

МЕТОД ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Посвящается памяти Н.Н.Боголюбова

П.С.Исаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматриваются физические и математические основы метода дисперсионных соотношений. Решающий вклад в обоснование и развитие метода дисперсионных соотношений (МДС) был сделан Н.Н.Боголюбовым. Выделен вклад ученых Лаборатории теоретической физики в развитие и приложение МДС за период 1956—1965 гг., в течение которого академик Н.Н.Боголюбов был директором лаборатории. Дан обзор метода двойных дисперсионных соотношений, реджелогии, бутстрап-метода, свержсходящихся правил сумм, следующих из предположений об аналитичности амплитуд рассеяния. Знание глубины физических и математических основ рассмотренных выше методов позволяет нам судить о возможности их использования в рамках квантовой хромодинамики.

Physical and mathematical fundamentals of the dispersion relation method are considered. The decisive contribution to the foundation and development of the dispersion relation method (DRM) was made by N.N.Bogolubov. The contribution of scientists of Laboratory of Theoretical Physics to the development and applications of DRM is reviewed during the period from 1956 to 1965 when Academician N.N.Bogolubov was Director of the Laboratory of Theoretical Physics. Double dispersion relation, reggelogy, bootstrapmethod, FESR following from the assumption of analyticity of scattering amplitudes are also reviewed. The knowledge of profundity of physical and mathematical principles of the above considered methods of quantum field theory allow us to discuss a problem of their use in the framework of QCD.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое определение причинности, с точки зрения «здорового смысла», можно ввести довольно просто. Рассмотрим случай, когда ударом по клавише пианино мы вызываем звуковой сигнал, на который затем реагирует камертон. Может ли камертон зазвучать раньше, предсказывая, что вскоре после этого будет произведен удар по клавише пианино? Очевидно, с точки зрения здравого смысла (или нашего повседневного опыта), этого быть не должно! Пусть $g(t)$ есть отклик камертона на удар по клавише, t_0 — момент времени, когда звуковой сигнал доходит

до камертона. Очевидно, что $g(t) = 0$ при $t < t_0$. Пусть функция $F(t, t')$ описывает связь между камертоном и сигналом $f(t)$ ($f(t)$ — удар по клавише пианино). Предположим, что $f(t) = \delta(t - t_0)$. Предположим, что функция связи $F(t, t')$ есть связь линейная, зависящая от разности времени $t - t'$, это кажется очевидным. Тогда связь сигнала $f(t)$ и отклика камертона $g(t)$ можно выразить формулой

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - t') f(t') dt' \quad (1)$$

или

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - t') \delta(t' - t_0) dt' = F(t - t_0),$$

и т.к. $g(t) \equiv 0$ при $t < t_0$, то и $F(t - t_0) \equiv 0$ при $t < t_0$.

Применим к выражению (1) преобразование Фурье.

Пусть

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим $g(\omega) = F(\omega) f(\omega)$, где $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$.

Мы получили, что камертон отвечает только на ту звуковую частоту, которую издает клавиша пианино. Но это не все. Очевидно, что функция $F(\omega)$ является аналитической функцией переменной ω в верхней полуплоскости ω :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) e^{i(\omega_r + i\omega_i)\tau} d\tau. \quad (3)$$

Если $\tau > 0$, то в подынтегральном выражении (3) возникает режущий фактор $e^{-\omega_i \tau}$.

Если $\tau < 0$, то $F(\tau) \equiv 0$.

Если функция $F(\omega)$ является аналитической функцией переменной ω в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , то для этой функции можно записать теорему Коши:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \quad (\text{Im } \omega > 0).$$

Опуская переменную ω на вещественную ось ω и используя символическое тождество

$$\lim_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\omega' - (\omega + i\varepsilon)} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi \delta(\omega' - \omega),$$

получим

$$F(\omega) = \frac{\mathcal{P}}{\pi i} \int \frac{F(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega}, \quad (4)$$

$$F(\omega) = \operatorname{Re} F(\omega) + i \operatorname{Im} F(\omega). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(\omega) &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega}, \\ \operatorname{Im} F(\omega) &= -\frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} F(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (6) называются дисперсионными соотношениями. Как было показано, они вытекают из принципа причинности: $F(t) \equiv 0$ при $t < 0$. $F(\omega)$ — фурье-образ функции $F(t)$. Для функций, обладающих на бесконечности полюсами n -го порядка (полиномиально возрастающими функциями), также можно записать дисперсионные соотношения (ДС), но в этом случае нужно провести n -е число вычитаний:

$$\lim_{\varepsilon > 0} \frac{f(E)}{(E - E_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = \mathcal{P} \left\{ \frac{1}{(E - E_0)^{n+1}} - \frac{i\pi(-1)^n}{n!} \delta^n(E - E_0) \right\},$$

тогда

$$\begin{aligned} F(E) &= \frac{(E - E_0)^{n+1}}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(E') dE'}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+1}} + \\ &+ F(E_0) + \dots + \frac{F^n(E_0)}{n!} (E - E_0)^n. \end{aligned}$$

В этом случае ДС определяются с точностью до полинома степени n . Таково следствие принципа причинности, введенного нами с точки зрения «здорового смысла».

1. ОДНОМЕРНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Существует ли связь дисперсионных соотношений с квантовой теорией поля? Насколько можно обобщить теорию поля, не нарушая справедливости дисперсионных соотношений? Н.Н.Боголюбов сформулиро-

вал основные положения теории поля, при которых возможен вывод дисперсионных соотношений, доказав тем самым их существование в рамках квантовой теории поля [1]. В их число входили требования общего характера, такие как: 1) инвариантность амплитуд состояний относительно преобразований L некоторой группы G (кроме лоренцевых группа G может включать изотопические, градиентные преобразования и др.); 2) существование асимптотических состояний системы частиц, таких, что взаимодействие между частицами при бесконечном удалении выключается полностью, а такие величины, как энергия, импульс и др. являются аддитивными; 3) существование оператора трансляции одночастичного состояния U_{L_a} , который, действуя на вектор состояния $|p\rangle$ с определенным значением вектора энергии-импульса p , записывается в виде

$$U_{L_a} |p\rangle = e^{-ipa} |p\rangle;$$

4) существование вакуумного состояния $|0\rangle$ такого, что

$$U_{L_a} |0\rangle = |0\rangle;$$

5) существование унитарного оператора S , описывающего переход между начальным и конечным асимптотическими состояниями со свойством

$$SS^+ = 1,$$

и некоторые другие.

Кроме этих общих свойств теории поля были сформулированы локальные свойства, среди которых определяющим было условие причинности в вариационной форме

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^+ \right) = 0 \quad \text{для } x \leq y,$$

где $x \leq y$ означает, что точка x лежит раньше точки y , или отделена от нее пространственноподобным интервалом.

Чтобы перейти от чисто математических следствий условия причинности к имеющим физический смысл дисперсионным соотношениям, необходимо связать реальные и мнимые части функции $F(\omega)$ с физически измеряемыми величинами.

Пусть функция $F(\omega)$ (см. формулы (5) и (6)) есть амплитуда рассеяния физического процесса. Пока, для определенности, будем предполагать, что это амплитуда рассеяния π -мезона на нуклоне, а ω — есть энергия налетающего π -мезона ($\omega \equiv E$). Соотношение (6) запишем иначе:

$$\operatorname{Re} F(E) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(E') dE'}{E' - E} + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} F(E') dE'}{E' - E}. \quad (7)$$

Область отрицательных значений E может быть выражена через комплексно-сопряженное значение амплитуды $F(E)$.

Действительно, фурье-образ функции $F(E)$:

$$F(E) = \int e^{iEt} F(t) dt$$

обладает свойством

$$F^*(E) = F(-E),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re} F(E) = \operatorname{Re} F(-E); \quad \operatorname{Im} F(E) = -\operatorname{Im} F(-E). \quad (8)$$

Таким образом, соотношение (7) может быть записано в форме

$$\operatorname{Re} F(E) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(E') dE'}{E' - E} + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(E') dE'}{E' + E} \quad (9)$$

(во втором интеграле знак (+) меняется на знак (-) четыре раза).

В результате выражение (9) принимает вид

$$\operatorname{Re} F(E) = \frac{2\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E' \operatorname{Im} F(E') dE'}{E'^2 - E^2}. \quad (10)$$

Для заряженных частиц свойства зарядовой симметрии и соотношение четностей действительной и мнимой частей амплитуды $F(E)$ (8) ведут к тому, что область отрицательных значений энергий для процесса рассеяния $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ выражается через положительные значения энергии физического процесса рассеяния $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$. Конечно, для того чтобы записывать ДС для процессов $\pi + p \rightarrow \pi + p$, необходимо было убедиться в том, что амплитуда рассеяния в квантовой теории поля, в которой, в частности, существуют процессы рождения и уничтожения частиц, является аналитической функцией комплексной переменной энергии E .

Первый вывод дисперсионных соотношений в рамках квантовой теории поля был предложен Гелл-Манном, Гольдбергером и Тиррингом [2]. Они рассмотрели аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед (под углом 0°) π -мезонов на нуклонах, изучили проблему аналитического продолжения по энергии в верхнюю полуплоскость, предполагая, что степень полиномиальной расходимости на бесконечности будет не выше первой. Амплитуду рассеяния вперед удобно рассматривать пото-

му, что по оптической теореме ее мнимая часть выражается через полное сечение:

$$\operatorname{Im} F(E) = \frac{q \sigma(E)}{4\pi}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |F(E)|^2 &= |\operatorname{Re} F(E)|^2 + |\operatorname{Im} F(E)|^2 = \\ &= |\operatorname{Re} F(E)|^2 + \left| \frac{q\sigma(E)}{4\pi} \right|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\theta=0^\circ}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь q — волновой вектор налетающего π -мезона, θ — угол рассеяния π -мезона в лабораторной системе. Неизвестной величиной в соотношении (12) является только $\operatorname{Re} F(E)$. Величины $\frac{q\sigma(E)}{4\pi}$ и $\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\theta=0^\circ}$ могут быть

измерены экспериментально. С другой стороны, величина $\operatorname{Re} F(\omega)$ может быть рассчитана по методу дисперсионных соотношений (см. (10)). Таким образом, сравнивая $\operatorname{Re} F(E)_{\text{эксп}}$ и $\operatorname{Re} F(E)_{\text{теор}}$, можно проверить ДС и, следовательно, проверить основные принципы КТП и, в первую очередь, принцип причинности.

Однако доказательство аналитичности для амплитуд рассеяния для частиц с массой, отличной от нуля, авторы [2] провели неубедительно. Кроме того, в ДС (10) интегрирование по энергии ведется в интервале $(-\infty, +\infty)$, тогда как в реальном физическом эксперименте физические энергии изменяются в интервале положительных значений, больших значений масс участвующих в реакции частиц. Поэтому в ДС надо исключить ненаблюдаемую область $0 < E < M + \mu$, где μ — масса покоящегося π -мезона, M — масса покоящегося нуклона, E — энергия системы πN -частиц. В этой области возможно существование связанных состояний. Если связанные состояния образуют дискретный спектр, то соответствующие интегралы вычисляются просто, а если их спектр непрерывен, то возникают определенные осложнения.

В 1956 г. на международном съезде физиков-теоретиков в Сиэтле (США) Н.Н.Боголюбов изложил математически строгое доказательство существования дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния π -мезонов на нуклонах на ненулевой угол (до значений передач $q^2 = -8\mu^2$) [3]. В основе доказательства лежит теорема «об острие клина», носящая имя Н.Н.Боголюбова. Ее содержание состоит в том, что обобщенные функции нескольких комплексных переменных, удовлетворяющие определенным условиям роста на бесконечности, могут быть аналитически продолжены в верхнюю полуплоскость одной комплексной переменной (например, энергии) и для таких функций могут быть

записаны дисперсионные соотношения, представляющие физический интерес*.

Работы Н.Н.Боголюбова в середине 50-х годов в области квантовой теории поля, его последовательная аксиоматическая схема построения квантовой теории поля, его доказательство существования дисперсионных соотношений оказали огромное влияние на развитие мировой теоретической физики, произвели глубокий поворот в сторону приоритета строгих математических методов рассмотрения физических явлений. Работы Н.Н.Боголюбова вывели теоретическую физику элементарных частиц на новый уровень высокой математической культуры и строгости теоретического мышления.

Дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния π -мезонов на нуклонах записываются не для скалярных функций, а для матриц в обычном спиновом и изотопически спиновом пространствах. В изотопическом пространстве эта матрица имеет вид

$$T_{\alpha\beta}(E) = \delta_{\alpha\beta} T^{(1)}(E) + \frac{1}{2} [\tau_\alpha, \tau_\beta] T^{(2)}(E),$$

где E — полная энергия мезона в лабораторной системе координат ($E = \sqrt{k^2 + \mu^2}$). Амплитуды $T^{(i)}$ имеют реальную и мнимую части:

$$T^{(i)}(E) = \text{Re } T^i(E) + i \text{Im } T^i(E).$$

Изотопически чистые состояния связаны с амплитудами $T^{(i)}$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} T^{3/2}(E) &= T^{(1)}(E) - T^{(2)}(E) \\ T^{1/2}(E) &= T^{(1)}(E) + 2T^{(2)}(E). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (13) следует

$$\begin{aligned} T^{(1)}(E) &= \frac{2}{3} T^{3/2} + \frac{1}{3} T^{1/2}, \\ T^{(2)}(E) &= \frac{1}{3} T^{1/2} - \frac{1}{3} T^{3/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Амплитуда $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ -рассеяния $T^{(+)}$ соответствует чистому $T^{3/2}$ -состоянию; амплитуда $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$ -рассеяния $T^{(-)}$ соответствует

*См. Дополнение А в книге [1].

смеси состояний: $T^{(-)} = \frac{2}{3} T^{1/2} + \frac{1}{3} T^{3/2}$. С помощью $T^{(+)}$ - и $T^{(-)}$ -состояний соотношения (14) могут быть записаны в иной форме:

$$\begin{aligned} T^{(1)}(E) &= \frac{1}{2} [T^{(-)}(E) + T^{(+)}(E)], \\ T^{(2)}(E) &= \frac{1}{2} [T^{(-)}(E) - T^{(+)}(E)]. \end{aligned} \quad (15)$$

По оптической теореме

$$\text{Im } T^{(\pm)}(E) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\pm}(E), \quad (16)$$

где $k = \sqrt{E^2 - \mu^2}$, а $\sigma_{\pm}(E)$ — полные сечения рассеяния π^{\pm} -мезонов на протонах.

В обычном спиновом пространстве структура матрицы имеет вид

$$T_{ss'}(E) = \sigma_{ss'} T_{(1)} + i (\sigma \cdot |p \times le|)_{ss'} T_{(2)}. \quad (17)$$

Не вдаваясь в детали доказательства (читатель может найти их в монографии [4]), перечислим симметрии мнимых и реальных частей амплитуд $T_{(i)}^{(k)}$ ($i, k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \text{Re } T(E)_{\text{чет}} &= \{ \text{Re } T_{(1)}^{(1)}(E), \text{Re } T_{(2)}^{(2)}(E) \}, \\ \text{Re } T(E)_{\text{нечет}} &= \{ \text{Re } T_{(1)}^{(2)}(E), \text{Re } T_{(2)}^{(1)}(E) \}, \\ \text{Im } T(E)_{\text{чет}} &= \{ \text{Im } T_{(1)}^{(2)}(E), \text{Im } T_{(2)}^{(1)}(E) \}, \\ \text{Im } T(E)_{\text{нечет}} &= \{ \text{Im } T_{(1)}^{(1)}(E), \text{Im } T_{(2)}^{(2)}(E) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Комбинируя соотношения (12)—(17), можно записать дисперсионные соотношения для процесса рассеяния $\pi^{\pm} + p \rightarrow \pi^{\pm} + p$ под нулевым углом в виде [1]:

$$\begin{aligned} \text{Re } T^{(\pm)}(E) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{\mu} \right) \text{Re } T^{(\pm)}(\mu) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{\mu} \right) \text{Re } T^{(\mp)}(\mu) + \\ &+ \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{dE'}{k'} \left[\frac{\sigma_{\pm}(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_{\mp}(E')}{E' + E} \right] + \frac{2f^2}{\mu^2} \frac{k^2}{E \mp \frac{\mu^2}{2M}}. \end{aligned} \quad (19)$$

В ДС (19) уже нет интегрирования по нефизической области энергий. Последний член в (19) есть вклад однонуклонного промежуточного состо-

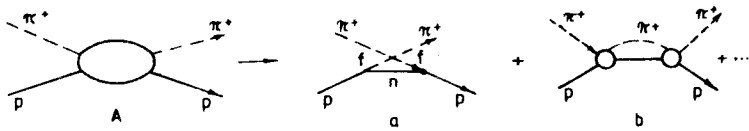


Рис.1. Графическое представление разложения амплитуды $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ рассеяния (A) в ряд по промежуточным состояниям $\pi^+ p$ -системы. Диаграмма a соответствует однонуклонному вкладу (полюсный член), f — константа связи πN -взаимодействия в теории возмущений; диаграмма б описывает двух-частичное промежуточное состояние, отвечает за разрез по энергии π -мезона: $\mu \leq E \leq \infty$

нения в реальную часть амплитуд $\text{Re } T^{(\pm)}(E)$ (см. рис.1). Из соотношения (19) определяется теоретическое значение $\text{Re } T^{(\pm)}(E)$. Значения $\text{Re } T^{(\pm)}(\mu)$ вычисляются через длины рассеяния $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ и $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$ процессов рассеяния. Константа f определяется из условия наилучшего согласия с экспериментальными данными. Значения $\sigma_{\pm}(E)$ берутся из экспериментальных данных в пределах доступных эксперименту энергий (и в пределах экспериментальных ошибок). Область высоких энергий аппроксимируется разумными теоретическими оценками. Найденное из (19) теоретическое значение $\text{Re } T^{\pm}(E)$ сравнивается с $\text{Re } T^{\pm}(E)$, рассчитанным из экспериментальных данных по формуле (12).

Главной неопределенностью в ДС является характер поведения полных сечений $\sigma_{\pm}(E)$ при бесконечно больших значениях энергии. Обычно предполагалось, что полные сечения процессов πN -рассеяния на бесконечности выходят на константу. При этом оказывалось, как правило, что неопределенность интегрального вклада от этой части составляла 5% от вклада из области низких энергий.

Проверка ДС показала, что в широком интервале энергий обеспечивается хорошее совпадение теоретических кривых $\text{Re } T(E)$ с экспериментальными данными при значениях $f^2 = 0,08$ ($f^2 = \frac{1}{4\pi} \left(g \frac{\mu}{M}\right)^2$, где g — перенормированная константа связи мезон-нуклонного взаимодействия), см., например, [5].

Важную роль в проверке дисперсионных соотношений играла теорема Померанчука о равенстве полных сечений взаимодействия частиц и античастиц при бесконечно больших энергиях [6]. В соответствии с этой теоремой имеем

$$\sigma_{-}(\infty) = \sigma_{+}(\infty)$$

(например, $\sigma(\pi^{-}p \rightarrow \pi^{-}p) = \sigma(\pi^{+}p \rightarrow \pi^{+}p)$, $E \rightarrow \infty$

$$\sigma(p\bar{p}) = \sigma(pp), E \rightarrow \infty \text{ и т.д.}) \quad (20)$$

На каждом вновь вступающем в строй ускорителе элементарных частиц проверяли теорему при максимально больших, доступных для него энергиях. Проверка этой теоремы на ускорителе с энергией 76 ГэВ в ИФВЭ (Протвино) привела к открытию так называемого серпуховского эффекта. Ниже мы еще вернемся к этому явлению.

В наше время метод дисперсионных соотношений и теорема Померанчука будут проверяться на новых, более мощных ускорителях, таких как LHC (ЦЕРН) и SSC (Техас, США).

Вскоре после вывода ДС для πN -рассеяния были выведены ДС для рассеяния нуклонов на нуклонах [7]. Полученные в работах [7] ДС не могли сравниваться с экспериментом, так как содержали ненаблюдаемые величины или неизвестные величины, связанные с рассеянием антинуклонов на нуклонах. В работе [8] были получены приближенные ДС, допускающие сравнение с экспериментальными данными. Позднее ДС для нуклон-нуклонного рассеяния были получены рядом других авторов. Подробный анализ проблемы рассеяния протонов на нуклонах с экспериментальной точки зрения и сравнение экспериментальных данных с предсказаниями теории, в т.ч. с предсказаниями ДС, дан в обзоре [9].

Весьма полно был исследован процесс фоторождения π -мезонов на нуклонах: $\gamma + N \rightarrow \pi + N$. В работах [10—13] были впервые получены дисперсионные соотношения для фоторождения π -мезонов и исследованы наиболее общие характеристики процесса $\gamma + N \rightarrow \pi + N$. Дисперсионные соотношения были записаны в форме, удобной для экспериментальной проверки. В них были подтверждены закономерности, обусловленные полюсным членом дисперсионных соотношений, ранее полученные в [14,15] в приближении слабой связи. Добавим, что в работах [14,15] устанавливается псевдоскалярный вариант мезонной теории. Позднее для описания процесса фоторождения π -мезонов на нуклонах были использованы двойные дисперсионные соотношения [16,17], о которых речь пойдет в следующем разделе обзора. Цикл работ по фоторождению π -мезонов, выполненный теоретиками ОИЯИ А.М.Балдиным, А.А.Логуновым, Л.Д.Соловьевым и А.Н.Тавхелидзе был удостоен в 1973 г. Государственной премии СССР. Оценивая научную значимость этого цикла академики Н.Н.Боголюбов и Б.М.Понтекорво писали: «...Авторами были впервые сформулированы и доказаны, на основе фундаментальных принципов квантовой теории поля, дисперсионные соотношения для

фоторождения мезонов. Исходя из этого удалось связать физические характеристики процессов фоторождения π -мезонов с характеристиками сильного взаимодействия π -мезонов с нуклонами и получить надежные количественные результаты для процессов фоторождения в достаточно широкой области энергий. Тем самым были заложены основы теоретического описания процессов фоторождения. Тщательная экспериментальная проверка дисперсионных соотношений подтвердила справедливость основных физических принципов теории для данной области энергий...».

Дисперсионные соотношения для рассеяния фотонов на нуклонах также выводились рядом авторов [18]. Строгое доказательство существования ДС для комптон-эффекта на нуклонах, справедливое для рассеяния фотонов на любой угол, полученное по методу Н.Н.Боголюбова, дано в работе [19]. Рассмотрение велось в низшем по e^2 -приближении, с учетом только сильных взаимодействий. Дисперсионные соотношения для процесса тормозного излучения электронов на нуклонах и рождения пар фотонами на нуклонах были использованы с целью проверки квантовой электродинамики на малых расстояниях [20]. ДС для слабых взаимодействий (для рассеяния нейтрино на нуклоне) были постулированы в работе [21].

2. ДВОЙНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Для сравнения ДС с экспериментальными данными требовался весьма ограниченный экспериментальный материал — полные сечения взаимодействия и дифференциальное сечение рассеяния под нулевым углом, что мало устраивало физиков.

Двойные дисперсионные представления Мандельстама [22] сняли эти ограничения, но не было доказано их существование в рамках теории поля. Двойные представления Мандельстама постулируют аналитические свойства амплитуд рассеяния по двум комплексным переменным — энергии и передаче импульса. В принципе, при фиксированной передаче импульса, они переходят в обычные одномерные дисперсионные соотношения. По существу, мандельштамовские представления возникают как бы из допущения, что мнимые части амплитуд рассеяния, стоящие под знаком интеграла в обычных ДС, в свою очередь, имеют дополнительные разрезы вдоль действительных значений энергий и импульсов. Позднее в рамках теории возмущений было показано, что в некоторых ограниченных областях изменения этих переменных такая аналитичность существует.

Рассмотрим рассеяние π -мезона на нуклоне. Обобщенную диаграмму Фейнмана для этого процесса представим в виде, изображенном на рис.2. Все 4-импульсы q, q', p, p' лежат на массовой поверхности. Функция Грина, зависящая от переменных q, q', p, p' , может описывать одновременно три процесса:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \pi + N \rightarrow \pi' + N' \\ \text{II} \quad & \bar{\pi}' + N \rightarrow \bar{\pi} + N' \\ \text{III} \quad & \pi + \bar{\pi}' \rightarrow \bar{N} + N'. \end{aligned} \quad (21)$$

Вводятся три инвариантные переменные:

$$\begin{aligned} s &= (q + p)^2, \quad u = (q + p')^2, \quad t = (q + q')^2, \\ s + u + t &= 2M^2 + 2\mu^2, \end{aligned} \quad (22)$$

где M — масса нуклона, μ — масса π -мезона.

Для процесса I (см. (21)) s — энергетическая переменная, а переменная t означает 4-мерную передачу импульса. В системе центра масс процесса I переменные s, u, t имеют вид

$$\begin{aligned} s &= M^2 + \mu^2 + 2q^2 + 2\sqrt{(q^2 + \mu^2)(q^2 + M^2)}, \\ u &= M^2 + \mu^2 - 2q^2 \cos \theta_1 - 2\sqrt{(q^2 + \mu^2)(q^2 + M^2)}, \\ t &= -2q^2(1 - \cos \theta_1). \end{aligned}$$

Здесь q — 3-мерный импульс π -мезона, θ_1 — угол рассеяния π -мезона в первом канале (в I процессе).

Для второго канала (процесс II) переменные s и u меняются местами — это обычное свойство кроссинг-симметрии. Третий канал (реакция III) есть аннигиляция π -мезонов в нуклон-антинуклонную пару, в нем t (см. определение (22)) есть энергетическая переменная, а переменная s играет роль передачи импульса. Здесь замена $s \rightleftharpoons t$ не есть обычное свойство кроссинг-симметрии, а узаконенное правило подстановки. Единственным оправданием такой операции подстановки служит только тот факт, что одна и та же функция Грина описывает все три канала. В случае равных масс всех четырех частиц правило подстановки превращается в точную кроссинг-симметрию.

Свойства кроссинг-симметрии и подстановки, физические и нефизические области процессов I—III наглядно представлены на рис.3.

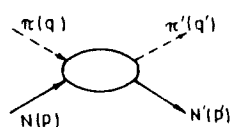


Рис.2. Обобщенная диаграмма Фейнмана, изображающая процесс рассеяния π -мезона на нуклоне

Дисперсионное представление Мандельстама имеет довольно громоздкий вид:

$$\begin{aligned}
 F(s, u, t) = & \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im } F_s(s') ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{\text{Im } F_u(u') du'}{u' - u} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\text{Im } F_t(t') dt'}{(t' - t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{\gamma_{su}} \frac{\Gamma_{su}(s', u') ds' du'}{(s' - s)(u' - u)} + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{\gamma_{st}} \frac{\Gamma_{st}(s', t') ds' dt'}{(s' - s)(t' - t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{\gamma_{ut}} \frac{\Gamma_{ut}(u', t') du' dt'}{(u' - u)(t' - t)}.
 \end{aligned} \quad (23)$$

Границы интегрирования $\gamma_{su}, \gamma_{st}, \gamma_{ut}$ схематически указаны на рис.3. $\text{Im } F_s, \text{Im } F_u, \text{Im } F_t$ — мнимые части амплитуды $F(s, u, t)$, соответствующие мнимым частям реальных физических процессов в первом, втором и третьем каналах данной реакции. Функции $\Gamma_{st}, \Gamma_{su}, \Gamma_{ut}$ называются спектральными. Они вещественны и описывают аналитические свойства амплитуды рассеяния по двум комплексным переменным. Пример двойного спектрального представления обсуждается в монографии [23] для суперпозиции потенциалов Юкавы:

$$V = V_0 \int_a^{\infty} \frac{f(z) e^{-zr}}{r} dz.$$

При переходе к одномерному случаю представления Мандельстама в точности переходят в обычные дисперсионные соотношения.

Выберем в качестве энергетической переменной величину s (см. (22)). В этом случае останутся два интеграла по разрезам в s - и u -каналах и некоторая константа вычитания:

$$F(s, u, t) = F_0(u, t) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \tilde{F}_s(s') ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } \tilde{F}_u(u') du'}{u' - u}, \quad (24)$$

где $\text{Im } \tilde{F}_s(s')$, кроме интеграла от $\text{Im } F_s(s')$, будет содержать комбинацию двойных интегралов от Γ_{su} и Γ_{st} , а $\text{Im } \tilde{F}_u(u')$, кроме интеграла от $\text{Im } F_u(u')$, будет содержать комбинацию двойных интегралов от Γ_{us} и Γ_{ut} .

Мнимые части амплитуды $F(s, u, t)$ определяются из условия унитарности для матрицы рассеяния S :

$$SS^+ = 1, \quad (24)$$

$$\langle a | S | b \rangle = \delta_{ab} + i \langle a | T | b \rangle, \quad (25)$$

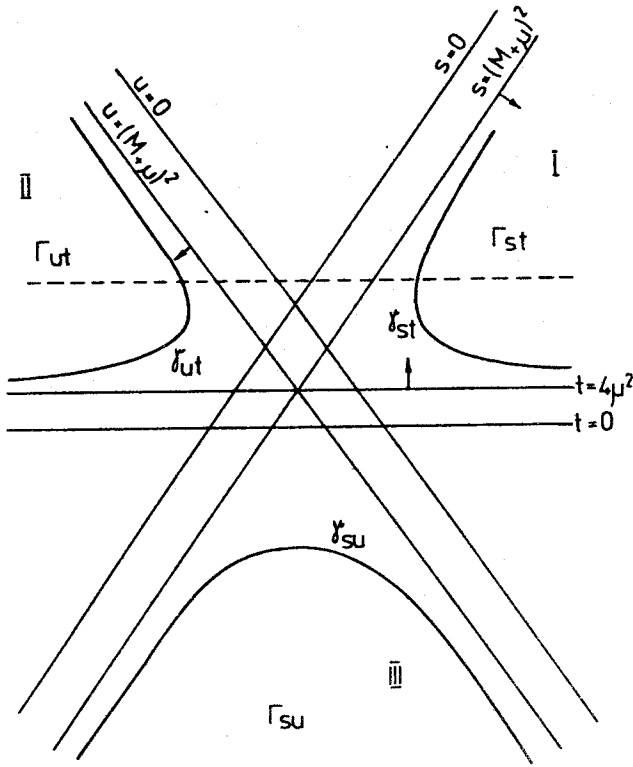


Рис.3. Физическая область I канала соответствует значениям $S \geq (M + \mu)^2, u < 0, t < 0$; II канала — $u \geq (M + \mu)^2, s < 0, t < 0$; III канала $t \geq 4M^2, s < 0, u < 0$ (на рисунке взят произвольный масштаб)

где $\langle a |, | b \rangle$ — конечное и начальное состояния соответственно, а $\langle a | T | b \rangle$ — матричный элемент перехода из состояния $| b \rangle$ в состояние $| a \rangle$.

Используя соотношения (24), (25), получим

$$\text{Im} \langle a | T | b \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \langle a | T^+ | n \rangle \langle n | T | b \rangle,$$

где \sum_n — сумма по всем промежуточным состояниям, допустимым законами сохранения и другими требованиями теории поля. На языке диаграмм Фейнмана условие унитарности приобретает наглядный вид (см. рис.4,5).

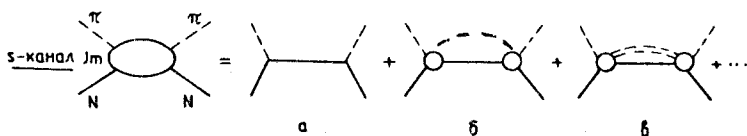


Рис.4. Графическое представление условия унитарности для процесса $\pi N \rightarrow \pi N$ -рассеяния в s -канале: a — однонуклонное состояние (полусной член), b — двухчастичное промежуточное состояние, $в$ — трехчастичное промежуточное состояние

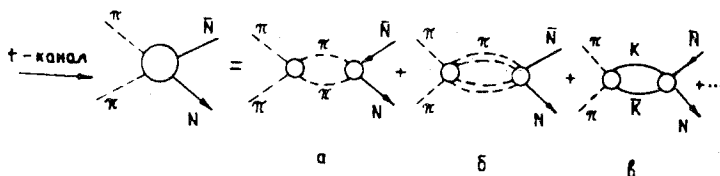


Рис.5. Условие унитарности в t -канале (т.е. для процесса $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$): a) 2π -мезонное промежуточное состояние; b) 4π -мезонное промежуточное состояние; $в$) KK -промежуточное состояние. 3π -мезонное промежуточное состояние запрещено (по соображениям разной четности 2π - и 3π -мезонных состояний в начальном и промежуточном состоянии соответственно — аналог теоремы Фарри в КЭД)

В s -канале разрез начинается от значений $s = (M + \mu)^2$, следующий разрез — $s = (M + 2\mu)^2$ и т.д. В t -канале физический разрез реакции $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ должен начаться при $t = 4M^2$. Однако он начинается ранее при $t = 4\mu^2$; следующий разрез начинается при $t = 16\mu^2$. Затем появится разрез от реакции $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ при $t = 4M_K^2$ и т.д. Область значений $4\mu^2 \leq t \leq 4M^2$ нефизическая (для процесса $\pi\pi + \pi\pi$) и рассматривается как аналитическое продолжение физической области $t \geq 4M^2$ на нефизическую $4\mu^2 \leq t < 4M^2$. Соответственно условие унитарности в области $4\mu^2 \leq t < 4M^2$ также рассматривается как аналитическое продолжение условия унитарности из области $t \geq 4M^2$.

Своеобразие двойного мандельштамовского представления состоит в том, что оно при определенных предположениях ведет к системе уравнений, включающей различные физические процессы, и может быть

записано не только для самих амплитуд, но и для парциальных волн рассматриваемых процессов, так как в качестве переменных теперь выступают и энергия налетающей частицы (или полная энергия системы частиц) и угол рассеяния.

В конце 50-х — начале 60-х годов энергии ускоренных частиц были еще не очень большими и естественно было предположить, что главную роль в процессах рассеяния будут играть низшие парциальные волны: s -, p -, и, может быть, d -волны. С помощью условия унитарности для парциальных волн можно было записать систему нелинейных сингулярных интегральных уравнений, включающих парциальные волны различных процессов. Так, например, для процесса lN -рассеяния, помимо парциальных волн этого процесса, в систему войдут низшие парциальные волны процесса $ll \rightarrow ll$ -рассеяния, $ll \rightarrow K\bar{K}$ - и $ll \rightarrow N\bar{N}$ -процессов аннигиляции. Исключение может составить лишь система уравнений для парциальных волн ll -рассеяния, которая может оказаться приближенно замкнутой, так как вклад парциальных волн от процессов аннигиляции $ll \rightarrow K\bar{K}$ или $ll \rightarrow N\bar{N}$ может оказаться пренебрежимо малым, поскольку физические разрезы от этих процессов начинаются весьма далеко ($t \geq 4M_K^2$ или $t \geq 4M_N^2$) по сравнению с началом физического порога реакции рассеяния $ll \rightarrow ll$ ($t \geq 4\mu^2$).

Схема последовательного включения процессов сильных взаимодействий в мандельштамовские представления имеет своего рода иерархию, изображенную на рис.6. Если остановиться на этом уровне понимания, то можно отметить, что мандельштамовские представления в области низких энергий базируются на ряде предположений: 1) постулируется аналитичность; 2) в понятие кроссинг-симметрии включается кроссинг-подстановка в третьем канале; 3) вводится ограничение двухчастичной унитарностью; 4) вводится ограничение на число парциальных волн.

Можно показать [23], что первое, второе и третье условия несовместны и нужна определенная математическая осторожность, чтобы приближенная система уравнений оказалась непротиворечивой.

В ЛТФ ОИЯИ под руководством академика Н.Н.Боголюбова и его учеников академика А.А.Логунова и члена-корреспондента РАН Д.В.Ширкова была проделана большая работа по исследованию теоретических основ одномерных ДС и двойных представлений Мандельстама. Изучены аналитические свойства фейнмановских диаграмм процессов с целью получения дисперсионных соотношений и спектральных представлений для амплитуд рассматриваемых процессов с помощью метода мажорирования диаграмм Фейнмана [24]. Поскольку сходимость полного ряда теории возмущений так и не была доказана, то и область аналитич-

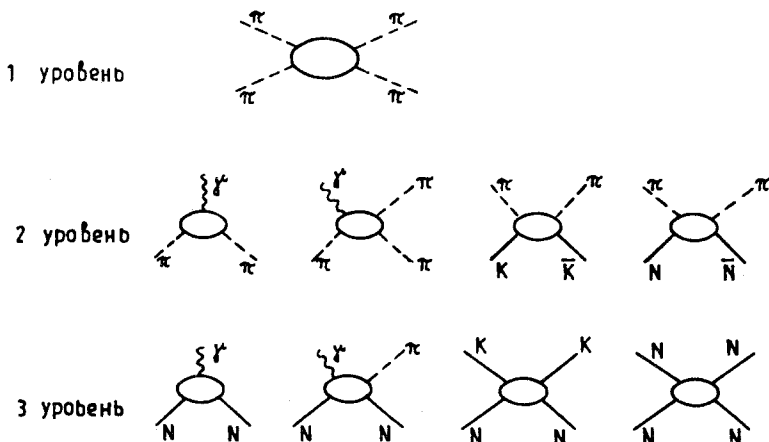


Рис.6. Иерархия взаимодействий. Первый уровень — процесс $\pi\pi$ -рассеяния, вследствие условия унитарности, войдет во все процессы второго и третьего уровней. Второй уровень, также вследствие условия унитарности, войдет в процессы третьего уровня

ности полного ряда теории возмущений осталась неизвестной. Можно говорить лишь об аналитичности в любом конечном порядке теории возмущений. Развита полуфеноменологическая теория сильных взаимодействий в области низких энергий на основе идеи коротковолнового отталкивания [25]. Много работ было посвящено применению мандельштамовских представлений к описанию наблюдаемых физических процессов, таких как рассеяние π -мезонов на нуклонах, фоторождение π -мезонов на нуклонах, к изучению формфакторов π -мезонов и нуклонов и т.д. В эти годы Лаборатория теоретической физики ОИЯИ вошла в число ведущих теоретических центров мира.

$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -рассеяние. В 1959 г. Чу и Лоу [26] указали на возможность использования нестабильных частиц в качестве мишеней. Рассмотрим процесс рождения π -мезонов в πN -соударениях:

$$\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N. \quad (26)$$

При малых передачах импульса можно предположить, что налетающий π -мезон взаимодействует с нуклоном периферически, т.е. с π -мезонной шубой нуклона (не представляю, как в кварк-глюонной модели нуклона можно отделить периферические соударения от центральных!). В предположении периферического взаимодействия процесс (26) может быть

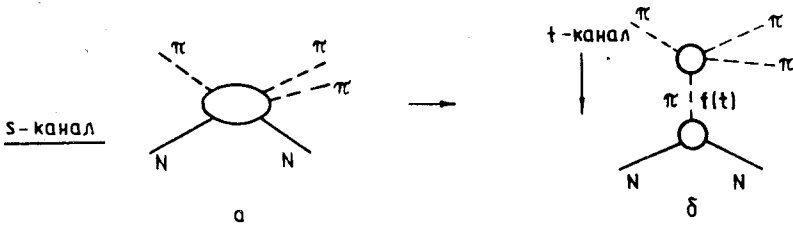


Рис.7. Процесс рождения π -мезона в πN -соударении: а — в общем случае и б — в случае периферического соударения

представлен диаграммой Фейнмана, изображенной на рис.7. Амплитуду процесса, изображенного на рис.7, можно записать в виде

$$F(s, t) \sim \frac{f(t) T(\pi\pi \rightarrow \pi\pi)}{t - \mu^2}.$$

Здесь полюс $t = \mu^2$ соответствует обмену π -мезоном, μ — масса π -мезона, $f(t)$ — π -мезонный формфактор нуклона, $\lim f(t) = g_{\pi\pi N}$ — константа связи π -мезона с нуклоном, $T(\pi\pi \rightarrow \pi\pi)$ — интересующая нас амплитуда рассеяния π -мезона на виртуальном π -мезоне. Для парциальных волн амплитуды $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -взаимодействия записываются мандельштамовские представления и находится энергетическая зависимость фаз $\pi\pi$ -рассеяния.

Инвариантная амплитуда $\pi\pi$ -рассеяния в изотопическом пространстве может быть представлена в виде комбинации амплитуд, соответствующих значениям полного изотопического спина $I = 0, 1, 2$: A_0, A_1, A_2 . Разложение этих амплитуд по парциальным волнам ведет к тому, что амплитуды с четным значением изотопического спина (A_0, A_2) содержат только четные парциальные волны, а амплитуда A_1 — только нечетные. Условие кроссинг-симметрии (замена $s \rightleftharpoons u, s \rightleftharpoons t, u \rightleftharpoons t$) здесь выполняется точно — из-за одинаковых масс участвующих в реакции частиц, и оно перепутывает изотопические амплитуды различных каналов. Не вдаваясь в математические детали (читатель может их найти в монографии [23]), отметим, что для парциальных волн $\pi\pi$ -системы можно записать систему нелинейных интегральных сингулярных уравнений. Нелинейность системы возникает из-за того, что в условии унитарности

$$\text{Im } A_i(E) = k(E) |A_i(E)|^2 \quad (27)$$

(здесь $k(E)$ — некоторый кинематический множитель) мнимая часть парциальной амплитуды пропорциональна квадрату амплитуды, и в подынтегральном выражении появляются квадраты соответствующих парциальных амплитуд (или квадраты самих амплитуд, если мандельштамовские представления записываются для самих амплитуд). Система уравнений для парциальных волн $\pi\pi$ -рассеяния подробно исследовалась в работах [26—30]. С другой стороны, экспериментаторами была отработана методика выделения парциальных волн процесса $\pi\pi$ -рассеяния из экспериментальных данных [31] по изучению процесса (26). Сравнение теоретических расчетов и экспериментальных данных по энергетическому поведению фаз $\pi\pi$ -рассеяния приводило к удивительно хорошему согласию. Общий характер поведения фаз $\pi\pi$ -рассеяния в области невысоких энергий вырисовывался следующим образом:

а) имелась большая s -волна в состоянии с изотопическим спином $I = 0$;

б) были веские указания на наличие резонанса в p -волне $\pi\pi$ -рассеяния в состоянии с изотопспином $I = 1$ — это было необходимо для удовлетворительного объяснения поведения электромагнитного формфактора как функции от передачи q^2 (этот резонанс впоследствии был назван ρ -мезоном);

в) в области энергий налетающего π -мезона ≤ 1 ГэВ вклад парциальных волн, более высоких, чем d -волна, мал. Попытка учета бесконечного числа парциальных волн с целью получения точных уравнений бессмысленна, вследствие нашего неумения учесть вклады от неупругих процессов, да и вряд ли возможна с математической точки зрения из-за наличия спектральных функций, что ведет к суммированию определенного типа рядов [32]. Эта общая картина $\pi\pi$ -взаимодействия в области энергий ≤ 1 ГэВ сохранилась неизменной до наших дней.

Аналогичным образом изучался более сложный тип взаимодействия — процесс рассеяния $K\pi \rightarrow K\pi$ [33—35]. Он включал в себя канал аннигиляции $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$ и процесс $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -рассеяния. Решение уравнений для парциальных волн процесса аннигиляции $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$ сводилось к решению неоднородной краевой задачи Римана [36]:

$$f_l(E + i0) = G_l(E) f_l(E - i0) + 2ig_l(E).$$

Коэффициент задачи Римана $G_l(E)$ определяется выбором фаз $\pi\pi$ -рассеяния, а неоднородный член задачи Римана $g_l(E)$ находится из процесса $K\pi$ -рассеяния.

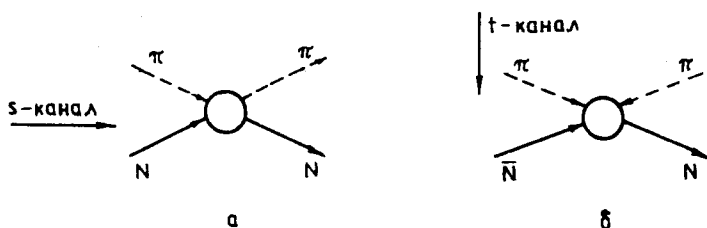


Рис.8. Процесс упругого πN -рассеяния в s -канале соответствует процессу аннигиляции $\pi\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ в t -канале. Последний включает, в частности, амплитуду $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -рассеяния

$\pi N \rightarrow \pi N$ -рассеяние. Полному всестороннему исследованию с помощью мандельштамовских представлений подвергся процесс упругого πN -рассеяния (рис.8). Наличие разных масс участвующих в процессе частиц (подобно процессу $K\pi \rightarrow K\pi$ -рассеяния) и наличие спина у нуклона ведут к более сложной кинематике рассматриваемого процесса, более сложной структуре амплитуды процесса, более сложной системе интегральных сингулярных уравнений, чем для процессов $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ - и $K\pi \rightarrow K\pi$ -рассеяния.

Амплитуда $T(\pi N \rightarrow \pi N)$ в изотопическом пространстве имеет вид

$$T_{\alpha_1 n_1, \alpha_2 n_2} = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{n_1 n_2} T^{(+)} + \frac{1}{2} |\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}| T^{(-)}, \quad (28)$$

где α_1, α_2 — изотопические индексы π -мезона, n_1, n_2 — изотопические индексы нуклона. $T^{(\pm)}$ — скалярные функции в изотопическом пространстве и матрицы — в спиновом пространстве (в формулах (12)—(15) спиновая структура не рассматривается).

Введем обозначения физически наблюдаемых процессов:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & T_{++} \rightarrow \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p, \\
 (б) \quad & T_{+-} \rightarrow \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p, \\
 (в) \quad & T_{-0} \rightarrow \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n, \\
 (г) \quad & T_{+0} \rightarrow \pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p, \\
 (д) \quad & T_{00} \rightarrow \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Процессы, в которых в качестве налетающего π -мезона выступает нейтральный π^0 -мезон, физически ненаблюдаемы. К их числу относятся:

$$(e) \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n,$$

$$(ж) \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p,$$

$$(з) \quad \pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n,$$

$$(и) \quad \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p.$$

Физически наблюдаемые процессы (а), (б), (в) выражаются через амплитуды с заданным значением изотопического спина πN -системы ($I = 3/2$ или $1/2$) следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{++}^{++} &= T^{3/2}, \\ T_{++}^{--} &= \frac{1}{3} T^{3/2} + \frac{2}{3} T^{1/2}, \\ T_{+0}^{-0} &= \frac{\sqrt{2}}{3} (T^{3/2} - T^{1/2}) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

В свою очередь, амплитуды $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ выражаются через процессы (а) — (и).

В обычном спиновом пространстве каждая из матриц $T^{(\pm)}$ записывается в виде:

$$T^{(\pm)} = A^{(\pm)} + \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} B^{(\pm)}, \quad (30)$$

где $\hat{q}_1 = q_1^0 \gamma^0 - \mathbf{q}_1 \boldsymbol{\gamma}$, $\hat{q}_2 = q_2^0 \gamma^0 - \mathbf{q}_2 \boldsymbol{\gamma}$, q_μ — 4-вектор налетающего π -мезона, $\boldsymbol{\gamma}^\mu$ — матрицы Дирака. Записи амплитуды πN -рассеяния (17) и (30) отличаются по форме, но каждая из них удобна для своих целей.

Кинематические переменные s, u, t для s -канала πN -рассеяния в системе ц.м. πN -системы имеют вид

$$\begin{aligned} s &= M^2 + \mu^2 + 2q^2 + 2p^0 q^0, \\ u &= M^2 + \mu^2 - 2q^2 \cos \theta - 2p^0 q^0, \\ t &= -2q^2(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

где p, p^0 — компоненты 4-вектора нуклона, q, q^0 — компоненты 4-вектора π -мезона, $\cos \theta$ — угол рассеяния π -мезона (см. также формулы (22) и ниже).

Исходная амплитуда $T_{\alpha_1 n_1, \alpha_2 n_2}$ удовлетворяет условию кроссинг-симметрии

$$T_{\alpha_1 n_1, \alpha_2 n_2}(q_1 p_1; q_2 p_2) = T_{\alpha_2 n_1, \alpha_1 n_2}(p_1, -q_2; p_2, -q_1),$$

что соответствует перестановке π -мезонов (или замене $s \rightleftharpoons u$). Спиновые структурные функции $A^{(\pm)}$ и $B^{(\pm)}$ при замене $s \rightleftharpoons u$ ведут себя следующим образом:

$$A^{(\pm)}(s, u) = \pm A^{(\pm)}(u, s); \quad B^{(\pm)}(s, u) = \mp B^{(\pm)}(u, s).$$

Переход к дисперсионным уравнениям для парциальных волн осуществляется с помощью цепочки формул, выписанной ниже. Выражение для дифференциального сечения имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum |V| f_1 + \frac{(\sigma_1 q_1)(\sigma_2 q_2)}{q_1 q_2} f_2 |i\rangle|^2,$$

где i, f — начальное и конечное состояния для двухрядных паулиевских спиноров, \sum означает суммирование по конечным спиновым переменным и усреднение по начальным состояниям, f_1 и f_2 — амплитуды с заданной спиральностью, введенные Жакобом и Виком. Они разлагаются в ряд по парциальным волнам с соответствующим значением полного момента $J = l \pm 1/2$ следующим образом:

$$f_1(s, \theta) = \sum_l [f_{l+} p'_{l+1}(\cos \theta) - f_{l-} p'_{l-1}(\cos \theta)],$$

$$f_2(s, \theta) = \sum_l [f_{l-} - f_{l+}] p'_l(\cos \theta),$$

где

$$f_{l\pm} = \frac{1}{2iq} (e^{2i\delta_{l\pm}} - 1);$$

индексы \pm соответствуют знаку полного момента $J = l \pm 1/2$. Изотопический индекс $I = 3/2, 1/2$ опущен (ради простоты выражения идеи расчетов).

И, наконец, устанавливается следующая связь:

$$\frac{1}{4\pi} A = \frac{W + M}{p^0 + M} f_1 - \frac{W - M}{p^0 - M} f_2,$$

$$\frac{1}{4\pi} B = \frac{1}{p^0 + M} f_1 - \frac{1}{p^0 - M} f_2,$$

где $W = p^0 + q^0$ — полная энергия πN -системы. Мандельштамовские представления постулируются для амплитуд $A^{(\pm)}$ и $B^{(\pm)}$, а от них, в соот-

ветствии с выписанной выше цепочкой формул, переходят к интегральным нелинейным сингулярным уравнениям для парциальных волн. Обычно ограничиваются низшими парциальными волнами — s - и p -волнами и, в крайнем случае, учитываются d -волны. Ядра уравнений содержат фазы низших парциальных волн πN -рассеяния. Релятивистская система уравнений для πN -рассеяния даже для двух парциальных s - и p -волн имеет весьма громоздкий вид. Она допускает численное решение, но из-за громоздкости нет смысла приводить здесь ни саму систему, ни ее решение. Для иллюстрации приведем систему уравнений в статическом пределе, для чего в релятивистской системе уравнений делается разложение в ряд по степеням $\frac{1}{M}$, где M — масса нуклона, а в подынтегральных выражениях оставляется лишь одна большая p -волна, описывающая 33-резонанс πN -системы [37]. В этом случае система уравнений для s - и p -волн имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_s^{(-)}(\nu) &= a^- \omega F_\pi(\nu), \\ \operatorname{Re} \left(f_{p_{1/2}}^{(-)}(\nu) - f_{p_{3/2}}^{(-)}(\nu) \right) &= \frac{\nu (a_1^- - a_3^-) F_\pi(\nu)}{2} - \\ &- \frac{\nu}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\nu' + \nu}{\nu' - \nu} \frac{\operatorname{Im} f_{p_{3/2}}^{(-)}(\nu') d\nu'}{\nu'^2} - \frac{\nu^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p_{3/2}}^{(-)}(\nu')}{\nu'^2 (\nu' - \nu)} \left[\frac{F_\pi(\nu)}{F_\pi(\nu')} - 1 \right] d\nu', \\ \operatorname{Re} \left(f_{p_{1/2}}^{(-)}(\nu) + 2f_{p_{3/2}}^{(-)}(\nu) \right) &= \quad (31) \\ &= -2 \frac{\nu}{\omega} f^2 + a^- \omega |1 - F_\pi(\nu)| + \frac{2\nu \omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p_{3/2}}^{(-)}(\nu') d\nu'}{\nu' (\nu' - \nu) \omega}. \end{aligned}$$

При выводе уравнений (31) проведено одно вычитание в точке $\nu = 0$. В формулах (31) $\nu = q^2$ — квадрат импульса в системе ц.м. πN -системы, $F_\pi(\nu)$ — электромагнитный формфактор π -мезона, $\omega^2 = \nu + \mu^2$ — масса π -мезона, a^- , a_1^- , a_3^- — длины рассеяния в s -, $p_{1/2}$ -, $p_{3/2}$ -волнах соответственно, $f^2 = \frac{1}{4\pi} \left(q \frac{\mu}{M} \right)^2 = 0,08$ — константа связи πN -взаимодействия.

Сравнение теоретически рассчитанных s - и p -волн с экспериментальными данными дает разумное совпадение энергетического поведения фаз.

Вклад $\pi\pi$ -взаимодействия в парциальные волны πN -рассеяния в статическом пределе входит аддитивно и обладает определенными свой-

ствами симметрии [38]. Обозначим $G_U^{(\pm)}$ парциальный вклад $\pi\pi$ -членов в πN -рассеяние. Для $G_U^{(\pm)}$ существует ряд симметричных соотношений (знаки (\pm) у $G_U^{(\pm)}$ соответствуют знакам (\pm) у $A^{(\pm)}$ и $B^{(\pm)}$, см. (30)):

$$G_s^{(\pm)}(W) = -3G_{p_{3/2}}^{(\pm)}(W),$$

$$G_{p_{3/2}}^{(+)}(W) - G_{p_{1/2}}^{(+)}(W) = \frac{p^0 - M}{p^0 + M} G_s^{(+)}(W),$$

$$W [G_{p_{1/2}}^{(+)}(W) - G_{p_{3/2}}^{(+)}(W)] = W' [G_{p_{1/2}}^{(+)}(W') - G_{p_{3/2}}^{(+)}(W')] \text{ и др.,}$$

где $W = p^0 + \omega$ — полная энергия πN -системы; $W' = p^0 - \omega$. Аналогичные свойства симметрии вкладов $\pi\pi$ -взаимодействий существуют и для процесса πK -рассеяния [38].

В процессе анализа энергетического поведения фаз πN -рассеяния было установлено, что двойные дисперсионные представления хорошо описывают экспериментальную ситуацию в области невысоких энергий (до ≤ 500 МэВ) двумя низшими s - и p -парциальными волнами. При более высоких энергиях (до 1 ГэВ) следует учитывать высшие парциальные волны (d - и, может быть, f -волну). Однако по абсолютной величине они остаются малыми, а ошибки в расчетах начинают расти. Учет высших d - и f -парциальных волн сопряжен со слишком большим возрастанием расчетов, непропорциональных качеству полученных научных результатов.

Электромагнитные формфакторы π -мезонов, K -мезонов и нуклонов [39]. Электромагнитные формфакторы элементарных частиц возникают при вычислении вершинных функций типа изображенных на рис.9. Аналитические свойства вершинных функций $F_\pi(q^2)$, $F_N^2(q^2)$ и др., зависящие от одной переменной — передачи 4-мерного импульса q^2 , могут быть установлены, например, в рамках теории возмущений. Как функция 4-мерной передачи q^2 (или t — в мандельштамовских обозначениях), формфакторная функция $F_\pi(t)$ является аналитической функцией в плоскости t с разрезом $4\mu^2 \leq t \leq \infty$. Например, для процесса аннигиляции $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (именно в этом процессе возникает вершина типа рис.9,б) формфактор $F_\pi(t)$ является комплексной величиной, в то время как в области $t < 0$ (т.е. в области физически наблюдаемого процесса рассеяния $e + \pi \rightarrow e + \pi$) $\text{Im } F_\pi(t) = 0$ и формфактор $F_\pi(t)$ является действи-

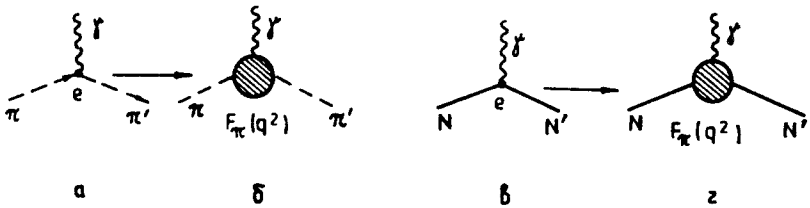


Рис.9. Электромагнитное взаимодействие γ -кванта с π -мезоном в низшем порядке теории возмущений (а). б) То же, что и в случае а, но с учетом сильных взаимодействий π -мезона. в) Электромагнитное взаимодействие γ -кванта с нуклоном в низшем порядке теории возмущений; з) то же, что в случае (в), но с учетом сильных взаимодействий нуклона

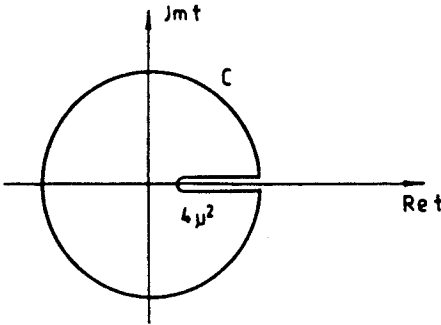


Рис.10. Контур интегрирования в комплексной плоскости переменной t для формфактора π -мезона. Разрез начинается от точки $t = 4\mu^2$

тельной функцией. Таким образом, дисперсионное соотношение для $F_\pi(t)$ имеет вид

$$F_\pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\text{Im } F_\pi(t') dt'}{t' - (t + i\epsilon)}. \quad (32)$$

Контур интегрирования C изображен на рис.10.

Осуществляя в (32) предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t' - (t + i\epsilon)} =$

$= \mathcal{P} \frac{1}{t' - t} + i\pi\delta(t' - t)$, получим

$$\text{Re } F_\pi(t) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_C \frac{\text{Im } F_\pi(t') dt'}{t' - t}. \quad (33)$$

Если предположить, что $\text{Im } F_\pi(\infty) = \text{const}$, то нужно провести одно вычитание. Оно проводится в точке $t = 0$, в которой формфактор $F_\pi(0)$ нормируется на значение электрического заряда: $F_\pi(0) = e$. Тогда формула (33) переходит в выражение

$$\operatorname{Re} F_{\pi}(t) = e + \mathcal{P} \frac{t}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_{\pi}(t') dt'}{t'(t'-t)}. \quad (34)$$

Используя условие унитарности для $\operatorname{Im} F_{\pi}(t)$:

$$\operatorname{Im} \langle 0 | j_{\nu} | \pi^+ \pi^- \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | j_{\nu} | \alpha \rangle \langle \alpha | T^+ | \pi^+ \pi^- \rangle$$

и ограничиваясь низшим 2π -мезонным состоянием, получим

$$\operatorname{Im} \langle 0 | j_{\nu} | \pi^+ \pi^- \rangle = \langle 0 | j_{\nu} | \pi\pi \rangle \langle \pi\pi | T^+ | \pi^+ \pi^- \rangle.$$

Если предположить, что вклад в $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -взаимодействие в области низких энергий достаточно полно описывается одной p -волной (ρ -мезон), то и вершина $\langle 0 | j_{\nu} | \pi\pi \rangle$ будет описываться одной p -волной. В этом случае

$$\operatorname{Im} F_{\pi}(t) = F_{\pi}(t) e^{-i\delta_1(t)} \sin \delta_1(t)$$

или

$$\operatorname{Im} F_{\pi}(t) = \operatorname{Re} F_{\pi}(t) \operatorname{tg} \delta_1(t),$$

где $\delta_1(t)$ — фаза $\pi\pi$ -взаимодействия со значением полного момента $J = 1$ и изотопспина $I = 1$. Подставляя $\operatorname{Im} F_{\pi}(t)$ в формулу (34), получим

$$\operatorname{Re} F_{\pi}(t) = e + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{t \operatorname{Re} F_{\pi}(t') \operatorname{tg} \delta_1(t')}{t'(t'-t)} dt'. \quad (35)$$

Таким образом, формфакторная функция в рассматриваемых приближениях удовлетворяет линейному сингулярному интегральному уравнению, которое может быть решено методом Мухелишвили — Омнеса [36]. Общее решение уравнения (35) имеет громоздкий вид. Выпишем решение интегрального уравнения (35) без вычитания:

$$F_{\pi}(t) = e \cdot \exp \left\{ \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{t \delta_1(t') dt'}{t'(t'-t)} \right\}. \quad (36)$$

Делая различные предположения о характере поведения δ_1 -базы $\pi\pi$ -рассеяния, можно получать различные выражения для формфактора $F_{\pi}(t)$. В работах [40, 41] выражение для фазы $\delta_1(t)$ было выбрано в виде отношения полиномов $P(t)$ и $Q(t)$:

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta_1(t) = \frac{P(t)}{Q(t)},$$

где $k^2 = \frac{t}{4} - 1$. В этом случае интегрирование в (36) можно провести до конца. Полученное для $F_\pi(t)$ выражение в полюсном приближении сводится к обычному выражению для формфактора π -мезона:

$$F_\pi(t) = \frac{1}{1 - t/t_\rho}.$$

В этом выражении мы положили заряд $e = 1$, t_ρ — квадрат массы ρ -мезона ($m_\rho \approx 750$ МэВ). Формфакторная функция π -мезона экспериментально изучалась в процессе рассеяния π -мезонов на электронах ядер в области малых энергий налетающих π -мезонов [42]. Аналогичные эксперименты были проведены затем на ускорителе с энергией 76 ГэВ в ИФВЭ (Протвино) [43] и ускорителе FNAL (Батавия) [44]. Измерения в ИФВЭ проводились на пучке π -мезонов с импульсом 50 ГэВ/с в интервале передач $0,014 \leq q^2 \leq 0,035$ (ГэВ/с)². Трудности этого эксперимента состояли в определении компланарности процесса, учете радиационных поправок и т.д. (учитывалось 14 поправок, зависящих от q^2 , и 12 поправок, не зависящих от q^2). Электромагнитный радиус π -мезона определялся из формулы (см. [39])

$$F_\pi(q^2) = 1 + \frac{1}{6} q^2 \langle r_\pi^2 \rangle$$

и равнялся $\langle r_\pi^2 \rangle = (0,61 \pm 0,15)$ фм². Продолжение этого эксперимента в FNAL проводилось на пучках π -мезонов с импульсом 100 ГэВ/с в интервале переданных импульсов $0,03 \leq q^2 \leq 0,07$ (ГэВ/с)².

Значение $\langle r_\pi^2 \rangle = (0,31 \pm 0,04)$ фм².

На ускорителях со встречными электрон-позитронными пучками (Орсэ, Фраскати, Новосибирск, Гамбург) были получены экспериментальные данные о зависимости формфактора π -мезона во времениподобной области изменений переменной $t \geq 4\mu^2$. В этой области формфакторная функция π -мезона хорошо описывалась функцией

$$F_\pi(t) = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - t - im_\rho \Gamma}.$$

Аналитическая формула, учитывающая все фундаментальные свойства π -мезонного формфактора, описывающая экспериментальные данные

как в пространственноподобной, так и во времениподобной области q^2 , получена в [45] на основе метода конформных отображений.

Аналогичные теоретические соображения используются и для описания формфакторов K -мезонов. Сечение реакции рассеяния K -мезонов на электронах ядер, так же, как и для π -мезонов, записывается в виде:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \left(\frac{d\sigma}{dq^2} \right)_{\text{точ}} |F_K(q^2)|^2,$$

где $\left(\frac{d\sigma}{dq^2} \right)_{\text{точ}}$ — сечение рассеяния на точечном K -мезоне. Выражение для формфактора $F_K(q^2)$ в области малых передач q^2 выбирается в виде

$$|F_K(q^2)|^2 = \left| 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r_K^2 \rangle \right|^{-2}.$$

Группа советских и американских ученых измерила $F_K(q^2)$ в FNAL на пучках K -мезонов с импульсом q^2 в области передач $0,037 \leq q^2 \leq 0,119$ (ГэВ/с)². Электромагнитный радиус K -мезона был найден равным значению $\langle r_K^2 \rangle = (0,28 \pm 0,05)$ фм².

Электромагнитный радиус нейтрального K^0 -мезона, измеренный методом регенерации K^0 -мезонов, оказался отрицательным: $\langle r_{K^0}^2 \rangle = (-0,054 \pm 0,026)$ фм², что можно обосновать теоретически в рамках кварковой $SU(3)$ -модели, если считать, что масса странного кварка больше масс u - и d -кварков [46]. Более громоздкой выглядит проблема описания нуклонных формфакторов [47]. Все выводы о поведении формфакторов как функций передаваемого импульса основаны на формуле Розенблюса для дифференциального сечения электронов на протонах. В низшем порядке теории возмущений (однофотонный обмен) она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_M \left\{ F_{1p}(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} 2[F_{1p}(q^2) + \kappa F_{2p}(q^2)] \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - \right. \\ \left. - \frac{q^2}{4M^2} \kappa^2 F_{2p}^2(q^2) \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

где σ_M — дифференциальное сечение рассеяния электронов кулоновским полем (моттовское сечение) $q^2 \approx -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$, E, E' — энергия электрона до соударения и после соударения соответственно, θ — угол рассеяния

электрона на протоне в л.с.к., κ — аномальный магнитный момент протона. Как видно из (37), есть два протонных формфактора: F_{1p} и F_{2p} . Аналогично есть два нейтронных формфактора: F_{1n} и F_{2n} . Каждый из формфакторов обязан иметь изотопически скалярную и изотопически векторную части, поскольку формфакторы нуклонов обязаны своим происхождением сильному взаимодействию с π -мезонами. Их изотопическая структура имеет вид

$$F_{1p}(q^2) = F_{1p}^s(q^2) + \tau_3 F_{1p}^v(q^2),$$

$$F_{2p}(q^2) = F_{2p}^s(q^2) + \tau_3 F_{2p}^v(q^2).$$

Здесь F^s — изотопически скалярная, а F^v — изотопически векторная часть формфактора, $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — двухрядная матрица. Таким образом,

$$F_{(1,2)p} = F_{(1,2)p}^s + F_{(1,2)p}^v,$$

$$F_{(1,2)n} = F_{(1,2)n}^s - F_{(1,2)n}^v.$$

Формфакторные функции протонов и нейтронов нормируются в точке $q^2 = 0$ следующим образом:

$$F_{1p}(0) = e; \quad F_{1n}(0) = 0;$$

$$F_{2p}(0) = \mu_p = 1,79 \frac{e}{2M}; \quad F_{2n}(0) = \mu_n = -1,91 \frac{e}{2M}.$$

Дисперсионные соотношения для нуклонных формфакторов записываются для их изовекторных и изоскалярных частей в полной аналогии с дисперсионными соотношениями для π -мезонных и K -мезонных формфакторов:

$$F_{1,2}^v(t) = F_{1,2}^v(0) + \frac{t}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F_{1,2}^v(t') dt'}{t'(t'-t)},$$

$$F_{1,2}^s(t) = F_{1,2}^s(0) + \frac{t}{\pi} \int_{9\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F_{1,2}^s(t') dt'}{t'(t'-t)}.$$

Начала разрезов для изовекторных и изоскалярных формфакторов определяются из условия унитарности. Изовекторные мнимые части $\text{Im} F_{1,2}^v(t)$ отличны от нуля в области $t \geq 4\mu^2$, поскольку вклад в них дают только четные по числу π -мезонов состояния, а изоскалярные части $\text{Im} F_{1,2}^s$ отличны от нуля в области $t \geq 9\mu^2$ — вклад в них дают только не-

четные по числу π -мезонов состояния. Естественно, что в числе промежуточных состояний могут быть и KK -пары, и NN -пары и другие более сложные многочастичные состояния — их разрезы начнутся с соответствующих довольно высоких значений t . Двойные мандельштамовские представления дают возможность использовать аналитические продолжения условий унитарности из физической области $t \geq 4M^2$ (где M — масса нуклона) в нефизическую $4\mu^2 \leq t < 4M^2$. Поэтому нет принципиальных трудностей при выполнении теоретических расчетов. При небольших значениях t в условии унитарности для изовекторных формфакторов достаточно ограничиться низшим двухчастичным (2π -мезонным) промежуточным состоянием:

$$\text{Im } F_{1,2}^v(t) = F_{\pi}(t) \langle \pi\pi | T_{1,2}^+(t) | N\bar{N} \rangle,$$

где $F_{\pi}(t)$ — формфактор π -мезона, а $\langle \pi\pi | T_{1,2}^+ | N\bar{N} \rangle$ — части амплитуды процесса аннигиляции $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, дающие вклад в дираковский или паулиевский формфакторы соответственно.

Для мнимых частей изоскалярных формфакторов остается низшее трехмезонное промежуточное состояние:

$$\text{Im } F_{1,2}^s(t) = \langle \gamma | T_{1,2} | \pi\pi\pi \rangle \langle \pi\pi\pi | T_{1,2}^+ | N\bar{N} \rangle,$$

где $\langle \gamma | T_{1,2} | \pi\pi\pi \rangle$ — вершина $\gamma \rightarrow 3\pi$, а $\langle \pi\pi\pi | T_{1,2}^+ | N\bar{N} \rangle$ — части процесса аннигиляции $N\bar{N} \rightarrow 3\pi$, дающие, аналогично векторным частям формфакторов, вклады в дираковский или паулиевский формфакторы. Дальнейшие расчеты электромагнитных формфакторов нуклонов имеют много схожих предположений с расчетом π - или K -мезонных формфакторов. Функциональная зависимость формфакторов от четырехмерных пространственноподобных передач импульсов q^2 , предсказываемая методом дисперсионных соотношений, хорошо воспроизводит экспериментальные данные по формфакторам протонов и нейтронов, которые были получены на различных ускорителях мира (США, Франция, ФРГ, Великобритания) в широкой области $0 \leq |q^2| \leq 20$ (ГэВ/с)².

Данные по формфакторам нуклонов во времениподобной области передаваемых импульсов бедны. Модель векторной доминантности с учетом вкладов от ρ -, ω -, φ -, ρ' -, ρ'' -мезонов и вкладов семейства J/ψ -частиц удовлетворительно описывает и эту область $q^2 > 0$. Несмотря на перечисленные успехи считать проблему описания формфакторов решенной нельзя. «...Кинематика процессов упругого рассеяния на частицах, формфакторы которых изучаются в физике элементарных частиц, удивительно проста; формулы, описывающие упругое рассеяние, не со-

держат никаких иных неизвестных функций, кроме формфакторов; изучением формфакторных функций элементарных частиц занимаются с середины 50-х годов. Однако, несмотря на кажущуюся простоту, проблема исследования формфакторных функций элементарных частиц, тесно связанная с изучением структуры элементарных частиц, до сих пор не решена» [47].

Определения и формулы, полученные на основе метода дисперсионных соотношений, и основные теоретические результаты сохранили свою значимость до наших дней, когда речь заходит о поведении формфакторных функций в области передач импульсов до $q^2 \leq 100$ (ГэВ/с)². Проблема исследования формфакторных функций остается актуальной и сейчас, в период кварковых представлений о строении материи.

До сих пор, рассматривая двойные мандельштамовские представления, мы обходили вопрос о количестве вычитаний, которые необходимо произвести при вычислении интегралов, чтобы обеспечить их сходимости. Проблема вычитания относится к числу нерешенных проблем дисперсионных соотношений. Она послужила толчком к дальнейшему развитию теоретической мысли по ряду важнейших направлений: а) расширение аналитичности S -матрицы за счет допущения аналитического продолжения по угловому моменту в комплексную плоскость этой переменной; б) изучение асимптотического поведения амплитуд рассеяния; в) дисперсионные правила сумм; г) проблема «зашнуровки» (бутстрап-метод) и некоторые другие.

3. РЕДЖЕЛОГИЯ

Редже [48] рассмотрел аналитические свойства амплитуды рассеяния $f(E, \theta)$ в квантовой механике и показал, что в комплексной плоскости углового момента для амплитуды $f(E, \theta)$ можно записать мандельштамовские представления. Запишем уравнение Шредингера:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) + E\psi(\mathbf{r}) = V\psi(\mathbf{r}),$$

где $\hbar = c = 1$; $2M = 1$; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ — вектор, указывающий положение рассеянной частицы, $V(\mathbf{r})$ — локальный потенциал, зависящий только от \mathbf{r} . Асимптотическое поведение $\psi(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) \sim e^{ikr} + f(E, \theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

где k — импульс рассеянной частицы,

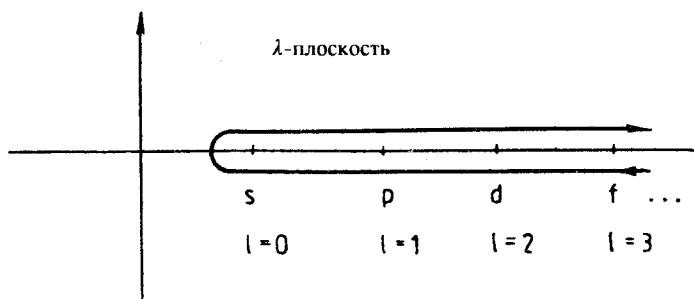


Рис. 11. Контур интегрирования S ватсоновского интеграла (39)

$$f(E, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (e^{2i\delta_l(k)} - 1) (2l + 1) P_l(\cos \theta). \quad (38)$$

Здесь l — угловой момент; $P_l(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, $\delta_l(k)$ — фаза рассеяния, соответствующая значению углового момента l . Полное сечение рассеяния выражается формулой

$$\sigma(E) = \int d\Omega |f(E, \theta)|^2 = \frac{4\pi}{E} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sin^2 \delta_l.$$

Функция $f(E, \theta)$ есть квантово-механический аналог матрицы рассеяния $T(E)$ (см. (25)). Можно показать, что существует аналитическое продолжение функции $S_f(k) = e^{2i\delta_l(k)}$ на область комплексных переменных λ таких, что как только λ принимает значение $\lambda = l + 1/2$, функция $S(\lambda, k)$ переходит в функцию $S_f(k)$ (преобразование Ватсона)*:

$$f(E, \theta) = -\frac{1}{2k} \int_C \frac{\lambda d\lambda}{\cos \pi \lambda} P_{\lambda-1/2}(-\cos \theta) [S(\lambda, k) - 1]. \quad (39)$$

Контур интегрирования ватсоновского интеграла приведен на рис. 11. Насколько известно, единственными сингулярностями амплитуды (39) в l -плоскости есть полюса и разрезы.

*Все последующие рассуждения должны были бы проводиться для амплитуд $f(E, \theta)$ с определенной сигнатурой: f^+ или f^- (определение сигнатуры см., например, в [50]). Однако идейная сторона изложения не искажается, если опустить в дальнейшем изложении знак сигнатуры.

Интегралом (39) определены свойства функции $S(\lambda, k)$ для произвольных значений λ, k , в том числе определено асимптотическое поведение $S(\lambda, k)$ для больших значений λ . Существует сходимость интеграла (39) для специфического класса юкавских потенциалов, удовлетворяющих условиям [49].

1) Потенциал $V(z)$ имеет представление

$$V(z) = \int_{\mu>0} \sigma(\mu) \frac{e^{-\mu z}}{z} d\mu$$

с подходящим образом подобранной весовой функцией $\sigma(\mu)$.

2) Потенциальная функция $V(z)$ может быть продолжена в полуплоскость $\text{Re } z > 0$.

3) Вдоль любого луча $\arg z = \sigma, |\sigma| < \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\int |V(z) z| ds < M < \infty, \quad ds = |dz|.$$

В этом ограниченном случае для полной амплитуды $f(E, \theta)$ можно записать мандельштамовское представление, о чем упоминалось выше.

Теоретики заметили, что существует связь между асимптотическим поведением амплитуды рассеяния и природой полюсов функции $f(E, \theta)$ (см. 39).

Допустим, в s -канале существует резонанс при значении M_r^2 с шириной Γ . Амплитуда в полюсе может быть записана в виде

$$f(s, t) \approx \frac{g(s) P_\lambda(\cos \theta_s)}{s - M_r^2 + i\Gamma M_r}. \quad (40)$$

Здесь $f(s, t)$ — эквивалент функции $f(E, \theta)$. Символ s у $\cos \theta_s$ обозначает $\cos \theta$ в s -канале. Если Γ мало по сравнению с M_r , то можно записать

$$\text{Im } f(s, t) \approx g(s) P_\lambda(\cos \theta) \delta(s - M_r^2).$$

Асимптотическое поведение полиномов Лежандра при бесконечно больших значениях аргумента имеет вид

$$P_\lambda(\cos \theta) \underset{\cos \theta_s \rightarrow \infty}{\sim} \cos \theta_s^l, \quad l > -\frac{1}{2}.$$

Из определения инвариантов $s = (p_1 + p_2)^2, u = (p_1 + p_3)^2, t = (p_1 + p_4)^2$ (см. (22)) находим, что $\cos \theta_s \sim t$, откуда следует

$$\operatorname{Im} f(s, t) \sim t^l.$$

Таким образом, если асимптотическое поведение по t при любых s ограничено значением $\sim t^l$, то мы получаем ограничение на самое большое значение спина соответствующего полюса в s -канале. Но, естественно, может существовать любое число частиц со значением $\leq l$. Если мы говорим о реджевском представлении амплитуды рассеяния, то вместо l надо подразумевать некоторую аналитическую функцию $\alpha(s)$, зависящую от квадрата энергии s . Функция $\alpha(s)$ в полюсе $s = s_0 = M_r^2$ может быть разложена в ряд

$$\alpha(s_0) = l + \epsilon(s_0) + i\eta(s_0) + (s + s_0) \left. \frac{d\alpha}{ds} \right|_{s=s_0} + \dots,$$

где $\epsilon \ll l$, $\eta \ll l$ и в точке s_0 величина $\lambda = l + 1/2$. Функция $\alpha(s)$ называется траекторией Редже. Траектория со значением $\alpha(0) = 1$ называется вакуумной траекторией или траекторией Померанчука.

Пользуясь явным выражением функции $f(s, t)$ (или $f(E, \theta)$, см. (38)), можно показать, что для рассеяния вперед ($\cos \theta_s = 1$) амплитуда ведет себя следующим образом [50]:

$$|f(s, t)| < \operatorname{const} \cdot s \ln^2 s, \quad (41)$$

$\cos \theta_s = 1$
 $s \rightarrow \infty$

а для углов, отличных от нуля:

$$|f(s, t)| < \operatorname{const} \cdot s^{3/4} \ln^{3/2}(s). \quad (42)$$

$s \rightarrow \infty$

Ограничения (41) и (42) на поведение амплитуды при $s \rightarrow \infty$ называются границами Фруассара [51]. Появление логарифмических множителей в соотношениях (41) и (42) не совсем понятно и можно объяснить лишь приближениями, использованными при выводе этих формул. Логарифмическое поведение обычно весьма сложно отделить в эксперименте — $\ln s$ слишком медленно меняющаяся функция энергии s . Поэтому обычно логарифмическую зависимость опускают и границы Фруассара принимают вид

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s, t) = 0(s^{N(t)}),$$

где $N(t) \leq 1$, $t < 0$.

В кроссинг- t -канале эта граница будет иметь симметричный вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(s, t) = 0(t^{N(s)}),$$

где $N(s) \leq 1, s < 0$.

Если вспомнить выражение для оптической теоремы (см. (11)), то получим

$$\sigma(s) \sim s^{N(0)-1} \leq \text{const.}$$

Итак, с одной стороны, амплитуда рассеяния в мандельштамовском представлении записывалась в виде

$$f(s, t) \sim \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\Gamma_{st}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} + \dots$$

(см. (23)). С другой стороны, в представлении полюсов Редже она имеет вид

$$f(s, t) \sim - \sum 16\pi^2 (2\alpha_i(s) + 1) \beta_i(s) \frac{P_{\alpha_i(s)}(s)(-z_s)}{\sin \pi \alpha_i(s)} -$$

$$- \frac{16}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (2l + 1) A(s, l) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl, \quad (43)$$

где $\alpha_i(s)$ — траектория реджевского полюса, $\beta_i(s)$ — вычет в полюсе s_{ir} , $\alpha_i(s_r) = l$, $P_{\alpha_i(s)}(-z)$ — полином Лежандра.

Формула (43) выводится из формулы (39) и указывает на то, что амплитуда $f(s, t)$, представленная в виде суммы полюсов Редже, кроме них имеет еще и разрезы от этих полюсов. Было потрачено много усилий, чтобы доказать эквивалентность двух представлений (23) и (43), и для ряда искусственных случаев это удавалось сделать. В квантовой теории поля не удалось найти строгого обоснования реджевского представления (43) амплитуды рассеяния.

Нет надобности углубляться в теорию полюсов Редже и показывать замечательные успехи этой теории при описании систематики частиц и асимптотического поведения амплитуд рассеяния. Это можно найти в ряде обзорных материалов [52, 53]. Нам было важно указать на то, что доказательство аналитичности амплитуды рассеяния по одной переменной в теории сильных взаимодействий породило двойные представления Мандельштама, а затем теорию полюсов Редже, в основании

которой лежит предположение о дальнейшем расширении аналитичности амплитуд взаимодействия элементарных частиц, в случае реджелогии — за счет предположения аналитичности по угловому моменту l .

Теоретический анализ реджевских траекторий привел к заключению, что они имеют нелинейную зависимость от переменной s (или l). Сравнение с экспериментальными данными, тем не менее, вело к заключению, что траектории Редже очень близки к линейным. Если, кроме линейности, предположить, что наклон всех траекторий одинаков, то мы приходим от представления амплитуды рассеяния (43) к модели Венециано для амплитуды рассеяния:

$$\Phi_b(\alpha_i(s), \alpha_j(t)) = \frac{\Gamma(1 - \alpha_i(s)) \Gamma(1 - \alpha_j(t))}{\Gamma(N - \alpha_i(s) - \alpha_j(t))} +$$

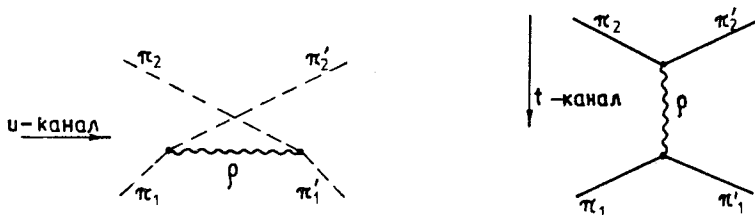
+ члены с заменами $s \rightarrow u, t \rightarrow u$, (44)

где Φ_b — обобщенные β -функции Эйлера, $\alpha_{i,j}$ — линейные траектории Редже, Γ — гамма-функции, N — положительное целое число. Функция (44) имеет полюса в точках $\alpha_i(s), \alpha_j(s) = l$, обладает кроссинг-симметрией ($s \rightleftharpoons t \rightleftharpoons u$) и реджевской асимптотикой. Однако обсуждение модели Венециано увело бы нас слишком далеко от темы нашего обзора.

4. БУТСТРАП-МЕТОД

В начале 60-х годов весьма популярной была гипотеза «зашнуровки». Она естественно вытекала из всего предыдущего развития теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц. Суть ее состоит в том, что в основе материи нет каких-то фундаментальных составляющих (типа кварков), а все частицы равноправны и состоят друг из друга. При соударениях пары любых частиц могут родиться любые другие частицы (естественно, с соблюдением всех законов сохранения). В качестве математического аппарата, адекватного идее «зашнуровки», был использован метод двойных представлений Мандельстама. Вместе идея «зашнуровки» и математический метод решения уравнений были названы бутстрап-методом [54].

Рассмотрим простейший пример взаимодействия двух π -мезонов. Предположим, что их взаимодействие осуществляется путем обмена только ρ -мезоном (спин $I = 1$, изотопспин = 1, четность отрицательная). Это означает, что π -мезоны взаимодействуют в p -состоянии. Дисперсионные соотношения для p -волны имеют вид

Рис. 12. ρ -обменные диаграммы в u - и t -каналах

$$A_{l=1}(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } A_1(\nu') d\nu'}{\nu' - \nu} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im } A_1(\nu') d\nu'}{\nu' - \nu}. \quad (45)$$

Здесь ν — импульс π -мезонов ц.м., масса π -мезона $\mu = 1$; квадрат полной энергии $s = 4(\nu + 1)$. Второй интеграл дает вклад от обмена ρ -мезоном в u - и t -каналах (см. рис.12). Чтобы решить уравнение (45) представим амплитуду $A_l(\nu)$ в виде отношения

$$\frac{1}{\nu} A_l(\nu) = \frac{N_l(\nu)}{D_l(\nu)}. \quad (46)$$

(В выражении (46) и ниже значок $l = 1$ опускается). Пусть $N(\nu)$ имеет только левый разрез, а $D(\nu)$ — только правый. Запишем теорему Коши для $N(\nu)$ и $D(\nu)$:

$$\text{Im } N(\nu) = \frac{1}{\nu} D(\nu) \text{Im } A(\nu),$$

$$\text{Im } D(\nu) = \nu N(\nu) \text{Im} \left[\frac{1}{A(\nu)} \right] = -\nu N(\nu) \frac{\text{Im } A^*(\nu)}{|A(\nu)|^2}.$$

Примем нормировку: $N(\nu) = 0$; $D(\nu) = 1$,
 $\nu \rightarrow \infty$ $\nu \rightarrow \infty$

$$\text{Im } A^*(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\nu + 1}} |A(\nu)|^2.$$

Теперь теорема Коши записывается в виде

$$N(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im } A(\nu') D(\nu')}{\nu'(\nu' - \nu)} d\nu',$$

$$D(\nu) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{N(\nu') d\nu'}{\nu' - \nu}. \quad (47)$$

Мы предположили, что у функции $D(\nu)$ нет нулей, т.е. нет полюсов у функции $A(\nu)$. Вообще говоря, нули функции $D(\nu)$ должны быть учтены: полюса амплитуды $A(\nu)$ соответствуют резонансам на нефизическом листе либо связанным состояниям на физическом листе. В этом случае при $\nu \rightarrow \infty$ функция $D(\nu)$ имеет вид

$$D(\nu) \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \nu^{-M_l + P_l + \frac{1}{\pi} [\delta_l(\infty) - \delta_l(0)]},$$

и так как мы выбрали нормировку $D_l(\infty) = 1$, то показатель степени у $D_l(\nu)$ должен равняться нулю:

$$\delta_l(\infty) - \delta_l(0) = \pi [-M_l + P_l],$$

где P_l — число полюсов в δ_l -фазе, а M_l — число связанных состояний. Этот результат согласуется с теоремой Левинсона. Можно положить, например, $\delta_l(0) = \pi M_l$ и тогда $\delta_l(\infty) = \pi P_l$. Возвращаясь к уравнениям (47), мы видим, что вместо интегрального сингулярного уравнения (45) получилась система уравнений (47). После подстановки $D(\nu)$ в уравнение для $N(\nu)$ линейное уравнение может быть решено, если известен вид функции $\text{Im } A(\nu)$. Предположим, что $\text{Im } A(\nu)$ определяется суммой вкладов диаграмм из второго и третьего каналов (см. рис. 12). Тогда первая итерация в $\frac{N}{D}$ -методе приводит к следующему решению:

$$D(\nu) = 1, \quad \text{Im } N(\nu) = \frac{1}{\nu} \text{Im } A(\nu), \quad N(\nu) = \frac{1}{\nu} A(\nu),$$

$$\frac{1}{\nu} A(\nu) = \frac{N(\nu)}{1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu'+1}} \frac{N(\nu')}{\nu'-\nu} d\nu'}. \quad (48)$$

В случае необходимости итерационная процедура может быть повторена необходимое число раз. Если бы математическая схема была адекватна бутстрап-идеологии, то в формуле (48) реальная часть знаменателя должна была бы обратиться в нуль в резонансной точке, соответствующей массе ρ -мезона: $\nu_\rho = \frac{m^2}{4} - 1$, а теоретическое значение ширины резонанса, выраженное через $N(\nu_\rho)$, должно было бы совпасть с экспериментальным значением ширины ρ -мезона. Такое решение представляло

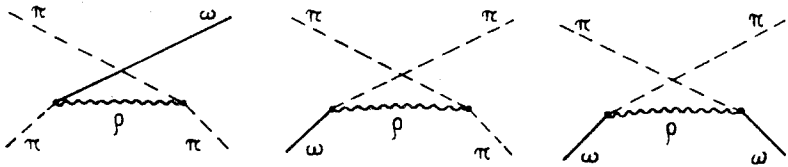


Рис. 13. Дополнительные «силы» в 2-канальной задаче для определения параметров ρ -мезона

бы бутстрап-метод в его чистом виде. Однако расчет дал самосогласованное решение при значении $m_\rho \approx 350$ МэВ (вместо $m_\rho \approx 750$ МэВ). Поскольку рассматриваемая модель была весьма примитивной, то расчеты посчитали обнадеживающими и решили их улучшить путем введения дополнительных обменных сил, т.е. перешли от одноканальной задачи к двухканальной. С этой целью, кроме амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния, в задачу включили процессы $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$, $\pi\omega \rightarrow \pi\pi$, $\pi\omega \rightarrow \pi\omega$ (см. рис.13). Обобщение $\frac{N}{D}$ -метода на двухканальный (многоканальный) случай было рассмотрено в работе [155]. Амплитуда рассеяния теперь представляется матрицей

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix},$$

где t_{11} соответствует процессу $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -рассеяния, t_{12} — $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$ -рассеяния, t_{21} — $\pi\omega \rightarrow \pi\pi$ -рассеяния, t_{22} — $\pi\omega \rightarrow \pi\omega$ -рассеяния.

Учет второго канала привел к значительному улучшению бутстрап-решения. Значение $m_\rho \approx 660$ МэВ. Техника расчета в двухканальном бутстрап-методе есть тривиальное обобщение одноканального случая. Амплитуда T снова записывается в виде $\frac{N}{D}$, где N и D — квадратные матрицы второго ранга:

$$N = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}.$$

Все элементы n_{ik} имеют только левые разрезы, а элементы d_{ik} — только правые. Для каждого элемента t_{ik} матрицы T имеем

$$t_{ij} = \sum_k \frac{n_{ik} D_{jk}}{\det D},$$

где D_{jk} — адьюнкта определителя D . Условие унитарности записывается в виде: $\text{Im } t_{ij} = \sum_k \rho_i t_{ik} t_{kj}^*$. Далее записывается теорема Коши для n_{ij} и d_{ij} . Например, для d_{ij} она имеет вид

$$d_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{\pi} \int_{s_{\text{порог}}}^{\infty} \frac{ds' \rho(s') n_{ij}(s')}{s' - s},$$

где фазовый множитель $\rho(s')$ выбирается таким образом, чтобы было обеспечено правильное пороговое поведение амплитуды и поведение амплитуды на бесконечности и были устранены нежелательные кинематические особенности. Для ряда простых задач это сделать можно, при этом условии унитарности выполняется.

Более глубокое изучение бутстрап-решений привело к заключению, что они не инвариантны относительно обращения времени, а в ряде случаев — меняют исходную асимптотику. В связи с устранением последнего недостатка решили реджизовать бутстрап, т.е. ввести реджевский характер поведения амплитуд. Теперь, после бутстрапирования, рассчитанная амплитуда должна была также иметь реджевский характер, т.е. должна «восстанавливать» параметры исходной траектории $\alpha(s)$ — в чем и состояла идея реджизации бутстрапа. Это также не всегда удавалось получить. Рассматривались более сложные случаи бутстрапирования параметров частиц. Так, пытались с помощью бутстрап-метода получить $SU(3)$ -симметрию (или какую-либо симметрию иного типа). Например, пытались получить бутстрап-октет векторных и псевдовекторных мезонов, т.е. заранее закладывался определенный набор мезонов, их квантовые числа, а ответ искался в виде отношения констант связи:

$$g_{\pi\rho\rho}^2 : g_{\rho KK}^2 : g_{\omega KK}^2 : g_{K^* \pi K}^2 : g_{\eta K^* K}^2 = \frac{4}{3} : \frac{2}{3} : 2 : 1 : 1.$$

Полученное решение удовлетворяло именно этому отношению, предсказываемому $SU(3)$ -симметрией.

Претензии бутстрап-метода на философию всеобщей динамической системы уравнений, описывающей весь физический мир элементарных частиц, оказались чрезмерными. Естественнее было говорить о бутстрап-решениях, дававших разумное согласие с экспериментальными данными о решениях, могущих предсказать какие-то параметры новых нестабильных частиц (их массы, ширины распадов, константы связи и т.д.).

5. СВЕРХСХОДЯЩИЕСЯ (ДИСПЕРСИОННЫЕ) ПРАВИЛА СУММ [56]

Ранее мы уже обсуждали проблему поведения амплитуды физического процесса при бесконечно больших энергиях. Еще при возникновении дисперсионных соотношений было ясно, что если амплитуда $F(E)$ аналитична в E -плоскости (E -энергия) с разрезом вдоль реальной оси, не имеет особенностей в верхней полуплоскости и достаточно быстро убывает на бесконечности, то тривиальным результатом теоремы Коши для такой функции (контур интегрирования имеет вид, изображенный на рис.14) будет равенство

$$\int_{-E}^{+E} F(E')dE' + \int_C F(E')dE' = 0. \quad (49)$$

Если для больших значений E амплитуда $F(E)$ убывает достаточно быстро, например, как $E^{-1} \ln^a E$, $a < -1$ (или быстрее), интеграл по контуру C стремится к нулю при $E \rightarrow \infty$, и мы получим сверхсходящиеся правила сумм:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } F(E')dE' = 0.$$

Что можно получить из таких правил сумм? Рассмотрим, например, инвариантную амплитуду, описывающую рассеяние виртуального изовекторного фотона с массой $m_\gamma^2 = q^2$ (см. рис.15), и предположим, что условия сверхсходимости выполняются для разности амплитуд: $F(E, q^2) - F(E, 0)$. В этом случае получаются соотношения Кабиббо — Радикатти для форм-факторов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } [F(E, q^2) - F(E, 0)] dE = 0.$$

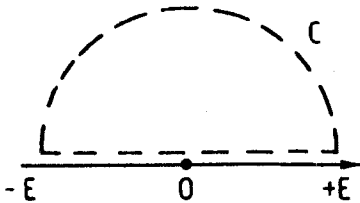


Рис.14. Контур интегрирования для функции $F(E)$

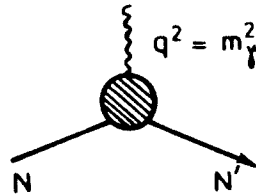


Рис.15. Вершина взаимодействия виртуального γ -кванта с нуклоном

Если в качестве амплитуды $F(E, q^2)$ рассматривать реальный комптон-эффект на мезоне (с изотопспином 2 в t -канале), то получаются правила сумм в виде [57]:

$$\frac{1}{m_\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2\alpha} \int_{E_0}^{\infty} [\sigma(\gamma\pi^0) - \sigma(\gamma\pi^+)] dE.$$

Летом 1965 г. Н.Н.Боголюбов, анализируя расчеты по вычислению магнитных моментов, полученные с помощью алгебры токов, заметил, что те же результаты могут быть получены из обычных одномерных дисперсионных соотношений. В частности, он указал на возможность использования для этих целей правил сумм для комптоновского рассеяния. С помощью этих правил сумм и с учетом $SU(6)$ -симметрии были получены соотношения, связывающие полные магнитные моменты протона μ_p и нейтрона μ_n [58]:

$$\mu_p - \frac{e}{2M} + \mu_n = 0,$$

где M — масса нуклона (тот же результат ранее был получен несколько иным путем [59]). Если амплитуда $F(E)$ сходится недостаточно быстро, то необходимо рассчитать интеграл по контуру C (см. рис.14, формулу (49)). Это можно сделать, если известно поведение $F(E)$ при больших E .

Представляя амплитуду $F(E)$ в области больших E как сумму реджевских полюсов:

$$F(E) = \sum_n a_n E^{an},$$

получим

$$\int_{-E}^{+E} \text{Im } F(x) dx = \sum_n \frac{E^{an+1}}{\alpha n + 1} \text{Im } a_n (1 + e^{i\pi\alpha n}), \quad (50)$$

где E — достаточно высокий предел по энергии.

В рассматриваемом случае дисперсионные правила сумм получены на основе гипотезы реджевского поведения амплитуды рассеяния в области высоких энергий. Из соотношения (50) следует, что, зная информацию о поведении $\text{Im } F(E)$ в области невысоких энергий ($\leq E$), можно получить определенные заключения о поведении реджевских траекторий $\alpha_n(E)$, определяющих ход сечения в области высоких энергий.

Ряд важных результатов, сохранивших свою значимость до наших дней, получен для электромагнитных процессов. Приведу один пример. Амплитуду комптоновского рассеяния (под нулевым углом рассеяния) можно записать в виде

$$F(\omega) = f_1(\omega) e'^* e + f_2(\omega) i\sigma [e'^* \times e],$$

где e и e' — векторы поперечной поляризации падающего и рассеянного вперед фотона соответственно, ω — энергия фотона в лабораторной системе координат, $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ — скалярные аналитические функции, описывающие процесс рассеяния фотона на некоторой мишени. Они связаны с полными сечениями поглощения фотона на мишени следующими формулами:

$$\text{Im } f_1(\omega) = \frac{\omega}{8\pi} (\sigma_A + \sigma_p),$$

$$\text{Im } f_2(\omega) = \frac{\omega}{8\pi} (\sigma_A - \sigma_p),$$

где σ_p — полное сечение взаимодействия циркулярно-поляризованного фотона со спиральностью $+1$ (т.е. поляризованного фотона) на мишени, полностью поляризованной вдоль оси z , направленной по импульсу падающего фотона, σ_A — полное сечение для левополяризованного фотона (спиральность $= -1$) при той же самой поляризации мишени. Система единиц: $\hbar = e = 1$.

В низкоэнергетическом пределе функции $f_1(0)$ и $f_2(0)$ связаны с постоянной тонкой структуры α , зарядом e , массой M и аномальным магнитным моментом частицы κ , на которой происходит комптоновский процесс рассеяния фотона, соотношениями

$$f_1(0) = -\frac{\alpha}{M} e^2,$$

$$f_2(0) = -\frac{\alpha}{2M^2} \kappa^2 \quad (51)$$

(теорема Лоу — Гелл-Манна — Гольдбергера [60]).

Хорошо известно, что функция $f_1(\omega)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению с одним вычитанием:

$$f_1(\omega) = -\frac{\alpha}{M} e^2 + \frac{\omega^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{[\sigma_p(\omega') + \sigma_A(\omega')] d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}.$$

Поведение функции $f_2(\omega)$ на бесконечности неизвестно. Предположим, что функция $f_2(\omega)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний:

$$\text{Re } f_2(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f_2(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (52)$$

Дифференцируя (52) по ω и переходя к пределу $\omega \rightarrow 0$, получим

$$\operatorname{Re} f_2'(\omega) = \frac{2}{\pi} \wp \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_2(\omega') d\omega'}{\omega'^2} = f_2(0).$$

Используя теперь теорему Лоу — Гелл-Манна — Гольдбергера (см. (51)), получим

$$\frac{2\pi^2}{M^2} \kappa^2 = \int_0^{\infty} \frac{[\sigma_P(\omega) - \sigma_A(\omega)]}{\omega} d\omega. \quad (53)$$

На возможность существования правила сумм, подобного (53), впервые было указано в работе [61]. В явном виде оно было получено С.Б.Герасимовым [62] и им же обобщено на случай мишени с произвольным спином. Позднее соотношение (53) было получено Дреллом и Херном [63] и рядом других авторов и вошло в литературу под названием правил сумм Герасимова — Дрелла — Херна. В наше время оно используется, в частности, при анализе поляризационных явлений.

6. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ГИПОТЕЗЫ АНАЛИТИЧНОСТИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Понятие об амплитуде рассеяния как о единой аналитической функции, зависящей от переменных энергии и импульса, оказалось весьма плодотворным для последующего развития теории сильных взаимодействий элементарных частиц. Даже исходя из предположения об аналитичности амплитуды рассеяния в некоторой части комплексной плоскости одной из переменных, можно получить определенные физические выводы.

Пусть s — квадрат полной энергии системы двух частиц с равной массой, t — передача импульса: $t = -2q^2(1 - z)$, где q — трехмерный импульс в системе центра масс, $z = \cos \theta$, θ — угол рассеяния в той же системе. Пусть амплитуда $F(q, z)$, как функция переменной z , аналитична внутри эллипса с фокусами в точках $z = \pm 1$. Длина полуосей эллипса определяется энергией и массами частиц в промежуточных состояниях. По предположению об аналитичности ряд

$$F(q, z) = \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) F_l(q) P_l(z)$$

сходится внутри эллипса, а парциальные амплитуды $F_l(q)$ при достаточно больших $l > l_0$ достаточно быстро убывают с ростом l . Тогда

$$F(q, z) \approx \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) F_l(q) P_l(z) = \tilde{F}(q, z).$$

В силу условия унитарности $|F_l(q)| \leq 1$, так что при всех $|z| \leq 1$ имеем

$$\tilde{F}(q, z) \leq \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) = \frac{(l_0+1)^2}{q}.$$

Если ввести понятие эффективного радиуса взаимодействия $R \approx \frac{l_0}{q}$ и вспомнить оптическую теорему

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{q} \text{Im } F(q, 1),$$

то получим оценку

$$\sigma_{\text{tot}} \leq 4\pi R^2.$$

(Вообще говоря, радиус R должен зависеть от энергии). Характер поведения сечений упругих и неупругих процессов при высоких энергиях, исходя из свойств аналитичности амплитуды рассеяния, был рассмотрен в работах А.А.Логунова с сотрудниками [64]. В них были получены важные выводы относительно поведения дифференциального сечения множественного рождения с ростом энергии в области больших углов рассеяния для процессов типа

$$a + b \rightarrow a + b, \quad (\text{I})$$

$$a + b \rightarrow A_j, \quad (\text{II})$$

$$a + b \rightarrow c + A_j, \quad (\text{III})$$

$$a + b \rightarrow c + d + A_j, \quad (\text{IV})$$

где A_j — совокупность адронов, a, b, c, d — отдельные частицы. Внимательный читатель легко заметит, что понятие об обширном классе процессов, которые сегодня называются глубоконеупругими процессами, было впервые введено, а сами процессы с достаточно большой общностью изучены А.А.Логуновым с сотрудниками еще в 1967 г. [65] (см. процесс III). Исходя из предположений о характере аналитичности амплитуды упругих и неупругих процессов как функций угловых переменных и условия унитарности были установлены ограничения на поведение сечений упругих и неупругих процессов. В частности, для сильных взаимо-

действий, в которых в качестве обменных частиц взаимодействия выступают π -мезоны с массой m_π , получено соотношение

$$\sigma_{el}(s) \geq \frac{m_\pi^2}{4\pi} \frac{\sigma_{tot}^2(s)}{\ln^2\left(\frac{s}{s_0}\right)},$$

из которого следует, что если полное сечение $\sigma_{tot}(s)$ с ростом энергии s стремится к постоянному пределу, то упругое сечение того же процесса не может убывать быстрее $\ln^2\left(\frac{s}{s_0}\right)$, где s_0 — некоторая константа [66].

Для двухчастичного неупругого рассеяния $a + b \rightarrow c + d$ получено ограничение

$$\frac{d\sigma_{inel}}{dt} \leq \frac{\pi}{4m_\pi^4} \ln^4\left(\frac{s}{s_0}\right),$$

где $\frac{d\sigma_{inel}}{dt}$ — дифференциальное сечение рассматриваемого неупругого рассеяния, а t — инвариантная передача импульса между частицами a и c .

В 1971 г. группа экспериментаторов из ИФВЭ и объединенная группа физиков ИФВЭ и ЦЕРН закончила серию экспериментов по измерению полных сечений в области серпуховских энергий 30—70 ГэВ, недоступных в то время другим ускорителям мира. Результаты оказались совершенно неожиданными: полные сечения процессов $\pi^\pm p$, $p p$, $p \bar{p}$ прекратили свое падение с ростом энергии и вышли приблизительно на константу, а $K^+ p$ -сечение, которое при меньших энергиях было приблизительно постоянным, начало расти. Это изменение поведения сечений с ростом энергии получило название «серпуховского эффекта». Теоретические исследования, проведенные на основе идей аналитичности амплитуд рассеяния, указывавшие на рост полных сечений с ростом энергии, получили свое подтверждение уже при энергиях серпуховского ускорителя. Экспериментальные данные, полученные позднее на ускорителях FNAL (США) и ЦЕРН при более высоких энергиях, также совпадают с выводами теоретиков. Ценность сопоставления приведенных выше теоретических предсказаний и экспериментальных данных состоит в том, что эксперименты убеждают нас в справедливости наиболее общих принципов квантовой теории поля, от которых нет надобности отказываться и в наше время. В числе этих принципов — точная математическая формулировка принципа причинности, данная Н.Н.Боголюбовым при создании аксио-

матического подхода и квантовой теории поля. Математический аппарат, находящийся на грани между теорией обобщенных функций и теорией аналитических функций многих комплексных переменных, был использован Н.Н.Боголюбовым для обоснования дисперсионных соотношений — для доказательства аналитичности амплитуд рассеяния в теории сильных взаимодействий. Исходя из принципов аналитичности физических амплитуд, можно получить связи между различными физическими процессами, которые оказались особенно простыми в области асимптотически высоких энергий.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные подходы к решению проблем теории сильных взаимодействий были основными в течение 10—15 лет, начиная с 1955 г. Переход к кварковой структуре строения элементарных частиц вытеснил из сознания теоретиков проблемы, связанные с понятием аналитичности амплитуд рассеяния, а вместе с этим и нерешенные вопросы метода дисперсионных соотношений, реджелогии, физики явлений в области очень высоких энергий, основанные на представлениях об аналитичности амплитуд рассеяния.

Очевидно, что нельзя автоматически перенести те положения КТП, которые были использованы Н.Н.Боголюбовым при доказательстве аналитичности амплитуд рассеяния в теории сильных взаимодействий, на аналогичные положения в КХД, чтобы убедиться в аналитичности соответствующей амплитуды рассеяния в КХД. Так, например, процессу рассеяния π^+ -мезона на протоне в КХД в первом приближении будет соответствовать ряд диаграмм (см. рис.16), аналитические свойства которых явно не совпадут с аналитическими свойствами амплитуды $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ -рассеяния в старой КТП, в которой и π^+ - и p -частицы рассматривались как точечные. Совершенно непонятно, как может возникнуть полюсный член в КХД, соответствующий члену в КТП. Вообще, кажется просто невозможным какое-либо сопоставление аналитических свойств рассматриваемого процесса π^+p -рассеяния в рамках двух подходов: старого (в КТП) и нового (в рамках КХД). Нельзя одновременно рассуждать на языке КХД и использовать в рамках КХД математические соотношения, полученные из аналитичности и доказанные в рамках классической квантовой теории поля, такие как дисперсионные соотношения, дисперсионные правила сумм, формулы реджелогии и некоторые другие, не доказанные в КХД. Это явно противоречило бы традиции строгости

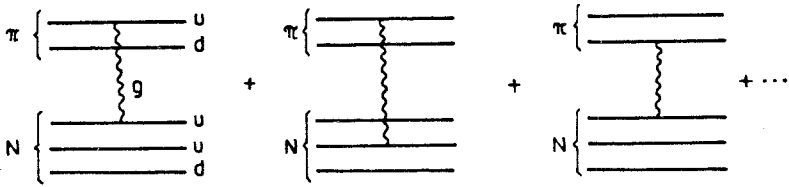


Рис. 16. Набор диаграмм в КХД, описывающих процесс рассеяния $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$

теоретического мышления, которая культивировалась Н.Н.Боголюбовым в течение всего его творческого пути.

Означает ли это, что надо отказаться от внедрения идей аналитичности в квантовую хромодинамику? Думаю, что нет. Мы знаем, что связанные состояния могут описываться интерполирующими локальными полями, для которых существуют условия причинности. Таким образом, дисперсионные соотношения могут быть записаны и в рамках КХД. В теории возмущений в КХД без конфайнмента разрезы, возникающие из-за условия унитарности, начнутся с нуля, так как глюоны имеют нулевую массу покоя и нет «дыры», необходимой для получения запаздывающей и опережающей функции. Отсюда следует, что проблема доказательства дисперсионных соотношений в КХД тесно связана с проблемой конфайнмента в КХД. Если вирус аналитичности проникает в КХД, то идеология 60-х годов и математические подходы снова могут возродиться, но, естественно, в модифицированном виде. Если в рамках дисперсионных соотношений в КТП устанавливались связи между дифференциальными и полными сечениями, упругими и неупругими сечениями, между физическими константами и парциальными амплитудами различных процессов, то в КХД свойства аналитичности амплитуд рассеяния могли бы быть полезными для установления связей между распределениями кварков и глюонов в частицах, доказательства конфайнмента элементарных частиц, ряда асимптотических соотношений в процессах взаимодействия элементарных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К. — Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы. 1958, с.202.
2. Gell-Mann M., Goldberger M.L., Thirring W.E. — Phys.Rev., 1954, vol.95, p.1612.
3. Bogolubov N.N. — Problems of the Theory of Dispersion Relations. Princeton preprint, 1955.

4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973, гл. IX.
5. Varashenkov V.S. — *Forschr. Phys.*, 1962, vol. 10, p. 25.
6. Померанчук И.Я. — *ЖЭТФ*, 1958, т. 34, с. 725.
7. Файнберг В.Я., Фрадкин Е.С. — *ДАН СССР*, 1956, т. 109, с. 507; Иоффе Б.Л. — *ЖЭТФ*, 1956, т. 31, с. 583; Куни Ф.М. — *ДАН СССР*, 1956, т. III, с. 571.
8. Бланк В.З., Исаев П.С. — *ДАН СССР*, 1957, т. 117, с. 785.
9. Никитин В.А. — *ЭЧАЯ*, 1970, т. 1, вып. 1, с. 9.
10. Логунов А.А., Степанов Б.М. — *ДАН СССР*, 1956, т. 110, с. 368.
11. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Solovoyov L.D. — *Nucl. Phys.*, 1957, vol. 4, p. 427.
12. Логунов А.А., Тавхелидзе А.Н. — *ЖЭТФ*, 1957, т. 32, с. 1393.
13. Solovoyov L.D. — *Nucl. Phys.*, 1958, vol. 5, p. 256.
14. Балдин А.М., Михайлов В.М. — *ЖЭТФ*, 1951, т. 21, с. 562; *УФН*, 1951, т. 44, с. 200.
15. Балдин А.М., Михайлов В.М. — *ДАН СССР*, 1952, т. 84, с. 47—49.
16. Соловьев Л.Д., Бялковский Г., Юревич А. — *ЖЭТФ*, 1961, т. 40, с. 839.
17. Baldin A.M., Lebedev A.I. — *Nucl. Phys.*, 1963, vol. 40, с. 44.
18. Gell-Mann M., Goldberger M., Thirring W. — *Phys. Rev.*, 1954, vol. 95, p. 1612; Goldberger M. — *Phys. Rev.*, 1955, vol. 97, p. 508; Karplus H., Ruderman N. — *Phys. Rev.*, 1955, vol. 98, p. 771; Bogolubov N.N., Shirkov D.V. — *Dokl. Acad. Sci.*, 1958, vol. 113, p. 527.
19. Logunov A.A., Isaev P.S. — *Nuovo Cim.*, 1958, Ser. X, vol. 10, p. 917.
20. Златев И.С., Исаев П.С. — *ЖЭТФ*, 1959, т. 37, с. 1161. Isaev P.S., Zlatev I.S. — *Nucl. Phys.*, 1960, vol. 16, p. 608.
21. Боголюбов Н.Н., Биленький С.М., Логунов А.А. — *ДАН СССР*, 1957, т. 115, с. 891.
22. Mandelstam S. — *Phys. Rev.*, 1958, vol. 112, p. 1344; *Phys. Rev.*, 1959, vol. 115, p. 1741.
23. Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М.: Наука, 1967 (гл. I, § 2).
24. Логунов А.А., Тавхелидзе А.Н., Тодоров И.Т., Черников Н.А. — *ДАН СССР*, 1960, т. 135, с. 801; Логунов А.А., Лю И Чень, Тодоров И.Т., Черников Н.А. — *Украинский матем. журнал*, 1963, т. XV, 3, с. 250.
25. Ширков Д.В. — Проблемы теоретической физики. Сборник, посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его 60-летием. М.: Наука, 1969, с. 278. Серебряков В.В., Ширков Д.В. — *ЭЧАЯ*, 1970, т. 1, вып. 1, с. 172.
26. Chew G.F., Low F.E. — *Phys. Rev.*, 1959, vol. 113, p. 1640.
27. Ефремов А.В., Мещеряков В.А., Ширков Д.В. — *ЖЭТФ*, 1960, т. 39, с. 438; 1960, т. 39, с. 1099. Efremov A.V., Mescheryakov V.A., Shirkov D.V. et al. — *Nucl. Phys.*, 1960, vol. 22, p. 202.
28. Efremov A.V., Tzu H., Shirkov D.V. — *Scientia Sinica*, 1961, vol. 10, p. 812. Ефремов А.В., Ширков Д.В. — *ЖЭТФ*, 1962, т. 42, с. 1344.
29. Сянь-Дин-Чан, Хэ Цзо-Сю, В.Целлнер — *ЖЭТФ*, 1960, т. 39, с. 1668.
30. Серебряков В.В., Ширков Д.В. — *ЖЭТФ*, 1962, т. 42, с. 610; Serebryakov V.V., Shirkov D.V. — *Nucl. Phys.*, 1962, vol. 34, p. 500.
31. Ferrari E., Sellery F. — *Nuovo Cim.*, 1963, vol. 27, p. 1450. См. также Сусленко В.К. — *ЭЧАЯ*, 1975, т. 6, с. 173.
32. Ефремов А.В., Ширков Д.В. — *ЖЭТФ*, 1962, т. 42, с. 1344.
33. Isaev P.S., Severynski V.N. — *Nucl. Phys.*, 1961, vol. 22, p. 663; *Nucl. Phys.*, 1961, vol. 27, p. 148.
34. Исаев П.С., Матвеев В.А. — *ЯФ*, 1966, т. 4, с. 198.
35. Исаев П.С. — *ЭЧАЯ*, 1973, т. 4, с. 731.
36. Мухелишвили Н.И. — Интегральные сингулярные уравнения. М.: Физматгиз, 1962; Гахов Ф.Д. — Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1962.
37. Исаев А.С., Мещеряков В.А. — *ЖЭТФ*, 1962, т. 43, с. 1339.

38. Isaev P.S., Lend'el V.I., Meshcheriakov V.A. — Proc. of the Int. Conf. at Stanford Univ. 1963, Stanford Univ. Press.
39. Исаев П.С. — ЭЧАЯ, 1971, т.2, с.67.
40. Исаев П.С., Мещеряков В.А. — ЖЭТФ, 1962, т.43, с.1339.
41. Исаев П.С., Лендел В.И., Мещеряков В.А. — ЖЭТФ, 1963, т.45, с.294.
42. Гришин В.Г., Кистенев Э.П., Му Цзин — ЯФ, 1965, т.2, с.886.
43. Adylov G.T., Aliev F.K., Bardin D.Yu. — Phys. Lett., 1974, vol.51B, p.402.
44. Dally E.V., Hauptman J., May C. et al. — Тр. 18-й Межд. конф. по физике высоких энергий. Тбилиси, 1976, Дубна, ОИЯИ, т.1, Д1, 2-1040, 1976, с.А7-А8.
45. Dubnicka S., Meshcheryakov V.A., Milko J. — Phys. C: Nucl. Phys., 1981, vol.7, p.605.
46. Герасимов С.Б. — ЖЭТФ, 1966, т.5, с.1559.
47. Исаев П.С. — Квантовая электродинамика в области высоких энергий М.: Энергоатомиздат, 1984.
48. Regge T. — Nuovo Cim., 1959, vol.14, p.951; Nuovo Cim, 1960, vol.18, p.947.
49. Regge T. — Theoretical Physics, International Atomic Energy Agency, Vienn, 1963, p.275.
50. Коллинз П., Сквайерс Э. — Полюса Редже в физике частиц. М.: Мир, 1971.
51. Froissart M. — Nuovo Cim., 1961, vol.22, p.191; Phys. Rev., 1961, vol.123, p.1053.
52. International Conference on Particles and Fields. Rochester, 1967.
53. Ширков Д.В. — УФН, 1970, т.102, с.87.
54. Исаев П.С. — Материалы Межд. школы по теор. физике частиц. Киев: Наукова думка, 1967, с.414.
55. Bjorken J.D. — Phys. Rev. Lett., 1960, vol.4, p.473.
56. Logunov A.A., Soloviev L.D. — Nucl. Phys., 1960, vol.12, p.60. См. также обзор: Ferro Fontan S., Queen N.M., Violini G. — Dispersion Sum Rules for Strong and Electromagnetic Interactions. Rivista del Nuovo Cimento, 1972, vol.2, 4, p.357.
57. Soloviev L.D. — Int. Conf. on Particles and Fields, Rochester, 1967 (Session VI, p.673).
58. Соловьев Л.Д. — ЯФ, 1966, т.3, с.188.
59. Боголюбов Н.Н., Нгуен Ван Хьеу, Стоянов Д. и др. — Препринт ОИЯИ Д-2075, Дубна, 1965.
60. Low F. — Phys. Rev., 1954, vol.96, p.1428. Gell-Mann M., Goldberger M.L. — Phys.Rev., 1954, vol.96, p.1433.
61. Ланидус Л.И., Чжоу-Гуан-Чжао — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.1286.
62. Герасимов С.Ю. — ЯФ, 1965, т.2, с.598.
63. Drell S.D., Hearn A.C. — Phys. Rev. Lett., 1966, vol.16, p.908.
64. Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Хрусталеv О.А. — ЭЧАЯ, 1972, т.3, вып.1, с.3; ЭЧАЯ, 1972, т.3, вып.3, с.515. В этих обзорах даны ссылки на все необходимые первоисточники.
65. Logunov A.A., Mestvirishvili M.A., Nguen Van Hiew — Phys. Lett., 1967, vol.25B, p.611.
66. Логунов А.А., Нгуен Ван Хьеу — Межд. школа по физике высоких энергий. Чехословакия, Попрадско Плесо, 1967.