«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1993, ТОМ 24, ВЫП.5

УДК 539.12.01

КВАНТОВАНИЕ ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА В ЛИНЕЙНЫХ КАЛИБРОВКАХ

А.А.Славнов, С.А.Фролов

Математический институт им.В.А.Стеклова РАН, Москва

Рассмотрены различные методы квантования полей Янга — Миллса в линейных калибровках. Обсуждается каноническое квантование в калибровке $A_0 = 0$, вычисление пропагатора поля Янга — Миллса в калибровке светового конуса путем перехода от калибровки $A_0=0$. Подробно рассмотрена процедура БРСТ-квантования в произвольной линейной калибровке.

Different methods of Yang — Mills fields quantization in linear gauges are considered. The canonical quantization in the temporal gauge $A_0 = 0$ is discussed. The propagator of the Yang — Mills field in the light cone gauge is calculated by means of transition from the temporal gauge $A_0 = 0$. BRST quantization in arbitrary linear gauge is considered in detail.

ВВЕДЕНИЕ

В этом обзоре мы рассмотрим различные методы квантования полей Янга — Миллса в линейных калибровках. Линейные калибровки используются в физике в течение многих лет. Они нашли применение в КХД [1], суперсимметричной теории Янга — Миллса [2,3] и теории струн [4]. Например, калибровка светового конуса оказалась удобной для анализа ультрафиолетовых расходимостей в суперсимметричных теориях. Один из вариантов доказательства конечности $N = 4$ суперсимметричной теории Янга — Миллса использует калибровку светового конуса [2,3]. Интерес к линейным калибровкам вызван рядом причин. Во-первых, в этих калибровках отсутствуют духи Фаддеева — Попова, что упрощает диаграммную технику, обобщенные тождества Уорда [5,6] и уравнения Швингера — Дайсона для функций Грина. В этих калибровках отсутствуют «копии» Грибова [7], а поэтому можно надеяться, что линейные калибровки могут быть использованы и вне рамок теории возмущений (однако в этом случае необходимо искать непертурбативные решения уравнения $\varphi|\Psi\rangle = 0$).

Рассмотрим вкратце различные методы квантования калибровочно-инвариантных систем. Наиболее общий калибровочно-инвариантный лагранжиан после исключения связей второго рода может быть представлен в виде:

$$\mathfrak{L} = p_i \dot{q}^i - H + \lambda^a \varphi_a(p, q). \tag{1}$$

Здесь (p_i, q^i) — пара канонически-сопряженных переменных, $\varphi_a(p, q)$ — связи первого рода и λ^a — множители Лагранжа. Система, описываемая лагранжианом (1), называется обобщенной гамильтоновой системой (понятия связей первого и второго рода и обобщенной гамильтоновой системы были введены Дираком [8,9]).

Для квантования таких систем необходимо наложить калибровочное условие. Можно выделить три основных класса калибровочных условий.

1. Унитарные калибровки $\chi^a(p, q) = 0$. В таких калибровках с помощью условий $\chi^a(p, q) = 0$ и связей $\varphi_a(p, q) = 0$ исключают нефизические степени свободы и рассматривают в дальнейшем только физические степени свободы [10]. Примерами таких калибровок являются кулоновская калибровка в теории Янга — Миллса и калибровка светового конуса в теории первично-квантованных струн.

2. Релятивистские калибровки $\dot{\lambda}^a = f^a(p, q, \lambda)$. Для случая независимых связей первого рода, образующих алгебру Ли, проблема построения эффективного действия была решена в 1967 г. Л.Д.Фаддеевым и В.Н.Поповым [11] и Б.Де Виттом [12]. Однако стандартная процедура Фаддеева — Попова неприменима для случая зависимых связей и необходимо ее обобщение. Для некоторых теорий, подобных неабелеву антисимметричному тензорному полю, соответствующее обобщение было построено [13], тем не менее в общем случае проблема остается открытой.

БРСТ-подход (Бекки — Рюэ — Стора — Тютин) позволяет проквантовать произвольную калибровочную систему в релятивистской калибровке [14—21]. Различают лагранжево и гамильтоново БРСТ-квантование. Лагранжев БРСТ-подход был предложен в работе [16] (в качестве альтернативного и более простого подхода см. [17]). Гамильтоново БРСТ-квантование [18,19] является наиболее развитым методом БРСТ-квантования (см. обзоры [20,21]).

3. Гамильтоновы калибровки $\lambda^a = f^a(p, q)$. Эти калибровки являются обобщением гамильтоновой (или временной) калибровки $\lambda^a = 0$. В отличие от унитарных и релятивистских калибровок гамильтонова калибровка не полностью фиксирует калибровочный произвол. «Продольные» возбуждения присутствуют в теории и их необходимо квантовать. Произ-

вольная гамильтонова калибровка приводится к чисто гамильтоновой калибровке с помощью замены

$$\lambda^a - f^a(p, q) \to \lambda^a.$$

Для квантования системы в гамильтоновой калибровке можно использовать следующие методы. Во-первых, можно проквантовать систему в расширенном фазовом пространстве, включающем все пары переменных (p_i, q^i), а затем выделить физическое подпространство условием $\varphi|\Psi\rangle = 0$. Однако это условие, как правило, приводит к ненормируемым векторам состояний, что не может считаться удовлетворительным с точки зрения квантовой механики. Во-вторых, можно с помощью трюка Фаддеева — Попова осуществить переход от какой-либо известной калибровки (в которой система может быть проквантована) к гамильтоновой калибровке. И, наконец, возможно БРСТ-квантование системы в гамильтоновой калибровке. Однако в этом случае необходимо рассмотреть вопрос о норме физического подпространства.

В данной работе мы применим эти методы для квантования полей Янга — Миллса в линейных калибровках $n_\mu A_\mu = 0$.

В зависимости от вектора n_μ линейные калибровки делятся на три типа:

1) Гамильтонова или временная калибровка $A_0 = 0$, $n_\mu = (1,0,0,0)$. Лоренцевым поворотом любую калибровку $n_\mu A_\mu = 0$ с $n^2 > 0$ можно привести к гамильтоновой калибровке.

2) Калибровка светового конуса $n_\mu A_\mu = 0$, $n^2 = 0$.

3) Аксиальная калибровка $A_3 = 0$, $n_\mu = (0,0,0,1)$. Любую калибровку $n_\mu A_\mu = 0$ с $n^2 < 0$ можно привести к аксиальной калибровке.

Все линейные калибровки являются гамильтоновыми калибровками $A_0 = \mathbf{n}\mathbf{A}/n_0$ (аксиальная калибровка получается в пределе $n_0 \to 0$).

При построении теории возмущений в линейных калибровках возникает проблема корректного определения пропагатора калибровочного поля, связанная с наличием дополнительной сингулярности функции Грина. Пропагатор полей Янга — Миллса в калибровке $n_\mu A_\mu = 0$ содержит, кроме полюса при $k^2 = 0$, также сингулярность при $nk = 0$. Правило обхода полюса при $k^2 = 0$ определяется фейнмановскими граничными условиями для поперечных квантов и сводится к обычной замене $k^2 \to k^2 + i0$. Чтобы определить правило обхода полюса при $nk = 0$, необходимо зафиксировать граничные условия для продольных компонент, и это правило обхода будет зависеть от выбранных граничных условий. Для обхода полюса при $nk = 0$ были предложены несколько предписаний (в качестве недавнего обзора и детального списка литературы см. [22]), причем предлагаемые предписания обычно зависят от вектора n_μ.

В этой работе мы обсуждаем корректные методы квантования, позволяющие определить правило обхода этого полюса.

Первая глава посвящена каноническому (по Дираку) квантованию полей Янга — Миллса в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$. Исторически первым предписанием для обхода полюса при $k_0 = 0$ (и $nk = 0$) был обход полюса в смысле главного значения [23—25]. Однако вычисление петли Вильсона в низших порядках теории возмущения, проделанное в работе [26], привело к противоречию с результатами, полученными в кулоновской калибровке. Для согласования с кулоновской калибровкой авторы работы [26] постулировали продольный пропагатор в виде

$$D^L(x-y) = \frac{1}{2}\Delta^{-1}(|t-s| \pm \frac{1}{2}(t+s) + \gamma). \tag{2}$$

Здесь первый член в квадратных скобках отвечает обходу полюса при $k_0^2 = 0$, понимаемому в смысле главного значения, второй порождает трансляционно-неинвариантный при сдвиге времени вклад в функцию Грина, третий член γ — произвольная константа.

Мы покажем, что пропагатор (2) можно получить в рамках канонического квантования при подходящем определении физических состояний.

В случае квантовой электродинамики доказано, что трансляционно-неинвариантные члены не дают вклада в S-матрицу.

В первой главе изложены результаты, полученные в работе [27].

Вторая глава посвящена квантованию полей Янга — Миллса в калибровке светового конуса $A_0 = A_3$. Обход полюса при $nk = 0$ в смысле главного значения также не годится для калибровки светового конуса. Причина заключается в том, что это предписание приводит к инфракрасной расходимости однопетлевой функции Грина при вычислениях с использованием размерной регуляризации. Мандельштам [3] и Лейббрандт [28] предложили предписание, которое соответствует замене члена $(nk)^{-1}$ в пропагаторе на $n^*k/(nk * n^*k + i\varepsilon)$, где $n = (n_0, \mathbf{n})$, $n^* = (n_0, -\mathbf{n})$. Лейббрандт показал, что такое предписание не приводит к инфракрасным расходимостям однопетлевой функции Грина. Кроме того, предписание Мандельштама — Лейббрандта позволяет осуществить поворот Вика, что важно для анализа ультрафиолетовых расходимостей в суперсимметричных теориях [3].

На первый взгляд, кажется естественным попытаться рассмотреть калибровку светового конуса по аналогии с калибровкой $A_0 = 0$, используя конусные переменные $x^{\pm} = x^0 \pm x^3$ (конусные переменные использовались в КЭД еще в работах [29,30]. В этих переменных поле $A_- = A_0 - A_3$ играет роль множителя Лагранжа. Однако прямое перенесение процедуры, используемой в гамильтоновой калибровке (см. первый разд.), оказывается невозможным. В частности, в этом случае не удается выделить инвариантным образом подпространство физических состояний. Если же попытаться провести квантование в переменных t, x, то полученный пропагатор окажется трансляционно-неинвариантным при сдвигах времени, так же, как и в гамильтоновой калибровке (это связано с выбором импульсного представления для продольных квантов и ненормируемостью векторов из физического подпространства).

Возможный путь обхода этих трудностей был предложен в работе [31], где рассматривалась теория Янга — Миллса с модифицированным лагранжианом, включающим член вида $\lambda(n_\mu A_\mu)$, обеспечивающий выполнение условия калибровки $n_\mu A_\mu = 0$ в сильном смысле. Метод, использованный в работе [31], является аналогом известного метода Гупта — Блейлера (см., например, [32]): вводится расширенное гильбертово пространство состояний с индефинитной метрикой, а физическое подпространство выделяется наложением дополнительного условия на векторы состояний. Затем доказывается, что в физическом подпространстве удовлетворяются закон Гаусса и пуанкаре-инвариантность. Пропагатор, полученный в работе [31], совпадает с пропагатором Мандельштама — Лейббрандта. Следует заметить, однако, что предложенная в [31] процедура специально приспособлена для получения пропагатора Мандельштама — Лейббрандта и не позволяет получить полного набора допустимых пропагаторов.

Для решения этой задачи во втором разделе осуществляется переход с учетом граничных условий от гамильтоновой калибровки к калибровке светового конуса с использованием трюка Фаддеева — Попова (подобная процедура для перехода от кулоновской калибровки к лоренцевой описана, например в [33]).

В качестве исходного используется выражение для S-матрицы в калибровке $A_0 = 0$, полученное в первом разделе. Без ограничений общности можно считать, что $n_\mu = (1,0,0,1)$. Введем обозначения $A_- = A_0 - A_3$, $\partial_- = \partial_0 - \partial_3$. Для перехода к калибровке $A_- = 0$ в соответствии со стандартной процедурой следует умножить выражение для S-матрицы в гамильтоновой калибровке на «единицу»:

$$\Delta(A_-)\int d\omega(\mathbf{x},t)\delta(A_-^{\omega})=1,\quad \omega(\mathbf{x},t')=\omega(\mathbf{x},t'')=1. \tag{3}$$

Единичные граничные условия необходимо наложить на параметр калибровочных преобразований $\omega(\mathbf{x}, t)$, чтобы замена переменных $A_\mu \to A_\mu^\omega$ не меняла граничных условий в континуальном интеграле. Нетрудно видеть, однако, что условию (3) нельзя удовлетворить при произвольных полях A_- (уравнение $A_-^\omega = 0$ является уравнением первого порядка, и его решение при произвольных A_- не удовлетворяет двум граничным условиям на $\omega(\mathbf{x}, t)$). Чтобы обойти это препятствие, можно регуляризовать калибровку $A_- = 0$, т.е. перейти к калибровке $F_\kappa(A_-) = 0$, где $F_\kappa(A_-) \to A_-$ при $\kappa \to 0$, и уравнение $F_\kappa(A_-^\omega) = 0$, $\omega(\mathbf{x}, t') = \omega(\mathbf{x}, t'') = 1$ имеет решение для любого поля $A_-(\mathbf{x}, t)$. Калибровка $A_- = 0$ не полностью фиксирует калибровочный произвол, оставляя преобразования с функциями $\omega(t)$, не зависящими от x_-. Чтобы предел $F_\kappa(A_-) \to A_-$ при $\kappa \to 0$ был несингулярен, калибровка $F_\kappa(A_-) = 0$ должна обладать этим же свойством. Во второй главе мы используем две различные регуляризации калибровки $A_- = 0$, обладающие этим свойством, и получим два различных набора пропагаторов, один из которых содержит пропагатор Мандельштама — Лейббрандта.

Предложенный метод регуляризации калибровок пригоден для нахождения пропагатора полей Янга — Миллса в любой линейной калибровке $n_\mu A_\mu = 0$ (а также в любой гамильтоновой калибровке $A_0 = f(A_i, E_i)$). Используя другие регуляризации калибровки $n_\mu A_\mu = 0$, можно получить другие правила обхода полюса при $nk = 0$. В частности, существует регуляризация, приводящая к следующему обходу полюса: $\mathbf{nk} \to \mathbf{kn} + i\delta\varepsilon\,(\mathbf{km})$, где $\mathbf{m}$ — произвольный трехмерный вектор (при $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ это предписание совпадает с предписанием Мандельштама — Лейббрандта).

Изложение материала во втором разделе следует работе [34].

Третий раздел посвящен развитию метода гамильтонова БРСТ-квантования в гамильтоновых калибровках $\lambda^a = f^a(p, q)$ и применению этого метода к квантованию полей Янга — Миллса в линейных калибровках.

Как уже отмечалось выше, при каноническом квантовании систем со связями первого рода в гамильтоновых калибровках физическое подпространство выделяют условием $\varphi|\Psi\rangle = 0$, и это условие, как правило, приводит к ненормируемым физическим векторам. Именно ненормируемость векторов состояний приводит к трансляционно-неинвариантному пропагатору (2) полей Янга — Миллса в калибровке $A_0 = 0$. Метод БРСТ-квантования позволяет выделить физическое подпространство с положительной и конечной нормой. В п.3.1 рассмотрены основные составляющие БРСТ-подхода и объяснено, почему метод гамильтонова БРСТ-квантования, развитый в работах [18,19], непосредственно применим только к релятивистским калибровкам. Затем показано, что результаты, полученные с помощью метода гамильтонова БРСТ-квантования, могут быть использованы для построения эффективного действия в гамильтоновой калибровке, и продемонстрировано, как любую гамильтонову калибровку можно привести к чисто гамильтоновой калибровке. Однако для завершения квантования необходимо доказать, что физическое подпространство, выделяемое условием $Q|\Psi\rangle = 0$, где Q — БРСТ-оператор, имеет положительную и конечную норму. Этот вопрос рассмотрен в п.3.2, где также объясняется необходимость четного числа связей для регулярности векторов из физического подпространства. Для случая связей первого рода, образующих алгебру Ли, найдено представление коммутационных соотношений, гарантирующее конечность нормы, по крайней мере, в теории возмущений. Поиск правильного представления алгебры Гейзенберга является нетривиальной задачей, т.к. в данном случае не все представления являются эквивалентными. Показано, что условие Дирака $\varphi_a|\Psi\rangle = 0$, $a = 1, ..., 2L$, при БРСТ-квантовании заменяется на условие $\varphi_i|\Psi\rangle = 0$, $i = 1, ..., L$, где связи φ_i являются комплексными и образуют подалгебру первоначальной алгебры Ли (точнее, ее комплексного расширения). В последующих разделах рассмотрено БРСТ-квантование полей Янга — Миллса в линейных калибровках. В п.3.3 построено голоморфное представление коммутационных соотношений и найдено выражение для оператора эволюции и S-матрицы в терминах континуального интеграла. Это рассмотрение в значительной мере повторяет соответствующее рассмотрение для обычного голоморфного представления операторов рождения и уничтожения (см., например, [33]). В пп.3.4 и 3.5 проведено БРСТ-квантование полей Янга — Миллса в линейных калибровках. Метод гамильтонова БРСТ-квантования позволяет проводить единообразное рассмотрение всех линейных калибровок, и поэтому правила обхода полюса при $nk = 0$ оказываются одинаковыми для любых векторов n_μ (в отличие от ситуации, имевшей место в первом и втором разделах обзора). С помощью двух различных представлений коммутационных соотношений найдено два предписания для пропагатора полей Янга — Миллса. Первое предписание отвечает обходу полюса в смысле главного значения. Этот результат показывает, что должна существовать регуляризация, позволяющая проводить вычисления с таким пропагатором. Второе предписание является обобщенным предписанием Мандельштама — Лейббрандта, упомянутым ранее: $\mathbf{nk} \to \mathbf{kn} + i\delta\varepsilon(\mathbf{km})$. Если $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, то это предписание совпадает с предписанием, предложенным в работе [35]. В случае гамильтоновой калибровки, выбирая $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, получаем предписание, предложенное в [36].

Третий раздел основан на результатах, полученных в работе [37].

1. КВАНТОВАНИЕ ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА В КАЛИБРОВКЕ $A_0 = 0$

Этот раздел посвящен квантованию полей Янга — Миллса в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$. Мы используем координатное и импульсное представление для продольных компонент полей и, учитывая закон Гаусса, получим в рамках метода функционального интегрирования трансляционно-неинвариантный пропагатор полей Янга — Миллса, предложенный в работе [26].

1.1. *S***-матрица.** Лагранжиан Янга — Миллса имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g t^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$ — тензор напряженности поля Янга — Миллса, t^{abc} — структурные константы алгебры Ли, отвечающей рассматриваемой калибровочной группе.

Для построения гамильтонова формализма удобно переписать лагранжиан (4) (с точностью до дивергенции) в виде

$$\mathcal{L} = E^a_k \partial_0 A^a_k - \frac{1}{2}((E^a_k)^2 + \frac{1}{2}(F^a_{ik})^2) + A^a_0 G^a, \tag{5}$$

где $E^a_k = F^a_k$, а $G^a \equiv \partial_k E^a_k + g t^{abc} E^b_k A^c_k$, и $i, j, k = 1, 2, 3$.

Из этой формулы ясно, что пары (E^a_k, A^a_k) являются сопряженными каноническими переменными,

$$h = \frac{1}{2}(E^a_k)^2 + \frac{1}{4}(F^a_{ik})^2 \tag{6}$$

— гамильтониан, A^a_0 — множители Лагранжа, G^a — связи на канонические переменные.

В калибровке $A_0 = 0$ лагранжиан (5) описывает гамильтонову систему, а связи $G^a = 0$ должны учитываться отдельно.

Калибровка $A_0 = 0$ не полностью фиксирует калибровочный произвол, оставляя возможность преобразований с калибровочной функцией, не зависящей от времени. Покажем, что связи $G^a(\mathrm{x})$ являются генераторами соответствующих калибровочных преобразований. Произвольной матрице $\alpha(\mathrm{x})$ в присоединенном представлении алгебры Ли можно поставить в соответствие функционал $G(\alpha)$:

$$G(\alpha) = \int d\mathrm{x} G^a(\mathrm{x})\alpha^a(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}\int d\mathrm{x}\ \mathrm{tr}\,(G(\mathrm{x})\alpha(\mathrm{x})), \tag{7}$$

где $G(\mathrm{x}) = G^a(\mathrm{x})A^a$ и $\alpha(\mathrm{x}) = \alpha^a(\mathrm{x})T^a$, а T^a — генераторы алгебры Ли в присоединенном представлении.

Стандартная скобка Пуассона для переменных E_k^a и A_k^a порождает следующие перестановочные соотношения для функционалов $G(\alpha)$:

$$\{G(\alpha), G(\beta)\} = gG([\alpha, \beta]). \tag{8}$$

Это показывает, что $G(\alpha)$ задает представление алгебры Ли группы калибровочных преобразований, состоящей из матриц $\alpha(\mathrm{x})$. Действие этого представления на переменные E_k^a и A_k^a дается формулой:

$$\begin{aligned} \delta A_k^a(\mathrm{x}) &= \{G(\alpha), A_k^a(\mathrm{x})\} = \partial_k\,\alpha^a(\mathrm{x}) - gt^{abc}A_k^b(\mathrm{x})\alpha^c(\mathrm{x}), \\ \delta E_k^a(\mathrm{x}) &= \{G(\alpha), E_k^a(\mathrm{x})\} = -\,gt^{abc}E_k^b(\mathrm{x})\alpha^c(\mathrm{x}). \end{aligned} \tag{9}$$

Скобка Пуассона связей G^a с гамильтонианом h равна нулю, поэтому $G(\mathrm{x}, t)$ порождает бесконечный набор интегралов движения.

Наблюдаемые величины $O(A_i, E_i)$ калибровочно-инвариантны и, следовательно, должны коммутировать с $G(\alpha)$. Это условие позволяет выразить одну из функций A_i, E_i, от которых зависит $O(A_i, E_i)$, через остальные. Вместе с условием связи $G^a = 0$ это сводит число независимых функций к четырем.

При квантовании скобки Пуассона между переменными A_i и E_i заменяются на коммутаторы. Однако, поскольку операторы A_i и E_i считаются независимыми, мы не может потребовать обращения оператора связей G^a в нуль. Вместо этого уравнение связи накладывается на допустимые состояния:

$$G|\Phi\rangle = 0. \tag{10}$$

Наша задача — построить матрицу рассеяния, описывающую переход из асимптотического состояния $|\Phi'\rangle$ в состояние $|\Phi''\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle\Phi''|S|\Phi'\rangle = \lim_{\substack{t''\to+\infty \\ t'\to-\infty}} \langle\Phi''|\exp\{iH_0t''\}\exp\{-iH(t''-t')\}\,\times \\ \times\exp\{-iH_0t'\}|\Phi'\rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Пространство асимптотических состояний можно реализовать как тензорное произведение пространства поперечных фотонов и пространства продольных фотонов: $H = H^T \otimes H^L$. В качестве H^T выберем обычное пространство Фока. В отличие от случая поперечных фотонов свободный лагранжиан для продольных фотонов, как видно из формулы (5), содержит лишь кинетический член. Поэтому для H^L естественно выбрать координатное или импульсное представление. В дальнейшем будем обозначать $|\Psi^L\rangle \equiv |E^L\rangle$, если H^L реализовано в импульсном представлении, и $|\Psi^L\rangle \equiv |A^L\rangle$, если H^L реализовано в координатном представлении. Физические состояния выделяются условием (10). Обычно считают, что для асимптотических состояний закон Гаусса линеаризуется:

$$\lim_{|t|\to\infty} \mathrm{e}^{iH_0t} G\, \mathrm{e}^{-iH_0t} = G_0, \quad G_0 = \partial_k E_k. \tag{12}$$

При этом используется то обстоятельство, что коэффициентные функции оператора

$$\mathrm{e}^{iH_0t}(G - G_0)\, \mathrm{e}^{-iH_0t} \tag{13}$$

квадратичны по полям и поэтому стремятся к нулю при $|t| \to \infty$. Однако из-за того, что решения свободного уравнения для A^L обладают растущими асимптотиками, это утверждение может быть несправедливо. Тем не менее члены, квадратичные по поперечным компонентам A^T и по полям материи, асимптотически исчезают, и можно утверждать, что

$$\lim_{|t|\to\infty} \mathrm{e}^{iH_0t} G\, \mathrm{e}^{-iH_0t} = G_{as}, \quad G^a_{\mathrm{as}} \equiv \partial_k E^{L,a}_k + gt^{abc} E^{L,b}_k A^{L,c}_k, \tag{14}$$

причем G^a_{as} коммутирует со свободным гамильтонианом H_0 [38].

Как легко видеть (по крайней мере, в рамках теории возмущений), условия

$$G_0 |\Phi\rangle = 0, \quad G_{\mathrm{as}}|\Phi\rangle = 0 \tag{15}$$

определяют один и тот же набор физических состояний, которые можно представить в виде

$$|\Phi\rangle = |\Psi^T\rangle \otimes |0\rangle \equiv |\Phi^T, 0\rangle, \tag{16}$$

где $|\Psi^T\rangle$ обозначает произвольный фоковский вектор в пространстве поперечных состояний.

Дословно повторяя рассуждения, приведенные в [33], легко показать, что S-матрица коммутирует с G_{as} и, следовательно, унитарна в пространстве физических состояний. Отсюда следует, в частности, что

$$\langle E^L, \Psi^T | S | \widetilde{\Psi}^T, 0\rangle \sim \delta(E^L). \tag{17}$$

Это наблюдение мы существенно используем в дальнейшем.

Матричный элемент S-матрицы между произвольными состояниями можно представить в виде

$$\langle E^L, \Psi^T | S | \widetilde{\Psi}^T, \widetilde{E}^L\rangle =$$

$$= \exp\left\{-i\int H_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)dx\right\}\langle E^L, \Psi^T | S(J) | \widetilde{\Psi}^T, \widetilde{E}^L\rangle, \tag{18}$$

где

$$\langle E^L, \Psi^T | S(J) | \widetilde{\Psi}^T, \widetilde{E}^L\rangle = \lim_{\substack{t''\to+\infty \\ t'\to-\infty}} \langle E^L, \Psi^T | \exp\left\{iH_0 t''\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-iH_0(t''-t') + \int_{t'}^{t''} J_i^a(\mathrm{x})A_i^a(\mathrm{x})d\mathrm{x}dt\right\} \exp\left\{-iH_0 t'\right\} | \widetilde{\Psi}^T, \widetilde{E}^L\rangle. \tag{19}$$

Этот матричный элемент определяет пропагатор фейнмановской диаграммной техники, зная который, можно вычислить интересующую нас S-матрицу по формуле (18). В матричном элементе (19) зависимость от продольных (поперечных) компонент поля факторизуется, и поэтому задача сводится к независимому вычислению $\langle\Psi^T | S(J^T) | \widetilde{\Psi}^T\rangle$ и $\langle E^L | S(J^L) | \widetilde{E}^L\rangle$, где $J^{T(L)}$ обозначает поперечную (продольную) компоненту источника.

Ответ для поперечной части хорошо известен (см. [33]). Для нормального символа $S^T(a, a^*)$ имеем

$$S^T(a,a^*) = \exp\left\{i\int J_i^{a,T}(x)A_{i(0)}^{a,T}(x)dx + \frac{i}{2}\int J_i^a(x)D_{ij}^{ab,T}(x-y)J_i^b(y)dxdy\right\}, \tag{20}$$

где

$$D_{ij}^{ab,T}(x) = -\frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\mathrm{e}^{-ikx}}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right), \tag{21}$$

$A_{i(0)}^{a,T}$ — решение свободного уравнения

$$\partial_i(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = 0$$

в голоморфном представлении.

Рассмотрим теперь матричный элемент $\langle E^L | S(J) | \widetilde{E}^L\rangle$. Пользуясь полнотой системы векторов $|A^L\rangle$, его можно представить в виде

$$\langle E^L,|S(J)|\widetilde{E}^L\rangle = \lim_{\substack{t''\to+\infty \\ t'\to-\infty}} \int \exp\left\{i\int d\mathbf{x}(\widetilde{E}^L\widetilde{A}^L - E^L A^L)\right\}\times$$
$$\times \langle A^L|\exp\left\{iH_0 t''\right\}|A_2^L\rangle \langle A_2^L|\exp\left\{-iH_0(t''-t') + \int J^L(x)A^L(x)dx\right\}\times$$
$$\times |A_1^L\rangle \langle A_1^L|\exp\left\{-iH_0 t'\right\}|A^L\rangle\, \mathfrak{D}\widetilde{A}^L\, \mathfrak{D}A^L\, \mathfrak{D}A_1^L\, \mathfrak{D}A_2^L. \tag{22}$$

Каждый из входящих в правую часть матричных элементов выражается через функциональный интеграл:

$$\langle A_i^L|\exp\left\{iH(t_2-t_1)\right\}|A_j^L\rangle = \int \mathfrak{D}A^L \exp\left\{i\int_{t_1}^{t_2}\mathfrak{L}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}dt\right\} \tag{23}$$

с граничными условиями $A^L(\mathbf{x},t_2) = A_i^L(\mathbf{x})$; $A^L(\mathbf{x},t_1) = A_j^L(\mathbf{x})$ и

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(\partial_0 A_i^{a,L})^2 + J_i^{a,L}(x)\,A_i^{a,L}(x) \tag{24}$$

(для первого и третьего матричных элементов $J^L = 0$). Интеграл (23) гауссов, поэтому он равен подынтегральному выражению, вычисленному в точке экстремума подынтегрального выражения. Экстремальные значения A^L определяются из решения соответствующих классических уравнений и задаются формулами

$$A_k^L(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}|t-s|J_k^{a,L}(\mathbf{x},s)ds + C_k^a(\mathbf{x})t + D_k^a(\mathbf{x}),$$

$$C_k^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{t_2-t_1}\left(A_{k,i}^{a,L} - A_{k,j}^{a,L} + \int_{t_1}^{t_2} sJ_k^{a,L}(\mathbf{x},s)ds - \frac{1}{2}(t_2+t_1)\int_{t_1}^{t_2}J_k^{a,L}(\mathbf{x},s)ds\right),$$

$$D_k^a(\mathbf{x}) = A_{k,j}^{a,L} - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t_1)J_k^{a,L}(\mathbf{x},s)ds - C_k^a(\mathbf{x})t_1. \tag{25}$$

В точке экстремума действие в показателе экспоненты (23) имеет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\mathfrak{L}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}dt = \int d\mathbf{x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}J_k^{a,L}(\mathbf{x},s)ds + C_k^a(\mathbf{x})\right)A_{k,i}^{a,L} -\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}J_k^{a,L}(\mathbf{x},s) + C_k^a(\mathbf{x})\right)A_{k,j}^{a,L} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}J_k^{a,L}(\mathbf{x},s)A_k^{a,L}(\mathbf{x},t)ds\right]. \tag{26}$$

Подставляя соответствующие выражения в правую часть равенства (22) и интегрируя по A^L, получим

$$\langle E^L | S(J) | \widetilde{E}^L \rangle = \lim_{\substack{t''\to+\infty \\ t'\to-\infty}} \int \exp\left\{ \frac{1}{4} \int_{t'}^{t''} J_k^{a,L}(\mathbf{x}, t)\, |t-s|\, J_k^{a,L}(\mathbf{x}, s)\, dt ds d\mathbf{x} - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{2} \int_{t'}^{t''} J_k^{a,L}(\mathbf{x}, t) J_k^{a,L}(\mathbf{x}, s)\, dt ds d\mathbf{x} + i \int_{t'}^{t''} t J_k^{a,L}(\mathbf{x}, t) E_k^{a,L}(\mathbf{x},) d\mathbf{x} dt \right\} \times$$

$$\times\, \delta\left(E_k^{a,L}(\mathbf{x}) - \widetilde{E}_k^{a,L}(\mathbf{x}) - \int_{t'}^{t''} J_k^{a,L}(\mathbf{x}, t) dt \right). \tag{27}$$

Для интересующих нас физических матричных элементов $E^L = \widetilde{E}^L = 0$, и, как видно из формулы (27), элемент $\langle 0 | S(J) | 0 \rangle$ отличен от нуля лишь при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_k^{a,L}(\mathbf{x}, t) dt = 0. \tag{28}$$

Происхождение этого ограничения легко понять. Для теории с гамильтонианом

$$H_0 + \int J_k^a(x) A_k^a(x) d\mathbf{x} \tag{29}$$

закон Гаусса является интегралом движения, только если выполнено условие (28). В противном случае S-матрица переводит физический вектор в нефизический с $E^L \neq 0$.

В то же время для построения теории возмущений по формуле (18) нужно знать матричный элемент $\langle 0, \Psi^T | S(J) | \widetilde{\Psi}^T, 0 \rangle$ при произвольных J. Выход из этого положения состоит в следующем. Как уже отмечалось выше, полная S-матрица унитарна в пространстве физических состояний. Поэтому в соответствии с формулой (17) интересующий нас матричный элемент можно записать в виде

$$\langle 0, \Psi^T | S(J) | \widetilde{\Psi}^T, 0 \rangle =$$

$$= \int \mathfrak{D}E^L(\mathbf{x}) \exp\left\{ \frac{1}{2} \gamma \int E_k^L(\mathbf{x}) E_k^L(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} \langle E^L, \Psi^T | S | \widetilde{\Psi}^T, 0 \rangle, \tag{30}$$

где γ — произвольная константа. Заменяя во всех формулах матричный элемент $\langle 0, \Psi^T | S(J) | \widetilde{\Psi}^T, 0 \rangle$ на правую часть (30), получим

$$\langle 0 | S(J^L) | 0 \rangle = \int \mathfrak{D}E^L(\mathbf{x}) \exp\left\{ \frac{i}{2} \gamma \int E_k^L(\mathbf{x}) E_k^L(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} \langle E^L | S(J^L) | 0 \rangle =$$

$$= \exp\left\{ \frac{i}{2} \int J_i^{a,L}(x) D_{ik}^{ab,L}(x, y) J_k^{b,L}(y) dx dy \right\}, \tag{31}$$

где

$$D_{ij}^{ab,L}(x, y) = \overline{D}_{ij}^{ab,L}(\mathbf{x} - \mathbf{y})D(x_0, y_0),$$
$$\overline{D}_{ij}^{ab,L}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}, \tag{32}$$
$$D(x_0, y_0) = \frac{1}{2} |x_0 - y_0| - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) + \gamma.$$

Если бы мы регуляризовали не конечное состояние, а начальное, то для функции $D(x_0, y_0)$ получили бы

$$D(x_0, y_0) = \frac{1}{2} |x_0 - y_0| + \frac{1}{2}(x_0 + y_0) + \gamma. \tag{33}$$

Объединяя эти результаты с формулой (21), получаем следующее представление для функции Грина поля Янга — Миллса в калибровке $A_0 = 0$:

$$D_{ij}^{ab}(x, y) = -\frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^4} \int \frac{dk\, e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right) +$$
$$+ \left[\frac{1}{2} |x_0 - y_0| \pm \frac{1}{2}(x_0 + y_0) + \gamma\right] \frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}\; e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}. \tag{34}$$

Пропагатор (34) зависит не только от разности $(x - y)$, что, на первый взгляд, нарушает трансляционную инвариантность теории. Нетрудно показать, однако, что калибровочно-инвариантные величины обладают трансляционной инвариантностью. Для этого достаточно с помощью стандартной процедуры перейти, например, в кулоновскую калибровку, в которой трансляционно-неинвариантные члены заведомо отсутствуют.

1.2. Квантовая электродинамика. В абелевом случае легко убедиться в том, что трансляционно-неинвариантные члены не дают вклада непосредственно в калибровку $A_0 = 0$. Рассмотрим, например, производящий функционал для матрицы рассеяния в спинорной электродинамике. Его можно записать в виде функционального интеграла

$$S(J^T) = \int \mathcal{D}\overline{\psi}\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}A \delta(A_0) \exp\left\{i\int (\mathcal{L}(\overline{\psi}, \psi, A) + J_i^T(x)A_i^T(x))dx\right\}, \tag{35}$$

где пропагатор поля A_i определяется формулой (34). Выполнив явно интегрирование по A^L, получим

$$S(J^T) = \int \mathcal{D}\overline{\psi}\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}A^T \exp\left\{\frac{i}{2}\int j_i(x)D_{ij}^L(x,y)j_j(y)dxdy\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{i\int (\mathcal{L}(\overline{\psi}, \psi, A^T) + J_i^T(x)A_i^T(x))dx\right\}, \tag{36}$$

где

$$j_i = e\overline{\psi}(x)\gamma_i\,\psi(x). \tag{37}$$

Показатель экспоненты содержит трансляционно-неинвариантный член

$$\int \partial_k j_k(x)\partial_n j_n(y)x_0\overline{D}(\mathrm{x}-\mathrm{y})dxdy. \tag{38}$$

Покажем, что

$$\int \left[\int \partial_k j_k(\mathrm{x},t)dt \int s\partial_n j_n(\mathrm{y},s)\overline{D}(\mathrm{x}-\mathrm{y})dsd\mathrm{x}d\mathrm{y}\right]^n \times$$
$$\times \exp\left\{i\int \mathfrak{L}(\overline{\psi},\psi,A^T)dx\right\}\mathfrak{D}\overline{\psi}\,\mathfrak{D}\psi\,\mathfrak{D}A^T = 0. \tag{39}$$

С этой целью в интеграле

$$I = \int \exp\left\{i\int (\mathfrak{L}(A^T) + i\overline{\psi}(\hat{\partial} - ie\hat{A}^T)\psi + J_i^T A_i^T)dx\right\} \times$$
$$\times\ [\int s\partial_n j_n(\mathrm{y},s)\,\overline{D}\,(\mathrm{y}-\mathrm{z})dsd\mathrm{y}\,]^n\mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi \tag{40}$$

сделаем замену переменных

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{i\lambda(\mathrm{x})}\psi(x);\ \ \overline{\psi}(x) \to \mathrm{e}^{-i\lambda(\mathrm{x})}\overline{\psi}(x). \tag{41}$$

Поскольку при такой замене интеграл не меняется, мы может приравнять нулю производную по $\lambda(\mathrm{x})$ преобразованного интеграла. В результате получим

$$\int\ [\int\partial_k j_k(\mathrm{z},t)\ s\partial_n j_n(\mathrm{y},s)\ \overline{D}(\mathrm{z}-\mathrm{y})dsdtd\mathrm{x}d\mathrm{y}\ \,]\times$$
$$\times \exp\left\{i\int \mathfrak{L}(\overline{\psi},\psi,A^T)dx\right\}\mathfrak{D}\overline{\psi}\,\mathfrak{D}\psi\,\mathfrak{D}A^T = 0. \tag{42}$$

Совершенно аналогично доказывается равенство нулю интеграла от любой степени выражения, стоящего в квадратных скобках. Тем самым доказано, что неинвариантный член (38) не дает вклада в физические матричные элементы и S-матрица в калибровке $A_0 = 0$ явным образом трансляционно-инвариантна.

В неабелевом случае ситуация более сложная. Вопрос о вкладе трансляционно-неинвариантного члена до сих пор детально не исследован. Корректное решение этого вопроса требует уточнения схемы регуляризации.

2.ПРОПАГАТОР ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА В КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА

Второй раздел посвящен получению пропагатора полей Янга — Миллса в калибровке светового конуса $A_0 = A_3$. Для этого осуществляется переход от гамильтоновой калибровки к калибровке светового конуса. Мы получаем два класса пропагаторов, один из которых содержит пропагатор Мандельштама — Лейббрандта [3,28].

2.1. S**-матрица.** S-матрицу в калибровке $A_0 = 0$ можно записать в виде

$$S = \int \mathfrak{D}\widetilde{E}^L \mathfrak{D}\widetilde{A}^L \mathfrak{D}A_1^L \mathfrak{D}A_2^L \mathfrak{D}A^L \mathfrak{D}a_1^* \mathfrak{D}a_1 \mathfrak{D}b_1^* \mathfrak{D}b_1 \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{2}\int \widetilde{E}_k^L(\mathbf{x})\,\gamma\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\widetilde{E}_k^L(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{-i\int d\mathbf{x}\widetilde{E}^L(\mathbf{x})\widetilde{A}^L(\mathbf{x})\right\}\langle \widetilde{A}^L, b|\,\mathrm{e}^{iH_0t''}\,|A_2^L, b_1\rangle \times$$

$$\times \langle A_2^L, b_1|\,\mathrm{e}^{-iH(t''-t')}|A_1^L, a_1\rangle \langle A_1^L, a_1|\,\mathrm{e}^{-iH_0t'}\,|A^L, a\rangle. \qquad (43)$$

Формула (43) описывает матричный элемент перехода $\langle\widetilde{E}^L, b|S|0, a\rangle$, проинтегрированный с функцией

$$\exp\left\{\frac{i}{2}\int \widetilde{E}_k^L(\mathbf{x})\,\gamma\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})\widetilde{E}_k^L(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right\},$$

где $\gamma(\mathbf{x})$ — произвольная функция от $\mathbf{x}$. При этом мы воспользовались полнотой системы промежуточных состояний, причем, в соответствии с рассмотрением в предыдущем разделе, для поперечных состояний использовано голоморфное представление, а для продольных — координатное.

Матричный элемент оператора эволюции может быть представлен в виде

$$\langle A_2^L, b_1|\,\mathrm{e}^{-iH(t''-t')}|A_1^L, a_1\rangle =$$

$$= \langle b_1|a_1\rangle \exp\left\{-\int d\mathbf{k} b_{1r}^*(\mathbf{k})a_{1r}(\mathbf{k})\right\}\int \mathfrak{D}a_r^*(\mathbf{k}, t)\times$$

$$\times\ \mathfrak{D}a_r(\mathbf{k}, t)\ \mathfrak{D}E_i^L(\mathbf{x}, t)\ \mathfrak{D}A_i^L(\mathbf{x}, t)\ \mathfrak{D}A_0(\mathbf{x}, t)\delta(A_0)\times$$

$$\times \exp\left\{\int d\mathbf{k}\ \left(a_r^*(\mathbf{k}, t'')a_r(\mathbf{k}, t'') + \int_{t'}^{t''} dt(-a_r^*\dot{a}_r - i\omega a_r^* a_r)\right) + \right.$$

$$\left. + i\int_{t'}^{t''} dt d\mathbf{x}\ \left(E_i^{a,L}\partial_0 A_i^{a,L} - \frac{1}{2}(E_i^{a,L})^2 + A_0^a\partial_i E_i^a - V_{\mathrm{int}}\right)\right\}. \qquad (44)$$

В интеграле (44) предполагаются следующие граничные условия: $a_r^*(\mathbf{k}, t'') = b_{1r}^*(\mathbf{k})$, $a_r(\mathbf{k}, t') = a_{1r}(\mathbf{k})$, $A_i^L(\mathbf{x}, t'') = A_{i2}^L(\mathbf{x})$, $A_i^L(\mathbf{x}, t') = A_{i1}^L(\mathbf{x})$. Напомним кратко происхождение этой формулы. Матричный элемент произвольного оператора $\mathrm{V}(\mathrm{a}^*, \mathrm{a})$ имеет вид

$$\langle b_1|\mathrm{V}(\mathrm{a}^*, \mathrm{a})|a_1\rangle = \langle b_1|\mathrm{V}_{kl}(\mathrm{a}^*)^k(\mathrm{a})^l|a_1\rangle.$$

Учитывая, что в голоморфном представлении $\mathrm{a}|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle$, это выражение можно переписать в виде:

$$\langle b_1|a_1\rangle \mathrm{V}_{kl}(b_1^*)^k(a_1)^l = \langle b_1|a_1\rangle \mathrm{V}(b_1^*, a_1),$$

где $V(b_1^*, a_1)$ — нормальный символ оператора $V(a^*, a)$. Пользуясь представлением нормального символа в виде континуального интеграла (см. [33]), получаем формулу (44).

Без ограничения общности можно считать, что $n_\mu = (1,0,0,1)$. Введем обозначения $A_- = A_0 - A_3$, $\partial_- = \partial_0 - \partial_3$. Для перехода к калибровке $A_- = 0$ в соответствии со стандартной процедурой следует умножить выражение для S-матрицы в гамильтоновой калибровке на «единицу»:

$$\Delta(A_-) \int d\omega(\mathbf{x}, t)\, \delta(A_-^\omega) = 1, \quad \omega(\mathbf{x}, t') = \omega(\mathbf{x}, t'') = 1. \tag{45}$$

Единичные граничные условия необходимо наложить на параметр калибровочных преобразований $\omega(\mathbf{x}, t)$, чтобы замена переменных $A_\mu \to A_\mu^\omega$ не меняла граничных условий в континуальном интеграле. Нетрудно видеть, однако, что условию (45) нельзя удовлетворить при произвольных полях A_- (уравнение $A_-^\omega = 0$ является уравнением первого порядка, и его решение при произвольных A_- не удовлетворяет двум граничным условиям на $\omega(\mathbf{x}, t)$). Чтобы обойти это препятствие, можно регуляризовать калибровку $A_- = 0$, т.е. перейти к калибровке $F_\kappa(A_-) = 0$, где $F_\kappa(A_-) \to A_-$ при $\kappa \to 0$, и уравнение $F_\kappa(A_-^\omega) = 0$, $\omega(\mathbf{x}, t') = \omega(\mathbf{x}, t'') = 1$ имеет решение для любого поля $A_-(\mathbf{x}, t)$. Калибровка $A_- = 0$ не полностью фиксирует калибровочный произвол, оставляя преобразования с функциями $\omega(x)$, не зависящими от x_-. Чтобы предел $F_\kappa(A_-) \to a_-$ при $\kappa \to 0$ был не сингулярен, калибровка $F_\kappa(A_-) = 0$ должна обладать этим же свойством. Мы используем две различные регуляризации калибровки $A_- = 0$, обладающие этим свойством, и получаем два различных набора пропагаторов, один из которых содержит пропагатор Мандельштама — Лейббрандта.

2.2. Регуляризация $A_- + \kappa\partial_- A_- = 0$. Первая регуляризация калибровки $A_- = 0$ выглядит следующим образом:

$$A_- + \kappa\partial_- A_- = 0. \tag{46}$$

В этом случае уравнение (45) перейдет в следующее:

$$\Delta_\kappa(A_-) \int d\omega(\mathbf{x}, t)\, \delta\,(A_-^\omega + \kappa\partial_- A_-^\omega) = 1,$$

$$\omega(\mathbf{x}, t') = \omega(\mathbf{x}, t'') = 1. \tag{47}$$

Докажем, что $\Delta_\kappa(A_-) \to 1$ при $\kappa \to 0$. Нетрудно видеть, что на поверхности $A_- + \kappa\partial_- A_- = 0$

$$\Delta_\kappa(A_-) = \det M,$$

где $M = \partial_- + \kappa\partial_-^2 - \kappa[A_-, \partial_-]$. Используя формулу

$$\det M = \int d\bar{c}dc \exp\{i\int dx\bar{c}Mc\},$$

получаем

$$\Delta_\kappa(A_-) = \int d\bar{c}dc \exp\left\{i\int dx\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\bar{c}(\partial_- + \kappa\partial_-^2 - \kappa[A_-, \partial_-])c\right)\right)\right\}.$$

Пропагатор духов Фаддеева — Попова определяется из уравнения

$$\partial_- D^{ab}(t, s, \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \kappa\partial_-^2 D^{ab}(t, x, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^{ab}\delta(x - y), \tag{48}$$

где подразумеваются сформулированные выше граничные условия. Он равен

$$D^{ab}(t, s, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\delta^{ab}}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}D(t, s, \mathbf{k}), \tag{49}$$

$$D(t, s, \mathbf{k}) = -\frac{\exp\{ik_3(t - s)\}\exp\left\{\frac{1}{\kappa}(s - t')\right\}}{1 - \exp\left\{\frac{1}{\kappa}(t'' - t')\right\}} \times$$

$$\times \left(\left(1 - \exp\left\{\frac{1}{\kappa}(s - t'')\right\}\right)\left(1 - \exp\left\{\frac{1}{\kappa}(t - t')\right\}\right)\vartheta(s - t) + (t \leftrightarrow s)\right).$$

Предел пропагатора $D(t, s, \mathbf{k})$ при $\kappa \to 0$ существует. В дальнейшем мы увидим, что существует предел пропагатора поля Янга — Миллса при $\kappa \to 0$, поэтому вклад духовых полей при $\kappa \to 0$ равен нулю, и детерминант Фаддеева — Попова равен единице.

Умножим уравнение (43) на (47), сделаем замену переменных $A_\mu \to A_\mu^\omega$ и проинтегрируем по $\omega(\mathbf{x}, t)$. Добавив к действию источник $J_\mu A_\mu$ и положив $b_r^*(\mathbf{k}) = a_r(\mathbf{k}) = 0$, получим производящий функционал Грина в калибровке $A_- + \kappa\partial_- A_- = 0$:

$$Z(J) = \int \mathfrak{D}\tilde{E}^L\mathfrak{D}\tilde{A}^L\mathfrak{D}A_1^L\mathfrak{D}A_2^L\mathfrak{D}A^L\mathfrak{D}a^*\mathfrak{D}a\mathfrak{D}b^*\mathfrak{D}b \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{2}\int \tilde{E}_k^L(\mathbf{x})\,\gamma\,(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\tilde{E}_k^L(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-i\int d\mathbf{x}\tilde{E}^L(\mathbf{x})\tilde{A}^L(\mathbf{x})\right\}\langle\tilde{A}^L, 0|e^{iH_0t''}|A_2^L, b\rangle \times$$

$$\times \langle A_2^L, b| e^{-iH(t''-t')} |A_1^L, a\rangle \langle A_1^L, a| e^{-iH_0 t'} |A^L, 0\rangle, \tag{50}$$

где

$$\langle A_2^L, b| e^{-iH(t''-t')} |A_1^L, a\rangle = \langle b|a\rangle \exp\left\{-\int d\,\mathbf{k} b_r^*(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})\right\} \int \mathfrak{D}a^* \mathfrak{D}a \mathfrak{D}E^L \mathfrak{D}A^L \mathfrak{D}A_0 \times$$
$$\times \delta\Big(\int_{t'}^{t''} A_0(\mathbf{x},t)dt\Big)\delta(A_- + \kappa\partial_- A_-)\Delta_\kappa(A_-) \exp\Bigg\{\int d\,\mathbf{k}\, \Big(a_r^*(\mathbf{k},t'')a_r(\mathbf{k},t'') +$$
$$+ \int_{t'}^{t''} dt(-a_r^*\dot{a}_r - i\omega a_r^* a_r - i\gamma_r^* a_r - i\gamma_r a_r^*)\Big) +$$
$$+ i\int_{t'}^{t''} dt d\mathbf{x}\, \Big(E_i^L \partial_0 A_i^L - \frac{1}{2}(E_i^L)^2 + A_0 \partial_i E_i^L - J_0 A_0 + J_i^L A_i^L - V_{\text{int}}\Big)\Bigg\}, \tag{51}$$

$$\gamma_r^*(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} J_l(\mathbf{x}, t) e_l^r(\mathbf{k}),$$

$$\gamma_r(\mathbf{k}, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} J_l(\mathbf{x}, t) e_l^r(\mathbf{k}).$$

Здесь $e_l^r(\mathbf{k})$ — единичные векторы, ортогональные вектору $\mathbf{k}$ и друг другу. В интеграле (51) предполагаются следующие граничные условия: $a_r^*(\mathbf{k}, t'') = b_r^*(\mathbf{k})$, $a_r(\mathbf{k}, t') = a_r(\mathbf{k})$, $A^L(\mathbf{x}, t'') = A_2^L(\mathbf{x})$, $A^L(\mathbf{x}, t') = A_1^L(\mathbf{x})$. δ-функция от $\int_{t'}^{t''} A_0(\mathbf{x}, t)dt$ появилась из-за единичных граничных условий на $\omega(\mathbf{x},t)$ в интеграле $\int d\omega\delta(A_0^\omega)$, $\omega(\mathbf{x}, t') = \omega(\mathbf{x}, t'') = 1$. В теории возмущений $Z(J)$ представляется в виде

$$Z(J) = \exp\left\{-i\int dx V_{\text{int}} \left(-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\} Z_0(J), \tag{52}$$

где $Z_0(J)$ — производящий функционал свободной теории, равный

$$Z_0(J) = \int \mathfrak{D}\tilde{E}^L \exp\left\{\frac{i}{2}\int \tilde{E}_k^L(\mathbf{x})\,\gamma\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\tilde{E}_k^L(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}\right\} \times$$
$$\times \langle \tilde{E}^L, 0| S_0(J) |0, 0\rangle = \exp\left\{\frac{i}{2}\int J_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x, y) J_\nu^b(y) dx dy\right\}. \tag{53}$$

Здесь $D_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$ — пропагатор поля Янга — Миллса. Поскольку, как отмечалось выше, предел $\kappa \to 0$ несингулярен, мы положили в этой формуле $\Delta_\kappa(A_-) = 1$. $Z_0(J)$ определяется гауссовым интегралом, и поэтому этот функционал равен значению подынтегрального выражения в точке экстремума. Для нахождения экстремума удобно перейти в k-представление по формулам

$$E_i^L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int d\mathbf{k}\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{k_i}{\omega} E(\mathbf{k}, t),$$

$$A_0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} A_0(\mathbf{k}, t).$$

После интегрирования по полям $\mathfrak{D}a^* \mathfrak{D}a \quad \mathfrak{D}b^* \mathfrak{D}b$ получим

$$Z_0(J) = \int \mathfrak{D}\widetilde{E}\, \mathfrak{D}\widetilde{A}\, \mathfrak{D}A_1\, \mathfrak{D}A_2 \mathfrak{D}A \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{2}\int d\mathbf{k}(-\widetilde{E}(\mathbf{k})\,\gamma\,(\mathbf{k})\widetilde{E}(-\mathbf{k}) + 2\widetilde{E}(\mathbf{k})\widetilde{A}(-\mathbf{k})\right\} \times$$
$$\times \langle \widetilde{A}^L, 0 | e^{iH_0 t''} | A_2^L, 0\rangle \langle A_2^L, 0| e^{-iH(t''-t')} | A_1^L, 0\rangle \times$$
$$\times \langle A_1^L, 0| e^{-iH_0 t'} | A^L, 0\rangle, \tag{54}$$

$$\langle A_2^L, 0| e^{-iH(t''-t')} | A_1^L, 0\rangle = \int \mathfrak{D}a^* \mathfrak{D}a \mathfrak{D}E\, \mathfrak{D}A \mathfrak{D}A_0 \mathfrak{D}\lambda_1(\mathbf{k}, t) \mathfrak{D}\lambda_2(\mathbf{k}) \times$$
$$\times \exp\left\{\int_{t'}^{t''} d\mathbf{k} dt \left(-a_r^* \dot{a}_r - i\omega a_r^* a_r - i\gamma_r^* a_r - i\gamma_r a_r^* - iE(\mathbf{k}, t)\partial_0 A(-\mathbf{k}, t) + \right.\right.$$
$$+ \frac{i}{2} E(\mathbf{k}, t) E(-\mathbf{k}, t) - \omega A_0(\mathbf{k}, t) E(-\mathbf{k}, t) - iJ_0(\mathbf{k}, t) A_0(-\mathbf{k}, t) -$$
$$- iJ(\mathbf{k}, t) A(-\mathbf{k}, t) + i\lambda_2(\mathbf{k}) A_0(-\mathbf{k}, t) +$$
$$+ i\lambda_1(-\mathbf{k}, t)\left(\left[A_0 - \frac{k_3}{\omega} A - \frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}} (a_r^*(\mathbf{k}, t) + a_r(-\mathbf{k}, t))\right](1 - i\kappa k_3) + \right.$$
$$\left.\left.\left. + \kappa\left[\partial_0 A_0 - \frac{k_3}{\omega}\partial_0 A - \frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}} (\dot{a}_r^*(\mathbf{k}, t) + \dot{a}_r(-\mathbf{k}, t))\right]\right)\right)\right\}. \tag{55}$$

Интеграл (55) вычисляется со следующими граничными условиями: $a_r^*(\mathbf{k}, t'') = a_r(\mathbf{k}, t') = 0$, $A(\mathbf{k}, t'') = A_2(\mathbf{k})$, $A(\mathbf{k}, t') = A_1(\mathbf{k})$. Варьируя показатель экспоненты в формуле (55), получаем систему уравнений

$$\dot{a}_r(\mathbf{k}, t) + i\omega a_r(\mathbf{k}, t) + i\gamma_r(\mathbf{k}, t) + i\frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}} \lambda(-\mathbf{k}, t) = 0,$$

$$a_r(\mathbf{k}, t') = 0,$$

$$\dot{a}_r^*(\mathbf{k}, t) - i\omega a_r^*(\mathbf{k}, t) - i\gamma_r^*(\mathbf{k}, t) - i\frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}} \lambda(\mathbf{k}, t) = 0,$$

$$
\begin{gathered}
a_r^*(\mathbf{k}, t'') = 0, \\
\partial_0 E(\mathbf{k}, t) - J(\mathbf{k}, t) + \frac{k_3}{\omega}\lambda(\mathbf{k}, t) = 0, \quad A(\mathbf{k}, t') = A_1(\mathbf{k}), \\
\partial_0 A(\mathbf{k}, t) - E(\mathbf{k}, t) - i\omega A_0(\mathbf{k}, t) = 0, \quad A(\mathbf{k}, t'') = A_2(\mathbf{k}), \\
-\omega E(\mathbf{k}, t) - iJ_0(\mathbf{k}, t) + i\lambda_2(\mathbf{k}) + i\lambda(\mathbf{k}, t) = 0, \\
\int_{t'}^{t''} A_0(\mathbf{k}, t)dt = 0, \\
\left[A_0(\mathbf{k}, t) - \frac{k_3}{\omega}A - \frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}}\left(a_r^*(\mathbf{k}, t) + a_r(-\mathbf{k}, t)\right)\right](1 - i\kappa k_3) + \\
+\kappa\left[\partial_0 A_0 - \frac{k_3}{\omega}\partial_0 A - \frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}}\left(\dot{a}_r^*(\mathbf{k}, t) + \dot{a}_r(-\mathbf{k}, t)\right)\right] = 0, \\
\lambda(\mathbf{k}, t) = \lambda_1(\mathbf{k}, t)(1 + i\kappa k_3) - \kappa\partial_0\lambda_1(\mathbf{k}, t), \\
\lambda_1(\mathbf{k}, t') = \lambda_1(\mathbf{k}, t'') = 0.
\end{gathered} \tag{56}
$$

Решая систему уравнений (56), находим матричный элемент (55). Затем подставляем его в формулу (54) и интегрируем по $\widetilde{E}$, $\widetilde{A}$, A_1, A_2, A. Переходя к пределу $\kappa \to 0$, $t' \to -\infty$, $t'' \to +\infty$, получаем (соответствующие выкладки приведены в приложении)

$$
\begin{gathered}
D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu}{kn \pm i0} - \frac{k_\nu n_\mu}{kn \pm i)}\right) + k_\mu k_\nu \widetilde{\gamma}(\mathbf{k})\delta(kn), \\
\widetilde{\gamma}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{\omega^2}\left(\gamma(\mathbf{k}) + t'' - \frac{\omega^2 + (\mathbf{kn})^2}{2i\omega(\omega^2 - (\mathbf{kn})^2)}\right),
\end{gathered} \tag{57}
$$

где $\gamma(\mathbf{k})$ — произвольная функция от $\mathbf{k}$. В частности, ее можно выбрать так, что $\widetilde{\gamma}(\mathbf{k}) = 0$. В формуле (57) нижний знак соответствует пределу $\kappa \to -0$ $(\kappa < 0)$, а верхний — $\kappa \to +0$ $(\kappa > 0)$.

2.3. Пропагатор Мандельштама — Лейббрандта. Выше мы получили семейство функций Грина поля Янга — Миллса в калибровке светового конуса, которое не содержит, однако, пропагатора Мандельштама — Лейббрандта. Анализируя вывод формулы (57), можно заметить, что для получения обхода полюса, предложенного Мандельштамом и Лейббрандтом, необходимо использовать следующую регуляризацию (подробнее см. приложение):

$$A_- + \frac{i\kappa}{\pi} \int dy^3 \mathcal{P} \frac{1}{x^3 - y^3} \partial_- A_-(x^1, x^2, y^3, t) = 0. \tag{58}$$

Эта формула принимает более наглядный вид, если перейти в ней к компонентам Фурье:

$$A_-(\mathbf{k}, t) + \kappa\varepsilon(k_3)\,(\partial_- A_-)\,(\mathbf{k}, t) = 0. \tag{59}$$

Условие (58) является комплексным, поэтому, чтобы ему удовлетворить, необходимо считать поля A_μ комплексными. В исходном интеграле (43) поля A_μ считаются вещественными, поэтому, чтобы перейти к калибровке (58), необходимо осуществить выход в комплексную область.

Как обычно, введем функционал $\Delta_\kappa(A_-)$:

$$\Delta_\kappa(A_-) \int d\omega(\mathbf{x}, t)\, \delta\Big(A_-^\omega + \frac{i\kappa}{\pi} \int dy^3 \mathcal{P} \frac{1}{x^3 - y^3} \partial_- A_-^\omega(x^1, x^2, y^3, t)\Big) = 1,$$

$$\omega(\mathbf{x}, t') = \omega(\mathbf{x}, t'') = 1. \tag{60}$$

В этой формуле поля A_- являются действительными, так как действительны поля в формулах (43) и (44), а интегрирование ведется по комплексным $\omega(\mathbf{x}, t)$. Аналогично предыдущему случаю можно доказать, что $\Delta_\kappa(A_-) \to 1$ при $\kappa \to 0$. Умножая (44) на (60) и делая замену переменных $A_\mu \to A_\mu^\omega$, мы переходим к интегрированию по полям $A_\mu(\mathbf{x}, t)$, которые являются комплексными. Чтобы понять смысл этого интегрирования по комплексным полям, рассмотрим конечномерную аппроксимацию формулы (44) и линейную замену переменных $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$, где $\partial_\mu \alpha$ — комплексное число. При такой замене интеграл по $A_\mu(x_n, t_m)$, который можно рассматривать как интеграл по вещественной оси в комплексной плоскости, перейдет в интеграл по комплексной переменной вдоль некоторой прямой, лежащей в комплексной плоскости. Аналогичная ситуация будет и при замене $A_\mu \to A_\mu^\omega$, только в этом случае мы перейдем к интегрированию вдоль некоторой кривой, лежащей в комплексной плоскости. Несмотря на то, что поля A_μ комплексны, действие остается вещественным, так как оно инвариантно при заменах $A_\mu \to A_\mu^\omega$. Поэтому в интеграле не возникают экспоненциально расходящиеся члены, и для вычисления гауссова интеграла можно применять обычные формулы. Выполняя вычисления, аналогичные предыдущим, для пропагатора $D_{\mu\nu}(k)$ получим

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)(k_0 n_0 + \mathbf{kn})}{(k_0 n_0)^2 - (\mathbf{kn})^2 \pm i0}\right) + k_\mu k_\nu \tilde{\gamma}(\mathbf{k})\,\delta(kn),$$
$$\gamma(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{\omega^2}(\gamma + t'')\exp\{-ik_3(t'' - t')\}. \tag{61}$$

В формуле (61) нижний знак соответствует пределу $\kappa \to -0$ ($\kappa < 0$), а верхний — $\kappa \to +0$ ($\kappa > 0$). Таким образом, если выбрать $\gamma = -t''$ и верхний знак, то пропагатор (61) совпадает с пропагатором Мандельштама — Лейббрандта.

В заключение отметим следующее.

1. Можно переходить не от гамильтоновой калибровки, а от кулоновской. В этом случае мы получим пропагатор, соответствующий выбору $\gamma = -t''$ в формулах (57) и (61).

2. Как отмечалось ранее, обход полюса при $kn = 0$ в смысле главного значения приводит к инфракрасным расходимостям, связанным с тем, что $n^2 = 0$ (см., например, [28]). Нетрудно видеть, что класс пропагаторов (57) также приводит к инфракрасным расходимостям. Поэтому, несмотря на то, что формально пропагаторы (57) допустимы, построение теории возмущений с этими пропагаторами проблематично. Пропагатор Мандельштама — Лейббрандта, содержащийся в классе (61), не приводит к инфракрасным расходимостям и, по крайней мере в одной петле, позволяет построить перенормированную теорию возмущений.

3. Для получения пропагаторов (61) нам пришлось перейти к интегрированию по комплексным полям. Необходимо отметить, что подобный переход требуется не только для калибровки светового конуса. Например, для получения пропагатора в лоренцевой калибровке нужно сделать замену $\mathbf{k}^2 \to \mathbf{k}^2 - i\varepsilon$, что фактически означает регуляризацию лоренцевой калибровки: от калибровки $\partial_k A_k = 0$ мы переходим к комплексной калибровке $\partial_0 A_0 - (1 - i\varepsilon)\partial_k A_k = 0$, требующей введения комплексных полей A_μ.

4. Предложенный метод очевидным образом применим не только к калибровке светового конуса, но и к любой линейной калибровке вида $A_0 - \mathbf{nA} = 0$. Одна из возможных регуляризаций выглядит аналогично (58), (59):

$$A_0 - \mathbf{nA} + \kappa\varepsilon(\mathbf{mk})\,(\partial_{\mathrm{n}}(A_0 - \mathbf{nA}))\,(\mathbf{k}, t) = 0,$$

где $\mathbf{m}$ — произвольный вектор, а $\partial_{\mathrm{n}} = \partial_0 - \mathbf{n}\boldsymbol{\partial}$. Эта регуляризация приводит к обобщенному предписанию Мандельштама — Лейббрандта, которое будет подробнее описано в следующем разделе.

Приложение

Решение системы (56) имет вид

$$a_r(\mathbf{k},t) = -\int_{t'}^{t} ds\, e^{-i\omega(t-s)} \left(i\gamma_r(\mathbf{k},s) + i\,\frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}}\,\lambda(-\mathbf{k},s) \right),$$

$$a_r^*(\mathbf{k},t) = -\int_{t}^{t''} ds\, e^{i\omega(t-s)} \left(i\gamma_r^*(\mathbf{k},s) + i\,\frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}}\,\lambda(\mathbf{k},s) \right),$$

$$E(\mathbf{k},t) = E(\mathbf{k},t') + \int_{t'}^{t} ds \left(J(\mathbf{k},s) - \frac{k_3}{\omega}\,\lambda\,(\mathbf{k},s) \right),$$

$$E(\mathbf{k},t') = \frac{1}{t''-t'} \left(A_2(\mathbf{k}) - A_1(\mathbf{k}) - \int_{t'}^{t''} dt(t''-t) \left(J(\mathbf{k},t) - \frac{k_3}{\omega}\lambda(\mathbf{k},t) \right) \right),$$

$$A(\mathbf{k},t) = \widetilde{A}(\mathbf{k},t) + \int_{t'}^{t''} ds G\,(t,\,s,\,\mathbf{k})\, f\,(\mathbf{k},s),$$

$$f(\mathbf{k},t) = \left(E(\mathbf{k},t) + i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\, e_3^r(\mathbf{k})\, (a_r^*(\mathbf{k},t) + a_r(-\mathbf{k},t)) \right) (1 - i\kappa\, k_3) +$$
$$+ \kappa \left(\partial_0 E(\mathbf{k},t) + i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\, e_3^r(\mathbf{k})\, (\dot{a}_r^*(\mathbf{k},t) + \dot{a}_r(-\mathbf{k},t)) \right),$$

$$\widetilde{A}(\mathbf{k},t) = \frac{A_1(\mathbf{k}) - A_2(\mathbf{k}) \exp\,\{i(k_3 + \frac{i}{\kappa})(t' - t'')\}}{1 - \exp\,\{\frac{1}{\kappa}\,(t'' - t')\}}\; e^{ik_3(t-t')} +$$
$$+ \frac{A_2(\mathbf{k}) - A_1(\mathbf{k}) \exp\{ik_3(t'' - t')\}}{1 - \exp\{\frac{1}{\kappa}\,(t'' - t')\}} \exp\left\{ i\,(k_3 + \frac{i}{\kappa})(t - t'') \right\},$$

$$G(t,\,s,\,\mathbf{k}) = \frac{\exp\,\{ik_3(t-s)\}\exp\{\frac{1}{\kappa}(s-t')\}}{1 - \exp\{\frac{1}{\kappa}(t''-t')\}} \times$$
$$\times \left(\left(1 - \exp\{-\frac{1}{\kappa}(s - t'')\} \right) \left(1 - \exp\{-\frac{1}{\kappa}(t - t')\} \right) \vartheta\,(s-t) + (t \leftrightarrow s) \right),$$

$$A_0(\mathbf{k},\,t) = \frac{i}{\omega}\,E(\mathbf{k},\,t) - \frac{i}{\omega}\,\partial_0 A(\mathbf{k},\,t),$$

$$\lambda(\mathbf{k},\,t) = \frac{\exp\{ik_3 t\}}{1 - \exp\{\frac{1}{\kappa}(t''-t')\}} \int_{t'}^{t''} ds\partial_\mu J_\mu(\mathbf{k},s) \times$$

$$\times\left(1-\exp\{\frac{1}{\kappa}(t''-t')\}\right)\exp\{-ik_3s\}+\int_{t'}^{t}ds\partial_\mu J_\mu(\mathbf{k},s)\,\mathrm{e}^{ik_3(t-s)}. \qquad (62)$$

Подставляя эти решения в подынтегральное выражение в формуле (55), получим

$$I=\langle A_2^L,0\,|\;\mathrm{e}^{-iH(t''-t')}\,|\,A_1^L,0\,\rangle=$$

$$=\exp\left\{\int_{t'}^{t''}d\mathbf{k}dt\left(i\,\frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}}\,\lambda(-\mathbf{k},t)\,a_r^*(\mathbf{k},t)-i\,\gamma_r^*(\mathbf{k},t)\,a_r(\mathbf{k},t)-\right.\right.$$

$$-\frac{i}{2}E(\mathbf{k},t)E(-\mathbf{k},t)+\frac{1}{\omega}J_0(\mathbf{k},t)E(-\mathbf{k},t)+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\omega}\,\partial_\mu J_\mu(\mathbf{k},t)A(-\mathbf{k},t)\right)\right\}, \qquad (63)$$

где λ, a_r, a_r^*, γ_r, A, E определяются формулами (62). При $J_\mu=0$ это выражение сводится к следующему:

$$I_0=\exp\left\{\frac{i}{2}\int\frac{(A_2(\mathbf{k})-A_1(\mathbf{k}))^2}{t''-t'}\,d\mathbf{k}\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{i}{2}\int d\mathbf{k}(E(\mathbf{k},t'))^2(t''-t')\right\}. \qquad (64)$$

Подставляя (62) и (63) в формулу (54) для производящего функционала, получаем

$$Z_0(J)=\int\mathfrak{D}\widetilde{E}\mathfrak{D}\widetilde{A}\mathfrak{D}A_1\mathfrak{D}A_2\mathfrak{D}A\mathfrak{D}E_1(\mathbf{k},t'')\mathfrak{D}E_2(\mathbf{k},t')\mathfrak{D}E(\mathbf{k},t')\times$$

$$\times\,\delta\left(E_1(\mathbf{k},t'')+\frac{\widetilde{A}(\mathbf{k})-A_2(\mathbf{k})}{t''}\right)\,\delta\left(E_2(\mathbf{k},t')-\frac{A_1(\mathbf{k})-A(\mathbf{k})}{t'}\right)\times$$

$$\times\,\delta\left(E(\mathbf{k},t')-\frac{1}{t''-t'}\left(A_2(\mathbf{k})-A_1(\mathbf{k})-\int_{t'}^{t''}dt(t''-t)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(J(\mathbf{k},t)-\frac{k_3}{\omega}\,\lambda(\mathbf{k},t)\right)\right)\right)\exp\left\{\int d\mathbf{k}\,\left(-\frac{i}{2}\,\widetilde{E}(\mathbf{k})\,\gamma\,(\mathbf{k})\widetilde{E}(-\mathbf{k})+\right.\right.$$

$$i\widetilde{E}(\mathbf{k})\widetilde{A}(-\mathbf{k})+\frac{i}{2}\,t''E_1(\mathbf{k},t'')E_1(-\mathbf{k},t'')-\frac{i}{2}\,t'E_2(\mathbf{k},t')E_2(-\mathbf{k},t')+$$

$$+\int_{t'}^{t''}dt\left(i\,\frac{e_3^r(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}}\,\lambda(-\mathbf{k},t)a_r^*(\mathbf{k},t)-i\,\gamma_r^*(\mathbf{k},t)a_r(\mathbf{k},t)-\right.$$

$$-\frac{i}{2}E(\mathbf{k},t)E(-\mathbf{k},t)+\frac{1}{\omega}J_0(\mathbf{k},t)E(-\mathbf{k},t)+\frac{1}{\omega}\partial_\mu J_\mu(\mathbf{k},t)A(-\mathbf{k},t)\Big)\Big)\Big)\Big\}. \quad (65)$$

Нас интересует пропагатор в пределе $\kappa \to 0$. Переходя в формулах (62) к пределу при $\kappa \to +0$, получаем

$$\lambda(\mathbf{k},t)=\int_{t'}^{t} ds\partial_\mu J_\mu(\mathbf{k},s)\,\mathrm{e}^{ik_3(t-s)},$$

$$G(t,s,\mathbf{k})=-\vartheta\,(s-t)\,\mathrm{e}^{ik_3(t-s)},$$

$$f(\mathbf{k},t)=E(\mathbf{k},t)+i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\,e_3^r(\mathbf{k})(a_r^*(\mathbf{k},t)+a_r(-\mathbf{k},t)), \quad (66)$$

$$\widetilde{A}(\mathbf{k},t)=A_2(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{ik_3(t-t'')}.$$

Подставляя формулы (66) в (65) и переходя к пределу $t' \to -\infty$, $t'' \to +\infty$, получим после простых, но длинных выкладок выражение (57) для пропагатора поля Янга — Миллса.

Чтобы понять, из каких соображений предполагалась комплексная калибровка (58), рассмотрим пропагатор, предложенный Мандельштамом и Лейббрандтом:

$$D_{ij}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\,\mathrm{e}^{ik(x-y)}}{k^2+i\,0}\left(-\delta_{ij}-\frac{(k_i\delta_{3j}+k_j\delta_{3i})(k_0+k_3)}{k_0^2-k_3^2+i\,0}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dk\,\mathrm{e}^{-i\,\mathbf{kx}}\left[\frac{\vartheta(s-t)\,\mathrm{e}^{i\omega(t-s)}}{2\omega i}\left(-\delta_{ij}-\frac{k_i\delta_{3j}+k_j\delta_{3i}}{\omega-k_3}\right)+\right.$$

$$+\frac{\vartheta(s-t)\,\mathrm{e}^{-i\omega(t-s)}}{2\omega i}\left(-\delta_{ij}+\frac{k_i\delta_{3j}+k_j\delta_{3i}}{\omega+k_3}\right)-$$

$$\left.-\frac{i(k_i\delta_{3j}+k_j\delta_{3i})}{\omega^2-k_3^2}\,\mathrm{e}^{ik_3(t-s)}\,(\vartheta\,(k_3)\vartheta\,(s-t)-\vartheta\,(-k_3)\vartheta\,(t-s))\right].$$

Мы видим, что для получения такого пропагатора нужно, чтобы $\lambda(\mathbf{k},t)$ и $G(t,s,\mathbf{k})$ в пределе $\kappa \to 0$ зависели от $\vartheta(k_3)$. Простейший выбор соответствует замене $\kappa \to \kappa\,\varepsilon(k_3)$, где $\varepsilon(k_3)$ — знаковая функция. В этом случае в пределе $\kappa \to +0$ получим

$$G(t,s,\mathbf{k})=-(\vartheta\,(k_3)\vartheta\,(s-t)-\vartheta\,(-k_3)\vartheta\,(t-s)\,\mathrm{e}^{ik_3(t-s)}.$$

После замены $\kappa \to \kappa\varepsilon\,(k_3)$ калибровка (46) переходит в калибровку (58). Система уравнений в этом случае получается из системы (56) заменой

$$\kappa \to \kappa\varepsilon\,(k_3),\quad \lambda(\mathbf{k},t) \to \lambda'(\mathbf{k},t),$$

$$\lambda'(\mathbf{k},t) = \lambda_1(\mathbf{k},t)(1 - i\kappa\varepsilon\,(k_3)k_3) + \kappa\varepsilon\,(k_3)\partial_0\lambda_1(\mathbf{k},t).$$

Решение системы получается из формул (62) заменой

$$G(t,s,\mathbf{k},\kappa) \to G(t,s,\mathbf{k},\kappa\varepsilon\,(k_3)),$$

$$\tilde{A}(t,s,\mathbf{k},\kappa) \to \tilde{A}(t,s,\mathbf{k},\kappa\varepsilon\,(k_3)),$$

$$\lambda(t,s,\mathbf{k},\kappa) \to \lambda(t,s,\mathbf{k},-\kappa\varepsilon\,(k_3)).$$

3. БРСТ-КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ КАЛИБРОВКАХ

В этой главе рассмотрена общая схема БРСТ-квантования систем со связями первого рода в калибровках вида $\lambda^a = f^a(p,q)$. В качестве примера проведено БРСТ-квантование полей Янга — Миллса в линейных калибровках $n_\mu A_\mu = 0$.

3.1. Гамильтоново БРСТ-квантование. БРСТ-подход к квантованию систем со связями включает следующие составляющие. Прежде всего, мы расширим исходное фазовое пространство, включив в него нефизические степени свободы (множители Лагранжа, духи Фаддеева — Попова и т.д.). Затем мы должны найти нильпотентный БРСТ-генератор Q, построить БРСТ-инвариантное эффективное действие или гамильтониан и, наконец, доказать положительность и конечность нормы физического подпространства, выделяемого условием $Q\,|\,\Psi\,\rangle = 0$. Состав расширенного пространства зависит от калибровки, в которой мы собираемся квантовать теорию. Для случая релятивистских калибровок все эти проблемы решены в рамках гамильтонова БРСТ-подхода, однако положительность и конечность нормы физического подпространства доказана только в теории возмущений [39]. БРСТ-квантование систем со связями в гамильтоновой калибровке включает многие составляющие гамильтонова БРСТ-подхода в релятивистских калибровках, поэтому мы кратко опишем этот подход. Гамильтоново БРСТ-квантование можно применять к системам с любыми связями первого рода (в частности, связи могут не образовывать алгебру Ли и быть зависимыми) [19]. Однако, мы ограничимся рассмотрением только независимых связей.

Рассмотрим систему со связями, описываемую лагранжианом (1). Расширенное фазовое пространство включает, кроме первоначальных переменных (p_i, q^i), следующие канонически-сопряженные пары [18,19]:

а) множители Лагранжа (π_a, λ^a);

б) духи Фаддеева — Попова:

$$(\bar{C}_a, P^a), \quad (\bar{P}_a, C^a).$$

Эти переменные имеют следующие духовые числа:

$$\begin{gathered} \mathrm{gh}(p_i) = -\mathrm{gh}(q^i) = 0, \\ \mathrm{gh}(\pi_a) = -\mathrm{gh}(\lambda^a) = 0, \\ \mathrm{gh}(\bar{C}_a) = -\mathrm{gh}(P^a) = \mathrm{gh}(\bar{P}_a) = -\mathrm{gh}(C^a) = -1. \end{gathered} \tag{67}$$

Для простоты мы предполагаем, что p и q являются бозонными переменными. В этом случае канонические переменные удовлетворяют следующей статистике:

$$\varepsilon(P) = \varepsilon(X) \equiv \mathrm{gh}(P) \equiv \mathrm{gh}(X) \ (\mathrm{mod}\ 2), \tag{68}$$

где P и X — канонически-сопряженная пара $([X, P]_{\pm} = i)$.

Мы принимаем следующее условие сопряжения для операторов, введенных выше:

$$\begin{gathered} (\bar{C}_a)^+ = -\bar{C}_a, \ (P^a)^+ = P^a, \\ (\bar{P}_a)^+ = -\bar{P}_a, \ (C^a)^+ = C^a, \\ (\pi_a)^+ = \pi_a, \ (\lambda^a)^+ = \lambda^a. \end{gathered} \tag{69}$$

Эти условия являются совместными с каноническими коммутационными соотношениями. В силу условия (69) связи φ_a также являются эрмитовыми (чтобы лагранжиан был эрмитовым).

До сих пор мы ничего не говорили о том, в какой калибровке мы проводим квантование, однако неявно мы предполагали, что квантование проводится в релятивистской калибровке. Связано это с составом расширенного фазового пространства. Во-первых, мы ввели множители Лагранжа с соответствующими импульсами. Эффективное действие строится по правилу:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = P\dot{X} - H_{\mathrm{eff}}, \tag{70}$$

где P и X — все пары канонически-сопряженных переменных из расширенного фазового пространства. Поэтому в эффективном действии будет член вида $\pi_a \dot{\lambda}^a$. Член, фиксирующий калибровку, возникает после интегрирования по импульсам π_a, следовательно, калибровочное условие будет иметь вид $\dot{\lambda}^a = f^a(p, q, \lambda)$. Во-вторых, мы ввели две пары канонически-сопряженных духов Фаддеева — Попова. Это говорит о том, что соответствующий детерминант Фаддеева — Попова будет второй степени по временной производной, отсюда мы также заключаем, что используется релятивистская калибровка.

Построение нильпотентного БРСТ-оператора и БРСТ-инвариантного эффективного гамильтониана осуществляется следующим образом.

Вначале рассматривают минимальный сектор, включающий исходные переменные p и q вместе с парой духов Фаддеева — Попова $\overline{P}_a$ и C^a. Используя переменные из этого сектора, находят минимальный БРСТ-оператор $Q_{\min}$ и минимальный гамильтониан $H_{\min}$, удовлетворяющие условиям

$$[Q_{\min}, Q_{\min}] = 0,\ \mathrm{gh}(Q_{\min}) = 1,\ Q^{+}_{\min} = Q_{\min}, \tag{71}$$

$$[H_{\min}, Q_{\min}] = 0,\ \mathrm{gh}(H_{\min}) = 0,\ H^{+}_{\min} = H_{\min}. \tag{72}$$

Если связи образуют алгебру Ли

$$[\varphi_a, \varphi_b] = i f_{abc}\varphi_c\,, \tag{73}$$

где f_{abc} не зависит от переменных p и q, то оператор $Q_{\min}$ равен

$$Q_{\min} = C^a\varphi_a - \frac{1}{2} f_{abc}\overline{P}_a C^b C^c. \tag{74}$$

Полный БРСТ-оператор Q и эффективный гамильтониан H_{eff} зависят от всех переменных из расширенного фазового пространства:

$$Q = Q_{\min} + P^a\pi_a, \tag{75}$$

$$H_{\mathrm{eff}} = H_{\min} + i\,[Q, \Psi], \tag{76}$$

где Ψ — так называемый калибровочный фермионный оператор [18,19], фиксирующий калибровку, свойства которого для наших целей не важны.

Как уже отмечалось выше, для завершения БРСТ-квантования необходимо доказать положительность и конечность нормы физического подпространства, выделяемого условием:

$$Q\,|\Psi\rangle = 0.$$

Для этого нам следует выбрать представление коммутационных соотношений алгебры Гейзенберга для переменных из расширенного фазового пространства. Эта задача не является тривиальной, т.к. не все представления алгебры Гейзенберга являются эквивалентными, и, например, координатное представление коммутационных соотношений приводит к ненормируемым векторам физического подпространства и поэтому не подходит для БРСТ-квантования. Одно из подходящих представлений алгебры Гейзенберга было найдено для теории с любыми линеаризуемыми связями первого рода в работе [39]. В случае независимых связей свободный БРСТ-оператор Q_0 имеет вид:

$$Q_0 = C^a p_a + P^a \pi_a. \tag{77}$$

Здесь с помощью канонического преобразования мы сделали связи $\varphi_a^{(0)}$ равными импульсам p_a.

Представление коммутационных соотношений, гарантирующее положительность и конечность нормы физического подпространства, может быть записано следующим образом [39]:

$$a_a^{\pm} = p_a \pm i\pi_a; \quad \bar{a}_a^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm i q^a + \lambda^a), \tag{78}$$

$$c_a^{\pm} = \frac{1}{2}(C^a \pm iP^a); \quad \bar{c}_a^{\pm} = -i\bar{P}_a \pm \bar{C}_a, \tag{79}$$

$$[a_a^-, \bar{a}_b^+] = [\bar{a}_a^-, a_b^+] = [c_a^-, \bar{c}_b^-] = [\bar{c}_a^-, c_b^+] = \delta_{ab}, \tag{80}$$

и остальные коммутаторы равны нулю.

Это представление перепутывает пару исходных переменных (p, q) с парой множителей Лагранжа (π, λ). Используя операторы $a^{\pm}$, $c^{\pm}$, оператор Q_0 может быть переписан в виде:

$$Q_0 = c_a^+ a_a^- + c_a^- a_a^+. \tag{81}$$

Представление оператора Q_0 (81) позволяет легко исследовать структуру физических состояний. Введем оператор числа нефизических частиц

$$R = c_a^+ \bar{c}_a^- + a_a^+ \bar{a}_a + \text{h.c.}$$

Этот оператор коммутирует с Q_0 и допускает представление

$$R = [K, Q_0]_+,$$

где

$$K = \bar{a}_a^+ \bar{c}_a^- + \bar{c}_a^+ \bar{a}_a^-.$$

Любой вектор из пространства состояний может быть разложен по собственным векторам оператора R:

$$R|\Psi\rangle = r|\Psi\rangle.$$

При r, не равном нулю, вектор $|\Psi\rangle$ можно представить в виде

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{r} R|\Psi\rangle = \frac{1}{r} KQ_0|\Psi\rangle + \frac{1}{r} Q_0K|\Psi\rangle.$$

Для физических векторов первый член в правой части равен нулю и, следовательно, любой физический вектор с $r \neq 0$ имеет вид $|\Psi\rangle_{\text{ph}} = Q_0|\chi\rangle$ и в силу нильпотентности Q_0 имеет нулевую норму. Состояние с $r = 0$ вообще не содержит нефизических частиц. Поэтому любой физический вектор допускает представление

$$|\Psi\rangle_{\text{ph}} = |\Psi\rangle_0 + Q_0|\chi\rangle,$$

где $|\Psi\rangle_0$ строится только с помощью физических операторов.

Таким образом, доказано, что пространство физических состояний обладает неотрицательной нормой. Вектор $Q_0|\chi\rangle$ ортогонален всем векторам в этом пространстве и поэтому дает нулевой вклад во все матричные элементы. Это позволяет отождествить все векторы, отличающиеся на $Q_0|\chi\rangle$. Факторизуя физическое пространство по нулевым векторам, получаем пространство со строго положительной нормой.

Теперь мы готовы рассмотреть БРСТ-квантование систем со связями в гамильтоновых калибровках. Как уже отмечалось, прежде всего необходимо расширить фазовое пространство. Оказывается, что расширенное фазовое пространство в калибровке $\lambda^a = f^a(p, q)$ совпадает с минимальным сектором расширенного фазового пространства в релятивистской калибровке. Отсутствие пар (π_a, λ^a) и $(\bar{C}_a, P^a)$ легко понять. Как было объяснено выше, введение канонически-сопряженной пары (π_a, λ^a) всегда подразумевает квантование в релятивистской калибровке. Пара $(\bar{C}_a, P^a)$ отсутствует, т.к. в калибровке $\lambda^a = f^a(p, q)$ детерминант Фаддеева — Попова является линейным по временной производной, а поэтому антидух Фаддеева — Попова является импульсом духа Фаддеева — Попова.

БРСТ-оператор в гамильтоновой калибровке совпадает с минимальным БРСТ-оператором, а эффективный гамильтониан определяется с помощью минимального эффективного гамильтониана:

$$Q = Q_{\min},$$

$$H_{\text{eff}} = H_{\min} + i\,[Q, \Psi], \tag{82}$$

где калибровочный фермионный оператор Ψ для калибровки $\lambda^a = f^a(p, q)$ равен

$$\Psi = \bar{P}_a f^a(p, q).$$

Эффективный лагранжиан в калибровке $\lambda^a = f^a(p, q)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = p_i \dot{q}^i + \overline{P}_a \dot{C}^a - H_{\text{eff}}. \tag{83}$$

Для большинства физических теорий духи не будут давать вклада в S-матрицу, однако в общем случае духи могут нетривиально взаимодействовать с исходными полями.

Заметим также, что квантование систем со связями в гамильтоновых калибровках $\lambda^a = f^a(p, q)$ легко свести к квантованию в чисто гамильтоновой калибровке. Для этого достаточно переопределить поле λ^a:

$$\lambda^a - f^a(p, q) \to \lambda^a. \tag{84}$$

Тогда лагранжиан (1) перепишется в виде:

$$\mathcal{L} = p_i \dot{q}^i - H + f^a(p, q)\, \varphi_a(p, q) + \lambda^a \varphi_a(p, q) \tag{85}$$

с новым гамильтонианом $H' = H - f^a(p, q)\, \varphi_a(p, q)$.

Теперь для квантования системы (1) в калибровке $\lambda^a = f^a(p, q)$ достаточно проквантовать систему (85) в калибровке $\lambda^a = 0$. Однако для завершения БРСТ-квантования необходимо рассмотреть вопрос о норме физического подпространства.

3.2. Физическое подпространство. Здесь мы рассмотрим простейший случай независимых связей первого рода, образующих полупростую алгебру Ли L с БРСТ-оператором Q:

$$Q = C^a \varphi_a - \frac{1}{2} f_{abc} \overline{P}_a C^b C^c, \tag{86}$$

однако в теории возмущений наши рассуждения будут справедливы для любых связей первого рода.

Физическое подпространство выделяется условиями

$$Q|\Psi\rangle = 0, \tag{87}$$

$$N|\Psi\rangle = 0. \tag{88}$$

Здесь $N = \frac{1}{2}(\overline{P}_a C^a - C^a \overline{P}_a)$ — оператор духового числа. Условие (88) можно наложить на векторы физического подпространства, т.к. оператор N коммутирует с гамильтонианом. В теории возмущений условие (88) не нужно, т.к. любой вектор, удовлетворяющий условию (87), может быть представлен в виде

$$|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle_{\text{ph}} + Q\,|\chi\rangle, \tag{89}$$

где вектор $|\Psi\rangle_{\text{ph}}$ удовлетворяет условию (88).

Как было объяснено в п.3.1, для положительности и конечности нормы физического подпространства необходимо найти правильное представление коммутационных соотношений. Мы будем стремиться представить оператор Q в виде, максимально близком к виду свободного БРСТ-оператора Q_0 (81). Полезно отметить, что оператор Q_0 может быть записан:

$$Q_0 = \Omega + \Omega^+, \tag{90}$$

$$\Omega = c_a^+ a_a^-;\ \Omega^+ = c_a^- a_a^+. \tag{91}$$

Операторы Ω и Ω^+ являются нильпотентными, эрмитово сопряжены друг другу и антикоммутируют друг с другом. Кроме того, каждый из операторов Ω и Ω^+ аннигилирует вакуумное состояние. Постараемся представить оператор (86) в виде (90).

Очевидно, что такое представление возможно только в случае четного числа связей φ_a, поэтому вначале мы рассмотрим именно такой случай. Пусть число связей φ_a равно $2L$.

В силу разложения Гаусса для любой комплексной алгебры Ли верно следующее представление:

$$L = L^+ \dot{+} H \dot{+} L^-. \tag{92}$$

Здесь H — подалгебра Картана, L^+ и L^- — нильпотентные подалгебры. В алгебрах L^+ и L^- существуют базисы, удовлетворяющие условию сопряжения

$$(e_\alpha^+)^* = e_\alpha^-, \tag{93}$$

где $e_\alpha^+(e_\alpha^-)$ — базис в подалгебре $L^+(L^-)$, операция «*» — сопряжение алгебры L (если рассматривается матричная реализация алгебры L, то «*» — обычное эрмитово сопряжение матриц). Выбирая в подалгебре Картана H аналогичный базис, мы получим следующее разложение для алгебры L:

$$L = L_1^+ \dot{+} L_1^-, \tag{94}$$

где $L_1^+(L_1^-)$ — подалгебра алгебры L с базисом $\{e_\alpha^+, e_\mu^+\}$ (e_α^-, e_μ^-) $(e_\mu^+, e_\mu^-$ — комплексный базис подалгебры Картана).

Связи φ_a образуют комплексную алгебру Ли (которая может быть комплексным расширением вещественной алгебры Ли), поэтому мы можем перейти от связей φ_a к связям φ_i^+ и φ_i^-, удовлетворяющим условиям

$$(\varphi_i^+)^+ = \varphi_i^-, \quad i = 1,\ldots, L, \tag{95}$$

$$[\varphi_i^+, \varphi_j^+] = \varphi_k^+ \overline{U}_{ij}^k, \quad [\varphi_i^-, \varphi_j^-] = \varphi_k^- U_{ij}^k, \tag{96}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Этот переход осуществляется с помощью комплексной матрицы A:

$$\varphi_a = A_a^i \varphi_i^+ + A_a^{L+i} \varphi_i^-; \quad \overline{A}_a^i = A_a^{L+i}, \tag{97}$$

$$\varphi_i^+ = (A^{-1})_i^a \varphi_a; \quad \varphi_i^- = (\overline{A}^{-1})_i^a \varphi_a. \tag{98}$$

Из уравнений (96)—(98) нетрудно получить следующие соотношения между структурными константами f_{abc}, $\overline{U}_{ij}^k$ и матрицей A:

$$\begin{gathered} \overline{U}_{ij}^k = (A^{-1})_i^a (A^{-1})_j^a i f_{abc} A_c^k, \\ (A^{-1})_i^a (A^{-1})_j^a f_{abc} \overline{A}_c^k = 0. \end{gathered} \tag{99}$$

Введем теперь операторы рождения и уничтожения духов

$$c_i^+ = \overline{A}_a^i C^a; \quad c_i^- = A_a^i C^a, \tag{100}$$

$$\overline{c}_i^- = -i\,(\overline{A}^{-1})_i^a \overline{P}_a; \quad \overline{c}_i^+ = -i\,(A^{-1})_i^a P_a. \tag{101}$$

Это представление коммутационных соотношений аналогично представлению (79), использованному в первом разделе.

Пользуясь уравнениями (96)—(100), нетрудно показать, что оператор Q имеет следующий вид (см. для сравнения [40]):

$$\begin{gathered} Q_0 = \Omega + \Omega^+; \quad (\Omega^+)^+ = \Omega; \quad \Omega^2 = \Omega\Omega^+ + \Omega^+\Omega = 0, \\ \Omega = c_i^+ \varphi_i^- - 1/2 c_k^+ c_j^+ \overline{c}_i^- U_{jk}^i - \overline{c}_k^+ c_j^+ c_i^- U_{jk}^i . \end{gathered} \tag{102}$$

На самом деле операторы (86) и (102) отличаются на некоторые члены, возникающие из-за нормального упорядочения.

Теперь определим вакуум относительно операторов рождения и уничтожения духов

$$c^- \,|\, 0 \rangle = \overline{c}^- \,|\, 0 \rangle = 0; \quad \langle 0 \,|\, 0 \rangle = 1. \tag{103}$$

Рассмотрим состояние

$$|\, \Psi \rangle = |\, \Psi(p, q) \rangle \otimes |\, 0 \rangle, \tag{104}$$

где $|\, \Psi(p, q) \rangle$ — состояние, не зависящее от духовых полей. Оператор Q, действуя на такое состояние, дает

$$Q \,|\, \Psi \rangle = \varphi_i^- \,|\, \Psi(p, q) \rangle \otimes c_i^+ \,|\, 0 \rangle.$$

Таким образом, чтобы оператор Q аннигилировал состояние $|\, \Psi \rangle$ необходимо выполнение условия

$$\varphi_i^- \mid \Psi(p, q) \rangle = 0. \tag{105}$$

Для таких теорий, как теория Янга — Миллса, это условие исчерпывает все физические состояния и заменяет обычно используемое условие

$$\varphi_a \mid \Psi(p, q) \rangle = 0. \tag{106}$$

Отметим, что условий (105) наполовину меньше, чем условий (106), но они являются комплексными.

До сих пор мы ничего не говорили о представлении коммутационных соотношений для исходных переменных p и q. В теории возмущений можно выбрать в качестве операторов рождения и уничтожения линейные по переменным p и q части связей φ_i^+ и φ_i^-. Вне рамок теории возмущений необходимо выбирать такое представление, чтобы физические векторы имели положительную и конечную норму.

Однако мы рассмотрели только случай четного числа связей. Если число связей нечетно, то нетрудно видеть, что не существует подходящего представления алгебры Гейзенберга: любое представление будет приводить к нерегулярным векторам. Обойти эту трудность можно естественным и простым способом. Рассмотрим вспомогательный лагранжиан

$$\mathcal{L}' = p_{2L}\dot{q}_{2L} - H(p_{2L}, q_{2L}) + \lambda_{2L}p_{2L} \tag{107}$$

и добавим его к лагранжиану (1) (здесь $2L-1$ — число связей в лагранжиане (1)). Добавление лагранжиана (107) не меняет динамику из-за связи $p_{2L} = 0$. После этого мы получим систему с четным числом связей, которую можно рассмотреть так же, как и выше. Гамильтониан $H(p_{2L}, q_{2L})$ должен удовлетворять условию $[H(p_{2L}, q_{2L}), p_{2L}] \sim p_{2L}$ и его следует выбирать так, чтобы полный свободный гамильтониан $\tilde{H}_0 = H_0(p, q) + H_0(p_{2L}, q_{2L})$ аннигилировал вакуум теории возмущений. В заключение этого раздела отметим, что, вероятно, представление $Q_0 = \Omega + \Omega^+$ существует для теории с любыми связями первого рода.

3.3. Голоморфное представление. Далее мы будем существенно пользоваться голоморфным представлением коммутационных соотношений (78), несколько отличным от обычно используемого. Поэтому опишем его более подробно. Мы рассмотрим только случай бозонных переменных, так как в теории Янга — Миллса духи в линейных калибровках не дают вклада в S-матрицу. Как обычно, мы построим голоморфное представление для минимального числа операторов рождения и уничтожения; обобщение на случай любого числа операторов тривиально.

Итак, мы рассматриваем четыре оператора рождения и уничтожения, удовлетворяющих коммутационным соотношениям и правилам сопряжения:

$$[\mathbf{a}^-, \bar{\mathbf{a}}^+] = [\bar{\mathbf{a}}^-, \mathbf{a}^+] = 1, \tag{108}$$

$$(\mathbf{a}^-)^+ = \mathbf{a}^+, \quad (\bar{\mathbf{a}}^-)^+ = \bar{\mathbf{a}}^+. \tag{109}$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Здесь мы будем обозначать операторы жирным шрифтом.

Голоморфное представление — это представление в пространстве голоморфных функций двух переменных $f(a^+, \bar{a}^+)$ со следующим скалярным произведением (при построении голоморфного представления мы следуем книге [33]):

$$(f_1, f_2) = \int d^2a d^2\bar{a} (f_1(\bar{a}^+, a^+))^* f_2(a^+, \bar{a}^+)\, e^{-a^+a^- - \bar{a}^+\bar{a}^-}. \tag{110}$$

Здесь $d^2a = da^+da^- / 2\pi i$, $d^2\bar{a} = d\bar{a}^+d\bar{a}^- / 2\pi i$; переменные a^- и $\bar{a}^-$ комплексно сопряжены переменным a^+ и $\bar{a}^+$. Формула (110) отличается от обычной формулы для скалярного произведения перестановкой переменных в функции $f_1(a^+, \bar{a}^+)$. Операторы $\mathbf{a}^+$, $\bar{\mathbf{a}}^+$, $\mathbf{a}^-$, $\bar{\mathbf{a}}^-$ действуют следующим образом:

$$\mathbf{a}^+ f(a^+, \bar{a}^+) = a^+ f(a^+, \bar{a}^+); \quad \bar{\mathbf{a}}^+ f(a^+, \bar{a}^+) = \bar{a}^+ f(a^+, \bar{a}^+),$$

$$\bar{\mathbf{a}}^- f(a^+, \bar{a}^+) = \partial f(a^+, \bar{a}^+)/\partial a^+; \quad \mathbf{a}^- f(a^+, \bar{a}^+) = \partial f(a^+, \bar{a}^+)/\partial \bar{a}^+. \tag{111}$$

Введенное скалярное произведение (110) и реализация (111) операторов рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям (108) и правилам сопряжения (109).

Базис в пространстве голоморфных функций образуют одночлены

$$\Psi_{nm}(a^+, \bar{a}^+) = (a^+)^n / \sqrt{n!}\, (\bar{a}^+)^m / \sqrt{m!}. \tag{112}$$

Этот базис нормирован следующим образом (он не является ортонормированным, поэтому скалярное произведение (110) не является положительно определенным):

$$(\Psi_{n_1m_1}, \Psi_{n_2m_2}) = \delta_{n_1m_2}\delta_{n_2m_1}. \tag{113}$$

Для описания операторов в этом представлении используют два способа. Первый способ — это представление произвольного оператора **A** в виде интегрального оператора с ядром $A(a^+, \bar{a}^+; a^-, \bar{a}^-)$:

$$(\mathbf{A}f)(a^+, \bar{a}^+; a^-, \bar{a}^-) = \int d^2b d^2\bar{b}\, e^{-b^+b^- - \bar{b}^+\bar{b}^-} *$$

$$* A(a^+, \bar{a}^+; b^-, \bar{b}^-) f(\bar{b}^+, b^+). \tag{114}$$

Произведению операторов A_1 и A_2 соответствует свертка ядер

$$(A_1A_2)(a^+,\bar{a}^+;a^-,\bar{a}^-)=\int d^2bd^2\bar{b}\,e^{-b^+b^- -\bar{b}^+\bar{b}}\,*$$
$$*\,A_1(a^+,\bar{a}^+;b^-,\bar{b}^-)A_2(\bar{b}^+,b^+;a^-,\bar{a}^-). \tag{115}$$

В качестве второго представления для операторов используют нормальный символ оператора. Если оператор A задан в виде суммы по нормальным произведениям:

$$A=\sum K_{n_1m_1,n_2m_2}(a^+)^{n_1}(\bar{a}^+)^{m_1}(a^-)^{n_2}(\bar{a}^-)^{m_2}, \tag{116}$$

то такому оператору ставят в соответствие функцию $K(a^+,\bar{a}^+;a^-,\bar{a}^-)$, называемую нормальным символом оператора A:

$$K(a^+,\bar{a}^+;a^-,\bar{a}^-)=\sum K_{n_1m_1,n_2m_2}(a^+)^{n_1}(\bar{a}^+)^{m_1}(a^-)^{n_2}(\bar{a}^-)^{m_2}. \tag{117}$$

Пользуясь формулами (111), (114) и (117), нетрудно показать, что ядро оператора A связано с нормальным символом следующим образом:

$$A(a^+,\bar{a}^+;b^-,\bar{b}^-)=K(a^+,\bar{a}^+;b^-,\bar{b}^-)\,e^{a^+b^- +\bar{a}^+\bar{b}}. \tag{118}$$

Формулы (115) и (118) позволяют легко построить ядро оператора эволюции $U(t''-t')=\exp\{-i\,H(t''-t')\}$ в виде континуального интеграла по функциям $a^+(t)$, $\bar{a}^+(t)$, $a^-(t)$, $\bar{a}^-(t)$. Соответствующее построение повторяет рассуждения, данные в [33], поэтому мы приводим ответ без вывода:

$$U(a^+,\bar{a}^+;a^-,\bar{a}^-;t''-t')=$$
$$=\int d^2\alpha(t)d^2\bar{\alpha}(t)\exp\{\alpha^+(t'')\bar{\alpha}^-(t'')+\bar{\alpha}^+(t'')\alpha^-(t'')+$$
$$+\,i\int_{t'}^{t''}dt(i\,\alpha^+(t)\dot{\bar{\alpha}}^-(t)+i\,\bar{\alpha}^+(t)\dot{\alpha}^-(t)-H(\alpha^+,\bar{\alpha}^+,\alpha^-,\bar{\alpha}^-))\}. \tag{119}$$

В формуле (119) подразумеваются следующие граничные условия:

$$\alpha^+(t'')=a^+,\ \bar{\alpha}^+(t'')=\bar{a}^+,\ \alpha^-(t')=a^-,\ \bar{\alpha}^-(t')=\bar{a}^-. \tag{120}$$

Функция $H(\alpha^+,\bar{\alpha}^+,\alpha^-,\bar{\alpha}^-)$ — нормальный символ гамильтониана. S-матрица определяется с помощью оператора эволюции:

$$S=\lim_{t',t''\to\infty}\exp(i\,H_0(t'')\exp(-i\,H(t''-t'))\exp(-i\,H_0(t'). \tag{121}$$

Пользуясь формулами (119), (115) и (118), нетрудно найти ядро и нормальный символ S-матрицы. Для построения теории возмущений обычно используют производящий функционал $Z(J)$. Он определяется как вакуумное среднее S-матрицы в присутствии внешнего тока J и может быть вычислен с помощью ядра S-матрицы по формуле

$$Z(J) = S(0, 0, 0, 0). \tag{122}$$

3.4. Квантование полей Янга — Миллса в линейных калибровках. Применим описанную выше схему для квантования полей Янга — Миллса в линейных калибровках. Как отмечалось во введении, все эти калибровки являются гамильтоновыми: $A_0 = \mathrm{nA}/n_0$ (за исключением, строго говоря, чисто аксиальной калибровки), поэтому с точки зрения БРСТ-подхода квантование в этих калибровках проводится единообразно, а следовательно, мы должны будем получить единое предписание для любой линейной калибровки. Наша задача — найти пропагатор полей Янга — Миллса, поэтому достаточно рассмотреть свободную теорию Янга — Миллса, т.е. электродинамику.

Лагранжиан электродинамики в формализме первого порядка выглядит следующим образом (см., например, [33]):

$$\mathfrak{L} = E_i\, \partial_0 A_i - \frac{1}{2} E_i^2 - \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + A_0 \partial_i E_i. \tag{123}$$

БРСТ-оператор в гамильтоновой калибровке равен

$$Q = \int d\mathrm{x} c(\mathrm{x})\, \partial_i E_i(\mathrm{x}). \tag{124}$$

Мы имеем одну связь $\partial_i E_i$, поэтому для корректного квантования нам следует рассмотреть вспомогательный лагранжиан $\mathfrak{L}'$:

$$\mathfrak{L}' = E' \partial_0 A' - H'(E', A') + A_0' E'. \tag{125}$$

Оператор Q полной системы $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ равен

$$Q = \int d\mathrm{x}(c(\mathrm{x})\partial_i E_i(\mathrm{x}) + c'(\mathrm{x})E'(\mathrm{x})). \tag{126}$$

Разобьем поля E_i и A_i на продольную и поперечную компоненты:

$$\begin{aligned} A_i(\mathrm{x}) &= A_i^T(\mathrm{x}) + A_i^L(\mathrm{x}); \quad A_i^L(\mathrm{x}) = -\partial_i A(\mathrm{x}), \\ E_i(\mathrm{x}) &= E_i^T(\mathrm{x}) + E_i^L(\mathrm{x}); \quad E_i^L(\mathrm{x}) = \Delta^{-1}\partial E(\mathrm{x}). \end{aligned} \tag{127}$$

Пользуясь этим разбиением, перепишем полный лагранжиан $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ и полный БРСТ-оператор Q в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{L}} = {} & E_i \partial_0 A_i + E\partial_0 A + E'\partial_0 A' - \frac{1}{2}(E_i^T)^2 - \\ & - \frac{1}{4}(\partial_i A_j^T - \partial_j A_i^T)^2 + \frac{1}{2}\Delta^{-1}E^2 - H'(E', A') + A_0 E + A_0' E', \end{aligned} \tag{128}$$

$$Q = \int d\mathrm{x}(c(\mathrm{x})E(\mathrm{x}) + c'(\mathrm{x})E'(\mathrm{x})). \tag{129}$$

Введем операторы рождения и уничтожения, как в формулах (78)—(80):

$$c^{\pm} = \frac{1}{2}(c \pm ic'), \quad \bar{c}^{\pm} = -i\bar{P} \pm \bar{P}', \tag{130}$$

$$a^{\pm} = E \pm iE', \quad \bar{a}^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm iA + A'). \tag{131}$$

Тогда оператор Q примет вид (81) и будет выделять подпространство с положительной нормой.

Следующим шагом БРСТ-квантования является выбор гамильтониана $H'(E', A')$. Этот выбор зависит от калибровки, в которой осуществляется квантование. Мы рассмотрим простейший случай гамильтоновой калибровки $A_0 = 0$. В этой калибровке в качестве гамильтониана $H'(E', A')$ следует выбрать $-\frac{1}{2}\Delta^{-1}E'^2$ (в этом случае вакуум будет собственным вектором гамильтониана с нулевым собственным значением). В калибровке $A_0 = 0$ продольные и поперечные компоненты полей не взаимодействуют друг с другом, поэтому можно отдельно рассмотреть лагранжиан для продольных компонент и для поперечных. Квантование поперечных компонент проводится как обычно и дает пропагатор, совпадающий с пропагатором в кулоновской калибровке (см. [33]). Таким образом, достаточно рассмотреть квантование только продольных компонент. Гамильтониан для продольных компонент в калибровке $A_0 = 0$ равен

$$H^L = -\frac{1}{2}\Delta^{-1}E^2 - \frac{1}{2}\Delta^{-1}E_1^2 + AJ, \tag{132}$$

где мы ввели внешний ток J.

Используя операторы $a^{\pm}$, $\bar{a}^{\pm}$, перепишем гамильтониан H^L в виде

$$H^L = -\frac{1}{2}\Delta^{-1}a^+a^- - i\bar{a}^+J + i\bar{a}^-J. \tag{133}$$

Теперь мы должны вычислить ядро оператора эволюции $U(t'' - t')$. Тогда, используя формулы (121) и (122), мы сможем найти продольный пропагатор. В соответствии с формулой (119) ядро оператора эволюции:

$$U(a^+, \bar{a}^+; a^-, \bar{a}^-; t'' - t') = \int d^2\alpha\,(\mathbf{x}, t)d^2\bar{\alpha}\,(\mathbf{x}, t) \times$$
$$\times \exp\Big\{\int d\mathbf{x}\,[\alpha^+(\mathbf{x}, t'')\,\bar{\alpha}^-(\mathbf{x}, t'') + \bar{\alpha}^+(\mathbf{x}, t'')\,\alpha^-(\mathbf{x}, t'') +$$
$$+ i\int_{t'}^{t''} dt(i\alpha^+(x, t)\,\dot{\bar{\alpha}}^-(\mathbf{x}, t) + i\bar{\alpha}^+(\mathbf{x}, t)\,\dot{\alpha}^-(\mathbf{x}, t) +$$
$$+\frac{1}{2}\Delta^{-1}\alpha^+(\mathbf{x}, t) + i\bar{\alpha}^+(\mathbf{x}, t)J(\mathbf{x}, t) - i\bar{\alpha}^-(\mathbf{x}, t)J(\mathbf{x}, t)\,]\Big\}, \tag{134}$$

где подразумеваются граничные условия (120).

Интеграл (134) гауссов. После простых вычислений получим

$$U(a^+, \bar{a}^+; a^-, \bar{a}^-; t'' - t') =$$

$$= \exp\Big\{\int d\mathbf{x}\,[a^+(\bar{a}^- + \frac{i}{2}\Delta^{-1}a^-(t'' - t')) + \bar{a}^+a^- +$$

$$+ i\int_{t'}^{t''} dtJ(t)\,(-\frac{i}{2}\Delta^{-1}a^+(t'' - t) + \frac{i}{2}\Delta^{-1}a^-(t - t') - \bar{a}^+ + \bar{a}^-) -$$

$$- \frac{i}{4}\Delta^{-1}\int_{t'}^{t''} dtdsJ(t)J(s)\,|t - s|\,]\Big\}. \tag{135}$$

С помощью формул (115), (121), (122) и (135) нетрудно вычислить производящий функционал:

$$Z(J) = S(0{,}0{,}0{,}0) = \exp\Big\{-\frac{i}{4}\Delta^{-1}\int_{t'}^{t''} dtdsJ(t)J(s)\,|t - s|\Big\}. \tag{136}$$

Таким образом, продольный пропагатор

$$D^L(x - y) = \frac{1}{2}\Delta^{-1}|t - s| \tag{137}$$

отвечает обходу полюса при $k_0 = 0$ в смысле главного значения.

В работе [26] было проделано вычисление петли Вильсона с пропагатором (137) в рамках размерной регуляризации. По утверждению авторов получающийся при этом результат не совпадает с результатом, полученным в кулоновской калибровке. Однако в этих вычислениях использовался ряд неочевидных предположений и вопрос о возможности применения пропагатора (137) нуждается, по нашему мнению, в дальнейшем исследовании. Основная сложность здесь связана с выбором адекватной инвариантной регуляризации.

Отметим также, что пропагатор (137) можно получить, используя другое представление коммутационных соотношений. Вместо того, чтобы вводить вспомогательное поле A', можно построить операторы рождения и уничтожения продольных квантов, используя операторы $A^L(\mathbf{x})$ и $E^L(\mathbf{x})$ в различных пространственных точках:

$$E^{\pm}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) \pm iE(-\mathbf{x}); \quad A^{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\pm iA(\mathbf{x}) + A(-\mathbf{x})),$$

где операторы $E^{\pm}(\mathbf{x})$ и $A^{\pm}(\mathbf{x})$ определены при $\mathbf{mx} > 0$, где $\mathbf{m}$ — произвольный вектор.

Квантование в произвольной линейной калибровке $A_0 = \mathbf{n}\mathbf{A}$ проводится тем же методом. Однако в общем случае продольные и поперечные моды будут взаимодействовать, поэтому вычисления сильно усложнятся. Тем не менее ответ будет таким же, как и в гамильтоновой калибровке — обход полюса при $nk = 0$ совершается в смысле главного значения (на самом деле, возможно правило обхода, полученное в работе

[34] для калибровки светового конуса; это предписание совпадает с обходом в смысле главного значения в гамильтоновой калибровке).

3.5. Обобщенное предписание Мандельштама — Лейббрандта. Выше мы для корректного квантования полей Янга — Миллса в линейных калибровках ввели вспомогательные переменные A' и E'. Мы считали, что электродинамика является системой с одной связью. Однако это не совсем верно. На самом деле электродинамика — система с бесконечным числом связей (в каждой точке x пространства мы имеем одну связь). Поэтому, если бы мы смогли разделить эту бесконечность на две бесконечности, мы смогли бы построить представление коммутационных соотношений, аналогичное представлению (78)—(80) и гарантирующее положительность нормы физического подпространства. В этом разделе мы найдем такое представление и покажем, что оно приводит к обобщенному предписанию Мандельштама — Лейббрандта.

Разбиение связей $E(\mathbf{x})$ ($E = \partial_i E_i$) наиболее просто осуществляется для фурье-образа связи $E(\mathbf{x})$. Соответствующее представление выглядит следующим образом:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{2\omega}\, d\mathbf{k}(-e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\vartheta\,(f(\mathbf{k}))\,\bar{A}^-(\mathbf{k}) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\vartheta\,(f(\mathbf{k}))\bar{A}^+(\mathbf{k})), \quad (138)$$

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}}\,(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\vartheta\,(f(\mathbf{k}))\,A^-(\mathbf{k}) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\vartheta\,(f(\mathbf{k}))A^+(\mathbf{k})). \quad (139)$$

Здесь $f(\mathbf{k})$ — произвольная нечетная функция: $f(-\mathbf{k}) = -f(\mathbf{k})$, оператор $A^+(\bar{A}^+)$ сопряжен оператору $A^-(\bar{A}^-)$. Все введенные операторы A^+, $\bar{A}^+$, A^-, $\bar{A}^-$ определены в верхней «полуплоскости» $f(\mathbf{k}) > 0$ и удовлетворяют в этой полуплоскости следующим коммутационным соотношениям:

$$[A^-(\mathbf{k}),\ \bar{A}^+(\mathbf{k}')] = [\bar{A}^-(\mathbf{k}),\ A^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (140)$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Если $f(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{m}$, то мы получаем представление, которое было использовано в [31] для канонического квантования полей Янга — Миллса в калибровке светового конуса и в [41,42] — для остальных случаев.

Используя представление (138), нетрудно переписать оператор Q в виде

$$Q = \int d\mathbf{k}\ \vartheta(f(\mathbf{k}))\,(c^+(\mathbf{k})\,\bar{A}^-(\mathbf{k}) + c^-(\mathbf{k})\,\bar{A}^+(\mathbf{k})), \quad (141)$$

где операторы c^+ и c^- вводятся аналогично операторам $\bar{A}^+$ и $\bar{A}^-$. Таким образом, мы привели оператор Q к виду (81), поэтому норма физического подпространства будет положительна и конечна.

Теперь мы перейдем к вычислению пропагатора полей Янга — Миллса в линейных калибровках $n_\mu A_\mu = 0$. Для этого мы должны вычислить производящий функционал $Z_0(J)$ свободных полей Янга — Миллса. Формально этот функционал можно представить следующим образом:

$$Z_0(J) = \int dA_0 dA_i\, dE_i\, \delta(n_\mu A_\mu) \exp\left\{i \int dx(\mathcal{L}(x) - A_\mu(x) J_\mu(x))\right\}, \quad (142)$$

где $\mathcal{L}(x)$ определен формулой (123).

Корректное определение $Z_0(J)$ требует использования голоморфного представления, введенного в п.3.4, и определений (121) и (122). Это будет сделано позднее. Давайте переопределим поле A_0:

$$A_0 - n_i A_i \to A_0 \quad (143)$$

и проведем интегрирование по новому полю A_0. Тогда мы получим следующее выражение для $Z_0(J)$ (без ограничения общности можно считать, что $n_0 = 1$):

$$Z_0(J) = \int dA_i\, dE_i \exp\left\{i \int dx(\mathcal{L}'(x) - n_i A_i J_0 + A_i J_i)\right\}, \quad (144)$$

где лагранжиан $\mathcal{L}'(x)$ равен

$$\mathcal{L}'(x) = E_i\, \partial_0 A_i - \frac{1}{2} E_i^2 - \frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + n_i A_i\, \partial_j E_j. \quad (145)$$

Переопределяя ток J_i:

$$J_i - n_i J_0 \to J_i, \quad (146)$$

окончательно получим

$$Z_0(J) = \int dA_i\, dE_i \exp\left\{i \int dx(\mathcal{L}'(x) + A_i J_i)\right\}. \quad (147)$$

Таким образом, для вычисления пропагатора достаточно вычислить интеграл (147) и затем сделать замену, обратную замене (146):

$$J_i \to J_i - n_i J_0. \quad (148)$$

Как уже отмечалось выше, для вычисления континуального интеграла (147) необходимо использовать голоморфное представление, описанное в п.3.3, и формулу (119) для оператора эволюции. Однако так как при ненулевом n лагранжиан не расщепляется на сумму лагранжианов для продольной и поперечной компонент, необходимо учесть вклад поперечных компонент. Для этого следует задать какое-либо представление для поперечных компонент и построить континуальный интеграл для оператора эволюции. Мы выберем обычное голоморфное представление для поперечных компонент (см., например [33]):

$$A_i^T(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}} (\mathrm{e}^{i\mathbf{kx}} a_r^-(\mathbf{k})\, u_i^r(\mathbf{k}) + \mathrm{e}^{-i\mathbf{kx}} a_r^+(\mathbf{k})\, u_i^r(\mathbf{k})),$$

$$E_i^T(\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\omega/2}\, d\mathbf{k}(-\mathrm{e}^{i\mathbf{kx}} a_r^-(\mathbf{k})\, u_i^r(\mathbf{k}) + \mathrm{e}^{-i\mathbf{kx}} a_r^+(\mathbf{k})\, u_i^r(\mathbf{k})). \tag{149}$$

Здесь $a_r^-(\mathbf{k})$ и $a_r^+(\mathbf{k})$ — обычные операторы рождения и уничтожения с коммутационными соотношениями $[a_r^-(\mathbf{k}), a_s^+(\mathbf{k}')] = \delta_{rs}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, а $u_i^r(\mathbf{k})$, $i = 1, 2$, — два ортонормированных вектора поляризации, ортогональных вектору $\mathbf{k}$.

Используя формулы (138), (139) и (149), нетрудно переписать гамильтониан H системы (145) в виде

$$\begin{aligned} H = \int d\mathbf{k}\vartheta(f(\mathbf{k}))\, (\omega a_r^+(\mathbf{k})\, a_r^+(-\mathbf{k}) + \omega a_r^+(-\mathbf{k}) a_r^-(\mathbf{k}) + i a_r^-(-\mathbf{k})\, n_r(-\mathbf{k})\, \bar{A}^-(\mathbf{k}) - \\ - i a_r^+(-\mathbf{k})\, n_r(-\mathbf{k}) \bar{A}^+(\mathbf{k}) + i a_r^+(\mathbf{k})\, n_r(\mathbf{k}) \bar{A}^-(\mathbf{k}) - i a_r^-(\mathbf{k})\, n_r(\mathbf{k}) \bar{A}^+(\mathbf{k}) + \\ + \bar{A}^+(\mathbf{k})\, \bar{A}^-(\mathbf{k}) - \mathbf{kn}\, \bar{A}^+(\mathbf{k})\, A^-(\mathbf{k}) - \mathbf{kn}\, A^+(\mathbf{k})\, \bar{A}^-(\mathbf{k}) - A^-(\mathbf{k}) J^+(\mathbf{k}) - \\ - A^+(\mathbf{k})\, J^-(\mathbf{k}) - a_r^-(\mathbf{k})\, \eta_r^*(\mathbf{k}) - a_r^+(\mathbf{k})\, \eta_r(\mathbf{k}) - \\ - a_r^-(-\mathbf{k})\, \eta_r^*(-\mathbf{k}) - a_r^+(-\mathbf{k})\, \eta_r(-\mathbf{k})). \end{aligned} \tag{150}$$

Здесь токи $J^+(\mathbf{k})$ и $\eta_r^*(\mathbf{k})$ комплексно сопряжены токам $J^-(\mathbf{k})$ и $\eta_r(\mathbf{k})$ и определяются формулами

$$J^+(\mathbf{k}) = \frac{\vartheta\,(f(\mathbf{k}))}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{2\omega}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{kx}} \partial_i J_i(\mathbf{x}),$$

$$\eta_r^*(\mathbf{k}) = \frac{u_i^r(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{2\omega}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{kx}} J_i(\mathbf{x}), \tag{151}$$

а $n_r(\mathbf{k}) = n_i\, u_i^r(\mathbf{k})$.

Континуальный интеграл для ядра оператора эволюции с учетом поперечных компонент выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} U(a_r^+, a_r^-, A^+, \bar{A}^+, A^-, \bar{A}^-; t'' - t') = \int d^2\alpha_r\, d^2\alpha d^2\bar{\alpha} \times \\ \times \exp\Big\{ a_r^+(t'')\, \alpha_r^-(t'') + \alpha^+(t'')\, \bar{\alpha}^-(t'') + \bar{\alpha}^+(t'')\, \alpha^-(t'') + \\ + i\int_{t'}^{t''} dt(i\alpha_r^+\, \dot{a}_r^- + i\alpha^+\dot{\bar{\alpha}}^- + i\bar{\alpha}^+\dot{\alpha}^- - H(a_r^+, a_r^-, \alpha^+, \bar{\alpha}^+, \alpha^-, \bar{\alpha}^-))\Big\}, \end{aligned} \tag{152}$$

где мы использовали граничные условия (120) для полей α и $\bar{\alpha}$ вместе с обычными фейнмановскими граничными условиями для продольных компонент. Используя полученные формулы, можно вычислить пропагатор. Промежуточные формулы оказываются очень громоздкими, поэтому мы приведем только окончательный ответ для пропагатора полей Янга — Миллса в калибровке $n_\mu A_\mu = 0$:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{kn - i\delta\varepsilon(f(\mathbf{k}))} + \frac{n^2 k_\mu k_\nu}{(kn - i\delta\varepsilon(f(\mathbf{k}))^2}\right). \quad (153)$$

Здесь $\varepsilon(f(\mathbf{k}))$ — знаковая функция.

Если $f(\mathbf{k}) = -\mathbf{kn}$ ($\mathbf{n} \neq 0$), то мы получаем предписание Мандельштама — Лейббрандта для любой линейной калибровки [35] (в случае аксиальной калибровки необходимо потребовать, чтобы $n_0 \neq 0$). Для чисто гамильтоновой калибровки $A_0 = 0$ можно выбрать $f(\mathbf{k}) = -k_1$ и получить предписание, предложенное в [36,43,44]. Квантование в чисто временной калибровке было рассмотрено в работах [44,45] в рамках канонического квантования (и было распространено на остальные калибровки в работах [41,42]). Физическое пространство в этих работах выделялось с помощью слабого условия Дирака $\langle\Psi|\varphi|\Psi\rangle = 0$. Предписание, полученное в работе [44], совпадает с предписанием (153) для частного случая $\mathbf{n} = 0$ и $f(\mathbf{k}) = -k_1$. В [45] была использована регуляризованная гамильтонова калибровка и поэтому полученный в этой работе пропагатор слегка отличается от (153).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы описали различные методы квантования полей Янга — Миллса в линейных калибровках, позволяющие корректно определить пропагатор векторного поля. Показано, что неполная фиксация калибровочного произвола, присущая этим моделям, приводит к произволу в выборе пропагатора, и описан допустимый класс пропагаторов. Предложенные методы решают задачу квантования в линейных калибровках, однако остается неисследованной проблема перенормировки. Эта проблема далеко не тривиальна. Например, исследование перенормировки в калибровке светового конуса показывает, что в этом случае необходимо введение нелокальных контрчленов [46]. Абсолютно неясным остается вопрос о перенормировке в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$. В частности, в дополнительном исследовании нуждается вопрос о проведении петли Вильсона в калибровке $A_0 = 0$ при различных выборах пропагатора.

Большой интерес представляет также исследование калибровочных полей в линейных калибровках вне рамок теории возмущений. Эти калибровки позволяют обойти проблему грибовской неоднозначности, возникающую при квантовании в других калибровках. В этом случае основной проблемой становится поиск непертурбативных решений уравнения связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dokshitzer Y.L., Dyakonov D.I., Troyan S.I.** — Phys. Rep., 1980, vol.58, p.271.
2. **Brink I., Lindgren O., Nilson B.F.** — Nucl. Phys., 1983, vol.B212, No.3, p. 401.
3. **Mandelstam S.** — Nucl. Phys., 1983, vol.B213, No.1, p.149.
4. **Schwarz J.H.** — Phys. Rep., 1982, vol.89, p.223.
5. **Славнов А.А.** — ТМФ, 1972, т.10, с.99.
6. **Taylor J.C.** — Nucl. Phys., 1971, vol.B33, p.436.
7. **Gribov V.N.** — Nucl. Phys., 1978, vol.B139, p.1.
8. **Dirac P.A.M.** — Can J. Math., 1950, vol.2, p.129; Proc.Roy.Sci., 1958, vol.A246, p.326.
9. **Дирак П.А.М.** — Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
10. **Фаддеев Л.Д.** — ТМФ, 1969, т.1, с.3.
11. **Faddeev L.D., Popov V.N.** — Phys. Lett., 1967, vol.25B, p.30.
12. **De Witt B.** — Phys. Rev., 1967, vol.160, p.119, 1195.
13. **Славнов А.А., Фролов С.А.** — ТМФ, 1988, т.75, с.201.
14. **Curci G., Ferrary R.** — Nuovo Cimento, 1976, vol.35A, p.273.
15. **Kugo T., Ojima I.** — Suppl. Prog. Theor. Phys., 1979, vol.66, p.1.
16. **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.** — Phys. Rev., 1983, vol.D28, p.2567.
17. **Frolov S.A., Slavnov A.A.** — Nucl. Phys., 1990, vol.B347, p.333.
18. **Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.** — Phys. Lett., 1975, vol.55B, p. 224; **Batalin I.A., Vilkovsky G.A.** — Phys. Lett., 1977, vol.69B, p. 309.
19. **Batalin I.A., Fradkin E.S.** — Phys. Lett., 1983, vol.122B, p.157.
20. **Henneaux M.** — Phys. Rep., 1985, vol.129, p.1.
21. **Batalin I.A., Fradkin E.S.** — Nuovo Cimento, 1986, vol.9, No.10, p.1.
22. **Leibbrandt G.** — Rev. Mod. Phys., 1987, vol.59, p.1067.
23. **Kummer W.** — Acta Phys. Austr., 1975, vol.41, No.3—4, p.315.
24. **Konetshny W., Kummer W.** — Nucl. Phys., 1975, vol.B100, No.1, p.106.
25. **Willemsen J.F.** — Phys. Rev., 1978, vol.17, No.2, p. 574.
26. **Caracciolo S., Curci G., Menotti P.** — Phys. Lett., 1982, vol.113B, No.4, p.311.
27. **Славнов А.А., Фролов С.А.** — ТМФ, 1986, т.68, 3, с.360.
28. **Leibbrandt G.** — Phys. Rev., 1984, vol.D29, No.8, p.1699.
29. **Kogut J.B., Soper D.E.** — Phys. Rev., 1970, vol.D1, No.10, p.2901.
30. **Ten Eyck J.H., Rohrlich F.** — Phys. Rev., 1974, vol.D9, No.8, p.2237.
31. **Bassetto A., Dalbosco M., Lazzizzera I., Soldati R.** — Phys. Rev., 1985, vol.D31, p.2012.
32. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
33. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
34. **Славнов А.А., Фролов С.А.** — ТМФ, 1987, т.73, № 2, с.199.
35. **Leibbrandt G.** — Nucl. Phys., 1988, vol.B310, p.405.
36. **Huffel H., Landshoff P.V., Taylor J.C.** — Phys. Lett., 1989, vol.217B, p.147.
37. **Фролов С.А.** — ТМФ, 1991, т.87, № 2, с.188.

38. **Сараджев Ф.М., Файнберг В.Я.** — Труды ФИАН, 1989, т.165, с.4.
39. **Frolov S.A., Slavnov A.A.** — Phys. Lett., 1989, vol.218B, p.461.
40. **Hwang S., Marnelius R.** — Preprint CERN-TH.5235/88, 1988.
41. **Lazzizzera I.** — Nuovo Cimento, 1989, vol.A102, p.1385.
42. **Burnel A.** — Phys. Rev., 1989, vol.D40, p.1221.
43. **Gaigg P., Kreuzer M.** — Phys. Lett., 1988, vol.205B, p.530.
44. **Lazzizzera I.** — Phys. Lett., 1988, vol.210B, p.188.
45. **Landshoff P.V.** — Phys. Lett., 1989, vol.227B, p.431.
46. **Bassetto A., Dalbosco M., Soldati R.** — Phys. Rev., 1987, vol.D36, p.3138; **Skarke H., Gaigg P.** — Phys. Rev., 1988, vol. D38, p.3205.