

УРОВНИ ЭНЕРГИИ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ

В.В.Двоеглазов, Ю.Н.Тюхтяев

Саратовский государственный университет,
НТЦ контроля и использования физических полей и излучений

Р.Н.Фаустов

Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», Москва

Настоящий обзор содержит описание теоретических методов исследования спектров водородоподобных систем. Рассмотрены различные варианты квазипотенциального подхода и метода эффективного уравнения Дирака, включая описание сравнительно новых методов, которые появились в восьмидесятые годы. К их числу относятся метод исследования спектров с помощью квазипотенциального уравнения с релятивистской приведенной массой и метод выделения логарифмических поправок с помощью уравнения ренормгруппы. Особое внимание уделено построению теории возмущений и отбору диаграмм, позволяющих вычислить вклады различного порядка по постоянной тонкой структуры α в энергию тонкого и сверхтонкого расщеплений в водородоподобных атомах (позитроний, мюоний и атом водорода). Далее проведено сравнение экспериментальных и теоретических результатов по широкому кругу проблем, таких как тонкое и сверхтонкое расщепление в водородоподобных системах, лэмбовский сдвиг, аномальные магнитные моменты электрона и мюона. Также обсуждена связанная с ними проблема точного определения численного значения постоянной тонкой структуры.

The present review includes the description of theoretical methods for the investigations of the spectra of hydrogen-like systems. Various versions of the quasipotential approach and the method of the effective Dirac equation are considered. The new methods, which have been developed in the eighties, are described. These are the method for the investigation of the spectra by means of the quasipotential equation with the relativistic reduced mass and the method for the selection of the logarithmic corrections by means of the renormalization group equation. Special attention is given to the construction of a perturbation theory and the selection of graphs, whereof the contributions of different orders of α , the fine structure constant, to the energy of the fine and hyperfine splitting in positronium, muonium and hydrogen atom can be calculated. The comparison of the experimental and theoretical results concerning the wide range of topics is made. They are the fine and hyperfine splitting in the hydrogenic systems, the Lamb shift and the anomalous magnetic moments of an electron and a muon. Also, the problem of the precision determination of a numerical value of the fine structure constant, connected with the above topics, is discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы, как и прежде, много внимания уделялось исследованию уровней энергии водородоподобных (ВП) систем — атомов позитрония, мюония, водорода и т.п., которые представляют собой основу для проверки предсказаний квантовой электродинамики (КЭД). Этой проблеме посвящен предыдущий обзор [1]. Современное состояние исследований в данном направлении анализируется в настоящей статье.

Как известно, уравнение Дирака позволяет учесть спин-орбитальное и спин-спиновое взаимодействия в ВП-системах и, соответственно, предсказать тонкую и сверхтонкую структуру уровней энергии с точностью $O(\alpha^4)$. Однако отклонения в тонкой структуре уровней, поправки к сверхтонкому расщеплению (СТР), вызванные радиационными эффектами, существование лэмбовского сдвига (расщепления уровней $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$, совпадающих в теории Дирака) могут быть описаны лишь на основе квантово-полевых методов КЭД.

В нерелятивистской квантовой механике задача двух тел сводится к двум более простым: о равномерном движении центра масс и движении частицы с приведенной массой в потенциальном поле. В релятивистском случае КЭД явное отделение движения центра масс и введение обычного понятия потенциала невозможно. Отличительной чертой большинства квантовых методов описания связанных состояний является использование аппарата двухчастичной функции Грина и определение спектра по положению ее полюсов.

Уравнение для функции Грина двух фермионов можно записать в форме Швингера [2]:

$$\{(\gamma\pi - M)_1(\gamma\pi - M)_2 - I_{12}\}G = I, \quad (1)$$

где $\pi_\alpha = p_\alpha - eA_\alpha$, причем p_α^i — 4-импульс i -й частицы, A_α^i — внешнее поле, действующее на i -ю частицу; e — заряд электрона; M_i — массовый оператор i -й частицы, I_{12} — ядро взаимодействия частиц 1 и 2; I — единичный оператор. Наконец,

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\langle 0 | T \{ \psi_a(x_1) \psi_b(x_2) \bar{\psi}_a(x_3) \bar{\psi}_b(x_4) S \} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (2)$$

— полная двухчастичная функция Грина в представлении взаимодействия, $\psi(x_i)$ — полевые операторы составляющих частиц.

Уравнение (1) может быть также переписано в форме Бете — Солпитера (БС) [3]¹:

$$G(x_1, x_2; x_3, x_4) = G_0(x_1, x_2; x_3, x_4) + \\ + G_0(x_1, x_2; x'_1, x'_2) K_{BS}(x'_1, x'_2; x'_3, x'_4) G(x'_3, x'_4; x_3, x_4), \quad (3)$$

$$G_0(x_1, x_2; x_3, x_4) = iG_a(x_1, x_3) G_b(x_2, x_4), \quad (4)$$

где $G_{a,b}$ — функция Грина свободных фермионов, K_{BS} — ядро уравнения БС, которое связано с оператором взаимодействия частиц I_{12} , представляющим собой сумму двухчастично-неприводимых фейнмановских диаграмм. Состояние двухчастичной системы определяет двухвременная волновая функция ψ — решение соответствующего (3) однородного уравнения:

$$(G_0^{-1} - K_{BS}) \Psi_{\mathcal{P}}(x_1, x_2) = 0, \quad (5)$$

$$\Psi_{\mathcal{P}}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \{ \psi_a(x_1) \psi_b(x_2) \} | \mathcal{P}, \nu \rangle. \quad (6)$$

Вектор $| \mathcal{P}, \nu \rangle$ характеризует как целое связанную систему с 4-импульсом \mathcal{P} и набором дополнительных квантовых чисел ν .

Используя трансляционную инвариантность и выбирая систему центра масс $\mathcal{P}_\mu = (E, \vec{0})$, можно получить волновую функцию, отвечающую состоянию с определенным значением энергии E :

$$\Psi_{\mathcal{P}}(x_1, x_2) = e^{-iEX} \phi_E(x) \quad (7)$$

(X_0 — временная координата центра масс, x — относительная координата).

Задача на связанные состояния в релятивистской квантовой теории может быть решена только приближенно — методами теории возмущения. За основное приближение принимается обычно то, которое соответствует мгновенному (кулоновскому) взаимодействию. Спектр

¹По повторяющимся переменным в (3) и далее подразумевается интегрирование.

энергии представляет собой кулоновские уровни, определенные на основе волновых уравнений, а поправки к ним получаются из высших порядков теории возмущений [4]:

$$\Delta E = -i\bar{\phi}_{K_C}(x)(\tilde{K} + \tilde{K}G_C\tilde{K} + \text{и т.д.})\phi_{K_C}(x'), \quad (8)$$

где $\tilde{K} = K_{BS} - K_C$, K_C — кулоновская часть ядра уравнения БС, G_C — решение уравнения (3) с ядром K_C , $\phi_{K_C}(x)$ — решение уравнения (5) с ядром K_C . Однако состояние $\phi_{K_C}(x)$ не является стационарным, связь функции ϕ_{K_C} и решения уравнения Шредингера (или Дирака) с кулоновским потенциалом является достаточно сложной. Трудности вызывает также нормировка и формулировка граничных условий для волновой функции, зависящей от относительного времени. Все это сказывается, в конечном итоге, на точности вычислений.

Формализм трехмерных уравнений в релятивистской теории связанных состояний возник еще до появления ковариантной формулировки теории поля [5—7]. Важное значение имело создание метода квазипотенциала [8,9] и подхода Гросса [10]. Квантово-полевые уравнения в этих подходах лишены недостатков уравнения БС и весьма близки по форме к нерелятивистскому уравнению Шредингера с потенциалом V . Их можно рассматривать как непосредственное обобщение на релятивистский случай потенциальной теории двух тел. Основная идея всех трехмерных подходов состоит в выборе «затравочного» двухчастичного пропагатора, который хорошо описывает физику задачи. В квазипотенциальном подходе такой выбор осуществляется путем перехода к двухвременной функции Грина, в которой параметр относительного времени $t_a - t_b$ исключен. В подходе Гросса затравочная двухчастичная функция распространения выбирается в виде проектора на массовую поверхность тяжелой частицы и свободного электронного пропагатора.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Как уже отмечалось во введении, квантово-полевые уравнения для системы двух частиц в трехмерных подходах приводятся к уравнениям типа уравнений Шредингера с квазипотенциалом, определяемым через двухвременные функции Грина. Несмотря на отсутствие явной релятивистской ковариантности, квазипотенциальный метод сохраняет всю

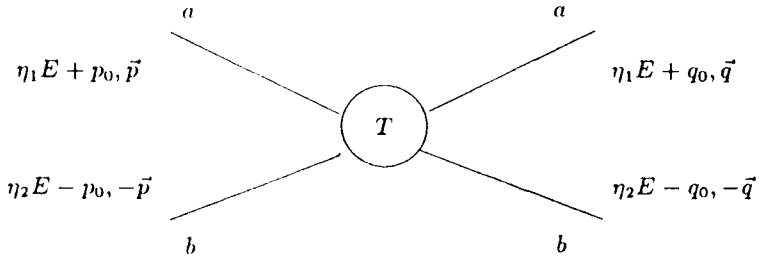


Рис. 1. Параметризация двухчастичной амплитуды рассеяния T вне массовой поверхности в с.ц.м. $\left(\eta_1 = \frac{(E^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2E^2}, \eta_2 = \frac{(E^2 + m_2^2 - m_1^2)}{2E^2} \right)$

информацию о свойствах амплитуды рассеяния, которую можно получить, исходя из общих принципов квантовой теории поля. Поэтому с помощью квазипотенциального уравнения можно изучать как свойства аналитичности и асимптотического поведения амплитуды рассеяния, так и некоторые закономерности потенциального рассеяния, в частности, при высоких энергиях [11]. Перенормировка квазипотенциального уравнения сводится, как и в обычной теории S -матрицы, к перенормировке массы и заряда [12].

Квазипотенциальный метод весьма эффективен также для определения релятивистских и радиационных поправок к спектру водородоподобных атомов. Часто бывает удобным ввести вместо функции Грина (2) двухчастичную амплитуду рассеяния вне массовой поверхности

$$G = G_0 + G_0 T G_0, \tag{9}$$

которая связана с ядром уравнения Бете — Солпитера соотношениями

$$T = K_{BS} + K_{BS} G_0 T \tag{10}$$

или

$$T = K_{BS} + K_{BS} G K_{BS}. \tag{11}$$

На массовой поверхности ($p_0 = q_0 = 0, \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2} = \sqrt{\vec{q}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{q}^2 + m_2^2} = E$) амплитуда T совпадает с физической амплитудой рассеяния (см. рис.1)². В дальнейшем $\sqrt{\vec{p}^2 + m_{1,2}^2} \equiv \epsilon_{1,2p}$.

²Физический смысл величин $p_0, q_0, \vec{p}, \vec{q}$ становится ясным из рис.1; m_1 и m_2 — массы составляющих частиц.

Квазипотенциальный подход универсален и симметричен в описании обеих частиц. Благодаря этому он применим для рассмотрения любой системы частиц с произвольными массами. Однако операция приравнивания времен не позволяет получить уравнение Дирака для одной из частиц, когда масса другой устремляется к бесконечности. При рассмотрении ВП-атомов, в которых ядро обладает большим зарядом и большой массой, бывает удобным воспользоваться в качестве исходного приближения точными решениями уравнения Дирака с кулоновским потенциалом. Такой путь был предложен в [10].

В работе [13] был построен самосогласованный трехмерный формализм, приводящий к эффективному (модифицированному) уравнению Дирака на основе идей квазипотенциального подхода. В отличие от обычной процедуры, когда временные аргументы операторов $\psi_a(x_1)$ и $\psi_b(x_2)$ выражения (6) приравниваются, в указанной работе осуществлена³ операция устремления к бесконечности $x_2^0 \rightarrow \infty$. В этом случае получено следующее представление для ВФ в импульсном пространстве:

$$\Psi_{\mathcal{P}}(p_1^0; \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{2p}}} \langle \vec{p}_2, \sigma_2 | \psi_a(0) | \mathcal{P}, \nu \rangle, \quad (12)$$

для которой можно легко перейти к переменным полного и относительно импульса. Подобная процедура, осуществленная также и для свободной функции Грина G_0 (см. уравнения (2.5), (3.4), (3.5) статьи [13]), приводит непосредственно к уравнению

$$(\eta_1 \hat{\mathcal{P}} + \hat{p} - m_1) \Psi_{\mathcal{P}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} V(\vec{p}, \vec{q}) \Psi_{\mathcal{P}}(\vec{q}), \quad (13)$$

которое в пределе $m_2 \rightarrow \infty$ переходит в уравнение Дирака для частицы 1 во внешнем поле. Это свойство является характерной чертой метода эффективного уравнения Дирака (ЭУД).

Хотя квазипотенциальный подход Логунова — Тавхелидзе и подход Гросса (метод ЭУД) имеют в своей основе различные физические предположения, формулы, позволяющие вычислять поправки к энергетическим уровням составных систем, в этих подходах весьма схожи (обозначения импульсов соответствуют рис. 1).

³Для функции Грина (2) также необходимо осуществить $x_4^0 \rightarrow \infty$.

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД

МЕТОД ЭУД

Затравочная функция распространения для двухфермионной системы

$$\widehat{G}_0(\vec{p}, \vec{q}; E) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 dq_0 \times$$

$$\times G_0(\vec{p}, \vec{q}; p_0, q_0; E);$$

$$G_0(\vec{p}, \vec{q}; p_0, q_0; E) =$$

$$= i(2\pi)^4 \frac{1}{\widehat{p}_1 - m_1} \frac{1}{\widehat{p}_2 - m_2} \delta^{(4)}(p - q).$$

Параметр относительного времени в этом подходе приравнивается нулю. В импульсном пространстве такой операции соответствует интегрирование по относительным энергиям.

$\widehat{G}_0^+ = F = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) (E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})^{-1}$ — свободная функция Грина, спроектированная на состояния с положительными энергиями.

$$g(p, q; E) = \Lambda_2 S(p, q; E) = 2\pi i \theta(p_2^0) \times \\ \times \delta(p_2^2 - m_2^2) (2\pi)^4 \frac{\widehat{p}_2 + m_2}{\widehat{p}_1 - m_1} \delta^{(4)}(p - q).$$

Λ_2 обозначает проектор на массовую поверхность второй частицы. Импульсы составляющих обычно записываются в форме $p_1 = \mathcal{P} - p_2$. В случае системы центра масс $\mathcal{P} = (E, \vec{0})$ имеем $p_1^0 = E - \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2}$.

Полная функция Грина

Двухвременная полная функция Грина связана с амплитудой рассеяния вне массовой поверхности соотношением

$$\widehat{G}^+ = \widehat{G}_0^+ + [G_0 \widehat{T} G_0]^+,$$

которое может быть переписано с использованием квазипотенциала

$$\widehat{V} = (\widehat{G}_0^+)^{-1} - (\widehat{G}^+)^{-1} = \\ = (\widehat{G}_0^+)^{-1} [G_0 \widehat{T} G_0]^+ (\widehat{G}^+)^{-1} = \\ = \tau [1 + \widehat{G}_0^+ \tau]^{-1};$$

Эффективное уравнение Дирака строится с помощью новой двухчастичной функции Грина G :

$$G = g + g T g,$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\widehat{G}^+ = \widehat{G}_0^+ + \widehat{G}_0^+ \widehat{V} \widehat{G}_0^+.$$

$$G = g + g \widehat{V}_{\text{ЭУД}} G.$$

С ее помощью можно определить трехмерную функцию Грина:

$$G(p, q; E) = i(2\pi)^2 \delta(p_2^2 - m_2^2) \times \\ \times \widehat{G}(\vec{p}, \vec{q}; E) \delta(q_2^2 - m_2^2),$$

подчиняющуюся аналогичному уравнению.

Ядро уравнения

Представляет собой квазипотенциал, выражающийся через амплитуду

$$\tau = (\widehat{G}_0^+)^{-1} [G_0 \widehat{T} G_0]^+ (\widehat{G}_0^+)^{-1}$$

следующим образом:

$$\tau = \widehat{V} + \widehat{V} \widehat{G}_0^+ \tau.$$

Вводится соотношением

$$T = \widehat{V}_{\text{ЭУД}} + \widehat{V}_{\text{ЭУД}} g T.$$

Уравнение для волновой функции

Одновременная волновая функция подчиняется соответствующему однородному уравнению:

$$(\widehat{G}_0^+)^{-1} \Psi = \widehat{V} \Psi,$$

Однородное уравнение для волновой функции в символическом виде

$$S^{-1} \phi = \Lambda_2 \widehat{V}_{\text{ЭУД}} \phi,$$

которые в развернутом виде для двухфермионной системы записываются следующим образом:

$$(\widehat{p}_1 - m_1) \phi(\vec{p}; E) = \\ = (\widehat{p}_2 + m_2) \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{2q}} \times \\ \times i \widehat{V}_{\text{ЭУД}}(\vec{p}, \vec{q}; E) \phi(\vec{q}; E).$$

Так как ВФ по мюонному индексу удовлетворяет уравнению Дирака, вышеуказанное уравнение переписывается для ВФ Ψ , содержащей только спиновый фактор электрона:

$$(\widehat{p}_1 - m_1) \Psi(\vec{p}; E) = \\ = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} i \widehat{V}_{\text{ЭУД}}(\vec{p}, \vec{q}; E) \Psi(\vec{q}; E).$$

$$(E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p}) \Psi(\vec{p}) = \\ = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \widehat{V}(\vec{p}, \vec{q}; E) \Psi(\vec{q}).$$

$$[F^{-1}(E) - V(\vec{p}, \vec{q}; E)] \Psi_E(\vec{q}) = 0, \quad (14)$$

где⁴

$$F(E) = \hat{G}_0^+ = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) (E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})^{-1}, \quad (15)$$

а квазипотенциал определен выше. Тогда для собственной функции Ψ_n , отвечающей состоянию с собственным значением E_n , имеет место соотношение

$$\hat{G}^+(E) W(E, E_n) \Psi_n = \frac{\Psi_n}{E - E_n}, \quad (16)$$

причем

$$W(E, E_n) = \frac{F^{-1}(E) - F^{-1}(E_n)}{E - E_n} - \frac{V(E) - V(E_n)}{E - E_n}. \quad (17)$$

Поскольку вблизи полюса ($E \simeq E_n$)

$$\hat{G}^+(E) \simeq \frac{\Psi_n \Psi_n^*}{E - E_n}, \quad (18)$$

условия ортогональности и нормировки принимают вид

$$\Psi_m^* W(E_m, E_n) \Psi_n = \delta_{mn} \quad (19)$$

и

$$\Psi_m^* \Psi_n = \delta_{mn} + \Psi_m^* \left. \frac{\partial V(E)}{\partial E} \right|_{E=E_n} \Psi_n, \quad (E_m = E_n). \quad (20)$$

Поскольку уровни энергии составной частицы являются полюсами точной амплитуды рассеяния, а в каждом отдельном члене разложения этой амплитуды по степеням заряда такой полюс отсутствует, то должна существовать бесконечная последовательность диаграмм для связанных состояний, приводящих к вкладам в энергию связанной системы, имеющих одинаковый порядок по α . Диаграммы, составляющие эту последовательность, — приводимые в смысле двухчастичных сечений фейнма-

⁴Ввиду отсутствия у свободной функции Грина двухфермионной системы обратной, необходимым в квазипотенциальном подходе является осуществление операции проектирования \hat{G}_0 на состояния с положительными энергиями.

новские диаграммы. Однако подобный эффект связанности может иметь место и для неприводимых диаграмм (например, при расчете лэмбовского сдвига уровней энергии).

Как показано в [3,17], диаграммы с последовательным обменом кулоновскими фотонами в инфракрасной области вносят вклад одного порядка по α при расчете сверхтонкого расщепления ВП-систем. Таким образом, требуется соответствующая модификация процедуры построения квазипотенциала ввиду необходимости выборочного суммирования бесконечной последовательности диаграмм. Введем кулоновскую функцию Грина G_C , удовлетворяющую уравнению

$$(G_0^{-1} - K_C) G_C = I, \quad (21)$$

$$K_C(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e(Ze)\Gamma_0}{(\vec{p} - \vec{q})^2} = \nu_C \Gamma_0 \quad (22)$$

— кулоновское ядро ($\Gamma_0 = \gamma_{10}\gamma_{20}$). Уравнение (21) может быть переписано в виде

$$G_C = G_0 + G_0 K_C G_C = G_0 + G_C K_C G_0, \quad (23)$$

а полная функция Грина может быть записана аналогично (9)—(11):

$$G = G_C + G_C \tilde{T} G_C, \quad (24)$$

$$\tilde{T} = \tilde{K} + \tilde{K} G_C \tilde{T}, \quad (25)$$

$$\tilde{T} = \tilde{K} + \tilde{K} G \tilde{K} \quad (26)$$

(причем $\tilde{K} = K_{BS} - K_C$).

Волновая функция, характеризующая состояние двухфермионной системы с полной энергией E , должна тогда удовлетворять уравнению квазипотенциального типа

$$[(\hat{G}_C^+(\vec{p}, \vec{q}; E))^{-1} - \tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E)] \Psi_E(\vec{q}) = 0, \quad (27)$$

где опять по повторяющимся импульсам подразумевается интегрирование. Соответствующий квазипотенциал имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E) &= [\hat{G}_C^+(\vec{p}, \vec{q}; E)]^{-1} - [\hat{G}^+(\vec{p}, \vec{q}; E)]^{-1} = \\ &= (\hat{G}_C^+)^{-1} [G_C \hat{T} G_C]^+ (\hat{G}^+)^{-1},\end{aligned}\quad (28)$$

а \hat{G}^+ — двухвременная функция Грина, спроектированная на положительно-частотные состояния (см. выше).

Развитая в [18] методика, использующая кулоновскую функцию Грина, позволяет учесть последовательный многократный обмен кулоновскими фотонами и выписать выражения для сдвига уровней энергии ΔE относительно кулоновского.

Из формулы (24) видно, что полная двухчастичная функция Грина (спроектированная на положительно-частотные состояния) имеет обратную:

$$(\hat{G}^+)^{-1} = (\hat{G}_C^+)^{-1} - (\hat{G}_C^+)^{-1} \tilde{T}_C^+ (\hat{G}^+)^{-1}, \quad \tilde{T}_C^+ = [G_C \tilde{T} G_C]^+ \quad (29)$$

и квазипотенциал может быть представлен в виде

$$\tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E) = (\hat{G}_C^+)^{-1} \tilde{T}_C^+ (\hat{G}^+)^{-1} = \tilde{\tau}_C - \tilde{\tau}_C \hat{G}_C^+ \tilde{\tau}_C + \dots, \quad (30)$$

$$\tilde{\tau}_C = (\hat{G}_C^+)^{-1} \tilde{T}_C^+ (\hat{G}_C^+)^{-1}. \quad (31)$$

Проектируя двухвременную кулоновскую функцию Грина на состояния с положительными частотами, находим

$$\hat{G}_C^+ = F + F(\nu_C \hat{G}_C)^+ = F + (\hat{G}_C \nu_C)^+ F. \quad (32)$$

Здесь использовано выражение

$$\hat{G}_0 = (\Lambda^{++} F - \Lambda^{--} F') \Gamma_0, \quad (33)$$

где F определено уравнением (15), а

$$F' = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) (E + \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p})^{-1}. \quad (34)$$

$\Lambda^{++} = \Lambda_1^+(\vec{p}) \Lambda_2^+(-\vec{p})$, $\Lambda^{--} = \Lambda_1^-(\vec{p}) \Lambda_2^-(-\vec{p})$, $\Lambda^\pm(\vec{p})$ — проекционные операторы.

Применяя для преобразования выражения (32) соотношения

$$[Q G_C]^+ = [Q \Sigma \Gamma_0]^+ \hat{G}_C^+, \quad (35)$$

$$|G_C Q|^+ = \widehat{G}_C^+ |\Sigma' \Gamma_0 Q|^+ \quad (36)$$

(где $\Sigma = (1 + \Lambda^{--} F' \nu_C)^{-1}$, $\Sigma' = (1 + \nu_C \Lambda^{--} F')^{-1}$, а Q имеет произвольную матричную структуру), получаем замкнутое уравнение для функции \widehat{G}_C^+ :

$$\widehat{G}_C^+ = F + F K_\Sigma \widehat{G}_C^+ = F + \widehat{G}_C^+ K_\Sigma F \quad (37)$$

с ядром $K_\Sigma = u_1^* u_2^* \widetilde{\Sigma} u_1 u_2$, $\widetilde{\Sigma} = \nu_C \Sigma = \Sigma' \nu_C$. Обратная функция Грина $(\widehat{G}_C^+)^{-1}$ в этом случае

$$(\widehat{G}_C^+)^{-1} = F^{-1} - K_\Sigma, \quad (38)$$

а ядро K_Σ содержит проекции кулоновского взаимодействия на отрицательно-частотные состояния

$$K_\Sigma = K_C^+ + \delta K_\Sigma = K_C^+ - u_1^* u_2^* \nu_C \Lambda^{--} F' \nu_C u_1 u_2. \quad (39)$$

Важно отметить, что F' , в отличие от F , не имеет полюса при $\vec{p}, \vec{q} \rightarrow 0$, $E \rightarrow m_1 + m_2$. В приближении больших компонент ($u_i = \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix}$, w_i — паулиевский нормированный спинор) ядро K_C^+ совпадает с кулоновским потенциалом, а член, содержащий оператор проектирования Λ^{--} , обращается в ноль. Таким образом, главная часть ядра K_Σ равна K_C^+ , а функция $(\widehat{G}_C^+)^{-1}$ совпадает с обратной функцией Грина нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом.

Во многих случаях квазипотенциал удобно выразить через амплитуду $\widetilde{T}_0^+ = [\widehat{G}_0 \widetilde{T}_0]^+$. Это можно легко осуществить, используя вспомогательные формулы (35), (36). Так как

$$\widetilde{T}_C^+ = \widetilde{T}_0^+ + (\widetilde{T}_0 K_C \widehat{G}_C)^+ + (\widehat{G}_C K_C \widetilde{T}_0)^+ + (\widehat{G}_C K_C \widetilde{T}_0 K_C \widehat{G}_C)^+, \quad (40)$$

после применения преобразований (35), (36), имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_C^+ = & \widetilde{T}_0^+ + \widehat{G}_C^+ (\Sigma' \nu_C \widetilde{T}_0)^+ + (\widetilde{T}_0 \nu_C \Gamma_0 \Sigma \Gamma_0)^+ \widehat{G}_C^+ + \\ & + \widehat{G}_C^+ (\Sigma' \nu_C \widetilde{T}_0 K_C \Sigma \Gamma_0)^+ \widehat{G}_C^+. \end{aligned} \quad (41)$$

Соотношение (41) переписывается в более удобном виде:

$$\tilde{T}_C^+ = (\hat{G}_C^+ u_1^* u_2^* \tilde{\Sigma} I + I u_1^* u_2^*) \tilde{T}_0 (\Gamma_0 u_1 u_2 I + \Gamma_0 I \tilde{\Sigma} u_1 u_2 \hat{G}_C^+), \quad (42)$$

или, с учетом того, что

$$\lambda^+ + \lambda^- = I, \quad \lambda^- = \Lambda_1^+(\vec{p}) \Lambda_2^-(\vec{-p}) + \Lambda_1^-(\vec{p}) \Lambda_2^+(\vec{-p}) + \Lambda^{--}, \quad (43)$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_C^+ = & \hat{G}_C^+ [F^{-1} \tilde{T}_0^+ F^{-1} + F^{-1} (\tilde{T}_0 \Gamma_0 \lambda^- \tilde{\Sigma} \Gamma_0)^+ + \\ & + (\tilde{\Sigma} \lambda^- \tilde{T}_0)^+ F^{-1} + (\tilde{\Sigma} \lambda^- \tilde{T}_0 \Gamma_0 \lambda^- \tilde{\Sigma} \Gamma_0)^+] \hat{G}_C^+. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, амплитуда \tilde{t}_C может быть представлена в виде суммы $\tilde{t}_C = \tilde{t}_0 + \rho$, где \tilde{t}_0 — амплитуда рассеяния, содержащая матрицу \tilde{T} , а остальные члены отвечают взаимодействию более высокого порядка с вычетом соответствующих итераций.

Графическая интерпретация амплитуды \tilde{t}_0 очевидна: она представляет собой совокупность всех неприводимых диаграмм, исключая диаграммы обмена одним кулоновским фотоном, а также приводимые диаграммы с обменами кулоновскими фотонами лишь в промежуточных состояниях. Соответствующий квазипотенциал может быть также разбит на две части:

$$\tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E) = \tilde{V}_{\tilde{t}_0} + \tilde{V}_\rho + \text{более высокие порядки разложения}, \quad (45)$$

где

$$\tilde{V}_{\tilde{t}_0} = \tilde{t}_0 - \tilde{t}_0 \hat{G}_C^+ \tilde{t}_0, \quad (46)$$

$$\tilde{V}_\rho = \rho - \rho \hat{G}_C^+ \rho - \tilde{t}_0 \hat{G}_C^+ \rho - \rho \hat{G}_C^+ \tilde{t}_0, \quad (47)$$

причем

$$\rho = F^{-1} \Delta R F^{-1}, \quad (48)$$

$$\Delta R = F(\tilde{\Sigma} \lambda^- \tilde{T}_0)^+ + (\tilde{T}_0 \Gamma_0 \lambda^- \tilde{\Sigma} \Gamma_0)^+ F + F(\tilde{\Sigma} \lambda^- \tilde{T}_0 \Gamma_0 \lambda^- \tilde{\Sigma} \Gamma_0)^+ F. \quad (49)$$

После подстановки в (46) амплитуды \tilde{T} из (26) ($\tilde{T} \approx \tilde{K} + \tilde{K} G_C \tilde{K}$) имеем

$$\tilde{V}_{\tilde{t}_0} = F^{-1} [\tilde{K}_0^+ + (\tilde{K} G_C \tilde{K})_0^+ - \tilde{K}_0^+ F^{-1} \hat{G}_C^+ F^{-1} \tilde{K}_0^+ + \text{и т.д.}] F^{-1}, \quad (50)$$

в котором использованы обозначения

$$\tilde{K}_0^+ = [G_0 \widehat{K} G_0]^+ \quad (51)$$

$$(\tilde{K} G_C \tilde{K})_0^+ = [G_0 \widehat{K} G_C \tilde{K} G_0]^+ \quad (52)$$

Для вычисления сдвига уровней энергии двухфермионной системы с точностью до $\alpha^6 \ln \alpha$ достаточно учесть

$$(\tilde{K} G_C \tilde{K})_0^+ = (\tilde{K} G_0 \tilde{K})_0^+ + (\tilde{K}_0 K_C \tilde{K}_0)^+ + (\tilde{K}_0 \Gamma_0 \nu_C \hat{G}_C \nu_C \Gamma_0 \tilde{K}_0)^+ \quad (53)$$

Используя представление единичного оператора через проекционные, находим

$$\begin{aligned} (\tilde{K}_0 \Gamma_0 \nu_C \hat{G}_C \nu_C \Gamma_0 \tilde{K}_0)^+ &= \tilde{K}_0^+ (\nu_C \hat{G}_C \nu_C)^+ \tilde{K}_0^+ + \tilde{K}_0^+ (\nu_C \hat{G}_C \nu_C \Gamma_0 \lambda^- \tilde{K}_0)^+ + \\ &+ (\tilde{K}_0 \Gamma_0 \lambda^- \nu_C \hat{G}_C \nu_C)^+ \tilde{K}_0^+ + (\tilde{K}_0 \Gamma_0 \lambda^- \nu_C \hat{G}_C \nu_C \Gamma_0 \lambda^- \tilde{K}_0)^+ \end{aligned} \quad (54)$$

Первое слагаемое полученного выражения вносит наибольший вклад при вычислении сдвигов уровней энергии.

Воспользовавшись определением оператора Σ , можно выполнить преобразование

$$\begin{aligned} (\nu_C \hat{G}_C \nu_C)^+ &= [\nu_C \Sigma (I + \Lambda^{-} F' \nu_C) \hat{G}_C \nu_C]^+ = \\ &= (\tilde{\Sigma} \lambda^+ \hat{G}_C \nu_C)^+ + (\tilde{\Sigma} \lambda^- \hat{G}_C \nu_C)^+ + (\tilde{\Sigma} \Lambda^{-} F' \nu_C \hat{G}_C \nu_C)^+ \end{aligned} \quad (55)$$

Исходя из определения ядра K_Σ (39), имеем

$$(\tilde{\Sigma} \lambda^+ \hat{G}_C \nu_C)^+ = K_\Sigma (\hat{G}_C \nu_C)^+ = K_\Sigma \hat{G}_C^+ K_\Sigma \quad (56)$$

Так как имеет место равенство $\lambda^- \hat{G}_C = -\Lambda^{-} F' (\Gamma_0 + \nu_C \hat{G}_C)$, сумму двух последних слагаемых выражения (55) можно преобразовать к виду

$$(\tilde{\Sigma} \lambda^- \hat{G}_C \nu_C)^+ + (\tilde{\Sigma} \Lambda^{-} F' \nu_C \hat{G}_C \nu_C)^+ = -(\tilde{\Sigma} \Lambda^{-} F' \Gamma_0 \nu_C)^+ = K_\Sigma - K_C^+ \quad (57)$$

Следовательно,

$$(\nu_C \hat{G}_C \nu_C)^+ = K_\Sigma \hat{G}_C^+ K_\Sigma + K_\Sigma - K_C^+ \quad (58)$$

Итерационный член в выражении квазипотенциала (50) с учетом (37) записывается следующим образом:

$$\tilde{K}_0^+ F^{-1} \hat{G}_C^+ F^{-1} \tilde{K}_0^+ = \tilde{K}_0^+ (F^{-1} + K_\Sigma + K_\Sigma \hat{G}_C^+ K_\Sigma) \tilde{K}_0^+. \quad (59)$$

Подставляя последние две формулы в выражение для квазипотенциала, убеждаемся, что проекция блока $v_C \hat{G}_C v_C$ на положительно-частотные состояния выпадает из выражения для квазипотенциала (50). При этом

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\tilde{\tau}_0} = & F^{-1} \{ \tilde{K}_0^+ + (\tilde{K}_0 G_0 \tilde{K}_0)^+ - \tilde{K}_0^+ F^{-1} \tilde{K}_0^+ + (\tilde{K}_0 K_C \tilde{K}_0)^+ - \\ & - \tilde{K}_0^+ K_C^+ \tilde{K}_0^+ + \tilde{K}_0^+ (v_C \hat{G}_C v_C \Gamma_0 \lambda^- \tilde{K}_0)^+ + (\tilde{K}_0 \Gamma_0 \lambda^- v_C \hat{G}_C v_C)^+ \tilde{K}_0^+ + \\ & + (\tilde{K}_0 \Gamma_0 \lambda^- v_C \hat{G}_C v_C \Gamma_0 \lambda^- \tilde{K}_0)^+ \} F^{-1}. \end{aligned} \quad (60)$$

Информацию о поправках к кулоновским уровням энергии можно получить, строя теорию возмущений на основе приведенных выше рассуждений и уравнения (27), записанного в виде

$$(F^{-1}(E_C) + \Delta E - K_C^+ - \tilde{V}(E)) \Psi_E = 0, \quad (61)$$

где

$$\tilde{V} = \tilde{V} + K_\Sigma - K_C^+, \quad (62)$$

а $\Delta E = E - E_C$ — поправка к основному уровню нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом.

Если E' — собственное значение волновой функции уравнения с ядром K_C^+ :

$$(\hat{G}_C^+(E'))^{-1} \Psi_{E'} = (F^{-1}(E') - K_C^+) \Psi_{E'} = 0, \quad (63)$$

то исходное уравнение (61) принимает следующий вид:

$$((\hat{G}_C^+(E'))^{-1} + \Delta E' - \tilde{V}(E)) \Psi_E = 0, \quad (64)$$

причем

$$\Delta E' = E - E' \text{ и } \Delta E = \Delta E' + \Delta E_C = \Delta E' + E' - E_C. \quad (65)$$

Положим, что собственная функция $\Psi_{E'}$ и собственные значения энергии известны. В соответствии с методом теории возмущений в первом порядке находим ($\Psi_E = \Psi_{E'} + \Psi_I$):

$$\left((\hat{G}_C^+(E'))^{-1} \Psi_I + \Delta E'_I \Psi_{E'} - \tilde{V}(E') \Psi_{E'} \right) = 0. \quad (66)$$

Домножив обе части этого равенства слева на $\Psi_{E'}^*$ и использовав условие нормировки, получаем

$$\Delta E'_I = \langle \Psi_{E'} | \tilde{V}(E') | \Psi_{E'} \rangle, \quad (67)$$

$$\Psi_I = \left(G_C^+(E') - \frac{\Psi_{E'} \Psi_{E'}^*}{E - E'} \right) \tilde{V}(E') \Psi_{E'}, \quad E \rightarrow E'. \quad (68)$$

Аналогично для поправки к уровню энергии во втором порядке теории возмущений:

$$\Delta E'_{II} = \langle \Psi_{E'} | \tilde{V}(E') (1 + G_C^+(E') \tilde{V}(E')) | \Psi_{E'} \rangle, \quad (69)$$

где

$$G_C^+(E') = G_C^+(E') - \frac{\Psi_{E'} \Psi_{E'}^*}{E - E'}. \quad (70)$$

Слагаемое, содержащее производную по энергии, выпало из конечного результата, так как $\Psi_{E'}$ — собственные функции уравнения с ядром K_C^+ , которое не зависит от энергии.

Для определения $\Psi_{E'}$ из уравнения (64) введем вспомогательную функцию $\Phi_{E'}$, определенную равенством:

$$\begin{aligned} \Psi_{E'}(\vec{q}) &= \frac{(\varepsilon_{1q} + \eta_1 E) (\varepsilon_{2q} + \eta_2 E)}{2\mu(E + \varepsilon_{1q} + \varepsilon_{2q})} \Phi_{E'}(\vec{q}) = \\ &= \frac{(2E' \varepsilon_{1q} + E'^2 + m_1^2 - m_2^2) (2E' \varepsilon_{2q} + E'^2 + m_2^2 - m_1^2)}{8\mu E'^2 (E' + \varepsilon_{1q} + \varepsilon_{2q})} \Phi_{E'}(\vec{q}), \quad (71) \end{aligned}$$

удовлетворяющую нерелятивистскому уравнению типа уравнения Шредингера:

$$(g_C^{-1} - \Delta\varepsilon - \delta K_C) \Phi_{E'} = 0, \quad (72)$$

где

$$g_C^{-1} = W_C - \frac{p^2}{2\mu} - v_C, \quad W_C = E_C - m_1 - m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (73)$$

$$\Delta\varepsilon = W_C + \frac{((m_1 + m_2)^2 - E'^2)(E'^2 - (m_1 - m_2)^2)}{8\mu E'^2} \approx -\Delta E_C \quad (74)$$

и

$$\delta K_C = K_C^+(\vec{p}, \vec{q}) \frac{(\varepsilon_{1q} + \eta_1 E)(\varepsilon_{2q} + \eta_2 E)}{2\mu(E + \varepsilon_{1q} + \varepsilon_{2q})} - v_C \approx K_C^+ \frac{W_C - \frac{\vec{q}^2}{2\mu}}{E' - \varepsilon_{1q} - \varepsilon_{2q}} - v_C. \quad (75)$$

Кулоновская ВФ 1S-состояния:

$$\phi_C(\vec{p}) = \frac{8\pi Z\alpha\mu}{(\vec{p}^2 + Z^2\alpha^2\mu^2)^2} |\phi_C(r=0)|, \quad (76)$$

$$|\phi_C(r=0)|^2 = \frac{(\alpha\mu)^3}{\pi}, \quad (77)$$

очевидно, удовлетворяет уравнению:

$$g_C^{-1} \phi_C = 0. \quad (78)$$

Поправка к этому кулоновскому уровню энергии ΔE_C и функция $\Phi_{E'}$ находятся (как и ранее $\Delta E'$) по квантово-механической теории возмущений:

$$\Delta E_C = \langle \phi_C | \delta K_C (1 + g_C' \delta K_C) | \phi_C \rangle, \quad (79)$$

$$g_C' = g_C - \frac{\phi_C \phi_C^*}{E - E_C}, \quad \text{при } E \rightarrow E_C. \quad (80)$$

Во втором порядке теории возмущений собственная функция уравнения (63) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{E'}(\vec{p}) = & \frac{(\varepsilon_{1p} + m_1)(\varepsilon_{2p} + m_2) - \vec{p}^2}{4m_1 m_2} \times \\ & \times |\phi_C(\vec{p}) + g_C'(\vec{p}, \vec{k}) \delta K_C(\vec{k}, \vec{q}) \phi_C(\vec{q})| \end{aligned} \quad (81)$$

(по 3-векторам \vec{k} и \vec{q} подразумевается интегрирование).

Окончательное выражение для полного сдвига уровней энергии E относительно основного кулоновского складывается из поправки ΔE_C и поправок от квазипотенциалов $\delta K_\Sigma = K_\Sigma - K_\Sigma^+$ и $\tilde{V}(E)$. В [18, 19] приведены следующие выражения для этих поправок:

$$\Delta E = \Delta E_{KK} + \Delta E_{KV} + \Delta E_{VV}, \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{KK} = & \langle \phi_C | \delta K_C (1 + g'_C \delta K_C) | \phi_C \rangle + \\ & + \langle \Psi_{E'} | \delta K_\Sigma (1 + G'_C(E') \delta K_\Sigma) | \Psi_{E'} \rangle, \end{aligned} \quad (83)$$

$$\Delta E_{KV} = \langle \Psi_{E'} | \tilde{V}(E') G'_C(E') \delta K_\Sigma + \delta K_\Sigma G'_C(E') \tilde{V}(E') | \Psi_{E'} \rangle, \quad (84)$$

$$\Delta E_{VV} = \langle \Psi_{E'} | \tilde{V}(E') (1 + G'_C(E') \tilde{V}(E')) | \Psi_{E'} \rangle. \quad (85)$$

Вопрос о построении ядра уравнения исследовался в [18—20]. Ядро \tilde{K} может быть разложено в ряд теории возмущений:

$$\tilde{K} = K_T + K^{(2)}, \quad (86)$$

индекс T обозначает поперечный фотон в кулоновской калибровке, а $K^{(2)}$ строится из диаграмм второго порядка по постоянной тонкой структуре.

Отметим, что в случае рассмотрения двухчастичной системы, состоящей из частицы и античастицы, при построении ядра взаимодействия необходимо учитывать аннигиляционный канал взаимодействия [19, 21].

Для исследования релятивистских спектров энергии связанной системы двух частиц был предложен метод, основанный на использовании локального квазипотенциального уравнения с релятивистской приведенной массой в с.ц.м. [22—24]. С помощью «рационализации» уравнения Логунова — Тавхелидзе [25] было получено следующее уравнение:

$$\left(\frac{b^2(E)}{2\mu_R} - \frac{\vec{p}^2}{2\mu_R} \right) \Psi_E(\vec{p}) = I(E, \vec{p}) \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V(\vec{p}, \vec{q}; E) \Psi_E(\vec{q}), \quad (87)$$

где

$$I(E, \vec{p}) = \frac{(E + \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p})(E^2 - (\varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})^2)}{8E_1 E_2 E}. \quad (88)$$

В соответствии с обозначениями рис. 1:

$$E_1 = \eta_1 E = \frac{E^2 - m_2^2 + m_1^2}{2E}, \quad (89)$$

$$E_2 = \eta_2 E = \frac{E^2 - m_1^2 + m_2^2}{2E}, \quad (90)$$

$E_1 + E_2 = E$ — энергия связанного состояния;

$$b^2(E) = \frac{1}{4E^2} [E^2 - (m_1 + m_2)^2] [E^2 - (m_1 - m_2)^2] \quad (91)$$

представляет собой квадрат относительного импульса на энергетической поверхности. Наконец,

$$\mu_R = \frac{E_1 E_2}{E} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} = \frac{E^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2}{4E^3} \quad (92)$$

— релятивистская приведенная масса, определенная в соответствии с релятивистским выражением для координаты центра масс. Необходимо заметить, что существуют и другие определения релятивистской приведенной массы типа

$$\tilde{\mu}_R = \frac{[E^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4E} \quad [25], \quad \mu'_R = \frac{m_1 m_2}{E} \quad [26].$$

Величина $m' = \sqrt{m_1 m_2}$, введенная в [27] (эффективная масса), близко связана с понятием релятивистской приведенной массы. Такое определение позволило авторам [27] редуцировать релятивистскую проблему двух тел к случаю движения частицы с массой m' в квазипотенциальном поле. В нерелятивистском пределе $E_{1,2} \rightarrow m_{1,2}$ релятивистская приведенная масса μ_R переходит в обычную приведенную массу $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Как указано ранее, можно считать квазипотенциал определенным из уравнения типа уравнения Липпмана — Швингера с амплитудой рассеяния при нулевой относительности энергии частиц: $p_0 = q_0 = 0$, $p_2^0 = E_1$, $p_2^0 = E_2$. На энергетической поверхности $E = \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p} = \varepsilon_{1q} + \varepsilon_{2q}$, $\varepsilon_{ip} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$, $\varepsilon_{iq} = \sqrt{\vec{q}^2 + m_i^2}$. $I(E, \vec{p}) = 1$ и уравнение (87) в этом случае может быть решено точно для кулоновского взаимодействия.

В случае взаимодействия двух спинорных частиц с массами m_1 , m_2 и зарядами $(-e)$ и Ze , как показано в [22], основной вклад в энергию связи частиц дает модифицированный кулоновский потенциал:

$$V_C(\vec{p}, \vec{q}; E) = -\frac{Ze^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \left(1 + \frac{b^2(E)}{E_1 E_2} \right). \quad (93)$$

Квантование уровней энергии определяется соотношением, аналогичным полученному в [28]:

$$\frac{b^2 E^2}{(b^2 + E_1 E_2)^2} = \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \quad (94)$$

($n = 1, 2, \dots$ — главное квантовое число), которое приводит к варианту релятивистской формулы Бальмера [29]:

$$E_n^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \right)^{-1/2}. \quad (95)$$

Указанную формулу можно переписать в виде разложения энергии связи B по степеням α^2 :

$$B = E - m_1 - m_2 = -\frac{\mu}{2} \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} + \frac{\mu}{8} \frac{Z^4 \alpha^4}{n^4} \left(3 - \frac{\mu^2}{m_1 m_2} \right),$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (96)$$

Релятивистская формула Бальмера включает эффекты отдачи, но не описывает тонкую и сверхтонкую структуру, связанную со спин-орбитальным и спин-спиновым взаимодействиями. Поправки такого вида в формализме локального квазипотенциала уравнения с релятивистской приведенной массой рассмотрены в [24]. В первом порядке теории возмущений

$$\Delta E_1 = \langle \Psi'_C | \Delta \hat{V}_\gamma + \hat{V}_{2\gamma} + \text{и т.д.} | \Psi'_C \rangle, \quad (97)$$

где $\Delta \hat{V}_\gamma = \hat{V}_\gamma - V_C$ определяется разностью квазипотенциала однофотонного обмена и модифицированного кулоновского потенциала (93);

$$V_{2\gamma} = T_{2\gamma}^+(\vec{p}, \vec{q}, p_0 = 0, q_0 = 0) - \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hat{V}_\gamma(\vec{p}, \vec{k}; E) \hat{V}_\gamma(\vec{k}, \vec{q}; E)}{\frac{b^2(E)}{2\mu_R} - \frac{\vec{k}^2}{2\mu_R}}. \quad (98)$$

В соответствии с теорией возмущений поправки второго порядка определяются формулой:

$$\Delta E_{II} = \langle \Psi'_C | \Delta \hat{V}_\gamma | \Psi'_C \rangle \langle \Psi'_C | \frac{\partial \Delta \hat{V}_\gamma}{\partial E} | \Psi'_C \rangle +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\langle \Psi'_C | \Delta \hat{V}_\gamma | \Psi'_{nC} \rangle \langle \Psi'_{nC} | \Delta \hat{V}_\gamma | \Psi'_C \rangle}{E_1^C - E_n^C} \quad (99)$$

с собственными функциями типа Паули, являющимися решением локального квазипотенциального уравнения с модифицированным кулоновским потенциалом:

$$\Psi'_C(\vec{p}) = \frac{8\pi Z\alpha \mu_{eff}}{(\vec{p}^2 + Z^2 \alpha^2 \mu_{eff}^2)^2} |\Psi_C(0)| \left[1 - \frac{1}{2}(Z\alpha)^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{m_1 m_2} \right) \right] \chi_1 \chi_2, \quad (100)$$

$$|\Psi_C(0)| = \sqrt{\frac{Z^3 \alpha^3 \mu_{eff}^3}{\pi}} \quad (101)$$

($\chi_{1,2}$ — двухкомпонентные паулиевские спиноры),

$$\mu_{eff} = \frac{b^2(E) + E_1 E_2}{E_n} = \mu_R + \frac{b^2(E)}{E_n} = \frac{m_1 m_2}{E_n} \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \right)^{-1/2}. \quad (102)$$

Полученные в таком подходе поправки к сверхтонкой структуре мюония порядка $(Z\alpha)^2 E_F$ и $\frac{m_1}{m_2} (Z\alpha)^2 E_F$ приведены в разд.4 настоящего обзора.

3. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА ЭНЕРГИИ В РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКАХ ПО α

Как видно из предыдущего, расчет тонкого и сверхтонкого расщепления уровней энергии сводится к нахождению матричных элементов квазипотенциала V . В нерелятивистском пределе ВФ слабо связанной системы может быть аппроксимирована δ -функцией Дирака. Использование кулоновской ВФ 1S-состояния позволяет рассматривать матричные элементы при ненулевых значениях импульсов $\vec{p}, \vec{q} \neq 0$. Однако

более точно релятивистские поправки учитываются при описании связанного состояния с помощью ВФ в форме (81).

В развитой в разд.2 теории возмущений квазипотенциал и ядро взаимодействия существенным образом включают кулоновскую функцию Грина. Методы использования этой функции при рассмотрении задач о тонкой и сверхтонкой структуре ВП-атомов различны. В первом случае особый интерес вызывает низкочастотная область виртуальных импульсов, где взаимодействие носит нерелятивистский характер. Здесь для учета эффектов связанности в виртуальных состояниях ядра взаимодействия важно рассматривать блок кулоновских взаимодействий в целом, например, с помощью явного выражения для функции Грина нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом.

При анализе СТР-уровней энергии необходимо иметь возможность рассматривать вклады от обменов одним или двумя поперечными и произвольным числом кулоновских фотонов. При этом достаточно использовать обычное разложение кулоновской функции Грина, ограничиваясь необходимым числом членов разложения⁵.

Если ограничиться точностью $O(\alpha^5)$, то при вычислениях 1S-уровня, основанных на квазипотенциале V , построенном из диаграмм порядка α^2 и выше, достаточно использовать приближенные ВФ [30]:

$$\phi_C^{\text{прибл}}(\vec{p}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}) |\phi_C(r=0)|, \quad E \approx m_1 + m_2. \quad (103)$$

Вышеуказанное утверждение обосновывается тем, что значение квадрата модуля ВФ (которая присутствует в матричном элементе) в координатном пространстве при $r=0$ имеет порядок α^3 :

$$|\phi_C(r=0)|^2 = \frac{(\alpha\mu)^3}{\pi n^3} \sim O(\alpha^3). \quad (104)$$

Используя известное представление δ -функции:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad (105)$$

находим

$$\frac{\pi \delta(x)}{2x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2} \quad (106)$$

⁵При расчете СТР основного уровня позитрония и мюония с точностью до α^6 ln α можно ограничиться диаграммами с обменом тремя фотонами.

и, таким образом,

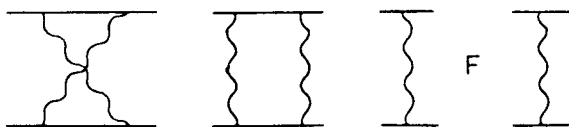
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi_C(\vec{p}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{8\pi\alpha\mu |\phi_C(0)|}{(\vec{p}^2 + \alpha^2\mu^2)^2} = 8\pi |\phi_C(0)| \frac{\pi\delta(p)}{2p^2}. \quad (107)$$

Используя формулу $\delta(\vec{p}) = \frac{\delta(p)}{2\pi p^2}$, справедливую для случая сферической симметрии, окончательно получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi_C(\vec{p}) = (2\pi)^3 |\phi_C(0)| \delta(\vec{p}). \quad (108)$$

Из вида кулоновской ВФ (76) ясно, что основной вклад в расщепление уровней энергии дает область импульсов $\vec{p}^2 \sim Z^2\alpha^2\mu^2$, в результате чего разложение подынтегрального выражения по p/m эквивалентно разложению всего интеграла по α (при условии сходимости интеграла).

Указанное свойство оказалось весьма полезным при расчете с точностью α^5 вкладов к СТР основного уровня позитрония от диаграмм [30]:



При вычислении матричных элементов «выжили» лишь верхние «большие» компоненты биспиноров и оказалось возможным положить $E^2 = m^2, \vec{p}, \vec{q} = 0$ в амплитуде взаимодействия, соответствующей этим диаграммам.

При расчете высших порядков ситуация изменяется из-за сингулярного поведения подынтегрального выражения в области малых импульсов.

На примере диаграммы с обменом одним поперечным фотоном рассмотрим выделение вкладов порядка $\alpha^2 \ln \alpha$ в энергию Ферми сверхтонкого расщепления $E_F = \frac{2}{3} \frac{\alpha^4 \mu^3}{m_1 m_2} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle$. Выражение для поправки от такой диаграммы имеет вид

$$\Delta E_{1T} = \langle \Phi'_C | F^{-1} [G_0 K_T G_0]^+ F^{-1} | \Phi'_C \rangle. \quad (109)$$

$$K_T = - \frac{4\pi\alpha \Gamma_{12}(\vec{k})}{(k_0^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon)} \quad (110)$$

— ядро, соответствующее диаграмме обмена одним поперечным фотоном,

$$\Gamma_{12}(\vec{k}) = \vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2 - \frac{(\vec{\gamma}_1 \vec{k})(\vec{\gamma}_2 \vec{k})}{k^2}, \quad (111)$$

а Φ_C — ВФ во втором порядке теории возмущений — можно (при расчете с необходимой нам точностью) заменить на $\phi_C(\vec{p})$, определенную уравнением (76) и представляющую собой точное решение для 1S-состояния нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом.

Аналитическое выражение величины (109) дается уравнением

$$\begin{aligned} \Delta E_{1T} = & - \frac{4\alpha^2 \mu^2 |\phi_C(0)|^2}{(2\pi)^6} \int \frac{d\vec{p} d\vec{q} d p_0 d q_0}{(\vec{p}^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 (\vec{q}^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} F^{-1}(p) F^{-1}(q) \times \\ & \times \int d k_0 d k'_0 |S_1(p_1) S_2(p_2) K_T(k_0, k'_0; \vec{p}, \vec{q}) S_1(q_1) S_2(q_2)|^+ \times \\ & \times \delta(p_0 - k_0) \delta(k'_0 - q_0). \end{aligned} \quad (112)$$

Используя фурье-представление δ -функции и теорию вычетов, после интегрирования по переменным p_0, q_0, k_0, k'_0 находим

$$\begin{aligned} \Delta E_{1T} = & \frac{4i\alpha^3 \mu^2 |\phi_C(0)|^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{|\vec{p} - \vec{q}|} \frac{u_1^*(\vec{p}) u_2^*(-\vec{p}) \vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q})}{(\vec{p}^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 (\vec{q}^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\ & \times \int dt e^{-i|\vec{p} - \vec{q}| |t|} \{ \vartheta(t) e^{-i|t|(\varepsilon_{1q} + \varepsilon_{2p} - E - i\varepsilon)} + \vartheta(-t) e^{-i|t|(\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2q} - E - i\varepsilon)} \}. \end{aligned} \quad (113)$$

После выделения из спиновых структур (см. числитель выражения (113)) спин-спинового взаимодействия и использования симметрий выражений спиновой структуры относительно замен $p_i \Leftrightarrow q_j$, например:

$$\begin{aligned} & \int d\vec{p} d\vec{q} (\vec{\sigma}_1 \vec{p}) (\vec{\sigma}_2 \vec{q}) f(\vec{p}^2, \vec{q}^2, (\vec{p} - \vec{q})^2) = \\ & = \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \int d\vec{p} d\vec{q} (\vec{p} \vec{q}) f(\vec{p}^2, \vec{q}^2, (\vec{p} - \vec{q})^2), \end{aligned} \quad (114)$$

можно записать интегральное выражение для $\Delta E_T^{\text{СТР}}$ (случай разных масс $m_1 \neq m_2$):

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{1T} = & \frac{\alpha^3 \mu^2}{3\pi^3} |\phi_c(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \int d\vec{p} d\vec{q} \frac{1}{(\vec{p}^2 + \alpha^2 \mu^2)^2 (\vec{q}^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\
 & \times \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}| + (\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2q} - E - i\varepsilon)} \Xi \left\{ \vec{p}^2 (\vec{q}^2 - \vec{p}^2) \left[\frac{M_{1q}^+}{\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q}} + \frac{M_{2q}^+}{\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q}} \right] + \right. \\
 & + \vec{q}^2 (\vec{p}^2 - \vec{q}^2) \left[\frac{M_{1p}^+}{\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q}} + \frac{M_{2p}^+}{\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q}} \right] + (\vec{p} - \vec{q})^2 |M_{2p}^+ M_{1q}^+ + M_{1p}^+ M_{2q}^+| - \\
 & \left. - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2 (\vec{p}^2 - \vec{q}^2)^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2 (\varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1q}) (\varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2q})} \right\}. \quad (115)
 \end{aligned}$$

Выше использованы обозначения:

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} \varepsilon_{1q} \varepsilon_{2q} M_{1p}^+ M_{2p}^+ M_{1q}^+ M_{2q}^+}}, \quad (116)$$

$$M_{ip}^+ = \varepsilon_{ip} + m_i, \quad M_{iq}^+ = \varepsilon_{iq} + m_i.$$

Как правило, еще до интегрирования оказывается возможным оценить порядок по α каждого из интегралов в суммарную величину сверхтонкого сдвига. В [19] показано, что логарифмическую поправку порядка $\alpha^2 \ln \alpha$ к энергии Ферми всегда обеспечивает интеграл, который условилсь называть стандартным:

$$\begin{aligned}
 I_{CT}(\ln \alpha) = & \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d\vec{p}}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} (\vec{p}^2 + \alpha^2 \mu^2)} \int \frac{d\vec{q}}{(\vec{q}^2 + \alpha^2 \mu^2) (\vec{p} - \vec{q})^2} = \\
 = & \int_0^\infty \frac{p dp}{\varepsilon_{1p} \varepsilon_{2p} (\vec{p}^2 + \alpha^2 \mu^2)} \int_0^\infty \frac{q dq}{\vec{q}^2 + \alpha^2 \mu^2} \ln \frac{p+q}{|p-q|} = \frac{\pi^2}{2m_1 m_2} \ln \alpha^{-1} + O(\alpha), \\
 & \alpha^6 I_{CT} \sim \alpha^6 \ln \alpha. \quad (117)
 \end{aligned}$$

Дополнительные степени p или q в числителе и факторов $(\vec{p}^2 + \alpha^2 \mu^2)$ или $(\vec{q}^2 + \alpha^2 \mu^2)$ в знаменателе подынтегрального выражения приводят к вкладам порядка α^6 или α^4, α^5 соответственно.

К стандартному интегралу в (115) приводят слагаемые в фигурных скобках, содержащие произведения $\vec{p}^2 \vec{q}^2$. Кроме того, здесь оказывается

существенным отличие в знаменателе (115) фактора $(|\vec{p} - \vec{q}| + \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2q} - E)$ от $|\vec{p} - \vec{q}|$. Основной вклад этого слагаемого — порядка α^4 , а высшие члены разложения знаменателя приводятся к стандартному интегралу.

Другие диаграммы тоже вносят вклад порядка $\sim \alpha^6 \ln \alpha$ в СТР мюония, который вычисляется аналогичным образом. Результаты вычислений [31] приведены в табл. 1:

Таблица 1. Вклады в СТР мюония от диаграммы рис.2.

$$\Delta E_{\text{Му}}^{\text{СТР}} = \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_e m_\mu} E_F \ln \alpha K_i, \quad \mathfrak{M} = \frac{m_e}{m_\mu} + \frac{m_\mu}{m_e}$$

Диаграмма	Вклад K_i в $\Delta E_{\text{Му}}^{\text{СТР}}$
а	1/4
б	$\mathfrak{M} + 2$
в	9/2
г	$-(\mathfrak{M} + 2)$
д	$3\mathfrak{M}$
е	$-2(\mathfrak{M} + 2)$
ж	5/4
з	$-\mathfrak{M}$
Итого	2

В методе, использующем амплитуду T (составляющие частицы находятся на массовой поверхности, $p_1^0 = \varepsilon_{1p}$, $p_2^0 = \varepsilon_{2p}$, $q_1^0 = \varepsilon_{1q}$, $q_2^0 = \varepsilon_{2q}$), уже на этапе вычисления вкладов от диаграмм обмена одним поперечным фотоном появляется проблема правильного учета эффектов запаздывания. В зависимости от способа записи ω^2 в знаменателе фотонного пропагатора

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \vec{k}^2} \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right) \quad (118)$$

вклад порядка $\sim \alpha^6 \ln \alpha$ различный (см. табл.2).

Сравнивая результаты, выписанные в табл.2, с результатом, вычисленным первым методом (двухвременных функций Грина):

$$\Delta E_T^{\text{СТР}} (\alpha^6 \ln \alpha) = E_F \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} + 2 \right) \ln \alpha^{-1}, \quad (119)$$

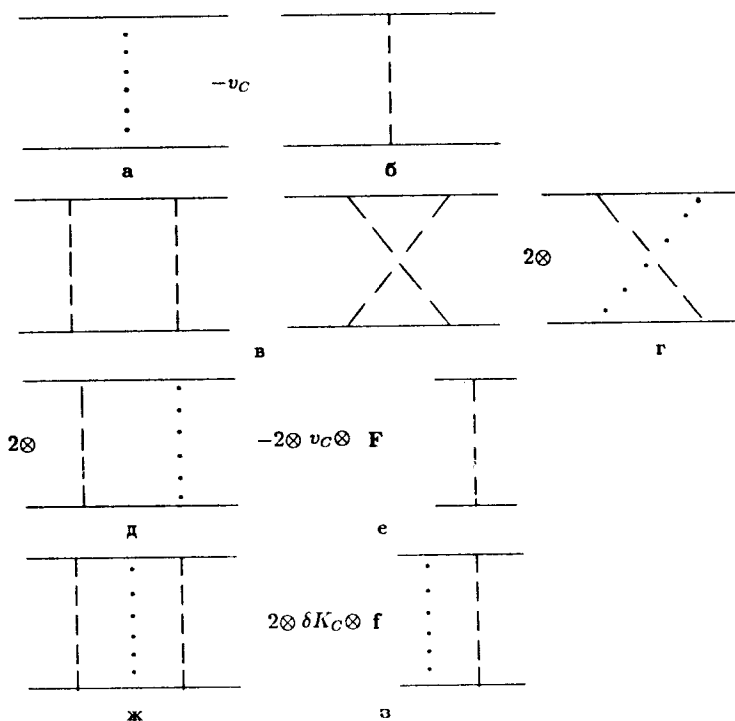

 Рис. 2. Диаграммы, дающие вклады порядка $\sim \alpha^6 \ln \alpha$ в СТР мюония

 Таблица 2. Вклад в СТР двухфермионной системы от диаграммы однофотонного обмена (ω^2 — нулевая компонента фотонного 4-импульса)

ω^2	$\Delta E_T^{\text{СТР}} (\alpha^6 \ln \alpha), m_1 \neq m_2$	$\Delta E_T^{\text{СТР}} (\alpha^6 \ln \alpha), m_1 = m_2$
0	$E_F \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} \mathfrak{N} \ln \alpha^{-1}$	$\frac{1}{2} E_F \alpha^2 \ln \alpha^{-1}$
$[\varepsilon_{1p} - \varepsilon_{1q}]^2$	$E_F \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} (\mathfrak{N} - 2 \frac{m_2}{m_1}) \ln \alpha^{-1}$	0
$[\varepsilon_{2p} - \varepsilon_{2q}]^2$	$E_F \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} (\mathfrak{N} - 2 \frac{m_1}{m_2}) \ln \alpha^{-1}$	0
$[(\varepsilon_{1p} - \varepsilon_{1q})(\varepsilon_{2q} - \varepsilon_{2p})]$	$E_F \frac{\mu^2 \alpha^2}{m_1 m_2} (\mathfrak{N} + 2) \ln \alpha^{-1}$	$E_F \alpha^2 \ln \alpha^{-1}$

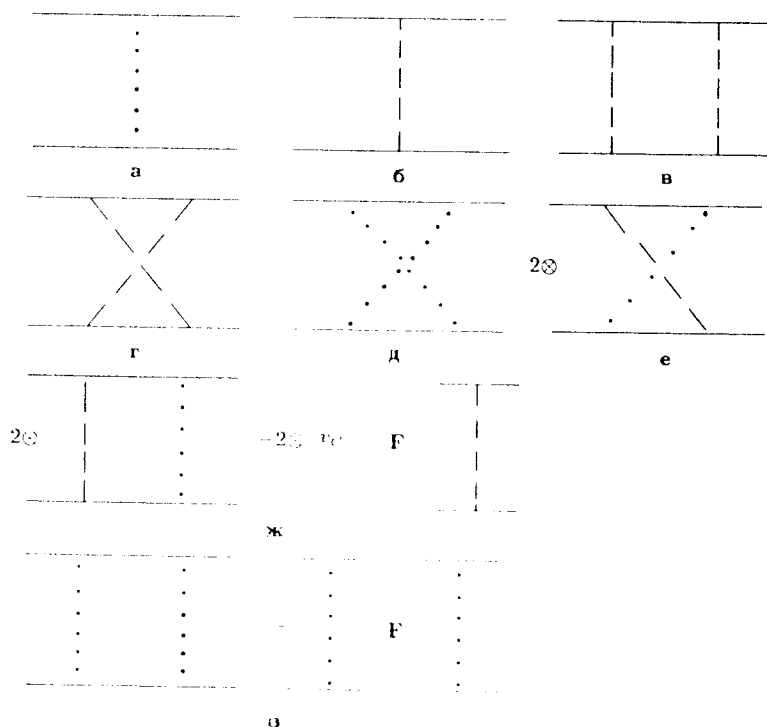


Рис. 3. Диаграммы, использованные при анализе аномальных вкладов порядка $\alpha^5 \ln \alpha$

убеждаемся, что предпочтительнее использовать симметричную форму записи ω^2 в квазипотенциале, продолженном за энергетическую поверхность ($|\vec{p}|^2 \neq |\vec{q}|^2$).

В диаграммах высших порядков при использовании указанного выше метода перехода на массовую поверхность ситуация более сложная. Во-первых, неясен способ симметризации (т.е. каким образом «сходить» с энергетической поверхности). Во-вторых, проблема наличия дополнительных полюсов существенно усложняет расчеты. Интегрирование по петлевому импульсу, например, уже необходимо понимать в смысле главного значения. При такой ситуации становятся проблематичными использование различных разложений подынтегрального выражения и перемена порядка интегрирования.

Таким образом, наиболее корректный учет эффектов запаздывания происходит при использовании первого способа построения квазипотен-

циала. Однако в этом случае уже при учете диаграмм однофотонного обмена появляется проблема аномальных вкладов $\sim \alpha^5 \ln \alpha$ в СТР основного уровня двухфермионной системы, которые во втором методе не появляются. Эта проблема не является специфической особенностью квазипотенциального подхода, а имеет общий характер для теории связанных состояний [4].

Диаграммы, которые могут вносить вклад $\sim \alpha^5 \ln \alpha$ в сверхтонкое расщепление основного уровня позитрония в прямом канале, изображены на рис.3. Соответствующий квазипотенциал приведен в [15,32].

Как уже отмечалось, указанные вклады обусловлены инфракрасным поведением матричных элементов. Наличие итерационных членов для каждой приводимой диаграммы улучшает ее поведение в инфракрасной области и позволяет в заданном порядке по α избежать суммирования лестничных диаграмм. При вычислениях с точными кулоновскими ВФ (76) в первом варианте квазипотенциального подхода установлено, что в качестве обрезającego фактора инфракрасных особенностей проявляет себя параметр $(\alpha \mu)$. Сокращение таких аномальных слагаемых [15] продемонстрировано в табл.3.

Таблица 3. Сокращение аномальных вкладов порядка $\alpha^5 \ln \alpha$ к СТР позитрония

Диаграмма рис.3	$\Delta E(\alpha^5 \ln \alpha)$
а	0
б	$\frac{2\alpha}{\pi} E_F \ln \alpha$
в	$-\frac{\alpha}{2\pi} E_F \ln \alpha$
г	$\frac{\alpha}{2\pi} E_F \ln \alpha$
д	0
е	$-\frac{2\alpha}{\pi} E_F \ln \alpha$
ж	0
з	0
Итого	0

Ряд новых поправок к сверхтонкому расщеплению уровней энергии мюония был получен Эйдесом и др. [33—35]. В этих работах, в частности, вычислены на основе метода эффективного уравнения Дирака (ЭУД)

поправки порядка $\sim \alpha(Z\alpha) \frac{m_e}{m_\mu}$, $\sim Z^2\alpha(Z\alpha) \frac{m_e}{m_\mu}$ к энергии Ферми⁶. Рассмотрим выделение этих вкладов из диаграмм с радиационными фотонами. Отличительной особенностью указанных работ является использование калибровки Фрида — Йенни [38—40] для фотонного пропагатора:

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + 2 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + i\epsilon} \right). \quad (120)$$

В этой калибровке смягчаются инфракрасные расходимости. Любая диаграмма с радиационной поправкой обладает более мягким поведением вблизи массовой поверхности, чем соответствующий скелетный блок. Привлекательным свойством калибровки Фрида — Йенни является возможность проведения ренормализационной процедуры на массовой поверхности без введения нефизической массы фотона λ . Такая особенность облегчает оценки появляющихся интегралов в задачах об уровнях энергии ВП-атомов.

В калибровке Фрида — Йенни константа перенормировки ВФ Z_2 инфракрасно-конечна, а перенормированный собственно-энергетический оператор обладает мягким поведением на массовой поверхности:

$$\Sigma_{FY}^{(R)}(p) = (\hat{p} - m)^2 \left(-\frac{3\alpha\hat{p}}{4\pi m^2} \right) (1 + O(\rho)),$$

$$\rho = \frac{m^2 - p^2}{m^2} \ll 1, \quad (121)$$

что отличает указанную калибровку от, например, калибровки Фейнмана:

$$\Sigma_F^{(R)}(p) = (\hat{p} - m) \frac{\alpha}{\pi} \left[\ln \frac{\lambda}{m} - \ln \rho + 1 \right], \quad (122)$$

$$\frac{\lambda}{m} \ll \rho \ll 1.$$

⁶Этими же авторами недавно вычислены поправки порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$. См. подробнее в разд. 4 и [36, 37].

Что касается вершинной функции, наиболее жестким поведением обладает выражение, соответствующее аномальному магнитному моменту фермионов:

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \sigma_{\mu\nu} \frac{k_\nu}{2m}. \quad (123)$$

Однако, переопределяя перенормированный вершинный оператор:

$$\Lambda_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu \Lambda(0, 0) - \frac{\alpha}{2\pi} \sigma_{\mu\nu} \frac{k_\nu}{2m} + \Lambda_\mu^{(R)}(p_1, p_2), \quad (124)$$

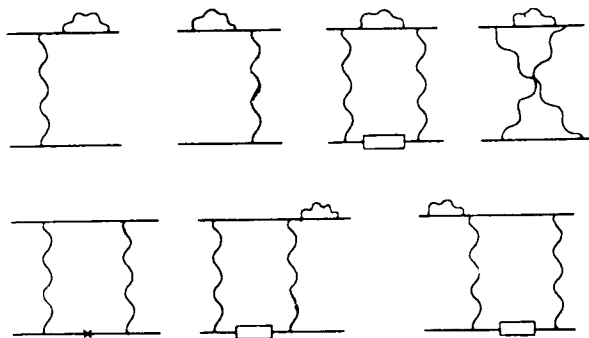
получаем при нулевом переданном импульсе и $\rho \ll 1$:

$$\Lambda_{\mu, FY}^{(R)} = -\gamma_\mu \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{(\hat{p} - m)\hat{p}}{m^2}, \quad \rho \ll 1, \quad (125)$$

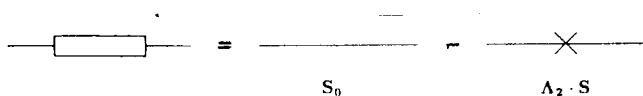
что по тождеству Уорда согласуется с асимптотикой собственно-энергетического оператора. Вклады от слагаемого аномального магнитного момента анализируются отдельно.

Проследим отбор графиков для вычисления поправок $\alpha(Z\alpha) \frac{m_e}{m_\mu} E_F$.

Семь диаграмм исчерпывают связанные с массовым оператором вклады в ядро ЭУД.

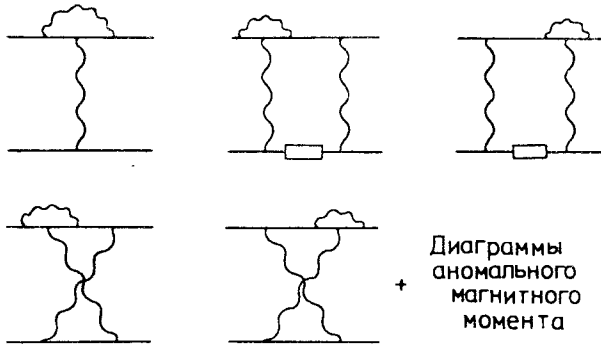


Здесь



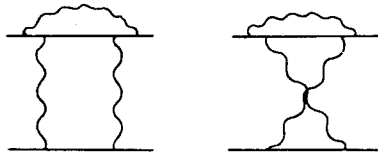
S_0 — свободный двухчастичный пропагатор; $g = \Lambda_2 S$ — проектор на массовую поверхность мюона, умноженный на электронный пропагатор.

Простейшие диаграммы с вершинной поправкой:

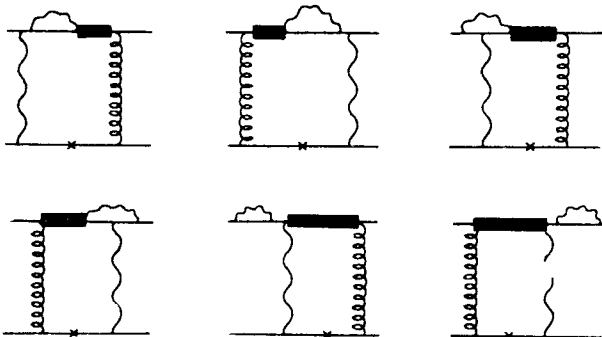


также вносят вклад порядка $\alpha (Z\alpha) \frac{m_e}{m_\mu}$.

Кроме того, имеются диаграммы с охватом более одного фотона:



и диаграммы второго порядка теории возмущений:



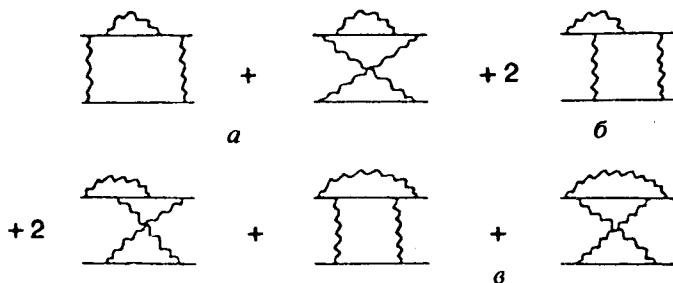


Рис. 4. Полный калибровочно-инвариантный набор диаграмм для расчета поправок на отдачу к энергии Ферми СТР мюония порядка $\alpha(Z\alpha)E_F$ и $Z^2\alpha(Z\alpha)E_F$

При анализе графиков, входящих в ядро ЭУД, на предмет наличия поправок $\alpha(Z\alpha)\frac{m_e}{m_\mu}$ к энергии Ферми выяснилось, что вклады такого порядка могут давать лишь диаграммы из калибровочно-инвариантного набора (см. рис.4)⁷. При этом оказалось возможным в обкладках матричного элемента ограничиться приближенными ВФ (103), то есть матричные элементы следует вычислять между большими компонентами электронных и мюонных спиноров, пренебрегая импульсами волновых функций внутри диаграмм. Эти условия авторы [33—35] называют стандартными.

Полный калибровочно-инвариантный набор, представленный на рис.4, в сумме приводит к инфракрасно- и ультрафиолетово-конечному матричному элементу. Поэтому дальнейшие вычисления можно проводить, используя любую удобную калибровку, как для обменных, так и для радиационных фотонов. Путем явных вычислений можно показать, что аномальный магнитный момент не приводит к поправкам необходимого порядка и считается вычтенным из вершинного оператора. Итерационные диаграммы в методе ЭУД (помечаемые \times на мюонной линии) в некотором смысле аналогичны итерационным диаграммам квазипотенциального подхода. Так же как в квазипотенциальном подходе существуют две итерационные диаграммы для диаграмм двухфотонного обмена с радиационной вставкой ($\tau^{(4)}F\tau^{(2)}$ и $\tau^{(2)}F\tau^{(4)}$), в методе ЭУД появ-

⁷Диаграммы, в которых радиационный фотон охватывает более двух обменных, в калибровке Фрида — Йенни не приводят к вкладам порядка $\alpha(Z\alpha)E_F$.

ляются «нескомпенсированные» итерационные диаграммы. Они генерируются ядром уравнения БС, содержащим обратный пропагатор мюона. Показано [34], что итерационные диаграммы в исследуемом порядке сокращаются с однопетлевой диаграммой с вершинной поправкой после построения ядра ЭУД и теории возмущений для уровней энергии.

В результате получается следующее выражение для вклада от диаграмм рис.4,а:

$$\begin{aligned} \delta E_{\Sigma} = & \frac{\alpha (Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m_e}{m_{\mu}} E_F \frac{3i}{8\pi^2 \hat{\mu}^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^4 k}{k^4} \times \\ & \times \left(\frac{1}{k^2 + \hat{\mu}^{-1} k_0 + i\epsilon} + \frac{1}{k^2 - \hat{\mu}^{-1} k_0 + i\epsilon} \right) \frac{1}{-k^2 + 2k_0 + a_1^2(x, y) - i\epsilon} \times \\ & \times \left[h_1(x, y) k_0 - h_2(x, y) \left(k_0^2 - \frac{2}{3} \vec{k}^2 \right) \right] \equiv \delta E_{\Sigma 1} + \delta E_{\Sigma 2}, \end{aligned} \quad (126)$$

x, y — фейнмановские параметры, $\hat{\mu} = \frac{m_e}{2m_{\mu}}$,

$$\begin{aligned} h_1(x, y) = \frac{1+x}{y}, \quad h_2(x, y) = \frac{1-x}{y} \left[1 - \frac{2(1+x)}{x^2 + \lambda^2} y \right], \\ a_1^2(x, y) = \frac{x^2 + \lambda^2}{(1-x)y}, \end{aligned} \quad (127)$$

λ — безразмерная инфракрасная масса радиационного фотона в единицах массы электрона.

Основной вклад в интеграл порядка $1/\hat{\mu}$ дает вычет в мюонном полюсе, соответствующий движению мюона на массовой поверхности. С этим же вычетом связана ведущая инфракрасная расходимость интеграла, пропорциональная $\lambda^{-1/2}$, остальные вклады расходятся лишь логарифмически. Поэтому удобно разделить вычисление вкладов массовой поверхности и оставшейся разности:

$$\delta E_{\Sigma}(\text{м.п.}) = \frac{1}{2\hat{\mu}} \left(-2I_{\lambda} + \frac{11\pi^2}{6} \right) + \left(I_{\lambda} + \frac{23\pi^2}{24} \right), \quad (128)$$

где

$$I_{\lambda} = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 dx \left(\frac{x}{x^2 + \lambda^2} \right)^{3/2} (1-x)^{1/2} \sim \frac{1}{\lambda^{-1/2}} \quad (129)$$

— инфракрасно расходящийся интеграл, который сокращается в сумме полюсных вкладов от диаграмм рис.4.

С помощью ряда математических ухищрений (см. [34,35]), таких как разбиение области интегрирования на две части (малых и больших импульсов) после интегрирования по угловым переменным, вычитание полюсного вклада под интегральным выражением, использование различных тождеств, были получены выражения для вкладов от суммы всех диаграмм калибровочно-инвариантного набора рис.4:

$$\delta E_{\Sigma} = \alpha (Z\alpha) E_F \left[\ln 2 - \frac{13}{4} \right] + \frac{\alpha (Z\alpha) m_e}{\pi^2} \frac{m_e}{m_{\mu}} E_F \left[\frac{15}{4} \ln \frac{m_{\mu}}{m_e} + 6\zeta(3) + 3\pi^2 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{17}{8} \right]. \quad (130)$$

Еще один метод, позволивший вычислить логарифмический вклад порядка $\alpha^3 \frac{m_e}{m_{\mu}} \ln^3 \frac{m_e}{m_{\mu}}$ в сверхтонкое расщепление мюония — метод ренормгруппы [41]⁸.

Вклад радиационных поправок на отдачу равен $\Delta E = -E_F R_{\mu}$, где величина R_{μ} в низшем приближении вычисляется из диаграмм двухфотонного обмена. В [43] рассмотрены также диаграммы с радиационными вставками в электронную, фотонную линию и к электронной вершине. Из указанной статьи известны логарифмические вклады

$$R_{\mu}^{(2)} = -\frac{3\alpha}{\pi} \frac{m_e}{m_{\mu}} \ln \frac{m_e}{m_{\mu}} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{m_e}{m_{\mu}} \left[2\ln^2 \frac{m_e}{m_{\mu}} + \frac{31}{12} \ln \frac{m_e}{m_{\mu}} \right], \quad (131)$$

которые появляются вследствие интегрирования по импульсной переменной в области $m_e^2 \ll k^2 < m_{\mu}^2$, т.е. в асимптотической области для вклада электронной поляризации вакуума в фотонный пропагатор. Мюонная петля при интегрировании по импульсной переменной в области $k^2 < m_{\mu}^2$ вклада не дает. Оценка следующего члена ряда в теории возмущений приведена в [41].

Если рассмотреть физическую величину R , вычисляемую по теории возмущений, то, очевидно, должно выполняться условие

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0, \quad (132)$$

⁸Указанный метод был использован также и при расчете вклада слагаемых, зависящих от логарифма отношения масс, в величине аномального магнитного момента мюона [42].

где переменная $\tau = -\beta_0 \ln \frac{m}{\Lambda}$ характеризует используемую схему перенормировки (СП), μ — произвольный параметр с размерностью массы, Λ — масштабный параметр [44], $\beta_0 = 2/3$ — первый коэффициент в ренормгрупповом уравнении с бегущей константой связи g :

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \beta(g) = \beta_0 g^2 + \beta_1 g^3 + \dots, \quad (133)$$

Соответственно, для величины R во втором порядке теории возмущений, выбранной в виде

$$R^{(2)} = r_0 g(1 + r_1 g), \quad (134)$$

имеем

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = O(g^3), \quad (135)$$

и отсюда следует

$$\frac{\partial r_0}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial r_1}{\partial \tau} = 1. \quad (136)$$

Таким образом, мы видим, что r_0 не зависит от выбора СП, а $r_1 = \tau + \rho_1$, где константу ρ_1 можно вычислить, если известно значение r_1 для какой-либо СП.

Зависимость следующего (третьего) члена ряда теории возмущений от τ должна быть устроена так, чтобы компенсировать зависимость $R^{(2)}$ от τ с точностью до g^4 :

$$\frac{\partial (R^{(2)} + \Omega^{(2)} g^3)}{\partial \tau} = O(g^4). \quad (137)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Omega^{(2)}}{\partial \tau} = r_0 \left(2r_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \right). \quad (138)$$

После интегрирования с использованием уравнений (136) получаем

$$\Omega^{(2)} = r_0 r_1 \left(r_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \right) + \text{const.} \quad (139)$$

Далее, для определения произвольной постоянной интегрирования необходимо задать «оптимальную» СП, при которой величина $R^{(2)}$ ближе всего к R . В [41] она задается условием

$$\Omega^{(2)}(r_1, \tau) \Big|_{\tau=\tau_{\text{opt}}} = 0, \quad \tau_{\text{opt}} = -\beta_0 \ln \left(\frac{\mu_{\text{opt}}}{\Lambda} \right). \quad (140)$$

Если в качестве исходной выбрать СП на массовой поверхности ($r_1 = K_1$), то

$$\Omega^{(2)}(K_1) = r_0 K_1 \left(K_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \right) - r_0 r_1^{\text{opt}} \left(r_1^{\text{opt}} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \right), \quad r_1^{\text{opt}} = r_1(\tau_{\text{opt}}). \quad (141)$$

Для физической величины ΔE — энергии сверхтонкого расщепления в мюонии из (131) получаем

$$r_0 = -3 \frac{m_e}{m_\mu} \ln \frac{m_e}{m_\mu}, \quad K_1 = -\frac{2}{3} \ln \frac{m_e}{m_\mu} - \frac{31}{36} \quad (142)$$

и из (141)

$$\Omega^{(2)} = -\frac{4}{3} \frac{m_e}{m_\mu} \ln^3 \frac{m_e}{m_\mu} - \frac{35}{18} \frac{m_e}{m_\mu} \ln^2 \frac{m_e}{m_\mu} + A \frac{m_e}{m_\mu} \ln \frac{m_e}{m_\mu}, \quad (143)$$

где

$$A = -\beta_0 \ln \frac{m_\mu}{\mu_{\text{opt}}} \left(\frac{35}{36} - \beta_0 \ln \frac{m_\mu}{\mu_{\text{opt}}} \right). \quad (144)$$

В результате⁹

$$\Delta E = E_F \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \frac{m_e}{m_\mu} \left[\frac{4}{3} \ln^3 \frac{m_e}{m_\mu} + \frac{35}{18} \ln^2 \frac{m_e}{m_\mu} \right] \approx -0,04 \text{ кГц}. \quad (145)$$

Первое слагаемое в (145) совпадает с полученным в [33] непосредственным вычислением. Значение коэффициента A в (143) зависит от выбора оптимальной схемы, и его вклад в СТР может быть оценен лишь как $0 < -\Delta E < 1$ кГц.

Интересный метод вычисления логарифмических по α поправок к спектру КЭД систем предложен в [46]. Как указано в этих статьях, логарифмические по α поправки возникают от интегралов, расходящихся логарифмически, причем вклад дает область импульсов

$$\mu \alpha \leq q \leq \mu \quad (146)$$

⁹Значение коэффициента при $\ln^2 \frac{m_e}{m_\mu}$ было уточнено в [45].

(μ — приведенная масса, $\mu = \frac{mM}{m+M}$). Нижний предел — характерный импульс для КЭД связанных состояний (см. ранее обсуждение ВФ (76)), верхнее значение соответствует пределу применимости нерелятивистского приближения.

Смещение уровня с квантовыми числами n, l вычисляется в [46] как матричный элемент оператора $\hat{V}(q)$:

$$\hat{V}^{(N)}(q) = [A + B(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)] \frac{\pi \alpha^N}{mM} \ln \frac{\mu}{q} \quad (147)$$

по ВФ типа (103).

Вычисление оператора $\hat{V}(q)$ в таком подходе сводится в логарифмическом приближении к вычислению амплитуды рассеяния на м.п. от фейнмановских диаграмм порядка α^N .

Авторами [46] используется обычная квантово-механическая теория возмущений с подстановками

$$\sum_i \frac{|i\rangle \langle i|}{E - E_i} \quad (148)$$

в промежуточных состояниях оператора взаимодействия.

Например, для диаграмм порядка $O(\alpha^3)$ с чисто кулоновским взаимодействием результат для оператора \hat{V} :

$$\begin{aligned} \hat{V} = & - \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi^3)} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi^3)} \frac{(4\pi\alpha)^3}{k^2 k'^2 (\vec{k} - \vec{k}')^2} \times \\ & \times \frac{\Lambda_1^+(\vec{k}') \Lambda_1^+(\vec{k}) \otimes \Lambda_2^+(-\vec{k}') \Lambda_2^+(-\vec{k})}{(E - \epsilon_{1k} - \epsilon_{2k})(E - \epsilon_{1k'} - \epsilon_{2k'})}, \end{aligned} \quad (149)$$

что приводит (в совокупности с результатами от других диаграмм с обменами кулоновскими фотонами) к смещению уровня

$$\delta E_C(n, l) = \frac{\mu^5}{m^2 M^2} \alpha^6 \ln \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{3}{2} + \frac{\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2}{6} \right) \frac{\delta_{l0}}{n^3}. \quad (150)$$

И.Б.Хриповичем и др. получены теоретические значения для ширины распада o -Ps и p -Ps, для тонкой и сверхтонкой структуры уровней мюония, которые обсуждаются в следующем разделе и сравниваются с результатами Фелла [47], полученными на основе релятивистских двухчастичных уравнений. Исправление работы [46] см. в [348].

4. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1. Ширина распада позитрония. Квантово-электродинамические системы, состоящие из частицы и античастицы, отличаются специфическими особенностями. Помимо канала рассеяния в этом случае появляется аннигиляционный канал взаимодействия. Относящийся к таким системам атом позитрония является нестабильным. Время его жизни (ширина распада) — предмет прецизионных экспериментальных и теоретических исследований. Зарядовая четность позитрония $C = (-1)^{L+S}$ (L — собственное значение орбитального момента, S — собственное значение полного спина системы) является интегралом движения. Поэтому все его состояния разделяются на зарядово-четные ($C = 1$) и зарядово-нечетные ($C = -1$). Полный спин позитрония также сохраняется, поэтому его уровни энергии можно разделить на синглетные ($S = 0$, парапозитроний) и триплетные ($S = 1$, ортопозитроний). В S -состоянии ($L = 0$) парапозитроний является зарядово-четным, а ортопозитроний — зарядово-нечетным. В силу сохранения зарядовой четности в электромагнитных взаимодействиях парапозитроний распадается на четное, а ортопозитроний — на нечетное число фотонов.

В настоящее время имеется существенное расхождение между теоретическим и экспериментальным значением ширины распада ортопозитрония. Теория предсказывает значение [48—51]:

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{\text{теор}}(o-Ps) &= \frac{\alpha^6 m c^2}{h} \frac{2(\pi^2 - 9)}{9\pi} \left[1 - A_3 \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{3} \alpha^2 \ln \alpha^{-1} + B_3 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + \dots \right] = \\ &= \Gamma_0 + \frac{m\alpha^7}{\pi^2} \left\{ \begin{matrix} (-1,984(2)) \\ (-1,9869(6)) \end{matrix} \right\} + \frac{m\alpha^8}{\pi} \ln \alpha^{-1} \left[-\frac{4}{9} \zeta(2) + \frac{2}{3} \right] + \\ &+ \frac{m\alpha^8}{\pi^3} \chi + \dots = 7,03831(5) \text{ мкс}^{-1}, \end{aligned} \quad (151)$$

где

$$A_3 = -10,266 \pm 0,011 \quad [50], \quad (152)$$

$$A_3 = -10,282 \pm 0,003 \quad [51]. \quad (153)$$

Последние экспериментальные значения следующие¹⁰:

¹⁰Предыдущие экспериментальные результаты см. в табл. 1.

$$\Gamma^{\text{эксп}}(o\text{-Ps}) = 7,0514(14) \text{ мкс}^{-1} \quad [52], \quad (154)$$

$$\Gamma^{\text{эксп}}(o\text{-Ps}) = 7,0482(16) \text{ мкс}^{-1} \quad [53]. \quad (155)$$

Результат [52] дает 9,4 стандартного отклонения, [53] — 6,2 стандартного отклонения от предсказанного теоретического значения. Коэффициент $B_3 = 1$ при слагаемом порядка $O(\alpha^8)$ может вносить вклад лишь $3,5 \cdot 10^{-5} \text{ мкс}^{-1}$ (или 5 ppm вклада от Γ_3). Чтобы снять указанное расхождение с экспериментом, коэффициент B_3 должен быть $\cong 250 \pm 40$, что является крайне маловероятным. Однако, как указано в [53], такой случай все же не может быть исключен априори. Поэтому вычисление коэффициента B_3 весьма актуально в настоящее время.

Впервые основной вклад в ширину распада ортопозитрония

$$\Gamma_0(o\text{-Ps}) = -2 \text{Im}(\Delta E_{3\nu}) = \frac{2}{9\pi} (\pi^2 - 9) m\alpha^6 = 7,21117 \text{ мкс}^{-1} \quad (156)$$

вычислен в [48]. Поправки к ширине распада ортопозитрония в 3 фотона порядка $O(\alpha)$ вычислялись сначала численными методами [49,51,54,55], впоследствии некоторые поправки были вычислены аналитически [46,59], [56—58] в калибровке Фейнмана. Так, Адкинсом вычислены [57, 58] поправки от диаграмм с собственно-энергетической и вершинной вставками:

$$\Gamma_{0\nu} = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} \left[D + \frac{3}{4(\pi^2 - 9)} \left[-26 - \frac{115}{3} \ln 2 + \frac{91}{18} \zeta(2) + \frac{443}{54} \zeta(3) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3419}{108} \zeta(2) \ln 2 - R \right] \right] = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} [D + 2,9711385(4)], \quad (157)$$

$$\Gamma_{SE} = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} \left[-D - 4 + \frac{3}{4(\pi^2 - 9)} \left[-7 + \frac{67}{3} \ln 2 + \frac{805}{36} \zeta(2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1049}{54} \zeta(3) - \frac{775}{54} \zeta(2) \ln 2 \right] \right] = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} [-D + 0,78498], \quad (158)$$

$$\Gamma_{IV} = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} D + \frac{3}{4(\pi^2 - 9)} \left[-4 - \frac{34}{2} \ln 2 - \frac{841}{36} \zeta(2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1253}{36} \zeta(2) \ln 2 + \frac{1589}{54} \zeta(3) + \frac{17}{40} \zeta^2(2) - \frac{7}{8} \zeta(3) \ln 2 + \frac{5}{2} \zeta(2) \ln^2 2 - \right. \right.$$

$$-\frac{1}{24} \ln^4 2 - a_4 \Big] = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} D + 0,160677 \right], \quad (159)$$

где

$$R = \int_0^1 dx \frac{\ln(1-x)}{2-x} [\zeta(2) - Li_2(1-2x)] = -1,7430338337(3), \quad (160)$$

$$a_4 = Li_4\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 2^n} = 0,517479061674 \quad (161)$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) = 1,2020569032 \quad (162)$$

и

$$D = \frac{1}{2-w} - \gamma_E + \ln(4\pi) \quad (163)$$

— стандартное выражение, появляющееся в процессе размерной регуляризации ($2w$ — размерность пространства). Этот результат согласуется с результатом, полученным Строчио [56], если прибавить к последнему

$$\Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} [-D - 4 - 2 \ln(\lambda^2/m^2)], \quad (164)$$

что необходимо осуществить из-за различных регуляризационных процедур, использованных в [56] и [57,58].

Совсем недавно закончена программа вычисления таких поправок в калибровке Фрида — Йенни [59]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{SE} &= \frac{m\alpha^7}{\pi^2} \left[-\frac{13}{54} \zeta(3) + \frac{461}{108} \zeta(2) \ln 2 - \frac{251}{72} \zeta(2) - \frac{29}{6} \ln 2 + \frac{9}{2} \right] = \\ &= \frac{m\alpha^7}{\pi^2} (-0,007132904) = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} (-0,036911113), \end{aligned} \quad (165)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{OV} &= \frac{m\alpha^7}{\pi^2} \left[-\frac{88}{54} \zeta(3) - \frac{299}{216} \zeta(2) \ln 2 + \frac{49}{18} \zeta(2) + \frac{13}{6} \ln 2 - 2 - \frac{1}{6} R \right] = \\ &= \frac{m\alpha^7}{\pi^2} (0,732986380) = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} (3,793033599). \end{aligned} \quad (166)$$

Вклады от оставшихся диаграмм (с радиационной вставкой в вершину внутреннего фотона; с охватом радиационным фотоном двух вершин; диаграммы, учитывающей эффекты связанности, и аннигиляционной

диаграммы — см. рис.1 в [59,6]) вычислены численно. В сумме указанные поправки порядка $O(\alpha)$ составляют:

$$\frac{m\alpha^7}{\pi^2} [-1,98784(11)] = \Gamma_0 \frac{\alpha}{\pi} [-10,2866(6)]. \quad (167)$$

Тогда¹¹

$$\Gamma_3^{\text{теор}}(o-Ps) = 7,038236(10) \text{ мкс}^{-1} \quad [59], \quad (168)$$

что является в настоящее время наиболее точным теоретическим результатом.

Чтобы разрешить существующее противоречие в результатах теоретических и экспериментальных исследований, в работах [60,61] изучался вопрос о 5-фотонной моде распада $o-Ps$ и 4-фотонной моде распада $p-Ps$ ¹². Получены следующие теоретические оценки:

$$\frac{\Gamma_5(o-Ps)}{\Gamma_3(o-Ps)} = 0,177 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \cong 0,96 \cdot 10^{-6} \quad [60],$$

$$\frac{\Gamma_4(p-Ps)}{\Gamma_2(p-Ps)} = 0,274 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \cong 1,48 \cdot 10^{-6} \quad [60]$$

и

$$\Gamma_5(o-Ps) = 0,0189(11) \alpha^2 \Gamma_0 \quad [61],$$

$$\Gamma_4(p-Ps) = 0,01389(6) m\alpha^7 \quad [61],$$

которые согласуются между собой и с результатами ранних работ [62]¹³:

$$\Gamma_4(p-Ps) = 0,01352 m\alpha^7 = 11,57 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1} \quad [62]. \quad (169)$$

В связи с нынешней ситуацией с шириной распада ортопозитрония актуальны также исследования, посвященные поиску альтернативных мод распада такой системы (например, $o-Ps \rightarrow \gamma + a$, a — аксион,

¹¹ Без учета невычисленных пока поправок порядка $O(\alpha^8)$.

¹² В силу закона сохранения углового момента и свойства изотропности пространства ортопозитроний должен распадаться на нечетное число фотонов, а парапозитроний на четное — см. выше.

¹³ Результат [63] ошибочен — в 4 раза меньше приведенных значений. Объяснение этому дано в [61].

псевдоскалярная частица с массой $m_a < 2m_e$) [64—69]. В статье [67] получено следующее экспериментальное ограничение на отношение ширины распада:

$$Br = \frac{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow \gamma + a)}{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma)} < 5 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-6} \quad (30 \text{ ppm}), \quad (170)$$

если находится в интервале 100+900 кэВ. В случае, если масса аксиона меньше 100 кэВ (как и подразумевается гипотезой Самуэля [68], согласно которой¹⁴ $m_a < 5,7$ кэВ, $g_{a^+e^-} \sim 2 \cdot 10^{-8}$), ограничения на величину Br следующие [69]:

$$Br = 7,6 \cdot 10^{-6}, \text{ если } m_a \sim 100 \text{ кэВ,}$$

$$Br = 6,4 \cdot 10^{-5}, \text{ если } m_a < 30 \text{ кэВ.}$$

Эти ограничения почти на 2 порядка меньше значения, которое необходимо для устранения противоречия.

Наконец, распад $o\text{-Ps} \rightarrow \text{nothing}$ (т.е. слабо взаимодействующие недетектируемые частицы) исследован в работе [71]. Полученный результат:

$$\frac{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow \text{nothing})}{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma)} < 5,8 \cdot 10^{-4} \quad (350 \text{ ppm}) \quad (171)$$

исключает возможность того, что эта мода распада ответственна за существующее рассогласование между теорией и экспериментом.

Распад $o\text{-Ps}$ на два фотона, нарушающий СР-инвариантность (как отмечено еще в [72, 73]), был экспериментально отвергнут в [74]¹⁶.

Следует еще отметить, что вклад слабого взаимодействия изучен в [76]. Однако ввиду пропорциональности m_e^2 / M_W^2 он не может существенно влиять на результаты. В цитируемой статье слабые распадные моды оценены:

¹⁴Предложенные значения не вызывают противоречий при сравнении теоретического и экспериментального результатов для аномального магнитного момента электрона.

¹⁵Так, Глэшоу [70] высказывал предложение о распаде в невидимую «зеркальную» к нашему миру частицу.

¹⁶Физическая основа таких спекуляций — возможное существование анизотропного векторного поля с ненулевым вакуумным ожиданием [75], с которым могут взаимодействовать электрон и позитрон: $\mathcal{L} = g\bar{\psi}O_{\alpha\beta}\psi A^\alpha\Omega^\beta$, \mathcal{L} — лагранжиан взаимодействия.

$$\frac{\Gamma(p\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(p\text{-Ps} \rightarrow 2\gamma)} \cong \frac{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow 4\gamma)}{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma)} \cong \alpha (G_F m_e^2 g_V)^2 \cong 10^{-27}, \quad (172)$$

где G_F — константа Ферми слабого взаимодействия,

$$g_V = 1 - 4 \sin^2 \Theta_W \cong 0,08, \quad (173)$$

Θ_F — угол Вайнберга. Существующие экспериментальные ограничения следующие [77,78]:

$$\frac{\Gamma(p\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(p\text{-Ps} \rightarrow 2\gamma)} \leq 2,8 \cdot 10^{-6},$$

$$\frac{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow 4\gamma)}{\Gamma(o\text{-Ps} \rightarrow 3\gamma)} \leq 8 \cdot 10^{-6}.$$

В табл.4 выписаны все известные нам экспериментальные результаты для ширины распада ортопозитрония¹⁷.

Таблица 4

Год	Ссылка	$\Gamma_3(o\text{-Ps})$, мкс	Погрешность, ppm	Методика
1968	[82]	7,262(15)	2070	газ
1973	[83]	7,262(15)	2070	газ
1973	[84]	7,275(15)	2060	газ
1976	[85]	7,104(6)	840	порошок SiO ₂
1976	[86]	7,09(2)	2820	вакуум
1978	[87]	7,056(7)	990	газ
1978	[88]	7,045(6)	850	газ
1978	[89]	7,050(13)	1840	вакуум
1978	[90]	7,122(12)	1680	вакуум
1982	[91]	7,051(5)	710	газ
1987	[92]	7,031(7)	1000	вакуум
1987	[93]	7,0516(13)	180	газ
1989	[52]	7,0514(14)	200	газ
1990	[53]	7,0482(16)	230	вакуум

Что касается результатов для ширины распада парапозитрония, до последнего времени ситуация была весьма благополучна. Теоретическое значение, установленное еще в 50-е годы [94,95]:

¹⁷Результаты статей [79,80] и [81] могут рассматриваться лишь как грубые оценки.

$$\Gamma_2^{\text{теор}}(p\text{-Ps}) = -2 \operatorname{Im}(\Delta E_{2\gamma}) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^5 m c^2}{h} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \left(5 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right] = 7,9852 \text{ нс}^{-1}, \quad (174)$$

подтвержденное в [96,97], с хорошей точностью совпадает с результатом прямого экспериментального измерения:

$$\Gamma^{\text{эксп}}(p\text{-Ps}) = 7,994 \pm 0,011 \text{ нс}^{-1} \quad [91]. \quad (175)$$

Экспериментальные значения ширины распада парапозитрония суммированы в табл.5¹⁸.

Таблица 5

Год	Ссылка	$\Gamma_3(o\text{-Ps})$, мкс	Погрешность, %	Методика
1952	[98]	7,63(1,02)	13	газ
1954	[99]	9,45(1,41)	15	газ
1970	[100]	7,99(11)	1,38	газ
1982	[91]	7,994(11)	0,14	газ

В статьях [50,97] показано, что необходимо добавить к результату Харриса и Брауна логарифмическую по α поправку. В статье [46,а] вновь вычислены логарифмические поправки к $\Gamma_3(o\text{-Ps})$ и $\Gamma_2(p\text{-Ps})$, причем для ширины распада парапозитрония результат отличается от ранее найденного [50,97]:

$$\Gamma_2(p\text{-Ps}, \alpha^2 \ln \alpha) = \frac{m\alpha^5}{2} 2\alpha^2 \ln \alpha^{-1} \quad [46],$$

$$\Gamma_2(p\text{-Ps}, \alpha^2 \ln \alpha) = \frac{m\alpha^5}{2} \frac{2}{3} \alpha^2 \ln \alpha^{-1} \quad [50,97].$$

¹⁸В экспериментах 1952 и 1954 гг. измерялось отношение ширины распадов пара- и ортопозитрония $\frac{\Gamma_2(p\text{-Ps})}{\Gamma_3(o\text{-Ps})}$. Результаты, представленные в табл. 5, пересчитаны с использованием первого экспериментального значения [82]: $\Gamma_3(o\text{-Ps}) = 7,262(15) \text{ мкс}^{-1}$.

Наконец, следует упомянуть совершенно неожиданный (и нежелательный с точки зрения эксперимента) результат, представленный в докладе Ремидди и др. [101]. Проведенные ими вычисления указывают на существование поправки

$$\Gamma_2(p\text{-Ps}, \alpha \ln \alpha) = \frac{m\alpha^5}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) 2 \ln \alpha \quad [101], \quad (176)$$

которая, как они объясняют, появляется в результате учета зависимости ядра взаимодействия от относительных импульсов (см. рис.1).

Все вышесказанное указывает на необходимость продолжения расчетов ширины распадов как орто-, так и парапозитрония на основе более точных методов.

4.2. Сверхтонкое расщепление. Позитроний. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов для сверхтонкого расщепления основного уровня в позитронии и мюонии в течение многих лет рассматривается как важная проверка нашего понимания проблемы связанных состояний. Впервые величина такого расщепления для позитрония была оценена в 1951 г. [102] как $(9,4 \pm 1,4)10^{-4}$ эВ, а последний измеренный результат получен в [103]:

$$\Delta E_{\text{СТР}}^{\text{эксп}}(\text{Ps}) = 203389,10 \pm 0,74 \text{ МГц} \quad (3,6 \text{ ppm}) \quad (177)$$

В табл.6 суммированы все опубликованные значения прецизионных экспериментальных измерений СТР основного уровня позитрония.

Таблица 6

Год	Ссылка	ΔE , ГГц	Погрешность, ppm
1952	[104]	203,2(3)	1500
1954	[105]	203,350(50)	250
1955	[106]	203,380(40)	200
1957	[107]	203,330(40)	200
1970	[100]	203,403(12)	60
1972	[108]	203,396(5)	24
1975	[109]	203,3870(16)	8
1975	[110]	203,3849(12)	6
1977	[111]	203,384(4)	20
1983	[112]	203,3875(16)	8
1984	[103]	203,38910(74)	3,6

Все проведенные эксперименты используют методику, основанную на наблюдении зеемановских переходов в Ps и дальнейшей подстановке

результатов в известное уравнение Брейта — Раби, из которого определяется величина ΔE .

Теоретический результат (твердо установленный) в настоящее время [4,31,50,113—117]:

$$\Delta E_{\text{СТР}}^{\text{теор}}(\text{Ps}) = m\alpha^4 \left[\frac{7}{12} - \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{8}{9} + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{5}{24} \alpha^2 \ln \alpha^{-1} + O(\alpha^2) \right] =$$

$$\cong 203400,3 \text{ МГц.} \quad (178)$$

Коэффициент 1 при слагаемом порядка $\sim \alpha^6$ может вносить вклад $\approx 18,7$ МГц к энергии СТР, т.е. оцененная неопределенность составляет почти 50 ppm, что на порядок больше, чем экспериментальная. В результате вычисления поправок порядка $O(\alpha^2)$ и $O(\alpha^3 \ln \alpha)$ теоретическая ошибка уменьшилась бы до 1 ppm. Работа в этом направлении идет с 70-х годов [43,118—127].

Первые вклады такого порядка вычислены от диаграммы однофотонной аннигиляции с поляризационной вставкой 4-го порядка [119]¹⁹:

$$\Delta E_{\text{в.п.}}^{\text{СТР}} = \frac{1}{2} \alpha^2 R_{\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left[\frac{13}{324} + \frac{21}{8} \zeta(3) + \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - \frac{35\pi^2}{32} \right] =$$

$$= -2,78 \text{ МГц.} \quad (179)$$

Вклады от трехфотонной аннигиляции [120], также вычисленные аналитически, недавно были уточнены [121]:

$$\Delta E_{3\gamma}^{\text{СТР}} = \frac{\alpha^4 R_{\infty}}{\pi^2} \left\{ \frac{3}{4} \zeta(3) - \frac{1}{3} \zeta(2) \ln 2 - \frac{1}{6} \zeta(2) - 4 \ln 2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} - i\pi \left[\frac{4}{3} \zeta(2) - 2 \right] \right\}, \quad (180)$$

что численно составляет небольшую величину $\text{Re}(\Delta E_{3\gamma}) = -0,969$ МГц, и подтверждены авторами [120] в [122].

Вклады двухфотонной аннигиляции [123]:

$$\Delta E_{2\gamma}^{\text{СТР}} = - \frac{\alpha^4 R_{\infty}}{2\pi^2} \left[1 + \frac{35}{9} \pi^2 + \left(\frac{41}{4} + \pi^2 \right) \ln 2 - \frac{85}{4} \zeta(3) - i\pi \left(5 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right] \quad (181)$$

¹⁹Для позитрония существенен лишь вклад электрон-позитронных петель, ввиду малости m_e .

на сегодняшний момент численно дают наибольший вклад $\text{Re}(\Delta E_{2\gamma}) = -13,13$ МГц по сравнению с другими поправками указанного порядка.

Следует отметить, что при расчетах поправок $\sim \alpha^6$ использовались различные приближенные методы, что во многом затрудняет сравнение результатов одних авторов с другими. Так, авторы [125] исследовали случай статического ядра взаимодействия, представляющего собой четвертую компоненту векторного потенциала, не зависящую от относительных времен (метод эффективного гамильтониана). До третьего порядка теории возмущений ими получен результат:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{III}} &= \frac{1}{12} \alpha^4 R_\infty \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \ln \frac{1}{2} \alpha \right) + \frac{2}{\pi} G + \frac{1}{\pi} (1 - 4F) \right] = \\ &= \alpha^4 R_\infty \left[\frac{1}{24} \ln \alpha^{-1} + 0,031 \right] = (1,9 + 0,3) \text{ МГц}, \end{aligned} \quad (182)$$

где

$$G = \int_0^1 \frac{\text{tg}^{-1} p}{p} dp = 0,91596... \quad (183)$$

— постоянная Каталана;

$$F = \int_0^1 \frac{(\text{tg}^{-1} p)^2}{p} dp = 0,3897...$$

В [43, 127] вклады от различных диаграмм вычислялись численными методами. Там же указано на важность выделения $\sim \alpha^6$ вкладов из оставшихся невычисленными диаграмм (рис.7 в [43]).



Мюоний. В предыдущих обзорах [35, 43], [128—130] представлен следующий теоретический результат для СТР основного уровня мюония:

$$\Delta E_{\text{СТР}}^{\text{теор}}(\text{Mu}) = E_F (1 + a_\mu) \left[1 + a_e + \frac{3}{2} (Z\alpha)^2 + \varepsilon + \frac{\delta_\mu}{1 + \alpha_\mu} \right], \quad (184)$$

$$\varepsilon = \alpha(Z\alpha) \left(\ln 2 - \frac{5}{2} \right) - \frac{8\alpha(Z\alpha)^2}{3\pi} \ln(Z\alpha) \left[\ln(Z\alpha) - \ln 4 + \frac{281}{480} \right] + \\ + \frac{\alpha(Z\alpha)^2}{\pi} (15,38(29)) + \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} D, \quad (185)$$

$$\delta_\mu = - \frac{3(Z\alpha)}{\pi} \frac{m_e m_\mu}{m_\mu^2 - m_e^2} \ln \frac{m_\mu}{m_e} + (Z\alpha)^2 \frac{m_e m_\mu}{(m_e + m_\mu)^2} \left[-2 \ln(Z\alpha) - \right. \\ \left. - 8 \ln 2 + 3 \frac{11}{18} \right]. \quad (186)$$

Расчету поправок, не учитывающих конечность массы тяжелой частицы (безотдачных поправок), посвящены ставшие классическими работы [131—133]. В [43,127] подтвержден результат для поправок и численно получен вклад порядка $\alpha(Z\alpha)^2 E_F$. Ведущие поправки на отдачу вычислены несколькими авторами [25,116,117,128,134—136]. В работах [34,35] аналитически вычислены вклады от диаграмм с радиационными вставками в электронную и мюонную линии, зависящие от отношения масс $\frac{m_e}{m_\mu}$ 20:

$$\delta_\mu \left(\frac{m_e}{m_\mu}; \text{эл.лин.} \right) = \\ = \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m_e}{m_\mu} \left[\frac{15}{4} \ln \frac{m_\mu}{m_e} + 6\zeta(3) + 3\pi^2 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{17}{8} \right], \quad (187)$$

$$\delta_\mu \left(\frac{m_e}{m_\mu}; \text{мюон.лин.} \right) = \frac{Z^2 \alpha(Z\alpha)}{\pi^2} \frac{m_e}{m_\mu} \left[\frac{9}{2} \zeta(3) - 3\pi^2 \ln 2 + \frac{39}{8} \right]. \quad (188)$$

В работе [137] подтвержден вышеуказанный результат для вкладов от электронной линии. Расчеты проведены в калибровке Фрида — Йенни для радиационных фотонов.

Вклады от диаграмм вакуумной поляризации были вычислены ранее [138,139]:

$$\delta_\mu \left(\frac{m_e}{m_\mu}; \text{в.п.} \right) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{m_e}{m_\mu} \left[-2 \ln^2 \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{8}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{28}{9} - \frac{\pi^2}{3} \right]; \quad (189)$$

²⁰Первоначально указанные поправки были найдены численными методами [127].

ведущие логарифмические поправки — в [41, 45]²¹:

$$\delta_{\mu} \left(\frac{m_e}{m_{\mu}} \ln \frac{m_{\mu}}{m_e} \right) = - \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m_e}{m_{\mu}} \left[\frac{4}{3} \ln^3 \frac{m_{\mu}}{m_e} - \frac{4}{3} \ln^2 \frac{m_{\mu}}{m_e} \right]. \quad (190)$$

Более того, заканчивается программа вычислений чисто радиационных поправок порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$ (т.е. коэффициента D в (185) [36, 37])^{21*}. Поправки $\alpha^2(Z\alpha)E_F$, индуцированные диаграммами со вставками вакуумной поляризации во внешние фотоны (см. рис. 1, а—с в [36, а]) вычислены в [36, а]:

$$\begin{aligned} \Delta E(\alpha^2(Z\alpha)) &= \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \left\{ - \frac{4}{3} \ln^2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{20}{9} \sqrt{5} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{608}{45} \ln 2 + \frac{\pi^2}{9} - \frac{38}{15} \pi + \frac{91639}{37800} \right\} \cong \\ &\cong - 2,23 \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \cong \left\{ \begin{array}{l} (-1,2 \text{ кГц для Му}) \\ (-0,34 \text{ кГц для Н}) \end{array} \right\}; \quad (191) \end{aligned}$$

индуцированные вставками вакуумной поляризации в фотонные линии радиационных фотонов (см. рис. 1 в цит. статье) вычислены в [36, б]:

$$\begin{aligned} \Delta E(\alpha^2(Z\alpha)) &= \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \left\{ - \frac{149}{270} + \frac{2}{9\pi} \int_0^1 dq D(q) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{3}{1+q} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2q}{1-q}} + \sqrt{\frac{2q}{1-q}} \left(- \frac{5}{4} \frac{1}{1+q} - \frac{2927}{2400} + \frac{10169}{3600} q \right) \right] \right\} \cong \\ &\cong - 0,310742 \dots \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \cong \left\{ \begin{array}{l} (-0,17 \text{ кГц для Му}) \\ (-0,054 \text{ кГц для Н}) \end{array} \right\} \quad (192) \end{aligned}$$

($D(q)$ — полный эллиптический интеграл); индуцированные диаграммами со вставками поддиаграмм рассеяния света на свете (см. рис. 1 в цит. статье) вычислены в [36, в]:

²¹Результат [41], вычисленный на основе методики предыдущего раздела, был дополнен в [45].

^{21*}Недавно [346] Киношита представил предварительный результат вычислений последней оставшейся диаграммы порядка $\alpha^2(Z\alpha)$ с перекрестными виртуальными фотонами $\Delta E(\alpha^2(Z\alpha)) \cong (-0,64 \pm 0,06) \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F = -0,353(33) \text{ кГц}$ для Му. Это дает возможность уменьшить теоретическую погрешность в (197) до 0,17 кГц.

$$\Delta E(\alpha^2(Z\alpha)) \cong -0,48213 \dots \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi} E_F \cong \left\{ \begin{array}{l} -0,26 \text{ кГц для } \text{Mu} \\ -0,084 \text{ кГц для } \text{H} \end{array} \right\}. \quad (193)$$

Отметим также первые вычисленные поправки второго порядка по отдаче [140]; поправки порядка $(Z\alpha)^2 E_F$ и $\frac{m_e}{m_\mu} (Z\alpha)^2 E_F$, вычисленные в квазипотенциальном подходе [24]²²:

$$\Delta E = E_F \left\{ 1 + (Z\alpha)^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{m_e m_\mu}{(m_e + m_\mu)^2} \left(\frac{19}{2} - \frac{1}{72} - \frac{2}{3} \pi^2 \right) \right] \right\}; \quad (194)$$

вклады адронной вакуумной поляризации [43, 141]:

$$\begin{aligned} \delta_\mu(\text{адроны}) &= 3,7520 \pm 0,2373 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{m_e m_\mu}{m_\pi^2} \cong \\ &\cong 0,250 \pm 0,0016 \text{ кГц [141]} \end{aligned} \quad (195)$$

и оценку вклада слабого взаимодействия [142, 143]:

$$\Delta E(\text{слаб.взаим.}) = \frac{3}{4\sqrt{2}\pi} (Z\alpha)^{-1} G_F m_e m_\mu E_F \cong 0,065 \text{ кГц.} \quad (196)$$

В результате теоретическое предсказание СТР основного уровня мюония:

$$\Delta E_{\text{СТР}}^{\text{теор}}(\text{Mu}) = 4463303,0 (0, 2) (0, 7) (0, 6) \text{ кГц.} \quad (197)$$

Здесь первая неопределенность возникает из экспериментальной погрешности в значении α [144], вторая — из экспериментальной погрешности в определении отношения масс мюона и электрона [145], третья — от невычисленного до конца коэффициента D (см. примечание^{21*}).

Что касается вопроса экспериментального определения $\Delta E_{\text{СТР}}^{\text{теор}}(\text{Mu})$, в табл. 7 суммированы опубликованные значения измерений СТР основного уровня мюония со времени его открытия в 1960 г. [146]²³.

Согласие теоретических и экспериментальных результатов прекрасное. Исходя из этого факта, можно на основе их сравнения (выражений (184) и последнего значения табл. 7) выделить значение постоянной тонкой структуры (см. (244)).

²²При этом расчете не учтены диаграммы трехфотонного обмена.

²³Результат 1961 г. [147] носит лишь оценочный характер $\Delta E = 2250\text{—}9000$ МГц.

Таблица 7

Год	Ссылка	ΔE , кГц	Погрешность, ppm
1962	[148]	4461300 (2200)	493
1964	[149]	4463330 (190)	43
1964	[150]	4463150 (60)	13
1969	[151]	4463260 (40)	9,0
1969	[152]	4463317 (21)	4,7
1970	[153]	4463302,2 (8,9)	2,0
1971	[154]	4463311 (12)	2,7
1971	[155]	4463301,17 (2,3)	0,5
1972	[156]	4463240 (120)	26,9
1973	[157]	4463304,0 (1,8)	0,4
1975	[158]	4463302,2 (1,4)	0,3
1977	[159]	4463302,35 (52)	0,12
1980	[160]	4463302,90 (27)	0,06
1982	[145]	4463302,88 (16)	0,036

Водород. Результат расчета квантово-электродинамических поправок к СТР водорода, без учета отдачи протона, в аналитическом виде, очевидно, тот же самый, что и для мюония (184), (185)²⁴. Численно это значение равно [161]:

$$\Delta E(\text{КЭД}) = 1420,45195 (14) \text{ МГц.} \quad (198)$$

Поправки на отдачу и динамические поправки, обусловленные наличием структуры ядра, вычислены в классических работах [134], [162—164] и дополняются результатами работ [165—170], [161]²⁵:

$$\Delta E(\text{структура}) = E_F [\delta_p(\text{Zemach}) + \delta_p(\text{отдача}) + \delta_p(\text{полярь.})],$$

$$\delta_p(\text{Zemach}) = -2\mu\alpha \langle r_p \rangle \cong -38,72(56) \text{ ppm},$$

$$\delta_p(\text{отдача}) \cong 5,68 \text{ ppm},$$

$$|\delta_p(\text{полярь.})| < 4 \text{ ppm},$$

где $\langle r_p \rangle$ — средний радиус протона, связанный с зарядовым распределением.

²⁴ Конечно, с соответствующими заменами $m_\mu \rightarrow m_p$ и $a_\mu \rightarrow a_p$.

²⁵ Результаты представлены в относительных величинах к E_F .

Обсуждение вкладов от поляризации протона, полученных на основе данных по неупругому рассеянию поляризованных электронов на нуклонах, см. также в [171].

В табл.8 суммированы опубликованные экспериментальные значения измерений СТР основного уровня водорода и дейтерия²⁶.

Таблица 8

Год	Ссылка	Изотоп	ΔE , кГц	Погрешность, ppm
1948	[173]	H	1420410 (6)	4224
1948	[173]	D	327384 (3)	9164
1952	[174]	H	1420405,1 (2)	141
1952	[174]	D	327384,24 (8)	244
1955	[175]	H	1420405,73 (5)	35
1955	[175]	D	327384,302 (30)	92
1956	[176]	H	1420405,80 (6)	42
1960	[177]	H	1420405,726 (30)	21
1960	[177]	D	327384,349 (5)	15
1960	[177]	T	1516701,396 (30)	20
1962	[178]	H	1420405,762 (4)	2,8
1962	[179]	H	1420405,7491 (60)	4,2
1962	[179]	T	1516701,4768 (60)	4,0
1963	[180]	H	1420405,751827 (20)	0,014
1963	[181]	H	1420405,751800 (28)	0,019
1964	[182]	H	1420405,751827 (20)	0,014
1965	[183]	H	1420405,751778 (16)	0,011
1965	[184]	H	1420405,751785 (16)	0,011
1966	[185]	H	1420405,751781 (16)	0,011
1966	[186]	H	1420405,7517860 (46)	0,003
1966	[187]	H	1420405,7517864 (17)	0,001
1970	[188]	H	1420405,7517667 (9)	0,0006

Разность значений между теорией и экспериментом тогда можно записать:

$$\frac{\Delta E^{\text{теор}} - \Delta E^{\text{эксп}}}{E_F} = (-0,48 \pm 0,56 \pm \text{невывчисл. вклады}) \text{ ppm}. \quad (199)$$

²⁶Единственный известный нам экспериментальный результат для СТР уровня водорода с главным квантовым числом $n = 2$ в [172] — $\Delta E^{\text{СТР}}(2S, H) = 177556,6(3)$ кГц с хорошей точностью удовлетворяет формуле, полученной Брейтом [131]: $\Delta E(2S) = \frac{\Delta E(1S)}{(8 - 5\alpha^2)}$.

Неопределенность 0,56 ppm возникает из погрешности значения постоянной тонкой структуры и, главным образом, из неточности данных о протонном упругом формфакторе. Невычисленные еще вклады могут быть порядка 1 ppm [161,189].

Мюонный атом гелия. Мюонный атом гелия, представляющий собой ${}^4\text{He}^{++}\mu^-e^-$, был экспериментально открыт в 1975 г. [190,191]. С точки зрения электронной структуры, такая система может рассматриваться как тяжелый изотоп водорода с «псевдоядром» $({}^4\text{He}^{++}\mu^-)^+$, которое имеет размер, промежуточный между характерными ядерными и атомными размерами (~ 130 фм). Первые измерения СТР, выполненные в 1980 г. [192,194], дали следующие результаты:

$$\Delta E^{\text{эксп}} = 4464,95 (6) \text{ МГц} \quad (13 \text{ ppm}) \quad [192]$$

$$\Delta E^{\text{эксп}} = 4464,02 (10) \text{ МГц} \quad (22 \text{ ppm}) \quad [193]$$

$$\Delta E^{\text{эксп}} = 4465,004 (29) \text{ МГц} \quad (6,5 \text{ ppm}) \quad [194].$$

Последний эксперимент позволил также определить магнитный момент отрицательного мюона:

$$\frac{\mu_{\mu^-}}{\mu_p} = 3,18328 (15) \quad (47 \text{ ppm}), \quad (200)$$

что позволяет проверить предсказания СРТ-инвариантности, согласно которой магнитные моменты частицы и античастицы должны быть равны. Указанная величина для положительно заряженного мюона, измеренная значительно более точно в экспериментах по СТР мюония [145]:

$$\frac{\mu_{\mu^+}}{\mu_p} = 3,1833461 (11) \quad (0,36 \text{ ppm}), \quad (201)$$

а также из наблюдений вращения спина мюона в жидкости (ларморовской прецессии) [195]:

$$\frac{\mu_{\mu^+}}{\mu_p} = 3,1833441 (17) \quad (0,53 \text{ ppm}), \quad (202)$$

согласуется с (200) на уровне нескольких десятков ppm. Для сравнения: согласие между магнитными моментами электрона и позитрона — на уровне точности 0,13 ppm [196] и между магнитными моментами протона и антипротона — 7500 ppm [197].

Теоретическое описание мюонного атома гелия, во многом связанное с методами, используемыми при описании мюония, см. в [198—201]. Следует отметить значительный вклад релятивистских и радиационных поправок к энергии Ферми для такой системы (M — масса «псевдоядра»):

$$E_F = \frac{16}{3} \alpha^2 R_\infty c \frac{m_e}{m_\mu} \left(1 + \frac{m_e}{M} \right)^{-3} = 4516,96 \text{ МГц.} \quad (203)$$

Полученные теоретические значения следующие²⁷:

$$\Delta E^{\text{теор}} = 4465,1 (1, 0) \text{ МГц} \quad [198],$$

$$\Delta E^{\text{теор}} = 4462,6 (3, 0) \text{ МГц} \quad [199],$$

$$\Delta E^{\text{теор}} = 4464,8 (5) \text{ МГц} \quad [200],$$

$$\Delta E^{\text{теор}} = 4460 \text{ МГц} \quad [201].$$

Первый результат получен с использованием вариационных методов, второй и третий — на основе расчета диаграмм по теории возмущений, четвертый — в рамках теории Борна — Оппенгеймера.

4.3. Тонкая структура. Позитроний и мюоний. В [204] впервые экспериментально исследован интервал тонкой структуры в позитронии, который, в отличие от атома водорода, невырожден уже в порядке $\alpha^2 R_\infty$:

$$\Delta E(2^3S_1 - 2^3P_2) = (8628,4 \pm 2,8) \text{ МГц.} \quad (204)$$

Такого рода эксперименты позволяют проверить КЭД для возбужденных состояний чисто лептонных систем.

Недавние эксперименты [205, 349] достигли большей точности (в МГц)²⁸:

$$\Delta E(2^3S_1 - 2^3P_2) = \begin{cases} 8619,6 (2, 7) (0, 9) \\ 8624,38 (0, 54) (1, 40) \end{cases},$$

$$\Delta E(2^3S_1 - 2^3P_1) = \begin{cases} 13001,3 (3, 9) (0, 9) \\ 13012,42 (0, 67) (1, 54) \end{cases},$$

$$\Delta E(2^3S_1 - 2^3P_0) = \begin{cases} 18504,1 (10, 0) (1, 7) \\ 18499,65 (1, 20) (4, 00) \end{cases}.$$

²⁷Вычисление некоторых вкладов можно найти также в [200, 203], но приведенные там численные результаты весьма отличаются от результатов эксперимента.

²⁸Первая погрешность статистическая, вторая — систематическая.

Теоретические расчеты на основе уравнения БС предсказывают для первых возбужденных состояний [46,47,113,114,206] (см. также [207,208]):

$$E(1^3S_1) = R_\infty \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{49}{96} \alpha^2 + \frac{3}{2\pi} \alpha^3 \ln \alpha^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^3}{\pi} \left[-\frac{1}{15} + \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{4}{3} \ln R(1, 0) \right] + A_{1S} \alpha^4 \ln \alpha^{-1} + B_{1S} \alpha^4 + \dots \right\},$$

$$E(2^3S_1) = \frac{1}{8} R_\infty \left\{ -1 + \frac{65}{192} \alpha^2 + \frac{3}{2\pi} \alpha^3 \ln \alpha^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^3}{\pi} \left[\frac{97}{120} + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{4}{3} \ln R(2, 0) \right] + A_{2S} \alpha^4 \ln \alpha^{-1} + B_{2S} \alpha^4 + \dots \right\},$$

$$E(2^3P_2) = \frac{1}{8} R_\infty \left\{ -1 - \frac{43}{960} \alpha^2 - \frac{\alpha^3}{\pi} \left[\frac{1}{45} + \frac{4}{3} \ln R(2, 1) \right] + \right. \\ \left. + A_{P2} \alpha^4 \ln \alpha^{-1} + B_{P2} \alpha^4 + \dots \right\},$$

$$E(2^3P_1) = \frac{1}{8} R_\infty \left\{ -1 - \frac{47}{192} \alpha^2 - \frac{\alpha^3}{\pi} \left[\frac{5}{36} + \frac{4}{3} \ln R(2, 1) \right] + \right. \\ \left. + A_{P1} \alpha^4 \ln \alpha^{-1} + B_{P1} \alpha^4 + \dots \right\},$$

$$E(2^3P_0) = \frac{1}{8} R_\infty \left\{ -1 - \frac{95}{192} \alpha^2 - \frac{\alpha^3}{\pi} \left[\frac{25}{72} + \frac{4}{3} \ln R(2, 1) \right] + \right. \\ \left. + A_{P0} \alpha^4 \ln \alpha^{-1} + B_{P0} \alpha^4 + \dots \right\},$$

где $R(n, l)$ — логарифм Бете [209,210]:

$$\ln R(1, 0) \cong 2,9841285,$$

$$\ln R(2,0) \cong 2,8117699,$$

$$\ln R(2,1) \cong -0,0300167,$$

коэффициенты A_{1S} и A_{2S} недавно вычислены, но результаты статей [46,47] отличаются друг от друга²⁹:

$$\Delta E(\alpha^6 \ln \alpha) = \frac{5}{24} m\alpha^6 \ln \alpha^{-1} \frac{\delta_{R0} \delta_{S1}}{n^3} \quad [46],$$

$$\Delta E(\alpha^6 \ln \alpha) = \frac{1}{12} m\alpha^6 \ln \alpha^{-1} \frac{\delta_{R0} \delta_{S1}}{n^3} \quad [47],$$

коэффициенты B еще не вычислены. Коэффициент 1 при слагаемом $\alpha^4 \ln \alpha^{-1} R/8$ вносит вклад 5,7 МГц, а при $\alpha^4 R/8$ — 1,2 МГц.

Имеется простая формула для вкладов порядка $\alpha^2 R_\infty$ к S -уровням электрон-позитронной системы [207]:

$$E(\alpha^2 R_\infty) = \frac{m\alpha^4}{n^3} \left[\frac{11}{64} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \delta_{1S} \right]. \quad (205)$$

Вклады, начиная с порядка $\alpha^3 R$, возникают из учета радиационных поправок (вершинной функции, вакуумной поляризации, собственной энергии электрон-позитронного поля и аннигиляционного канала взаимодействия). По всей видимости, формула для S -состояний электрон-позитронной системы, приведенная в [207], неверна, как указано, например, в [47,208]. Из приведенного в последней статье результата видно, что эти поправки уже не пропорциональны $1/n^3$:

$$\begin{aligned} \Delta E(\alpha^3 R_\infty) = & \frac{m\alpha^5}{8\pi n^3} \left\{ \frac{14}{3} \left[\frac{7}{15} + \ln \frac{2}{n} + \frac{n-1}{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{14}{3} \ln 2 - 6 \ln \alpha - \frac{16}{3} \ln R(n,0) - 4 \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \delta_{1S} \right\}. \quad (206) \end{aligned}$$

²⁹Необходимы эксперименты на уровне точности ~ 10 ррт, чтобы проверить результаты работ Фелла и Хрипловича с сотр. Результат из [47] подтвержден в [348].

Численные значения теоретических предсказаний (с учетом логарифмических поправок) следующие [46, 47]³⁰ (см. также [348]):

$$\Delta E(2^3S_1 - 1^3S_1) = 1233607211,7 \text{ МГц}; \quad 1233607221,69 \text{ МГц};$$

$$\Delta E(2^3S_1 - 2^3P_2) = 8627,7 \text{ МГц}; \quad 8626,21 \text{ МГц};$$

$$\Delta E(2^3S_1 - 2^3P_1) = 13013,3 \text{ МГц}; \quad 13011,86 \text{ МГц};$$

$$\Delta E(2^3S_1 - 2^3P_0) = 18498,5 \text{ МГц}; \quad 18497,10 \text{ МГц}.$$

В связи с развитием экспериментальных методов, основанных на бездоплеровской двухфотонной спектроскопии, стало возможным измерить также интервалы «большой» структуры ($1S - 2S$) с точностью несколько МГц. Эти эксперименты позволяют с рекордной точностью определить значение такой фундаментальной величины, как постоянная Ридберга (см. ниже).

В [211, 351] представлены последние результаты измерений интервала $\Delta E(1^3S_1 - 2^3S_1)$ в позитронии и мюонии³¹:

$$\Delta E_{Ps}^{\text{эксп}}(2^3S_1 - 1^3S_1) = \left\{ \begin{array}{l} (1233607218,9 \pm 10,7) \text{ МГц} \\ (1233607216,4 \pm 3,2) \text{ МГц} \end{array} \right. \quad (206')$$

$$\Delta E_{Mu}^{\text{эксп}}(2^3S_1 - 1^3S_1) = (2455527936 \pm 120 \pm 140) \text{ МГц}.$$

Для мюонии имеется согласие с теорией [217]:

$$\Delta E_{Mu}^{\text{теор}}(2^3S_1 - 1^3S_1) = 2455527959,6 (3, 6) \text{ МГц}.$$

³⁰ В первой колонке указан результат Хрипловича и др., во второй — Фелла.

³¹ Предыдущие эксперименты дали для позитронии следующие результаты:

$$\frac{1}{2} \Delta E^{\text{эксп}} = \frac{3}{16} cR_{\infty} - 41,4(5) \text{ ГГц} [212],$$

$$\Delta E^{\text{эксп}} = 1233607185(15) \text{ МГц} = \frac{3}{8} cR_{\infty} - 83545(15) \text{ МГц} [213],$$

$$\Delta E^{\text{эксп}} = 1233607142,9(10,7) \text{ МГц} [214],$$

для мюонии (см. обсуждение в [215]):

$$\frac{1}{4} \Delta E^{\text{эксп}} = (613881924 \pm 30 \pm 35) \text{ МГц} [216].$$

Для позитрония результат на 16,6 (10,7) МГц выше теоретического значения Фултона. Однако, так как многие авторы считают результат [207] для $1S$ -состояния неточным, предпочтительнее сравнить экспериментальное значение (206') с результатом работы [208], в которой тонкая структура вычислена на основе простого потенциального метода [218]:

$$\Delta E_{Ps}^{\text{теор}}(2^3S_1 - 1^3S_1) = 1233607221,69 \text{ МГц,}$$

$$\Delta E_{Mu}^{\text{теор}}(2^3S_1 - 1^3S_1) = 2455528055 \text{ МГц,}$$

и с последними результатами Фелла, Хрипловича и др. [47,348].

Исследованию тонкой структуры возбужденного состояния мюония посвящены работы [219—221] (см. ниже).

Отметим еще работы [76,222], в которых изучен вопрос проверки CP-сохранения в лептонном секторе. Там получены экспериментальные и теоретические ограничения на переходы типа $2^3S_1 \rightarrow 2^1P_1$.

Водород и дейтерий. Для водорода результаты измерений $2S - 1S$ интервала приведены в [223—231]³². Важность таких исследований понятна, так как они обеспечивают информацию о лэмбовском сдвиге $1S$ -уровня³³, которую невозможно получить методами радиочастотной спектроскопии, применяемой в экспериментах по $2S$ -лэмбовскому сдвигу, и позволяют с рекордной точностью определить численное значение постоянной Ридберга.

В табл.9 приведены результаты измерений интервала и лэмбовского сдвига $1S$ -уровня. Все энергии измерены в МГц.

Результат [230] для величины лэмбовского сдвига $1S$ -уровня получен с использованием следующего значения ридберговской константы (среднее значение результатов [252,253]):

$$R_{\infty} = 109737,315714(19) \text{ см}^{-1}. \quad (207)$$

³²Обзор ранних результатов по определению $2^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ см. в [232,233].

³³Первая успешная попытка измерить эту величину была предпринята еще в [234]: $E^{\text{экс}}(LS, 1S) = (7,9 \pm 1,1) \text{ ГГц}$. См. также [235], где впервые обсуждали величину изотопического расщепления водорода, исходя из наблюдений серии Лаймана для водорода и дейтерия.

Таблица 9

Год	Ссылка	Изотоп	$\Delta E(1S - 2S)$	$E(LS, 1S)$
1975	[223]	D	—	8300(300)
1975	[223]	H	—	8600(800)
1975	[224]	D	—	8250(110)
1975	[224]	H	—	8200(100)
1980	[225]	D	—	8177(30)
1980	[225]	H	—	8151(30)
1986	[226] ³⁴	H	2466061395,6(4,8)	8184,8(5,4)
1986	[227]	H	2466061397(25)	8182(25)
1987	[228]	H	2466061413,8(1,5)	8173,3(1,7)
1989	[229]	H	2466061413,19(1,75)	8173,9(1,9)
1989	[230]	D	2466732408,5(7)	8183,7(6)
1989	[230]	H	2466061414,1(8)	8172,6(7)
1990	[231]	H	2466061413,182(45)	8172,804(83)

Имеется несколько значений для изотопического смещения $\Delta E(H - D)$, определенных на основе этой методики:

$$\Delta E(H - D) = 670993(56) \text{ МГц [224]},$$

$$\Delta E(H - D) = 670992,3(6,3) \text{ МГц [225]},$$

$$\Delta E(H - D) = 670994,33(64) \text{ МГц [230]},$$

$$\Delta E(H - D) = 670994,337(22) \text{ МГц [347]}.$$

Численные значения лэмбовского сдвига $1S$ -уровня, определенные на основе теоретических расчетов [236—242], см. в [229, 230]:

$$E^{\text{теор}}(H, LS, 1S) = 8172,89(9) \text{ МГц [229]};$$

$$E^{\text{теор}}(H, LS, 1S) = 8173,03(9) \text{ МГц [230]};$$

$$E^{\text{теор}}(D, LS, 1S) = 8184,08(12) \text{ МГц [230]}.$$

³⁴Представленный в таблице результат [226] получен с использованием R_{∞} из [249].

Лучшее согласие с теоретическим результатом достигается при использовании R_{∞} из [247]:
 $E(LS, 1S) = 8174,8(8,7) \text{ МГц}.$

Зарядовый радиус протона в [230] полагался равным $0,862(12)$ фм [244]³⁵, а дейтрона — $2,116(12)$ фм [245].

Теоретическое значение изотопического расщепления:

$$\Delta E^{\text{теор}}(H - D) = 670994,39(12) \text{ МГц} \quad [230] \quad (208)$$

согласуется с результатами последних экспериментов в пределах ошибки.

Если считать величину лэмбовского сдвига теоретически заданной, из сравнения вычисленного значения $1S-2S$ интервала с указанным экспериментальным можно получить информацию о постоянной Ридберга (см. следующий раздел).

4.4. Постоянная Ридберга. Последние измерения константы Ридберга следующие.

Таблица 10

Статья	Год	Значение постоянной (см^{-1})	Интервал
[246]	1974	109737,3143(10)	$2P - 3D$
[247]	1978	109737,31476(32)	$2S - 3P$
[248]	1980	109737,31513(85)	$2S - 3P, 2P - 3D$
[249]	1981	109737,31521(11)	$2S - 3P$
[226]	1986	109737,31492(22)	$1S - 2S$
[227]	1986	109737,3150(11)	$1S - 2S$
[250]	1986	109737,31569(7)	$2S - 3P$
[251]	1986	109737,31569(6)	$2S - 8D, 10D$
[252]	1987	109737,31573(3)	$2S - 4P$
[228]	1987	109737,31571(7)	$1S - 2S$
[253]	1989	109737,315709(18)	$2S - 8D, 10D, 12D$
[229]	1989	109737,31569(8)	$1S - 2S$
[230]	1989	109737,31573(3)	$1S - 2S$
[231]	1992	109737,3156841(42)	$1S - 2S$
[254]	1992	109737,3156830(31)	$2S - 8S, 8D$

4.5. Лэмбовский сдвиг. Водород. В работе [255] доложены результаты оптических измерений лэмбовского сдвига $1S$ -уровня атома водорода.

³⁵Предыдущее измерение радиуса протона [243] не может быть проигнорировано, так как для некоторых экспериментов оно позволяет добиться лучшего согласия с теоретическими предсказаниями.

$$E(LS, 1S, H) = 8172,82(11) \text{ МГц (13 ppm)}. \quad (209)$$

Методика основана на сравнении частот двухфотонных переходов $1S-2S$ и $2S-4S, 4D$ и является принципиально отличной от экспериментов по косвенному определению этой величины (см. пред. разд.) методом бездоплеровской двухфотонной спектроскопии $1S-2S$ -перехода. Там же [255] дано также первое оптическое измерение лэмбовского сдвига $4S$ -уровня водорода

$$E(LS, 4S, H) = 131,66(4) \text{ МГц (300 ppm)}, \quad (210)$$

которое можно сравнить с теоретическими предсказаниями [233]:

$$E^{\text{теор}}(LS, 4S, H) = 133,084(1) \text{ МГц},$$

$$E^{\text{теор}}(LS, 4S, D) = 133,254(3) \text{ МГц},$$

и с радиочастотными измерениями [256—258]:

$$E^{\text{эксп}}(LS, 4S, D) = 133(10) \text{ МГц [256]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, 4S, H) = 133,18(59) \text{ МГц [257]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, 4S, H) = 133,53^{+0,58}_{-0,78} \text{ МГц [258]}.$$

Обсуждение лэмбовского сдвига для $n = 3$ в атоме водорода см. в [259]. Мы воспроизводим результаты, выписанные в этой статье:

$$E^{\text{эксп}}(LS, 3S, D) = 314,93(40) \text{ МГц [256]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, 3S, H) = 313,6(2,9) \text{ МГц [260]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, 3S, D) = 315,3(8) \text{ МГц [260]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, 3S, H) = 315,11(89) \text{ МГц [261]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, 3S, H) = 314,819(48) \text{ МГц [259]},$$

$$E^{\text{теор}}(LS, 3S, H) = 314,898(3) \text{ МГц [237]}.$$

Точность этих экспериментов приближается к точности измерений лэмбовского сдвига $2S$ -уровня, которые имели огромное значение для проверки предсказаний КЭД. В табл.11 суммированы результаты всех измерений для $n = 2$ -уровня.

Таблица 11

Год	Ссылка	ΔE , МГц	Погрешность, ppm
1953	[262]	1057,774(100)	94,5
1969	[263]	1057,772(63)	59,6
1970	[264]	1057,90(6)	56,7
1975	[265]	1057,892(20)	18,9
1979	[266]	1057,862(20)	18,9
1981	[267]	1057,845(9)	8,5
1982	[268]	1057,8594(19)	1,8
1983	[269]	1057,851(2)	1,9

Результаты существенно зависят от параметра τ — времени жизни $2P$ -состояния. Так как экспериментальные данные об этой константе распада отсутствуют, величина рассчитывалась теоретически [268,269]. С учетом релятивистских поправок

$$\gamma_{\text{рел}} = 4\pi c \left(\frac{2}{3}\right)^8 R_H \alpha^3 \left(1 + \alpha^2 \ln \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \frac{me^4}{h^3} \frac{\alpha^3 \left(1 + \alpha^2 \ln \frac{9}{8}\right)}{1 + \frac{m}{\mu_p}} \quad (211)$$

(R_H — константа Ридберга с учетом конечной массы протона).

Ведущие радиационные поправки (собственная энергия и поляризация вакуума) дают дополнительно:

$$\delta \gamma_{\text{рад}} = 4\pi c \left(\frac{2}{3}\right)^8 R_H \alpha^3 \left[\frac{R(2,1)}{8} - R(1,0) - \ln \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{64} - \frac{19}{30} \right] \quad (212)$$

($R(n,l)$ — логарифм Бете).

Численно с учетом приведенных поправок имеем:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = 6,2648812(20) \cdot 10^8 \text{ с}^{-1},$$

$$\tau = 1,59619946(48) \cdot 10^{-9} \text{ с}.$$

Для дейтерия ($n = 2$) нам известны следующие экспериментальные результаты:

$$E^{\text{эксп}}(LS, D) = 1059,00(10) \text{ МГц [262]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, D) = 1059,24(6) \text{ МГц [270]}.$$

Заметим, что дальнейшее повышение точности экспериментальных результатов для лэмбовского сдвига $n = 2$ — уровня атома водорода наталкивается на серьезные препятствия, а именно: естественная ширина $2P$ -состояния имеет порядок ~ 100 МГц.

Полная теоретическая формула для лэмбовского сдвига ($n = 2$) в водороде [271] (см. уточнения в [348]):

$$\begin{aligned} \Delta E_{LS} = \Delta E_{2S_{1/2}} - \Delta E_{2P_{1/2}} = & \frac{\alpha (Z\alpha)^4 m}{6\pi} \left(\frac{\mu}{m}\right)^3 \left\{ \frac{1}{8} \frac{m}{\mu} + \ln(Z\alpha)^{-2} - \right. \\ & - 2,207909 + \pi Z\alpha \left(\frac{427}{128} - \frac{3}{2} \ln 2 \right) + (Z\alpha)^2 \left[-\frac{3}{4} \ln^2(Z\alpha)^{-2} + \right. \\ & + \left. \left(4 \ln 2 + \frac{55}{48} \right) \ln(Z\alpha)^{-2} \right] + (Z\alpha)^2 [G_{\text{с.э.}}(Z\alpha) + G_{\text{в.п.}}(Z\alpha)] + \alpha \left(\frac{0,323}{\pi} \right) \left. \right\} + \\ & + \frac{(Z\alpha)^5 m^2}{6\pi M} \left\{ \frac{1}{4} \ln(Z\alpha)^{-2} + 2,39977 + \frac{3}{4} \pi Z\alpha \left[\frac{5}{2} + \ln(2Z\alpha)^{-1} - 4,25 \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{12} (Z\alpha)^4 m^3 \langle r_p^2 \rangle - \frac{1}{48} \frac{(Z\alpha)^4 m^3}{M^2} + \frac{\alpha (Z\alpha)^5 m^2}{8M} \left[\left(\frac{35}{4} \ln 2 - \frac{39}{5} - \frac{31}{192} \right) + \right. \\ & \left. + (-0,415 \pm 0,004) \right], \end{aligned} \quad (213)$$

где вклады собственной энергии и вакуумной поляризации ($G_{\text{с.э.}}$ и $G_{\text{в.п.}}$) могут быть представлены в форме известного разложения Уичмена — Кролла [272], [236, в]:

$$G_{\text{в.п.}} = -\frac{1199}{2100} + \frac{5}{128} \pi (Z\alpha) \ln(Z\alpha)^{-2} + 0,5(Z\alpha) + \dots \quad (214)$$

$$G_{\text{с.э.}} = -24,1 + 7,5(Z\alpha) \ln(Z\alpha)^{-2} + 12,3(Z\alpha) \pm 1,2 \quad (215)$$

и в сумме дают $-24,0 \pm 1,2$ [271] для случая атома водорода³⁶.

Скорректированное с учетом новых рассчитанных поправок значение лэмбовского сдвига $n = 2$ -уровня водорода дано в [271]:

$$E^{\text{теор}}(LS, H) = (1057,855 \pm 0,011) \text{ МГц (при } \langle r_p \rangle = 0,805(11)),$$

$$E^{\text{теор}}(LS, H) = (1057,873 \pm 0,011) \text{ МГц (при } \langle r_p \rangle = 0,862(12)).$$

Самые ранние теоретические работы см. [114, в], [169], [273—275], где вычислены поправки на отдачу $(Z\alpha)^5 \frac{m^2}{M}$. Поправки, полученные из учета диаграмм с радиационными обменами $\alpha (Z\alpha)^4 \frac{m^2}{M}$, $\alpha (Z\alpha)^5 \frac{m^2}{M}$, вычислены в приближении внешнего поля в [241]. Поправки порядка $(Z\alpha)^4 \frac{m^2}{M^2}$ см. в [274, 221]. Вклады, возникающие из учета конечного размера протона, обсуждены в [271], где вычислены поправки $(Z\alpha)^6 \frac{m^2}{M}$.

Поправка порядка $\alpha^2(Z\alpha)^5 m$ — поправка связанности к двухпетлевым радиационным эффектам — все еще не вычислена³⁷. Желательно ее вычислить, чтобы добиться точности теоретических расчетов ~ 1 кГц.

Мюоний. На сегодняшний день известны два экспериментальных результата для лэмбовского сдвига ($2S_{1/2} - 2P_{1/2}$, $J = 1$) в мюонии:

$$E^{\text{эксп}}(LS, \text{Mu}) = (1070_{-15}^{+12} \pm 2) \text{ МГц [278]},$$

$$E^{\text{эксп}}(LS, \text{Mu}) = (1054 \pm 22) \text{ МГц [279]}.$$

Теоретическое значение дано Оуэном [219, 220, 221]:

³⁶Для других ионов ($Z \neq 1$) [236, 276].

³⁷См. работы в этом направлении [277], где рассчитаны поправки такого порядка от диаграмм с поляризационными вставками во внешние кулоновские линии и от диаграмм с радиационными вставками в электронную линию и с одной поляризационной вставкой в кулоновскую линию.

$$E^{\text{теор}}(LS, \text{Mu}) = 1047,03 \text{ МГц [219]},$$

так же как и интервал тонкой структуры $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$:

$$E^{\text{теор}}(FS, \text{Mu}) = 10921,50 \text{ МГц [219]}.$$

В отличие от атома водорода, так же как и в случае расчетов СТР, в мюонии проблем со структурой не возникает.

Гелий. Точность экспериментальных измерений [280,281] частот переходов между ридберговскими состояниями $^4\text{He}^+$ методами «beam foil» спектроскопии достигла в настоящее время таких величин, при которых стало возможным проверить лэмбовский сдвиг ($2S_{1/2} - 2P_{1/2}$) в гелии на уровне поправок порядка $\sim \alpha(Z\alpha)^6 mc^2$. В табл.12 приведены все экспериментальные результаты измерений этой величины, в том числе ранние, основанные на методике Лэмба и Резерфорда [262].

Таблица 12

Год	Ссылка	$E(LS)$, МГц	Погрешность, ppm
1950	[282]	14020(100)	7130
1952	[283]	14021(60)	4280
1955	[244]	14043(13)	930
1957	[285]	14040,2(1,8)	128
1971	[286]	14046,2(1,2)	85
1979	[287]	14040,9(2,9)	207
1987	[280]	14041,9(1,5)	107
1988	[281]	14042,22(35)	25

Первые теоретические исследования лэмбовского сдвига в атоме гелия были проведены в [289]. Современные расчеты [232,237,276,281] (см. также [238]) дают значительно различающиеся результаты³⁸:

$$E(LS, ^4\text{He}^+)_{\text{теор}} = 14044,5(5,2) \text{ МГц [232]},$$

³⁸Расчет [281] осуществлен с использованием нового значения радиуса ядра $1,673(1)$ фм [288] и находится в прекрасном согласии с экспериментом.

$$E(LS, {}^4\text{He}^+)_{\text{теор}} = 14045,12(55) \text{ МГц [237]},$$

$$E(LS, {}^4\text{He}^+)_{\text{теор}} = 14042,36(55) \text{ МГц [276, a]},$$

$$E(LS, {}^4\text{He}^+)_{\text{теор}} = 14042,26(50) \text{ МГц [281]}.$$

Последние расчеты величины $G_{\text{с.э.}}(Z = 2)$ следующие:

$$G_{\text{с.э.}}(Z = 2) = -22,8 \pm 2,0 \text{ [290]}, \quad (216)$$

$$G_{\text{с.э.}}(Z = 2) = -22,0 \pm 0,3 \text{ [291]}. \quad (217)$$

Кроме того, хотелось бы отметить последние работы, посвященные исследованию высоковозбужденных состояний атома гелия [292—296], [291], и таблицу последних результатов для ионов других атомов [281]. Исследование мюонного гелия см. в [297].

4.6. Аномальный магнитный момент (АММ). Электрон. Перенормируемость КЭД гарантирует возможность вычислений АММ электрона с помощью разложения в ряд теории возмущений по α/π с конечными коэффициентами a_i :

$$\frac{g - 2}{2} = a_e(QED) = a_{II} \frac{\alpha}{\pi} + a_{IV} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + a_{VI} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + a_{VIII} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots \quad (218)$$

В настоящее время величина АММ электрона известна до 8 порядка включительно. В статьях [298—302] закончено вычисление указанного вклада. Полученный результат для вкладов 8 порядка в АММ электрона следующий³⁹:

$$a_{e,VIII}^{\text{теор}} = -1,434(138). \quad (219)$$

Если использовать наиболее точное значение постоянной тонкой структуры α [304], определенное на основе квантового эффекта Холла:

$$\alpha^{-1} = 137,0359979(32) \text{ (0,024 ppm)}, \quad (220)$$

³⁹Представленный результат значительно более точный, чем предварительный: $a_{e,VIII} = (-0,8 \pm 2,5)$ [303].

то наиболее точное значение АММ электрона будет⁴⁰:

$$a_e^{\text{теор}} = 1159652140(27,1)(5,3)(4,1) \cdot 10^{-12}, \quad (221)$$

что согласуется⁴¹ с точностью 1,7 стандартного отклонения с экспериментальными значениями для электрона и позитрона [144]⁴².

$$a_e^{\text{эксп}} = 1159652188,4(4,3) \cdot 10^{-12}, \quad (222)$$

$$a_e^{\text{эксп}} = 1159652187,9(4,3) \cdot 10^{-12} \quad (223)$$

Указанный теоретический результат включает аналитически вычисленные вклады второго и четвертого порядков:

$$a_{e,\text{II}} = 0,5 [307], \quad (224)$$

$$a_{e,\text{IV}} = \left[\frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2 \ln 2}{2} + \frac{2\zeta(3)}{4} \right] = -0,328478965 [308]^{43}, \quad (225)$$

$$a_{e,\text{IV}} \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) = \frac{1}{45} \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 + O \left(\left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^4 \ln \frac{m_e}{m_\mu} \right) = 5,198 \cdot 10^{-7} [313]^{44} \quad (226)$$

⁴⁰ Наиболее значительная неопределенность (27,1) возникает из-за неопределенности в значении постоянной тонкой структуры; вторая неопределенность — из-за погрешности в вычислениях $a_{e,\text{VI}}^{\text{теор}}$; третья — из-за погрешности в вычислениях восьмого порядка $a_{e,\text{VIII}}^{\text{теор}}$.

⁴¹ Предположение [305] о связи этого различия (1,7 σ) с существованием скалярного партнера электрона (а не только с погрешностью в измерении α и неточного численного интегрирования) пока не актуально.

⁴² История экспериментальных результатов представлена в [306].

⁴³ Недавно вклад $a_{e,\text{IV}}$ был снова вычислен в калибровке Фрида — Йенни [309]. Результат согласуется с предыдущими [308, 310—312].

⁴⁴ Слагаемое четвертого порядка $a_{e,\text{IV}} \left(\frac{m_e}{m_r} \right)$, обусловленное существованием диаграмм с радиационной вставкой τ -лептона в вершину, в $\left(\frac{m_\mu}{m_r} \right)^2$ раз меньше значения (226). Слагаемое $a_{e,\text{VI}} \left(\frac{m_e}{m_r}, \frac{m_e}{m_r} \right)$ порядка $\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left(\frac{m_e}{m_r} \right)^2$ является пренебрежимо малым для современного уровня экспериментальной точности.

и вклад шестого порядка, состоящий из 72 диаграмм (не все из них вычислены аналитически) [314—317], скорректированный в [302,350]:

$$a_{e,\text{VI}} = 1,17613(42)^{45}, \quad (227)$$

а также малые поправочные слагаемые, которые появляются в результате учета мюонной, τ -лептонной и адронной петель вакуумной поляризации, а также вклада слабого взаимодействия

$$\Delta a_e(\text{мюон}) = 2,804 \cdot 10^{-12},$$

$$\Delta a_e(\tau\text{-лептон}) = 0,010 \cdot 10^{-12},$$

$$\Delta a_e(\text{адроны}) = 1,6(2) \cdot 10^{-12},$$

$$\Delta a_e(\text{сл. взаим.}) = 0,05 \cdot 10^{-12}.$$

Представляет также интерес недавно вычисленный аналитически вклад поддиаграмм рассеяния света на свете в шестом порядке АММ a_e [319]:

$$\begin{aligned} a_{e,\text{IV}}(\gamma\gamma) &= \frac{5}{6} \zeta(5) - \frac{5}{18} \pi^2 \zeta(3) - \frac{41}{540} \pi^4 - \frac{2}{3} \pi^2 \ln^2 2 + \frac{2}{3} \ln^4 2 + \\ &+ 15a_4 - \frac{4}{2} \zeta(3) - 24\pi^2 \ln 2 + \frac{931}{54} \pi^2 + \frac{5}{9} \cong 0,3710052921 \quad (228) \end{aligned}$$

$$(a_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^4} \cong 0,517479061\dots),$$

который согласуется с численными оценками:

$$a_{e,\text{VI}}(\gamma\gamma) = 0,36(4) \quad [320],$$

$$a_{e,\text{VI}}(\gamma\gamma) = 0,37112(8) \quad [321],$$

$$a_{e,\text{VI}}(\gamma\gamma) = 0,370986(20) \quad [315],$$

но расходится с $a_{e,\text{VI}}(\gamma\gamma) = 0,398(5) \quad [318]$.

⁴⁵Результат Самуэля [318] $a_{e,\text{VI}} = 1,184(5)$ в настоящее время считается завышенным.

Мюон. АММ лептона массы m_l может быть выражен в следующей наиболее общей форме:

$$a_l = a_1 + a_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \right) + a_2 \left(\frac{m_1}{m_3} \right) + a_3 \left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{m_1}{m_3} \right), \quad (229)$$

где m_2 и m_3 — массы других лептонов.

Так же как и для АММ электрона,

$$a_i = a_{i,II} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + a_{i,IV} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + a_{i,VI} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + a_{i,VIII} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots \quad (230)$$

Ясно, что $a_{2,II} = a_{3,II} = a_{3,IV} = 0$, так как фейнмановские диаграммы, которые могут вносить вклады подобного вида, отсутствуют.

Рассмотрим современное состояние исследований АММ мюона. Значение известно из расчета АММ электрона. Значение $a_{2,IV}(m_\mu/m_e)$, в отличие от АММ электрона, не столь мало из-за большой величины отношения m_μ/m_e . Результат известен в аналитическом виде [322]:

$$\begin{aligned} a_{2,IV} \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right) &= \frac{1}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{36} + \frac{\pi^2}{4} \frac{m_\mu}{m_e} = \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^2 \ln \frac{m_\mu}{m_e} + 3 \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^3 + O \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^3 = \\ &= 1,0942596\dots \end{aligned} \quad (231)$$

Из указанной формулы также может быть выведен вклад

$$a_{2,IV} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right) \cong 7,794(32) \cdot 10^{-5}. \quad (232)$$

Вклад шестого порядка $a_{2,VI}(m_\mu/m_e)$, возникающий из 18 фейнмановских диаграмм, содержащих петли вакуумной поляризации, получен в аналитической форме [313,323,324]:

$$\begin{aligned} a_2^{\mu,VI} \left(\frac{m_e}{m_{\mu; \text{в.п.}}} \right) &= a_e^{\text{VI}}(\text{в.п.}) + \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \left[\frac{1075}{216} - \frac{25}{3} \zeta(2) + 10\zeta(2) \ln 2 - \right. \\ &- 2\zeta(3) + 3c_4 + \left. \left(\frac{31}{27} + \frac{2}{3} \zeta(2) - 4\zeta(2) \ln 2 + \zeta(3) \right) \ln \frac{m_\mu}{m_e} + \frac{2}{9} \ln^2 \frac{m_\mu}{m_e} \right] = \\ &= 1,94404 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3, \end{aligned} \quad (233)$$

а вклад 6 диаграмм с поддиаграммами рассеяния света на свете вычислен численно [321,325,326]. Последние вычисления этого порядка АММ мюона дают следующие значения [321,350]:

$$a_{2,\text{VI}}\left(\frac{m_\mu}{m_e}; \text{вакуум.поляр.}\right) = 1,9204550(2),$$

$$a_{2,\text{VI}}\left(\frac{m_\mu}{m_e}; \text{свет на свете}\right) = 20,9479242(9),$$

$$a_{2,\text{VI}}\left(\frac{m_\mu}{m_e}; \text{сумма}\right) = 22,8683792(9).$$

Вклад восьмого порядка в АММ мюона вычисляется из 469 фейнмановских диаграмм, каждая из которых либо содержит электронные петли типа вакуумной поляризации, либо поддиаграммы рассеяния света на свете. Результат численных расчетов для 8 порядка представлен в [327,350]⁴⁶:

$$d_2^{\mu,\text{VIII}}\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right) = 127,47. \quad (234)$$

В работах [328,329,330], используя ренормгрупповую технику, аналитически были получены асимптотические (при $m_e/m_\mu \rightarrow 0$) вклады к АММ мюона⁴⁷, возникающие из диаграмм восьмого порядка, содержащих одну петлю электронной поляризации вакуума [330]:

$$a_{\mu,\text{VIII}}^{\infty,1}(\text{в.п.}) = -\frac{1}{32} \ln \frac{m_\mu}{m_e} + \frac{17}{48} + \frac{5}{8} \zeta(2) - \\ - \zeta(2) \ln 2 + \frac{99}{128} \zeta(3) - \frac{5}{4} \zeta(5) = -0,290987... \quad (235)$$

⁴⁶Предварительный результат был представлен в [325]: $a_{2,\text{VIII}} = 140(6)$.

⁴⁷При завершении работы над настоящим обзором нам стало известно о замечательных результатах [331], где аналитически получены $(n+1)$ -петлевые вклады в мюонную аномалию, получаемые подстановкой в однопетлевые диаграммы всех диаграмм с n -петлевым фотонным пропагатором, содержащим $(n-1)$ электронных петель.

и две электронные петли [328, 329]⁴⁸:

$$a_{\mu, \text{VIII}}^{\infty, 2}(\text{в.п.}) = -\frac{1}{12} \ln^2 \frac{m_{\mu}}{m_e} + \left[\frac{1}{3} \zeta(3) - \frac{2}{3} \right] \ln \frac{m_{\mu}}{m_e} + \\ + \frac{1531}{1728} + \frac{5}{12} \zeta(2) - \frac{1025}{1152} \zeta(3) = -1,452570\dots \quad (236)$$

Оценка вклада десятого порядка следующая [327]:

$$a_{2, X} \left(\frac{m_{\mu}}{m_e} \right) = 570(140). \quad (237)$$

Там же вычислены вклады $a_{3, \text{VI}} \left(\frac{m_{\mu}}{m_e}, \frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right) = 5,24(1) \cdot 10^{-4}$ и

$a_{3, \text{VIII}} \left(\frac{m_{\mu}}{m_e}, \frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right) = 0,079(3)$. Объединяя результаты с ранее известным вкладом a_1 [302], получаем чисто квантово-электродинамический вклад [350]⁴⁹:

$$a_{\mu}(\text{КЭД}) = 1165846984(17)(28) \cdot 10^{-12}, \quad (238)$$

и после суммирования с адронным вкладом [333—336]⁵⁰:

$$a_{\mu}(\text{адроны}) = 7,03(19) \cdot 10^{-8} \quad (239)$$

и вкладом слабого взаимодействия [337, 338, 350]⁵¹:

$$a_{\mu}(\text{слаб.взаим.}) = 195(10) \cdot 10^{-11}, \quad (240)$$

⁴⁸См. также [332], в которой используется та же методика для вычисления восьмого порядка β -функции Каллана — Симанзика, которая используется для вышеупомянутых аналитических вычислений.

⁴⁹Первая неопределенность — оценка теоретической неопределенности, главным образом, от $a_{2, \text{VI}} \left(\frac{m_{\mu}}{m_e} \right)$, вторая — неопределенность, вызванная погрешностью измерения α на основе эффекта Холла.

⁵⁰Недавно опубликованный результат более точен, чем приведенный в статье Киношита $a_{\mu}(\text{адроны}) = -(6,986 \pm 0,042 \pm 0,016) \cdot 10^{-8}$ [336]. Приведены значения экспериментальных и модельных погрешностей.

⁵¹Приведенная неопределенность обусловлена отсутствием информации о массе хиггсовской частицы.

приходим к следующему результату для АММ мюона [327,350]:

$$a_{\mu}^{\text{теор}} = 116591920(176) \cdot 10^{-11}, \quad (241)$$

который находится в хорошем согласии с известными экспериментальными значениями [339]:

$$a_{\mu}^{\text{эксп}} = 1165937(12) \cdot 10^{-9},$$

$$a_{\mu}^{\text{эксп}} = 1165911(11) \cdot 10^{-9}.$$

Заметим, однако, что намеченные в BNL (Брукхэйвен) эксперименты повысят экспериментальную точность в 20 раз (до $\pm 0,05 \cdot 10^{-8}$) [340].

τ-лептон. Теоретические вычисления АММ *τ*-лептона выполнены в [341,342]. Получены следующие численные оценки:

$$a_{\tau} = 11773(3) \cdot 10^{-7}.$$

Экспериментально величина a_{τ} изучена менее полно, чем теоретически. Прямого эксперимента в этой области даже не планируется, что связано с очень малым временем жизни *τ*-лептона [343] $T \sim 3 \cdot 10^{-13}$ с.

4.7. Постоянная тонкой структуры. Экспериментальные значения постоянной тонкой структуры следующие:

а) определенное на основе квантового эффекта Холла [304]:

$$\alpha^{-1}(QHE) = 137,0359979(32) \quad (0,024 \text{ ppm}); \quad (242)$$

б) на основе вычисления восьмого порядка АММ электрона и сравнения его с экспериментальным значением [302,114]⁵²:

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137,03599222(51)(63)(48) \quad (0,0069 \text{ ppm}); \quad (243)$$

⁵²Первая неопределенность — от погрешности измерения, вторая — от неопределенности в вычислениях шестого порядка, третья — от неопределенности в вычислениях восьмого порядка. Представленный результат [302] в три раза более точный, чем результат [304], и тем более результаты других методов.

в) на основе эффекта Джозефсона [344]:

$$\alpha^{-1}(JE) = 137,0359770(77) \quad (0,056 \text{ ppm});$$

г) на основе сравнения экспериментального и теоретического значений СТР в мюонии [130]:

$$\alpha^{-1}(\mu - hfs) = 137,035992(22) \quad (0,16 \text{ ppm}). \quad (244)$$

Первые два значения согласуются между собой вплоть до уровня неопределенности 0,05 ppm, таким образом доказывая справедливость КЭД на этом уровне точности. Необходимым представляется дальнейшее увеличение точности измерений $\alpha^{-1}(QHE)$ и с помощью других методов. Возможный источник неопределенности между (242) и (243) — некоторое неизвестное взаимодействие, опосредованное частицами более массивными, чем W^{\pm} - и Z^0 -бозоны⁵³, а также возможной субкварковой структурой электрона [345].

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому, В.И.Саврину, Б.А.Арбузову, Э.Э.Боосу, Д.Бродхарсту, Н.Б.Скачкову, Р.Феллу, И.Б.Хриповичу, О.А.Хрусталеву, М.И.Эйдесу за плодотворные дискуссии; П.С.Исаеву — за внимание и предложение, которое стимулировало написание настоящего обзора, НТЦ КИФПИ РАН — за создание благоприятных условий для работы, а также И.В.Мусатову и И.Е.Монаховой за помощь в подготовке рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаустов Р.Н.— ЭЧАЯ, 1972, т.3, вып.3, с.238.
2. Schwinger J.— Proc.Nat.Acad.Sci., 1951, vol.37, p.452, 455 (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», 1955, №3, с.28.
3. Bethe H.A., Salpeter E.E.— Phys.Rev., 1951, vol.82, No.2, p.309; *ibid*, vol.84, No.6, p.1232.
4. Fulton T., Owen D.A., Repko W.W.— Phys.Rev.A, 1971, vol.4 No.5, p.1802.
5. Fock V.A.— Phys. Assoc. Sowjetunion, 1934, vol.6, p.425.
6. Tamm I.E.— J.Phys.USSR, 1945, vol.9, No.6, p.449.
7. Dankoff S.M.— Phys.Rev., 1950, vol.78, No.4, p.382.
8. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N.— Nuovo Cim., 1963, vol.29, No.2, p.380.

⁵³ Однако вклад такого взаимодействия из-за влияния множителя m/M не может быть велик. Более чувствительно значение $\alpha_e^{\text{теор}}$ к случаю, когда имеется неизвестная пока легкая частица, взаимодействующая с электроном [68].

9. Kadyshevsky V.G.— Nucl.Phys., 1968, vol.B6, No.2, p.125.
10. Gross F.— Phys.Rev., 1969, vol.186, No.5, p.1448.
11. Logunov A.A., Nguyen Van Hieu, Khrustalev O.A.— Nucl.Phys., 1964, vol.50, No.2, p.295.
12. Фаустов Р.Н.— ДАН СССР, 1964, №6, с.1329.
13. Дульян Л.С., Фаустов Р.Н.— ТМФ, 1975, т.22, №3, с.314.
14. Матвеев В.А.— Сообщение ОИЯИ Р2-3847, Дубна, 1968.
15. Бойкова Н.А. и др.— ТМФ, 1991, т.89, №2, с.228.
16. Фаустов Р.Н., Хелашвили А.А.— Ядерная физика, 1969, т.10, №5, с.1085; Фаустов Р.Н.— ТМФ, 1970, т.3, №2, с.240.
17. Левченко Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.— Ядерная физика, 1980, т.32, №2(12), с.1656.
18. Тюхтяев Ю.Н.— ТМФ, 1982, т.53, №3, с.419.
19. Тюхтяев Ю.Н.— Дисс. на соискание уч. степ. д-ра ф.-м. наук. Саратов, 1985.
20. Каримходжаев А., Фаустов Р.Н.— ТМФ, 1977, т.32, 1, с.44.
21. Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.— ТМФ, 1980, т.44, №3, с.424.
22. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н.— ТМФ, 1985, т.64, №2, с.179.
23. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н.— ТМФ, 1986, т.66, №3, с.399.
24. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н.— Ядерная физика, 1987, т.45, №3, с.770.
25. Caswell W.E., Lepage G.P.— Phys.Rev.A, 1978, vol.18, No.3, p.810.
26. Рязов В.А., Тодоров И.Т.— ЭЧАЯ, 1975, т.6, №3, с.669.
27. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M.— JINR Comm. E2-4030, Dubna, 1968.
28. Levy M.— Proc.Roy.Soc. (London), 1950, vol.A204, No.1077, p.145.
29. Brezin E., Itzykson C., Zinn-Justin J.— Phys.Rev.D, 1970, vol.1, No.8, p.2349.
30. Фаустов Р.Н.— Препринт ОИЯИ Р-1572, Дубна, 1964.
31. Бойкова Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.— В сб.: Тр. межд. сем. «Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля». Протвино, 1983, т.1, с.116; Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.— Сообщение ОИЯИ Р2-86-281, Дубна, 1986.
32. Voikova N.A. et al.— JINR Comm. E2-92-440, Dubna, 1992.
33. Eides M.I., Shelyuto V.A.— Phys.Lett., 1984, vol.146B, No.3—4, p.241.
34. Каршенбойм С.Г., Шелюто В.А., Эйдес М.И.— ЖЭТФ, 1987, т.92, №4, с.1188; там же, 1988, т.94, №4, с.42.
35. Eides M.I., Karshenboim S.G., Shelyuto V.A.— Ann.Phys.(USA), 1991, vol.205, No.2, p.231; *ibid*, vol.205, No.2, p.291.
36. а) Eides M.I., Karshenboim S.G., Shelyuto V.A.— Phys.Lett, 1989, vol.229B, No.3, p.285; б) *ibid*, 1990, vol.249B, No.3—4, p.519; в) *ibid*, 1991, vol.268B, No.3—4, p.433.
37. Каршенбойм С.Г., Шелюто В.А., Эйдес М.И.— Письма ЖЭТФ, 1989, т.50, №1, с.3; там же, 1990, т.52, №6, с.937; Ядерная физика, 1989, №6(12), с.1636; там же, 1990, т.52, №4(10), с.1066; там же, 1992, т.55, №2, с.466.
38. Fried H.M., Yennie D.R.— Phys.Rev., 1958, vol.112, No.4, p.1391.
39. Абрикосов А.А.— ЖЭТФ, 1956, т.30, №1, с.96.
40. Журавлев В.И., Соловьев Л.Д.— ЖЭТФ, 1967, т.52, №3, с.703.
41. Старшенко В.В., Фаустов Р.Н.— Краткие сообщения ОИЯИ, №7, 1985, Дубна, с.39.
42. Lautrup B. de Rafael E.— Nucl.Phys., 1974, vol.B70, No.2, p.317.
43. Sapirstein J.R., Terray E.A., Yennie D.R.— Phys.Rev.D, 1984, vol.29, No.10, p.2290.
44. Владимиров А.А., Ширков Д.В.— УФН, 1979, т.129, №3, с.407.
45. Каршенбойм С.Г., Шелюто В.А., Эйдес М.И.— Ядерная физика, 1989, т.49, №2, с.493. Phys.Lett., 1989, vol.216B, No.3—4, p.405.
46. а) Khrilovich I.B., Yelkhovskiy A.S.— Phys.Lett., 1990, vol.B246, No.3—4, p.520.
б) Khrilovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovskiy A.S.— Phys.Lett., 1992, vol.B282, No.1—2, p.237.

47. Fell R.N.— *Phys.Rev.Lett.*, 1992, vol.68, No.1, p.25.
48. Ore A., Powell J.L.— *Phys.Rev.*, 1949, vol.75, No.11, p.1696.
49. Caswell W.E., Lepage G.P., Sapirstein J.R.— *Phys.Rev.Lett.*, 1977, vol.38, No.9, p.488.
50. Caswell W.E., Lepage G.P.— *Phys.Rev.A*, 1979, vol.20, No.1, p.36.
51. Adkins G.S.— *Ann.Phys.(USA)*, 1983, vol.146, No.1, p.78.
52. Westbrook C.I., Gidley D.W., Conti R.S. et al.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1987, vol.32, No.4, p.1051; *Phys.Rev.A*, 1989, vol.40, No.10, p.5489.
53. Nico J.S., Gidley D.W., Rich A. et al.— *Phys.Rev.Lett.* 1990, vol.65, No.11, p.1344.
54. Pascual P., de Rafael E.— *Lett.Nuovo Cim.*, 1970, vol.IV, No.24, p.1144.
55. Strosio M.A., Holt J.M.— *Phys.Rev.A*, 1974, vol.10, No.3, p.749;
Strosio M.A.— *Phys.Lett.*, 1974, vol.50A, No2, p.81.; *Phys.Rev.A*, 1975, vol.12, No.1, p.338.
56. Strosio M.A.— *Phys.Rev.Lett.*, 1982, vol.48, No.9, p.571.
57. Adkins G.S.— *Phys.Rev.A*, 1983, vol.27, No.1, p.530.
58. Adkins G.S.— *Phys.Rev.A*, 1985, vol.31, No.3, p.1250.
59. Adkins G.S., Salahuddin A.A., Schalm K.E.— a) *Phys.Rev.A*, 1992, vol.45, No.5, p.3333;
b) *ibid.*, No.11, p.7774.
60. Lepage G.P., Mackenzie P.B., Streng K.H. et al.— *Phys.Rev.A*, 1983, vol.28, No.5, p.3090.
61. Adkins G.S., Brown F.R.— *Phys.Rev.A*, 1983, vol.28, No.2, p.1164.
62. Muta I., Niuya T.— цит. в [61];
Billoire A., Lacaze R., Morel A. et al.— *Phys.Lett.*, 1978, vol.78B, No.1, p.140.
63. McCoyd G.C.— Ph.D.Thesis. St.John's University, 1965.
64. Cleymans J., Ray P.S.— *Lett.Nuovo Cim.*, 1983, vol.37, ser.2, No.16, p.569.
65. Carboni G., Dahme W.— *Phys.Lett.*, 1983, vol.123B, No.5, p.349.
66. Metag V. et al.— *Nucl.Phys.*, 1983, vol.A409, p.331. (Proc.of the Int.Conf. on Heavy-Ion Physics and Nuclear Physics. Catania, Italy, 21—26 March 1983).
67. Amaldi U., Carboni G., Jonson B. et al.— *Phys.Lett.*, 1985, vol.153B, No.6, p.444.
68. Samuel M.A.— *Mod.Phys.Lett.* 1988, vol.A3, No.11, p.1117.
69. Orito S. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1989, vol.63, No.6, p.597.
70. Glashow S.L.— *Phys.Lett.* 1986, vol.167B, No.1, p.35.
71. Atoyan G.S., Gninenko S.N., Razin V.I. et al.— *Phys.Lett.*, 1989, vol.220B, No.1—2, p.317.
72. Ландау Л.Д.— ДАН СССР, 1948, т.60, №2, с.207.
73. Yang C.N.— *Phys.Rev.*, 1950, vol.77, No.2, p.242.
74. Mills A.P.Jr., Zuckerman D.M.— *Phys.Rev.Lett.*, 1990, vol.64, No.22, p.2637.
75. Phillips P.R.— *Phys.Rev.*, 1965, vol.139, No.2B, p.491.
76. Bernreuter W., Nachtman O.— *Z.Phys.*, 1981, vol.C11, No.3, p.235.
77. Mills A.P., Berko S.— *Phys.Rev.Lett.*, 1967, vol.18, No.11, p.420.
78. Marko K., Rich A.— *Phys.Rev.Lett.*, 1974, vol.33, No.16, p.980.
79. Heymann F.F., Osmon P.E., Veit J.J., Williams W.F.— *Proc.Phys.Soc.(London)*, 1961, vol.78, part 5(ii), No.504, p.1038.
80. Duff B.G., Heymann F.F.— *Proc.Roy.Soc.(London)*, 1962, vol.A270, No.1343, p.517.
81. McNutt J.D., Summerour V.B., Ray A.D. et al.— *J.Chem.Phys.*, 1975, vol.62, No.5, p.1777.
82. Beers R.H., Hughes V.W.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1968, vol.13, No.4, p.633;
Hughes V.W.— In: Proc. of the First Int. Conf. on Atomic Physics. New York, June 3—7, 1968. Eds. Bederson B., Cohen V.W., Pichanchick F.M.J. New York: Plenum Press, 1969, p.15.
83. Coleman P.G., Griffith T.C.— *J.Phys.B*, 1973, vol.6, No.10, p.2155.
84. Hughes V.W.— *Physik 1973. Plenarvortung Physikertagung 37te. Physik Verlag, Weinheim, Germany, 1973, p.123.*

85. Gidley D. W., Marko K.A., Rich A.— *Phys.Rev.Lett.*, 1976, vol.36, No.8, p.395.
86. Gidley D.W., Zitzewitz P.W., Marko K.A. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1976, vol.37, No.12, p.729.
87. Gidley D.W., Rich A., Zitzewitz P.W. et al.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1977, vol.22, No.4, p.586; *Phys.Rev.Lett.*, 1978, vol.40, No.12, p.737.
88. Griffith T.C., Heyland G.R.— *Nature*, 1977, vol.269, No.5624, p.109;
Griffith T.C., Heyland G.R., Lines K.S. et al.— *J.Phys.B*, 1978, vol.11, No.23, p.L743.
89. Gidley D.W., Zitzewitz P.W.— *Phys.Lett.*, 1978, vol.69A, No.2, p.97.
90. Canter K.F., Clark B.O., Rosenberg I.J.— *Phys.Lett.*, 1978, vol.65A, No.4, p.301.
91. Gidley D.W., Rich A., Sweetman E. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, vol.49, No.8, p.525.
92. Hasbach P., Hilkert G., Klempt E. et al.— *Nuovo Cim.*, 1987, vol.97A, No.3, p.419.
93. Westbrook C.I., Gidley D.W., Conti R.S. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1987, vol.58, No.13, p.1328.
94. Dirac P.A.M.— *Proc.Cambridge Phil.Soc.*, 1930, vol.26, p.361.
95. Harric I., Brown L.— *Phys.Rev.*, 1957, vol.105, No.5, p.1556.
96. Cung V.K., Devoto A., Fulton T. et al.— *Phys.Lett.*, 1978, vol.B78, No.1, p.116; *Phys. Rev.A*, 1979, vol.19, No.5, p.1886.
97. Tomozawa Y.— *Ann.Phys.(USA)*, 1980, vol.128, No.2, p.463.
98. Wheatley J., Halliday D.— *Phys.Rev.*, 1952, vol.88, No.2, p.424.
99. Hughes V.W., Marder S., Wu C.S.— *Phys.Rev.*, 1954, vol.95, No.2, p.611; *ibid*, 1955, vol.98, No.6, p.1840.
100. Theriot E.D.Jr., Beers R.H., Hughes V.W.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1967, vol.12, No.1, p.74; *Phys.Rev.Lett.*, 1967, vol.18, No.19, p.767;
Theriot E.D.Jr., Beers R.H., Hughes V.W.— *Phys.Rev.A*, 1970, vol.2, No.3, p.707.
101. Hill A., Ortolani F., Remiddi E.— In: *The Hydrogen Atom*. Eds. Bassani G.F. et al. Berlin — Heidelberg: Springer — Verlag, 1989, p.240.
102. Deutsch M., Dulit E.— *Phys.Rev.*, 1951, vol.84, No.3, p.601.
103. Ritter M.W., Egan P.O., Hughes V.W. et al.— *Phys.Rev.A*, 1984, vol.30, No.3, p.1331.
104. Deutsch M., Brown S.C.— *Phys.Rev.*, 1952, vol.85, No.6, p.1047.
105. Weinstein R., Deutsch M., Brown S.— *Phys.Rev.*, 1954, vol.94, No.3, p.758.
106. Weinstein R., Deutsch M., Brown S.— *Phys.Rev.*, 1955, vol.98, No.1, p.223.
107. Hughes V.W., Marder S., Wu C.S.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1957, vol.2, No.1, p.38; *Phys.Rev.*, 1957, vol.106, No.5, p.934.
108. Carlson E.R., Hughes V.W., Lindgren I.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1972, vol.17, No.4, p.454; Carlson E.R., Hughes V.W., Lewis M.L. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1972, vol.29, No.16, p.1059.
109. Mills A.P.Jr., Bearman G.H.— *Phys.Rev.Lett.*, 1975, vol.34, No.5, p.246.
110. Egan P.O., Carlson E.R., Hughes V.W. et al.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1975, vol.20, No.4, p.703; Egan P.O., Frieze W.E., Hughes V.W. et al. — *Phys.Lett.*, 1975, vol.54A, No.5, p.412; Egan P.O., Hughes V.W., Yam M.H. — *Phys.Rev.A*, 1977, vol.15, No.1, p.251.
111. Carlson E.R., Hughes V.W., Lindgren I.— *Phys.Rev.A*, 1977, vol.15, No.1, p.241.
112. Mills A.P.Jr.— *Phys.Rev.A*, 1983, vol.27, No.1, p.262.
113. Pirene J.— *Arch.Sci.Phys.Nat.*, 1946, vol.28, p.233; *ibid*, 1947, vol.29, p.121, *ibid*, 1947, vol.29, p.207; *ibid*, 1947, vol.29, p.265;
Берестецкий В.Б., Ландау Л.Д.— *ЖЭТФ*, 1949, т.19, 8, с.673;
Берестецкий В.Б.— *ЖЭТФ*, 1949, т.19, 12, с.1130;
Ferrell R.A.— *Phys.Rev.*, 1951, vol.84, No.4, p.858.
114. а) Karplus R., Klein A.— *Phys.Rev.*, 1952, vol.87, No.5, p.848;
б) Fulton T., Karplus R.— *Phys.Rev.*, 1954, vol.93, No.5, p.1109;
в) Fulton T., Martin P.C.— *Phys.Rev.*, 1954, vol.95, No.3, p.811.
115. Fulton T., Owen D.A., Repko W.W.— *Phys.Rev.Lett.*, 1970, vol.24, No.19, p.1035; Barbieri R., Christillin P., Remiddi E.— *Phys.Lett.*, 1973, vol.43B, No.5, p.411;

- Owen D.A.— *Phys.Rev.Lett.*, 1973, vol.30, No.19, p.887;
Barbieri R., Remiddi E.— *Phys.Lett.*, 1976, vol.65B, No.3, p.258;
Ньюнко Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.— Тр. межд. сем. «Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля». Протвино, 1983, т.1, с.104—115.
116. Lepage G.P.— *Phys.Rev.A*, 1977, vol.16, No.3, p.863.
117. Bodwin G.T., Yennie D.R.— *Phys.Repts.*, 1978, vol.43C, No.6, p.267.
118. Fulton T.— *Phys.Rev.A*, 1973, vol.7, No.1, p.377.
119. Barbieri R., Christillin P., Remiddi E.— *Phys.Rev.A*, 1973, vol.8, No.5, p.2266;
Samuel M.A.— *Phys.Rev.A*, 1974, vol.10, No.4, p.1450.
120. Cung V.K., Devoto A., Fulton T. et al.— *Phys.Lett.*, 1977, vol.68B, No.5, p.474; *Nuovo Cim.*, 1978, vol.43A, No.4, p.643.
121. Adkins G.S., Bui M.H.T., Zhu D.— *Phys.Rev.A*, 1988, vol.37, No.11, p.4071.
122. Devoto A., Repko W.W.— *Phys.Rev.*, 1990, vol.42, No.9, p.5730.
123. Cung V.K., Devoto A., Fulton T. et al.— *Phys.Lett.*, 1978, vol.67B, No.1, p.116; *Phys.Rev.A*, 1979, vol.19, No.5, p.1886.
124. Douglas M.— *Phys.Rev.A*, 1975, vol.11, No.5, p.1527.
125. Cung V.K. et al.— *Ann.Phys.(USA)*, 1976, vol.96, No.2, p.261; *ibid.*, vol.98, No.2, p.516.
126. Barbieri R., Remiddi E.— *Nucl.Phys.*, 1978, vol.B141, No.4, p.413;
Caswell W.E., Lepage G.P.— *Phys.Rev.A*, 1978, vol.18, No.3, p.810;
Buchmuller W., Remiddi E.— *Nucl.Phys.*, 1980, vol.B162, No.2, p.250; *Nuovo Cim.*, 1980, vol.60A, No.2, p.109.
127. Sapirstein J.R., Terray E.A., Yennie D.R.— *Phys.Rev.Lett.*, 1983, vol.51, No.11, p.982.
128. Bodwin G.T., Yennie D.R., Gregorio M.A.— *Rev.Mod.Phys.*, 1985, vol.57, No.3, part I, p.723.
129. Фаустов Р.Н.— *Измерительная техника*, 1990, №1, с.9.
130. Kinoshita T.— *Quantum Electrodynamics. Directions in High Energy*, Teaneck, NY: World Sci.Pub.Co., 1990.
131. Breit G.— *Phys.Rev.*, 1930, vol.35, No.12, p.1447.
132. Kroll N., Pollock F.— *Phys.Rev.*, 1951, vol.84, No.3, p.594; *ibid.*, 1952, vol.86, No.6, p.876;
Karplus R., Klein A., Schwinger J.— *Phys.Rev.*, 1951, vol.84, No.3, p.597.
133. Layzer A.J.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1961, vol.6, No.6, p.514; *Nuovo Cim.*, 1964, vol.XXXIII No.6, p.1538;
Zwanziger D.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1961, vol.6, No.6, p.514; *Nuovo Cim.*, 1964, vol.XXXIV, No.1, p.77;
Brodsky S.J., Erickson G.W.— *Phys.Rev.*, 1966, vol.148, No.1, p.26.
134. Arnowitt R.— *Phys.Rev.*, 1953, vol.92, No.4, p.1002.
135. Bodwin G.T., Yennie D.R., Gregorio M.— *Phys.Rev.Lett.*, 1982, vol.48, No.26, p.1799.
136. Caswell W.E., Lepage G.P.— *Phys.Lett.*, 1986, vol.167B, No.4, p.437.
137. Brook V.Yu., Eides M.I., Karshenboim S.G. et al.— *Phys.Lett.*, 1989, vol.216B, No.3—4, p.401.
138. Caswell W.E., Lepage G.P.— *Phys.Rev.Lett.*, 1978, vol.41, No.16, p.1092.
139. Terray E., Yennie D.R.— *Phys.Rev.Lett.*, 1982, vol.48, No.26, p.1803.
140. Двоеглазов В.В., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.— Сообщение ОИЯИ Р2-89-271, Дубна, 1989.
141. Каримходжаев А., Фаустов Р.Н.— *Ядерная физика*, 1991, т.53, №4, с.1012.
142. Veg M.A.B., Feinberg G.— *Phys.Rev.Lett.*, 1974, vol.33, No.10, p.606.
143. Старшенко В.В., Фаустов Р.Н.— *Вестник МГУ: физика, астроном.*, 1983, т.24, 3, с.47.
144. Van Dyck R.S.Jr., Schwinberg P.B., Dehmelt H.G.— *Phys.Rev.Lett.*, 1987, vol.59, No.1, p.26.
145. Mariam F.G. et al.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1982, vol.27, No.4, p.480; *Phys.Rev.Lett.*, 1982, vol.49, No.14, p.993.

146. Hughes V.W., McColm D.W., Ziock K. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1960, vol.5, No.2, p.63.
147. Hughes V.W., Prepost R., Ziock K. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1961, vol.6, No.1, p.19.
148. Ziock K.O. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1962, vol.8, No.3, p.103.
149. Prepost R. et al.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1964, vol.9, No.1, p.81.
150. Cleland W.E. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1964, vol.13, No.6, p.202.
151. Cleland W.E. et al.— *Phys.Rev.A*, 1972, vol.5, No.6, p.2338.
152. Thompson P.A. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1969, vol.22, No.5, p.163.
153. Ehrlich R.D. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1969, vol.23, No.20, p.513.
154. de Voe R. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1970, vol.25, No.26, p.1779.
155. Crane T. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1971, vol.27, No.28, p.474.
156. Favart D. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1971, vol.27, No.20, p.1336; In: *Proc. of the Fourth Int. Conf. Atomic Masses and Fundamental Constants*. Teddington, England, Sept. 1971. Eds. Sanders J.H. and Wapstra A.M. London-N.Y.: Plenum Press, 1972, p.373; *Phys.Rev.A*, 1973, vol.8, No.3, p.1195.
157. Kobrak H.G.E. et al.— *Phys.Lett.*, 1973, vol.43B, No.6, p.526.
158. Casperson D.E. et al.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1975, vol.20, No.4, p.702; *Phys.Lett.*, 1975, vol.59B, No.4, p.397.
159. Casperson D.E. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1977, vol.38, No.17, p.956; *ibid.*, 1977, vol.38, No.25, p.1504(E).
160. Egan P.O. et al.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1980, vol.25, No.1, p.19.
161. Bodwin G.T., Yennie D.R.— *Phys.Rev.D*, 1988, vol.37, No.2, p.498.
162. Brown G.E., Arfken G.B.— *Phys.Rev.*, 1949, vol.76, No.9, p.1305; Zernach A.C.— *Phys.Rev.*, 1956, vol.104, No.6, p.1771.
163. Newcomb W.A., Salpeter E.E.— *Phys.Rev.*, 1955, vol.97, No.4, p.1146.
164. Iddings C.K., Platzman P.M.— *Phys.Rev.*, 1959, vol.113, No.1, p.192.
165. Iddings C.K.— *Phys.Rev.B.*, 1965, vol.138, No.2B, p.446.
166. Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.— *Ядерная физика*, 1965, т.2, №5, с.882; Фаустов Р.Н.— *Nucl.Phys.*, 1966, vol.75, No.3, p.669; Зиновьев Г.М., Струминский Б.В., Фаустов Р.Н.— *Ядерная физика*, 1970, т.11, №6, с.1284.
167. Drell S.D., Sullivan J.D.— *Phys.Rev.*, 1967, vol.154, No.5, p.1477.
168. Grotch H., Yennie D.R.— *Z. Phys.*, 1967, vol.202, p.425.
169. Grotch H., Yennie D.R.— *Rev.Mod.Phys.*, 1969, vol.41, No.2, p.350.
170. Hughes V.W., Kuti J.— *Ann.Rev.Nucl. and Part.Sci.*, 1983, vol.33, p.611.
171. De Rafael E.— *Phys.Lett.*, 1971, vol.37B, No.2, p.201; Grädig P., Kuti J.— *Phys.Lett.*, 1972, vol.42B, No.2, p.241.
172. Reich H.A., Heberle J.W., Kusch P.— *Phys.Rev.*, 1955, vol.98, No.4, p.1194.
173. Nafe J.E., Nelson E.B.— *Phys.Rev.*, 1948, vol.73, No.7, p.718.
174. Prodell A.G., Kusch P.— *Phys.Rev.*, 1952, vol.88, No.2, p.184.
175. Kusch P.— *Phys.Rev.*, 1955, vol.100, No.4, p.1188.
176. Wittke J.P., Dicke R.M.— *Phys.Rev.*, 1954, vol.96, No.2, p.530; *ibid.*, 1956, vol.103, No.3, p.620.
177. Anderson L.W., Pipkin F.M., Baird J.C.— *Phys.Rev.*, 1960, vol.120, No.4, p.1279; *ibid.*, 1961, vol.21, No.6, p.1864(E); *ibid.*, 1962, vol.122, No.6, p.1962(E).
178. Goldenberg H.M., Kleppner D., Ramsey N.F.— *Phys.Rev.Lett.*, 1960, vol.5, No.8, p.361; Kleppner D., Goldenberg H.M., Ramsey N.F.— *Appl.Opt.*, 1962, vol.1, No.1, p.55.
179. Pipkin F.M., Lambert R.H.— *Bull.Am.Phys.Soc.*, 1960, vol.5, p.412; *Phys.Rev.*, 1962, vol.127, No.3, p.787.
180. Markowitz W. et al.— *Frequency*, 1983, vol.1, p.46.
181. Kleppner D., Goldenberg H.M., Ramsey N.F.— *Phys.Rev.*, 1962, vol.126, No.2, p.603; Crampton S.B., Kleppner D., Ramsey N.F.— *Phys. Rev. Lett.*, 1963, vol.11, No.7, p.338.

182. Vanier J., Peter H.E., Vessot R.F.C.— IEEE Trans.Instr.Meas., 1964, vol.IM-13, No.4, p.185.
183. Peter H.E. et al.— Appl.Phys.Lett., 1965, vol.6, p.34.
184. Peter H.E., Kartaschoff P.— Appl.Phys.Lett., 1965, vol.6, p.35.
185. Johnson E.K., McGunial J.E.— NASA Tech. Note TN D-3292, April 1966.
186. Beehler K. et al.— Proc. IEEE (Lett.), 1966, vol.54, p.301.
187. Vessot R. et al.— IEEE Trans.Instr.Meas., 1966, vol.IM-15, No.4, p.165.
188. Hellwig H. et al.— IEEE Trans.Instr.Meas., 1970, vol.IM-19, p.200.
189. Brodsky S.J., Drell S.D.— Ann.Rev.Nucl. and Part.Sci., 1970, vol.20, p.147 (см. пер. в УФН, 1972, т.107, №1, с.57—98).
190. Souder P.A. et al.— Phys.Rev.Lett., 1975, vol.34, No.23, p.1417.
191. Souder P.A. et al.— Phys.Rev.A, 1980, vol.2, No.1, p.33.
192. Orth H. et al.— Phys.Rev.Lett., 1980, vol.45, No.18, p.1483.
193. Gardner C.J. et al.— Bull.Am.Phys.Soc., 1980, vol.25, No.1, p.19.
194. Gardner C.J. et al.— Bull.Am.Phys.Soc., 1982, vol.27, No.4, p.480; Phys.Rev.Lett., 1982, vol.48, No.17, p.1168.
195. Klempf E. et al.— Phys.Rev.D, 1982, vol.25, No.3, p.652.
196. Schwinberg P.B. et al.— Phys.Rev.Lett., 1981, vol.47, No.24, p.1679.
197. Hu E. et al.— Nucl.Phys., 1975, vol.A254, No.2, p.403.
198. Huang K.-N., Hughes V.W.— Phys.Rev.A, 1979, vol.20, No.3, p.706; *ibid*, 1980, vol.21, No.3, p.1071 (E).
199. Lakdawala S.D., Mohr P.J.— Phys.Rev.A., 1980, vol.22, No.4, p.1572.
200. Амуся М.Я., Кучиев М.Ю., Яхонтов В.Л.— Препринт ЛФТИ АН СССР №873,883, Л., 1984.
201. Drachman R.J.— Phys.Rev.A, 1980, vol.22, No.4, p.1755; J.Phys.B, 1981, vol.14, No.16, p.2733.
202. Otten E.W.— Z.Phys., 1969, vol.A225, No.5, p.393.
203. Borie E.— Z.Phys., 1979, vol.A291, No.2, p.107.
204. Mills A.P.Jr., Berko S., Canter K.F.— Phys.Rev.Lett., 1975, vol.34, No.25, p.1541.
205. Hatamian S., Conti R.S., Rich A.— Phys.Rev.Lett., 1987, vol.58, No.28, p.1833.
206. Fulton T., Martin P.C.— Phys.Rev., 1954, vol.93, No.4, p.903.
207. Fulton T.— Phys.Rev.A, 1982, vol.26, No.3, p.1794.
208. Gupta S.N., Repko W.W., Suchyta C.J.— Phys.Rev.D, 1989, vol.40, No.12, p.4100.
209. Bethe H.A.— Phys.Rev, 1947, vol.72, No.4, p.339;
Bethe H.A., Brown L.M., Stehn J.R.— *ibid*, 1950, vol.77, No.3, p.370;
Harriman J.J.— *ibid*, 1956, vol.101, No.2, p.594.
210. Klarsfeld S., Maquet A.— Phys.Lett., 1973, vol.43B, No.3, p.201.
211. Danzmann K., Fee M.S., Chu S.— Phys.Rev.A, 1989, vol.39, No.11, p.6072.
212. Chu S., Mills A.P.— Phys.Rev.Lett., 1982, vol.48, No.19, p.1333.
213. Chu S., Mills A.P., Hall J.L.— Phys.Rev.Lett., 1984, vol.53, No.19, p.1689.
214. McIntyre D.H., Hansch T.W.— Phys.Rev.A, 1986, vol.34, No.5, p.4504.
215. McIntyre D.H., Hansch T.W.— Phys.Rev.A, 1987, vol.36, No.8, p.4115.
216. Chu S. et al.— Phys.Rev.Lett., 1988, vol.60, No.2, p.101.
217. Kinoshita T., Sapirstein J.— In: «Proc. of the IX Int. Conf. on Atomic Physics». Seattle, July 23—27, 1984. Eds. Van Dyck R.S.Jr., Fortson E.N. Singapore: World Sci., 1984, p.38.
218. Gupta S.N.— Nucl.Phys., 1964, vol.57, No.2, p.19.
219. Owen D.A.— Phys.Lett., 1973, vol.44B, No.2, p.199.
220. Owen D.A.— Phys.Rev.A, 1984, vol.29, No.6, p.3411.
221. Owen D.A.— Ann.Phys. (France), 1986, vol.11, No.3, p.249.
222. Conti R.S., Hatamian S., Rich A.— Phys.Rev.A, 1986, vol.33, No.5, p.3495.
223. Hansch T.W., Lee S.A., Wallenstein R. et al.— Phys.Rev.Lett., 1975, vol.34, No.6, p.307.
224. Lee S.A., Wallenstein R., Hansch T.W.— Phys.Rev.Lett., 1975, vol.35, No.19, p.1262.

225. Wieman C., Hänsch T.W.— *Phys.Rev.A*, 1980, vol.22, No.1, p.192.
226. Hildum E. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1986, vol.56, No.6, p.576.
227. Barr J.R.M., Girkin J.M., Tolchard J.M. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1986, vol.56, No.6, p.580.
228. Foot C.J., Coulland B., Beausoleil R.G. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1985, vol.54, No.17, p.1913;
Beausoleil R.G. et al.— *Phys.Rev.A*, 1987, vol.35, No.11, p.4878.
229. McIntyre D.H. et al.— *Phys.Rev.A*, 1989, vol.39, No.9, p.4591.
230. Boshier M.G. et al.— *Nature*, 1987, vol.330, No.6147, p.463;
Boshier M.G. et al.— *Phys.Rev.A*, 1989, vol.40, No.11, p.6169.
231. Zimmerman C., Kallenbach R., Hänsch T.W.— *Phys.Rev.Lett.*, 1990, vol.65, No.5, p.571;
Andreae T. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1992, vol.69, No.13, p.1923.
232. Appelquist T., Brodsky S.J.— *Phys.Rev.Lett.*, 1970, vol.24, No.11, p.562.
233. Lautrup B.E., Peterman A., De Rafael E.— *Phys.Repts.*, 1972, vol.3C, No.4, p.195.
234. Herzberg G.— *Phys.Rev.*, 1955, vol.98, No.1, p.223; *Proc.Roy.Soc(London)*, 1956, vol.A234, No.1199, p.516.
235. Balland S.S., White H.E.— *Phys. Rev.*, 1933, vol.43, No.11, p.941.
236. a) Mohr P.J.— *Ann.Phys.(USA)*, 1974, vol.88, No.1, p.26; b) *ibid*, p.52; *Phys.Rev.Lett.*, 1975, vol.34, No.16, p.1050; в) *At. Data and Nucl. Data Tables*, 1983, vol.29, No.3, p.453.
237. Erickson G.W.— *Phys.Rev.Lett.*, 1971, vol.27, No.12, p.780; *J.Phys.Chem.Ref.Data*, 1977, vol.6, No.3, p.831.
238. Sapirstein J.— *Phys.Rev.Lett.*, 1981, vol.47, No.24, p.1723; In: *AIP Conf. Proc. Atomic Theory Workshop on Rel. and QED Effects in Heavy Atoms*. Gaithersburg, MD(USA), 23—24 May 1985, No.136, p.100.
239. McIntyre D.H.— Thesis. Stanford University, 1986;
Beausoleil R.G.— Ph.D. Thesis. Stanford University, 1987.
240. Johnson W.R., Soff G.— *At. Data and Nucl.Data Tables*, 1985, vol.33, No.3, p.405.
241. Bhatt G., Grotch H.— *Phys.Rev.A*, 1985, vol.31, No.5, p.2794; *Phys.Rev.Lett.*, 1987, vol.58, No.5, p.471; *Ann.Phys.(USA)*, 1987, vol.178, No.1, p.1;
Grotch H.— *Phys.Scr.*, 1988, vol.T21, p.8689 (*Proc. of the Adriatico Conf. Trieste. Italy*, 14—17 July 1987).
242. Erickson G.W., Grotch H.— *Phys.Rev.Lett.*, 1988, vol.60, No.25, p.2611; *ibid*, 1989, vol.63, p.1326(E).
243. Drickey D.J., Hand L.N.— *Phys.Rev.Lett.*, 1962, vol.9, No.12, p.521;
Hand L.N., Miller D.G., Wilson R.— *Rev.Mod.Phys.*, 1963, vol.35, No.2, p.335.
244. Simon G.G., Schmitt Ch., Borkowski F. et al.— *Z.Naturforsch*, 1980, vol.A35, No.2, p.1;
Nucl.Phys., 1980, vol.A333, No.3, p.381.
245. Ericson T.E.O.— *Nucl.Phys.*, 1984, vol.A416, p.281.
246. Hänsch T.W. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1974, vol.32, No.24, p.1336.
247. Goldsmith J.E.M., Weber E.W., Hänsch T.W.— *Phys.Rev.Lett.*, 1978, vol.41, No.22, p.1525.
248. Petley B.W., Morris K., Schawyer R.E.— *J.Phys.B*, 1980, vol.13, No.16, p.3099.
249. Amin S.R., Caldwell C.D., Lichten W.— *Phys.Rev.Lett.*, 1981, vol.47, No.18, p.12.
250. Ping Zhao, Lichten W., Layer H.P. et al.— *Phys.Rev.A*, 1986, vol.34, No.6, p.5138.
251. Biraben F., Correan J.C., Jullien L.— *Europhys.Lett.*, 1986, vol.2, No.12, p.925.
252. Ping Zhao, Lichten W., Layer H.P. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1987, vol.58, No.13, p.1293.
253. Biraben F., Correan J.C., Jullien L. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1989, vol.62, No.6, p.621.
254. Nez F. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1992, vol.69, No.16, p.2326.
255. Weitz M., Schmidt-Kaler F., Hänsch T.W.— *Phys.Rev.Lett.*, 1992, vol.68, No.8, p.1120.
256. Sanders T.M., Lamb W.E.Jr.— *Phys.Rev.*, 1960, vol.119, No.6, p.1901;
Wilcox L.R., Lamb W.E.Jr.— *ibid*, p.1915.

257. Fabian C.W., Pipkin F.M., Silverman M.— *Phys.Rev.Lett.*, 1971, vol.26, No.7, p.347.
258. Brown R.A., Pipkin F.M.— *Ann.Phys. (USA)*, 1973, vol.80, No.2, p.479.
259. Fabjan C.W., Pipkin F.M.— *Phys.Rev.A*, 1972, vol.6, No.2, p.556.
260. Kleinpoppen H.— *Z.Phys.*, 1961, vol.164, No.2, p.174.
261. Fabjan C.W., Pipkin F.M.— *Phys.Rev.Lett.*, 1970, vol.25, No.7, p.421.
262. Lamb W.E.Jr., Retherford R.C.— *Phys.Rev.*, 1947, vol.72, No.3, p.241; *ibid*, 1950, vol.79, No.4, p.549;
Triebmasser S., Dayhoff E.S., Lamb W.E.Jr.*Phys.Rev.*, 1953, vol.89, No.1, p.98; *ibid*, p.106.
263. Taylor B.N., Parker W.H., Langenberg D.N.— *Rev.Mod.Phys.*, 1969, vol.41, No.3, p.375.
264. Robiscoe R.T., Shyn T.W.— *Phys.Rev.Lett.*, 1970, vol.24, No.11, p.559—562.
265. Lundeen S.R., Pipkin F.M.— *Phys.Rev.Lett.*, 1975, vol.34, No.22, p.1368—1370.
266. Newton G., Andrews D.A., Unsworth P.J.— *Phil. Trans. Roy. Soc (London)*, 1979, vol.A290, No.1373, p.373.
267. Lundeen S.R., Pipkin F.M.— *Phys.Rev.Lett.*, 1981, vol.46, p.232; *Metrology*, 1986, vol.22, No.1, p.9.
268. Соколов Ю.Л., Яковлев В.П.— *ЖЭТФ*, 1982, т.83, No.1(7), с.15.
269. Пальчиков В.Г., Соколов Ю.Л., Яковлев В.П.— *Письма в ЖЭТФ*, 1983, т.38, 7, с.347; *Metrology*, 1985, vol.21, No.3, p.99; *Метрология*, 1987, No.10, с.3.
270. Cosens B.L.— *Phys.Rev.*, 1968, vol.173, No.1, p.49.
271. Doncheski M., Grotch H., Owen D.A.— *Phys.Rev.A*, 1990, vol.41, No.5, p.2851;
Doncheski M., Grotch H., Erickson G.W.— *Phys.Rev.A*, 1991, vol.43, No.5, p.2152.
272. Wichmann E.H., Kroll N.M.— *Phys.Rev.*, 1956, vol.101, No.2, p.843.
273. Salpeter E.E.— *Phys.Rev.*, 1992, vol.87, No.2, p.328.
274. Barker W.A., Glover F.N.— *Phys.Rev.*, 1955, vol.99, No.1, p.317.
275. Erickson G.W., Yennie D.R.— *Ann.Phys. (USA)*, 1965, vol.35, No.2, p.271; *ibid*, No.3, p.447.
276. Mohr P.J.— In: *Beam-Foil Spectroscopy*. Eds. Sellin I.A., Pegg D.J. New York: Plenum Press, 1976, p.89; *Phys.Rev.A*, 1982, vol.26, No.5, p.2338.
277. Eides M.I., Grotch H., Owen D.— Preprint Penn. State Univ., Febr. 1992;
Eides M.I., Grotch H.— Preprint PSU/TH/117, Oct. 1991.
278. Oram C.J. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1984, vol.52, No.11, p.910; In: *Proc. of the IX Int.Conf. on Atomic Physics*. Seattle, July 23—27, 1984. Eds. Van Dyck R.S.Jr., Fortson E.N. Singapore: World Sci., 1984, p.75.
279. Badertscher A. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1984, vol.52, No.11, p.914; In: *Proc. of the IX Int.Conf. on Atomic Physics*. Seattle, July 23—37. Eds. Van Dyck R.S.Jr., Fortson E.N. Singapore: World Sci., 1984, p.83.
280. Patel J., van Wijngaarden A., Dracke G.W.F.— *Phys.Rev.A*, 1987, vol.36, No.11, p.5130.
281. Dracke G.W.E., Patel J., van Wijngaarden A.— *Phys.Rev.Lett.*, 1988, vol.60, No.11, p.1002.
282. Lamb W.E.Jr., Skinner M.— *Phys.Rev.*, 1950, vol.78, No.5, p.539.
283. Yergin P.F.— Ph.D.Thesis. Columbia University.
284. Novick R., Lipworth E., Yergin P.F.— *Phys.Rev.*, 1955, vol.100, No.4, p.1153.
285. Lipworth E., Novick R.— *Phys.Rev.*, 1957, vol.108, No.6, p.1434.
286. Narasimham M., Strombotne R.— *Phys.Rev.A*, 1971, vol.4, No.1, p.14.
287. Dracke G.W.F., Goldman S.P., van Wijngaarden A.— *Phys.Rev.A*, 1979, vol.20, No.4, p.1299.
288. Borie E., Rinker G.A.— *Phys.Rev.A*, 1978, vol.18, No.2, p.324.
289. Kabir P.K., Salpeter E.E.— *Phys.Rev.*, 1957, vol.108, No.5, p.1256;
Araki H., — *Prog.Theor.Phys.*, 1957, vol.7, No.5, p.619.
290. Majumder P.K., Pipkin F.M.— *Phys.Rev.Lett.*, 1989, vol.69, No. , p.372.
291. Mohr P.J.— *Phys.Rev.A*, 1991, vol.44, No.7, p.4089.

292. Farley J.W., MacAdam K.B., Wing W.H.— *Phys.Rev.A.*, 1979, vol.20, No.5, p.1754; *ibid.*, 1982, vol.25, No.3, p.1790(E).
293. Hessels E.A., Deck F.J., Arcuni P.W. et al.— *Phys.Rev.A.*, 1990, vol.41, No.7, p.3663; *ibid.*, 1991, vol.44, p.7855(E); *Phys.Rev.Lett.*, 1990, vol.65, No.22, p.2756; *ibid.*, 1991, vol.66, No.19, p.2544(E).
294. Dracke G.W.F.— *J.Phys.B.*, 1989, vol.22, No.33, p.L651; *ibid.*, 1990, vol.23, No.11, p.1943(E); *Phys.Rev.Lett.*, 1990, vol.65, No.22, p.2769.
295. Goldman S.P., Dracke G.W.F.— *Phys.Rev.Lett.*, 1992, vol.68, No.11, p.1683.
296. Dracke G.W.F.— In: «Long Range Forces: Theory and Recent Experiments on Atomic Systems». Eds. Levin F.S., Micha D., Plenum, NY, 1992.
297. Carboni G. et al.— *Nuovo Cim.*, 1976, vol.43A, No.4, p.493; *Nucl.Phys.*, 1977, vol.A278, No.3, p.381.
298. Kinoshita T., Lindquist W.B.— *Phys.Rev.D.*, 1983, vol.27, No.4, p.867.
299. Kinoshita T., Lindquist W.B.— *Phys.Rev.D.*, 1983, vol.27, No.4, p.877.
300. Kinoshita T., Lidquist W.B.— *Phys.Rev.D.*, 1983, vol.27, No.4, p.886.
301. Kinoshita T., Lindquist W.B.— *Phys.Rev.D.*, 1989, vol.39, No.8, p.2407.
302. Kinoshita T., Lindquist W.B.— *Phys.Rev.D.*, 1990, vol.42, No.2, p.636.
303. Kinoshita T., Lindquist W.B.— *Phys.Rev.Lett.*, 1981, vol.47, No.22, p.1573.
304. Cage M.E. et al.— *IEEE Trans.Instr.Meas.*, 1989, vol.38, No.2, p.284.
305. Эмянов П.А.— *Ядерная физика*, 1990, т.51, No.2, с.542.
306. Van Dyck R.S.Jr., Schwinberg P.B., Dehmelt H.G.— *Phys.Rev.D.*, 1986, vol.34, No.3, p.772.
307. Schwinger J.— *Phys.Rev.*, 1948, vol.73, No.4, p.416; *ibid.*, vol.76, No.6, p.790.
308. Karplus R., Kroll N.M.— *Phys.Rev.*, 1950, vol.77, No.4, p.536;
Sommerfeld C.M.— *Phys.Rev.*, 1957, vol.107, No.1, p.328; *Ann.Phys.(USA)*, 1958, vol.5, No.1, p.26;
Peterman A.— *Helv.Phys.Acta*, 1957, vol.30, No.5, p.407; *Nucl.Phys.*, 1957, vol.3, No.5, p.689.
309. Adkins G.— *Phys.Rev.D.*, 1989, vol.39, No.12, p.3798.
310. Терентьев М.В.ЖЭТФ, 1961, т.43, No.2(8), с.619.
311. Smrz P., Ulehla I.— *Cz.J.Phys.*, 1960, vol.B10, No.12, p.966.
312. Barbieri R., Mignani J.A., Remiddi E.— *Lett.Nuovo Cim.*, 1970, vol.III, No.18, p.588; *Nuovo Vim.*, 1971, vol.6A, No.1, p.21; *ibid.*, 1972, vol.11A, p.824; *ibid.*, p.865.
313. Lautrup B.E., de Rafael E.— *Phys.Rev.*, 1968, vol.174, No.5, p.1835.
314. Levine M.J., Park H.Y., Roskies R.Z.— *Phys.Rev.D.*, 1982, vol.25, No.8, p.2205.
315. Engelman T., Levine M.J.— цит. в [314].
316. Kinoshita T., Lindquist W.B.— *Cornell Report No.CLNS-374*, 1977.
317. Cvitanovic P., Kinoshita T.— *Phys.Rev.D.*, 1974, vol.10, No.12, p.4007.
318. Samuel M.A.— *Phys.Rev.Lett.*, 1986, vol.57, No.25, p.3133; *ibid.*, 1988, vol.61, No.25, p.2899.
319. Laporta S., Remiddi E.— *Phys.Lett.*, 1991, vol.B265, No.1—2, p.182.
320. Aldins J., Brodsky S.J., Dufner A.J. et al.— *Phys.Rev.D.*, 1970, vol.1, No.8, p.2378.
321. Kinoshita T.— *Phys.Rev.Lett.*, 1988, vol.61, No.25, p.2898; *Phys.Rev.D.*, 1989, vol.40, No.4, p.1323.
322. Suura H., Wichmann E.— *Phys.Rev.*, 1957, vol.105, No.6, p.1930;
Peterman A.— *ibid.*, p.1931;
Elend H.H.— *Phys.Lett.*, 1966, vol.20, No.6, p.682; *ibid.*, vol.21, No.6, p.720(E);
Erickson G.W., Liu H.H.T.— *Report No. UCD-CNL-81*, 1968.
323. Kinoshita T.*Nuovo Cim.*, 1967, vol.B51, No.1, p.140.
324. Barbieri R., Remiddi E.— *Nucl.Phys.*, 1975, vol.B90, No.2, p.233.
325. Kinoshita T., Nizic B., Okamoto Y.— *Phys.Rev.Lett.*, 1984, vol.52, No.9, p.717.
326. Samuel M.A., Chlouber C.— *Phys.Rev.Lett.*, 1976, vol.36, No.8, p.442.

327. Kinoshita T., Nizic B., Okamoto Y.— *Phys.Rev.D*, 1990, vol.41, No.2, p.593.
328. Faustov R.N., Kataev A.L., Larin S.A. et al.— *Phys.Lett.*, 1991, vol.254B, No.1—2, p.241.
329. Kinoshita T., Kawai H., Okamoto Y.— *Phys.Lett.*, 1991, vol.254B, No.1—2, p.235.
330. Broadhurst D.J., Kataev A.L., Tarasov O.V.— CERN Preprint CERN-TH.6602/92, Geneva, 1992;
Broadhurst D.J.— Preprint Open Univ. OUT-4102-40, Milton Keynes (talk at QUARKS-92, Zvenigorod, May, 1992).
331. Broadhurst D.J.— Preprint Open Univ. OUT-4102-42, Milton Keynes: Open Univ. November, 1992.
332. Kawai H., Kinoshita T., Okamoto Y.— *Phys.Lett.*, 1991, vol.260B, No.1—2, p.193.
333. Kinoshita T., Nizic B., Okamoto Y.— *Phys.Rev.D*, 1985, vol.31, No.8, p.2108.
334. Casas J.A., Lopez C., Yndurian F.J.— *Phys.Rev.D*, 1985, vol.32, No.3, p.736.
335. Курдалзе А.М. и др.— *Ядерная физика*, 1984, т.40, №2(8), с.451.
336. Martinovic L., Dubnicka S.— *Phys.Rev.D.*, 1990, vol.42, No. , p.884;
Dubnickova A.Z., Dubnicka S., Strizenec P.— *JINR Commun. E2-92-281*, Dubna, 1992.
337. Jackiw R., Weinberg S.— *Phys.Rev.D*, 1972, vol.5, No.9, P.2396;
Bars I., Yoshimura M.— *ibid*, 1972, vol.6, No.1, p.374;
Fujikama K., Lee B.W., Sanda A.I.— *ibid*, No.10, p.2923;
Bardeen W.A., Gastmans R., Lautrup B.— *Nucl.Phys.*, 1972, vol.B46, No.1, p.319.
338. Samuel K.B., Samuel M.A.— *Canadian J.Phys.*, 1990, vol.68, p.1359.
339. Bailey J. et al.— *Phys.Lett.*, 1977, vol.68B, No.2, p.191; *Nucl.Phys.*, 1979, vol.B150, p.243;
Combley F., Farley F.J.M., Picasso E.— *Phys.Repts.*, 1981, vol.68C, No.2, p.93;
Филд Дж., Пикассо Э., Комбли Ф.— *УФН*, 1979, т.127, 4, с.553.
340. Студеникин А.И. — *ЭЧАЯ*, 1990, т.21, №3, с.605.
341. Narison S.— *J.Phys.G.*, 1978, vol.4, No.12, p.1849.
342. Samuel M.A., Li G., Mendel R. — *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol.67, No.6, p.668.
343. Gan K., Perl M.— *Int.J.Mod.Phys.*, 1988, vol.3A, No.3, p.531.
344. Williams E.R. et al.— *IEEE Trans.Instr.Meas.*, 1989, vol.38, No.2, p.233;
Williams E.R., Olsen P.T.— *Phys.Rev.Lett.*, 1979, vol.42, No.24, p.1575.
345. Brodsky S., Drell S.— *Phys.Rev.D*, 1980, vol.22, No.9, p.2236;
Peskin M.E.— In: «Lepton and Photon Int. at High Energies». Proc. of the 10th Int.Symp., Bonn, Germany, 1981. Ed. Pfeil W. (Phys.Inst., Bonn Univ., Bonn, 1981), p.880;
Lyons L.— *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 1983, vol.10, p.227;
Perl M.L.— In: *Lepton and Photon Int. at High Energies. Proc. of the 14th Int.Symp.* Stanford, California, USA. SLAC-PUB-5132, 1989.
346. Kinoshita T.— Preprint CLNS 93/1219, Cornell, 1993.
347. Schmidt-Kaler F., Leibfried D., Weitz M., Hansch T.W.— *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol.70, No.15, p.2261.
348. Fell R.N., Khriplovich I.B., Milstein A.I., Yelkhovsky A.S.— *Phys. Lett.*, 1993, vol. A181, No.2, p.172.
349. Hagen D. et al.— *Phys.Rev.Lett.*, 1993, vol.71, No.18, p.2887.
350. Kinoshita T.— Preprint CLNS 93/1186, Cornell, 1993; *Phys.Rev.D*, 1993, vol.47, No. 11, p.5013.
351. Fee M.S., Chu S., Mills A.P. et al.— *Phys. Rev. A*, 1993, vol. 48, No.1, p.192.