m^2 = -\lambda_4/\lambda_1$ естественно придать смысл квадрата массы гравитона, а значение $-1/\lambda_1$, согласно принципу соответствия, необходимо взять равным 16π. Таким образом, все неизвестные постоянные, входящие в плотность лагранжиана, определены:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -2\lambda_3 = \frac{m^2}{16\pi} . \tag{44}$$

Построенная скалярная плотность лагранжиана собственно гравитационного поля будет иметь вид

$$L_g = \frac{1}{16\pi} \tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu} G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma} G^\sigma_{\nu\lambda}) - \frac{m^2}{16\pi} (\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}). \tag{45}$$

Соответствующие ей динамические уравнения для собственно гравитационного поля могут быть записаны в форме

$$J^{\mu\nu} - m^2 \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = -16\pi t_g^{\mu\nu} \tag{46}$$

или

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \gamma_{\alpha\beta}\right) = 0. \tag{47}$$

Эти уравнения существенно ограничивают класс калибровочных преобразований, оставляя лишь тривиальные, удовлетворяющие условиям Киллинга. Такие преобразования являются следствием лоренцевской инвариантности и имеют место в любой теории.

Построенная выше плотность лагранжиана приводит к уравнениям (47), из которых следует, что уравнения (41) являются их следствиями, а поэтому вне вещества мы будем иметь десять уравнений для десяти неизвестных полевых функций. С помощью уравнений (41) неизвестные полевые функции $\Phi^{0\alpha}$ легко выражаются через полевые функции Φ^{ik}, где значки i и k пробегают значения 1,2,3. Таким образом, в плотности лагранжиана собственно гравитационного поля структура массового члена, нарушающего калибровочную группу, однозначно определяется поляризационными свойствами гравитационного поля.

4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА

Полная плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля равна

$$L = L_g + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A), \tag{48}$$

где L_g определяется выражением (45).

На основании (48) с помощью принципа наименьшего действия получим полную систему уравнений для вещества и гравитационного поля:

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{49}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} = 0. \tag{50}$$

Поскольку при произвольном бесконечно малом изменении координат вариация действия δS_M равна нулю:

$$\delta S_M = \delta \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)\, d^4x = 0,$$

можно получить тождество (см. [3]) в виде

$$g_{\mu\nu}\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = -D_\nu\left(\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A} F^{B;\,\nu}_{A;\,\mu}\Phi_B(x)\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A} D_\mu\Phi_A(x). \tag{51}$$

Здесь $T^{\lambda\nu} = -2\dfrac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}}$ — тензор вещества в римановом пространстве; ∇_λ — ковариантная производная в этом пространстве с метрикой $g_{\lambda\nu}$. Из тождества (51) следует, что если выполняются уравнения движения вещества (50), то имеет место уравнение

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{52}$$

В том случае, если число уравнений (50) для вещества равно четырем, вместо них можно использовать эквивалентные им уравнения (52). Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими уравнениями для вещества, всегда будем пользоваться уравнениями для вещества в форме (52). Таким образом, полная система уравнений для вещества и гравитационного поля будет иметь вид

$$\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{53}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{54}$$

Вещество будет описываться: скоростью v, плотностью вещества ρ и давлением p. Гравитационное поле определяется десятью компонентами тензора $\Phi^{\mu\nu}$. Итак, мы имеем 15 неизвестных. Для их определения необходимо к 14 уравнениям (53)—(54) добавить уравнение состояния вещества. Если принять во внимание соотношения

$$\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi}R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{32\pi}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}), \tag{55}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{56}$$

то систему уравнений (53) и (54) можно представить в виде

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right] = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}T^{\mu\nu}, \tag{57}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{58}$$

В силу тождества Бьянки

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = 0$$

из уравнений (57) имеем

$$m^2 \sqrt{-g}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 16\pi \nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{59}$$

Учитывая выражение

$$\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = -G^\sigma_{\mu\alpha} \gamma_{\sigma\beta} - G^\sigma_{\mu\beta} \gamma_{\sigma\alpha}, \tag{60}$$

где $G^\sigma_{\mu\alpha}$ определено формулой (26), найдем

$$(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} (D_\sigma g^{\sigma\lambda} + G^\beta_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda}), \tag{61}$$

но так как

$$\sqrt{-g}(D_\sigma g^{\sigma\lambda} + G^\beta_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda}) = D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma}, \tag{62}$$

выражение (61) принимает вид

$$\sqrt{-g}\ (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma}. \tag{63}$$

Используя (63), выражение (59) можно представить в виде

$$m^2 \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16\pi \nabla_\mu T^{\mu\nu}.$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$m^2 D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16\pi \gamma^{\lambda\nu} \nabla_\mu T^\mu_\nu. \tag{64}$$

С помощью этого соотношения уравнение (58) можно заменить уравнением

$$D_\sigma \tilde{g}^{\nu\sigma} = 0. \tag{65}$$

Поэтому система уравнений (57) и (58) сводится к системе гравитационных уравнений

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \frac{m^2}{2} [g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \gamma_{\alpha\beta}] = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} T^{\mu\nu}, \tag{66}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{67}$$

Если ввести тензор

$$N^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} [g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \gamma_{\alpha\beta}], \quad N = N^{\mu\nu} g_{\mu\nu},$$

то систему уравнений (66) и (67) можно записать

$$N^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} N = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} T^{\mu\nu}, \qquad (66а)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \qquad (67а)$$

Она может быть представлена также в виде

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right), \qquad (68)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0 \qquad (69)$$

или

$$N_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \qquad (68а)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \qquad (69а)$$

Следует особо подчеркнуть, что как в (68), так и в (69) входит метрический тензор пространства Минковского. Преобразования координат, которые оставляют метрику пространства Минковского форминвариантной, связывают физически эквивалентные системы отсчета. Простейшими из них будут инерциальные системы. Поэтому возможные калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям Киллинга $D_\mu \varepsilon_\nu + D_\nu \varepsilon_\mu = 0$, не выводят нас из класса физически эквивалентных систем отсчета. Если мысленно допустить возможность экспериментального измерения характеристик риманова пространства и движения вещества со сколь угодно большой точностью, то на основании уравнений (68а) и (69а) мы можем определить метрику пространства Минковского и найти галилеевы (инерциальные) системы координат. Таким образом, пространство Минковского является в принципе наблюдаемым.

Существование пространства Минковского находит отражение в законах сохранения, а поэтому проверка их в физических явлениях есть в то же время проверка структуры пространства-времени.

Системе гравитационных уравнений можно придать и другую эквивалентную форму:

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}, \qquad (70)$$

$$D_\mu \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 0, \qquad (71)$$

где $t^{\mu\nu} = -2\dfrac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}$ — плотность тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля в пространстве Минковского. Такая форма уравнений по виду напоминает уравнения электродинамики с массой фотона μ при отсутствии гравитации:

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta A^\nu + \mu^2 A^\nu = 4\pi j^\nu, \tag{72}$$

$$D_\nu A^\nu = 0. \tag{73}$$

Если в электродинамике источником векторного поля A^ν является сохраняющийся электромагнитый ток j^ν, создаваемый заряженными телами, то в РТГ источником тензорного поля является сохраняющийся полный тензор энергии-импульса вещества и гравитационного поля. Поэтому гравитационные уравнения будут нелинейными даже для собственно гравитационного поля. Особо отметим, что в уравнениях (66) наряду с известным космологическим членом возник еще член, содержащий метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, причем оба эти члена вошли с общей постоянной, которая совпадает с массой гравитона, а потому она крайне мала. Второй член в уравнениях (66), содержащий метрику $\gamma_{\mu\nu}$, приводит к возникновению сил отталкивания, которые весьма велики в сильных гравитационных полях. Это обстоятельство изменяет характер коллапса и развития Вселенной. Как мы видели ранее, наличие массы покоя гравитона имеет принципиальное значение для построения полевой теории гравитационного поля. Именно благодаря наличию массы гравитона из теории следует, что однородная и изотропная Вселенная может быть только плоской.

5. ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ В РТГ

РТГ построена в рамках СТО подобно теориям других физических полей. Согласно СТО, любое движение какого-либо точечного пробного тела всегда происходит внутри светового конуса причинности пространства Минковского. Следовательно, неинерциальные системы отсчета, реализуемые пробными телами, также должны находиться внутри конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Этим самым определяется весь класс возможных неинерциальных систем отсчета. Локальная эквивалентность инерции и гравитации при действии на материальную точку будет иметь место, если световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности пространства Минковского. Именно только в этом случае гравитационное поле, действующее на пробное тело, можно локально исключить, перейдя в допустимую неинерциальную систему отсчета, связанную с этим телом. Если бы световой конус эффективного риманова пространства выходил за пределы светового конуса причинности пространства Минковского, то это бы означало, что для такого «гравитационного поля» не существует допустимой неинерциальной системы отсчета, в которой это «поле» при действии на материальную точку можно было бы исключить. Иными словами, локальная «эквивалентность» инерции и гравитации возможна лишь тогда, когда гравитационное поле как физическое поле, воздействуя на частицы, не выводит их мировые линии за пределы конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Данное условие следует рассматривать или как принцип причинности, или как принцип эквивалентности, позволяющий отбирать решения системы уравнений (66) и (67), которые имеют физический смысл и соответствуют гравитационным полям. Принцип причинности не выполняется автоматически. Это связано с тем, что гравитационное взаимодействие входит в коэффициенты при вторых производных в уравнениях поля, т.е. изменяет исходную геометрию пространства-времени. Эта особенность присуща только гравитационному полю. Взаимодействие всех других известных физических полей обычно не затрагивает вторых производных уравнений поля и поэтому не изменяет исходную псевдоевклидову геометрию пространства-времени.

Дадим теперь аналитическую формулировку принципа причинности в РТГ. Поскольку в РТГ движение вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени эквивалентно движению вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени, то для причинно связанных событий (мировых линий частиц и света), с одной стороны, мы должны иметь условие

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \geq 0, \tag{74}$$

а с другой стороны, для таких событий должно обязательно выполняться неравенство

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \geq 0. \tag{75}$$

Для выбранной системы отсчета, реализуемой физическими телами, имеет место условие

$$\gamma_{00} > 0. \tag{76}$$

В выражении (75) мы выделим времени- и пространственноподобные части

$$d\sigma^2 = \left(\sqrt{\gamma_{00}}\, dt + \frac{\gamma_{0i}\, dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 - S_{ik}\, dx^i dx^k. \tag{77}$$

Здесь индексы i, k пробегают значения 1,2,3,

$$S_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}, \tag{78}$$

S_{ik} является метрическим тензором трехмерного пространства в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени.

Квадрат пространственного расстояния определяется выражением

$$dl^2 = S_{ik}\, dx^i dx^k. \tag{79}$$

Представим скорость $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ в виде $u^i = ue^i$, где u — величина скорости, e^i — произвольный единичный вектор в трехмерном пространстве,

$$S_{ik} e^i e^k = 1. \tag{80}$$

При отсутствии гравитационного поля скорость света в выбранной системе координат легко определяется из выражения (77), если положить его равным нулю:

$$\left(\sqrt{\gamma_{00}}\, dt + \frac{\gamma_{0i} dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 = S_{ik} dx^i dx^k.$$

Отсюда находим

$$u = \frac{\sqrt{\gamma_{00}}}{1 - \dfrac{\gamma_{0i}\, e^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}}. \tag{81}$$

Таким образом, произвольный четырехмерный изотропный вектор в пространстве Минковского u^ν равен

$$u^\nu = (1, ue^i). \tag{82}$$

Для одновременного выполнения условий (74) и (75) необходимо и достаточно, чтобы для любого изотропного вектора

$$\gamma_{\mu\nu}\, u^\mu u^\nu = 0 \tag{83}$$

выполнялось условие причинности

$$g_{\mu\nu}\, u^\mu u^\nu \le 0, \tag{84}$$

которое и означает, что световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Условия причинности можно записать следующим образом:

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 0, \tag{83a}$$

$$\gamma_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} \geq 0. \tag{84a}$$

В ОТО физический смысл имеют такие решения уравнений Гильберта — Эйнштейна, которые удовлетворяют в каждой точке пространства-времени неравенству

$$g < 0,$$

а также требованию, называемому условием энергодоминантности, которое формулируется следующим образом: для любого непространственноподобного вектора K_ν должно выполняться неравенство $T^{\mu\nu}K_\mu K_\nu \geq 0$, а величина $T^{\mu\nu}K_\nu$ для данного вектора K_ν должна образовывать непространственноподобный вектор.

В нашей теории физический смысл имеют такие решения уравнений (68а) и (69а), которые, наряду с этими требованиями, должны также удовлетворять условиям причинности (83а) и (84а). Последнее, на основании уравнения (68а), можно записать в следующем виде:

$$R_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} \leq \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) K^{\mu} K^{\nu} + \frac{m^2}{2} g_{\mu\nu} K^{\mu} K^{\nu} \tag{85}$$

или

$$\sqrt{-g}\, R_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta} \leq 8\pi T_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}. \tag{85a}$$

В заключение данного раздела отметим, что хотя гравитационные уравнения (66) и (67) с массой гравитона были нами получены еще несколько лет назад, постепенно логика нашего построения привела к выводу о существовании массы покоя гравитона, поскольку только она позволяет построить теорию тензорного поля в пространстве Минковского, которая приводит к эффективной римановой геометрии пространства-времени.

6. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ РТГ

Система уравнений РТГ (66) и (67) приводит к совершенно другим, качественно новым физическим выводам по сравнению с ОТО. Так, например, совершенно меняется представление о коллапсе. Оказывается, что при коллапсе сферически-симметричного тела произвольной массы процесс сжатия в области, близкой к сфере Шварцшильда, останавливается и сменяется последующим расширением. Это означает, что в природе, наряду со сжимающимися объектами, должны существовать и расширяющиеся объекты. Таким образом, согласно РТГ существование в природе «черных дыр» (объектов, не имеющих материальных границ и «отрезанных» от внешнего мира) полностью исключается. Другой важный физический вывод относится к развитию однородной и изотропной Вселенной. Из уравнений (66) и (67), а также из условий причинности (83) и (84) следует, что однородная и изотропная Вселенная существует бесконечное время и ее трехмерная геометрия является евклидовой. Развитие Вселенной идет циклически от максимальной конечной плотности до минимальной, затем опять до максимальной (в случае отсутствия диссипации) и т.д. Теория предсказывает существование во Вселенной большой «скрытой» массы вещества, так как, согласно уравнениям (66) и (67), полная плотность вещества в настоящее время равна

$$\rho = \rho_c + \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2. \tag{86}$$

Отсюда видно, что плотность вещества, даже для достаточно малой массы гравитона, близка к критической плотности ρ_c, определяемой постоянной Хаббла H и равной

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{87}$$

РТГ объясняет все известные гравитационные эксперименты в Солнечной системе и позволяет, как мы видели ранее, ввести для гравитационного поля, так же, как это имеет место для других физических полей, понятие тензора энергии-импульса. Поскольку в теории источником гравитационного поля является полевой тензор энергии-импульса вещества и гравитационного поля, то инертная масса статического тела точно равна его активной гравитационной массе. В рамках ОТО такой вывод сделать нельзя, хотя Эйнштейн и стремился заложить его в основы теории. Экспериментальная проверка этого утверждения является в то же время проверкой нашей теории. Тензор энергии-импульса $-2\dfrac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}}$ гравитационного поля в римановом пространстве вне вещества, согласно уравнениям (66), равен нулю. Однако это не означает отсутствия гравитационного излучения, поскольку гравитационная волна, переносящая энергию, движется на эффективном гравитационном фоне. Что касается гравитационного излучения массивных гравитонов, то этот вопрос рассмотрен в статье [4], где автор показал, что проводившиеся ранее расчеты основывались на некорректно полученнном общем выражении для интенсивности. При его выводе не учитывался тот важный факт, что в действительности гравитоны распространяются не в пространстве Минковского, а в эффективном римановом пространстве. Учет этого обстоятельства привел автора к утверждению, что интенсивность гравитационного излучения массивных гравитонов является положительно определенной величиной. Ее выражение приведено в работе [4]. Система гравитационных уравнений (66) и (67) РТГ открывает новые возможности для исследований как в принципиальном плане, так и в конкретном — при изучении тех или иных гравитационных явлений.

В заключение следует сделать важные замечания. Можно ли положить массу гравитона равной нулю? Поскольку масса гравитона в нашей теории снимает вырождение по калибровочной группе, ее обращение в нуль непосредственно в уравнениях (66) и (67) не является корректным. В нашей теории она не должна быть равной нулю. Система гравитационных уравнений (66) и (67) является гиперболической, причем принцип причинности обеспечивает существование во всем пространстве пространственноподобной поверхности, которую каждая непространственноподобная кривая в римановом пространстве пересекает только один раз, т.е., иначе говоря, существует глобальная поверхность Коши, на которой и задаются для той или иной задачи начальные физические условия. Пенроуз и Хокинг [5] при определенных общих условиях доказали теоремы о существовании сингулярности в ОТО. Поскольку на основании уравнений (68а) вне вещества для изотропных векторов риманова пространства, в силу условий причинности (85), имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}\, v^{\mu} v^{\nu} \le 0, \qquad (88)$$

то условия теорем о существовании сингулярности в РТГ не выполняются, следовательно, и их утверждение для РТГ неприменимо. В данной теории пространственноподобные события в отсутствие гравитационного поля никогда не могут стать под действием гравитационного поля времениподобными. В силу принципа причинности эффективное риманово пространство-время в РТГ будет обладать изотропной и времениподобной геодезической полнотой. На основании всего изложенного выше можно сделать следующий общий вывод: если в силу универсальности гравитации принять, что источником гравитационного поля в пространстве Минковского является сохраняющийся тензор энергии-импульса вещества и массивного гравитационного поля, то само это поле будет проявляться как тензорное поле второго ранга. По аналогии с электродинамикой уравнения поля естественно записать в следующем виде:

$$\square \Phi^{\mu\nu} + m^2 \Phi^{\mu\nu} = \lambda t^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \Phi^{\mu\nu} = 0.$$

Но такая система уравнений следует из лагранжева формализма только в том случае, если взаимодействие вещества и гравитационного поля осуществляется согласно принципу геометризации, который и сводит действие этого поля к эффективной геометрии пространства-времени. Таким образом, принятие сохраняющегося тензора энергии-импульса материи как универсального источника гравитационного поля с необходимостью приводит к эффективной римановой геометрии. Поскольку полевая теория гравитации требует введения массы гравитона, а по структуре теории она близка к электродинамике, то вполне вероятно, что масса покоя фотона также не равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosen N. — Phys.Rev., 1940, vol.57, p.147.
2. Poincare H. — Bulletin des Sciences Mathematiques December. 1904, 28.Ser.2, p.302;
Poincare H. — Sur la dynamique de l'electron. Comptes Rendus des Seances de l'Akademie des Sciences. Paris, 1905, vol.140, p.1504.
Poincare H. — Sur la dynamique de l'electron. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906, vol.XXI, p.129.
3. Logunov A.A., Mestvirishvili M.A. — The Relativistic Theory of Gravitation. M.: Mir, 1989.
Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — Основы релятивистской теории гравитации. М.: Изд-во Московского университета, 1986.
4. Лоскутов Ю.М. — Вестник Моск. ун-та. Сер.3. Физ. Астр. 1991, т.32, вып.4, с.49.
5. Penrose R. — Phys.Rev.Lett., 1965, vol.14, p.57;
Hawking S.W., Penrose R. — Phys.Roy.Soc., London, 1970, vol.A314, p.529;
Хокинг С., Эллис Дж. — Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.