

## О КОНФАЙНМЕНТЕ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ\*

*Л.В.Прохоров*

Санкт-Петербургский государственный университет, НИИ Физики, С.-Петербург

Анализируется проблема конфайнмента в калибровочных теориях. Исследуется широкий класс моделей с калибровочной симметрией, начиная от квантовой механики и кончая квантовой хромодинамикой. Подчеркивается целесообразность отделения чисто кинематического аспекта проблемы (запрет на состояния) от динамического (линейно растущий потенциал). Обсуждается природа удерживающих сил. Изучается эволюция струно-подобных возбуждений электромагнитного поля в свободной электродинамике и в теории со статическими источниками; показана их неустойчивость. Дается классификация различных видов конфайнмента в зависимости от физических параметров струны.

The problem of confinement in gauge theories is analyzed. A wide class of gauge models (both quantum mechanical and field theoretical ones, including QCD) is considered. It is stressed that it is useful to distinguish the kinematical aspect of the problem (the existence of forbidden states) from the dynamical one (linear potential). The nature of confining forces is discussed. The evolution of string-line excitations of field in free QED and in QED with static sources is investigated. It is shown that they are not stable. The classification of forms of confinement depending on the physical parameters of string is given.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

**Краткая история вопроса.** Если предыстория вопроса начинается с открытия сильных взаимодействий (нуклонная модель ядра (1932) — проблема сил, связывающих нуклоны), то начало истории можно отнести к 1961 г. К этому времени было открыто довольно много сильновзаимодействующих частиц ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\bar{K}$ ;  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$ ;  $\Delta$ ,  $\Sigma^*$ ,  $\Xi^*$ ) и остро встал вопрос о наведении порядка в этом множестве «простейших кирпичиков материи». Гелл-Манн [1] и Нееман [2] предложили классифицировать их по группе  $SU(3)$  (на современном языке — группа ароматов  $SU(3)_f$ ), это так называемый «восьмеричный путь»: мезоны  $\pi$ ,  $K$ ,  $\bar{K}$ ,  $\eta$  и барионы  $N$ ,  $\Lambda$ ,

---

\*Расширенный доклад на XI Международном семинаре по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 7—12 сентября 1992 г.

$\Sigma$ ,  $\Xi$  приписывались октетному представлению группы. Триумфом теории явилось открытие  $\Omega^-$ -гиперона, недостающего звена декаплета  $\Delta$ ,  $\Sigma^*$ ,  $\Xi^*$ ,  $\Omega$ . Наблюдавшиеся частицы, однако, реализовывали лишь часть представлений группы  $SU(3)_f$  (октетное и декаплетное), роль остальных была неясна.

Известно, что все представления группы  $SU(3)$  можно построить из двух простейших триплетов  $\xi$ ,  $\xi^*$ , так называемых фундаментальных или элементарных представлений [3]. Гелл-Манн [4] и Цвейг [4] (1964) предположили, что все сильновзаимодействующие частицы (адроны) построены из простейших, реализующих фундаментальные представления группы  $SU(3)$  («кварков» [4] или «тузов» [5]). Вопрос о том, являются ли кварки реальными частицами или они представляют собой чисто математические объекты, оставался открытым. Признание их реальности порождало новые проблемы: 1) кварки, будучи фермионами, описывались симметричными по всем известным квантовым числам волновыми функциями (модель аддитивных кварков [6]); 2) не наблюдались изолированные кварки (конфайнмент), хотя до сих пор все составные объекты удавалось разбивать на простейшие; 3) не наблюдались дикварки и другие экзотические состояния. Первая проблема решалась наделением кварков новым квантовым числом [7—9] (на современном языке — «цветом»), принимавшим три значения; предполагалось, таким образом, что имеется три сорта каждого из кварков, и их волновая функция в нуклоне антисимметрична по цвету.

Интерес к кваркам возрос после открытия масштабной инвариантности (скейлинга) и появления партонной модели адронов [10, 11], когда стало ясно, что последние построены из точечных объектов. Естественно было отождествить их с кварками, но тогда в полный рост вставал вопрос о природе взаимодействия кварков. Была выдвинута гипотеза, что сильные взаимодействия описываются калибровочной теорией [12—14], причем в работе [14] была предложена модель, именуемая ныне квантовой хромодинамикой (КХД). Современная теория сильных взаимодействий появилась в результате превращения глобальной цветовой симметрии в локальную, т.е. калибровочную.

Итак, в 1973 г. квантовая хромодинамика была сформулирована. Вопрос о статистике решался автоматически, вопрос о конфайнменте оставался открытым. Проблема была немедленно атакована теоретиками. Наметились два подхода: физический, опирающийся на здравый смысл и интуицию, и «физико-математический», в котором за основу брался лагранжиан КХД. Из работ, относящихся к первому направлению, отметим модель мешков [15] и модель вакуумного конденсата монополей [16, 17].

Из работ второго направления сошлемся на публикации [18—20]. Наиболее последовательно программу изучения конфайнмента из первых принципов провел К. Вильсон [21]. Эта пионерская работа примечательна в нескольких отношениях. Во-первых, в ней была сформулирована калибровочная теория на решетке, во-вторых, были введены «петли Вильсона», в-третьих, был сформулирован «критерий Вильсона» (закон площадей), и наконец, для массивных зарядов в пределе сильной связи был получен конфайнмент в КЭД (подробнее об этом см. разд. 5). Неабелевы теории в подходе Вильсона исследовались путем вычислений на компьютерах [22]. Отметим также фундаментальную работу Т. Куго и И. Оджима [23], в которой проведено подробное и математически строгое исследование проблемы, установлены общие свойства физических состояний в калибровочных теориях (равенство нулю глобальных калибровочных зарядов, отсутствие в физическом секторе локализованных цветных состояний). Это, так сказать, «кинематика» феномена, поскольку для решения вопроса о характере межчастичных сил недостаточно общих соображений — необходимо умение описывать динамику полей.

Среди прочих работ, посвященных конфайнменту, отметим исследование модели Швингера [24] (электродинамика безмассовых фермионов в пространстве-времени  $(1+1)$ ). Интерес к ней связан с тем, что в одномерной электродинамике конфайнмент имеет место автоматически («кулонов» потенциал линейен). В безмассовой модели Швингера электрический заряд полностью экранирован, т.е. имеет место «обесцвечивание» [25—26].

**Общие замечания о проблеме.** Строго говоря, до сих пор не существует общепринятого определения конфайнмента. Причина, очевидно, в отсутствии ясного понимания феномена. Проблема формулируется по-разному. Первоначально она сводилась к вопросу [12]: почему мы не видим физических кварков? С появлением КХД вопрос приобрел конкретность: почему кварки встречаются только в бесцветных комбинациях ( $q\bar{q}$ ,  $qqq$ ,  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ ) [27]? Наконец, говорят, что имеет место конфайнмент, если статические силы между кварками характеризуются линейно растущим потенциалом. Все три формулировки имеют совершенно разный характер. Первая — качественная, вторая ничего не говорит о динамике (чистая кинематика, вопрос о силах не поднимается), тогда как в третьей речь идет о конкретном потенциале. Подразумевается, что применительно к кваркам справедливы все три формулировки. Более того, исключение одного из признаков («ненаблюдаемость» кварков, бесцветность адронов, линейный рост потенциала) трактуется как подмена проблемы. Отсутствие четкого определения конфайнмента затрудняет его изучение.

Даже поверхностное знакомство с проблемой строения адронов убеждает в ее чрезвычайной сложности, равно как и в непригодности для ее

решения метода теории возмущений. Не удалось выяснить физику феномена и с помощью единственного регулярного непертурбативного подхода — квазиклассического описания в рамках аппарата континуальных интегралов. Из попыток решить проблему конфайнмента стало ясно, что физики столкнулись с качественно новым явлением. Все это контрастирует с простотой лагранжиана КХД.

Иногда полезно обобщить или, наоборот, упростить проблему с тем, чтобы исключить несущественные детали. Расширим постановку задачи. Оба вышеприведенных вопроса, ставящих проблему, по существу, носят запретительный характер. А какие запреты вообще известны в физике? Помимо произвольных запретов, не вытекающих из динамики (например, помещение частицы на окружность или сферу), сюда относятся законы сохранения, правила суперотбора, связи в теориях с вырожденным лагранжианом. Первые, однако, хотя и ограничивают движение, очевидным образом не имеют отношения к проблеме — они лишь запрещают изменение некоторых динамических величин со временем, не препятствуя им принимать любые значения. Далее. Имеется два правила суперотбора [28]: 1) запрещена суперпозиция состояний с целым и полуцелым спином (это следует из общих свойств представлений группы Лоренца); 2) запрещена суперпозиция состояний с разными электрическими зарядами (до недавнего времени это правило было «эмпирическим» [29]). Ясно, что эти запреты уже нельзя исключить, как заведомо не относящиеся к вопросу (см. разд.2). Наконец, теории со связями. Они тем более заслуживают внимания, что калибровочные теории являются типичными их представителями.

Изучение уже простейших механических систем с калибровочной симметрией обнаруживает запреты интересующего нас типа (разд.2) — часть состояний оказывается за пределами физического сектора. В случае гармонического осциллятора с калибровочной группой  $SO(2)$  запрещены все возбуждения с нечетными номерами; в теории поля это соответствовало бы запрету на появление частиц иначе как парами и исключению из физического сектора состояний с нечетным числом частиц — факт, характерный для конфайнмента. Данный пример наводит на мысль о том, что конфайнмент кварков есть частный случай явлений, присущих динамическим системам со связями первого рода. В дальнейшем термин «конфайнмент» будет толковаться расширительно как запрет на состояния с определенными квантовыми числами. Это позволит отделить чисто кинематический аспект проблемы от динамического. Анализ различных моделей показывает плодотворность такого подхода, выделяющего самую яркую черту конфайнмента — запрет цветных состояний. Детали статического взаимодействия кварков или других заряженных частиц зависят от конкретики теории, в частности, от калибровочной группы, строения

вакуума и т.п. и составляют отдельную проблему. При таком понимании конфайнмент имеет место даже в электродинамике — полный электрический заряд Вселенной должен равняться нулю [29] (разд.2). Кинематический и динамический аспекты конфайнмента в известной степени независимы: в квантовой электродинамике (КЭД) есть запрет на полный электрический заряд, но нет линейно растущего потенциала.

В предлагаемом подходе проблема допускает красивую геометрическую формулировку в виде задачи о перечислении полилокальных инвариантов в теории расслоенных пространств. Как известно, векторные калибровочные поля можно отождествить со связностями в главном расслоении [30,31]. «Цветные» конфигурации полей запрещены требованием калибровочной инвариантности, а  $P$ -экспонента, обычно отождествляемая со струной, возникает как оператор параллельного переноса (разд.3). Разумеется, здесь и речи нет о динамике, поскольку отсутствует лагранжиан. Включение динамики не может нарушить калибровочную инвариантность найденных структур, т.е. проделанный анализ остается в силе — калибровочно-инвариантный лагранжиан задает лишь закон их изменения со временем.

Вопрос о статических силах между массивными зарядами, входящими в упомянутые инвариантные структуры, рассматривается в разд.4. Энергия состояния, образованного кварком, антикварком и соединяющей их  $P$ -экспонентой, разумеется, пропорциональна длине контура интегрирования в последней, но отождествление этой энергии с потенциальной возможно лишь при условии стационарности данного состояния. В разд.5 вопрос о стационарности исследуется в квантовой электродинамике. Показано, что струноподобные возбуждения, порождаемые замкнутыми «струнами» (линейными экспонентами) или «струнами» со статическими зарядами на концах, нестационарны [32,33]. Там же обсуждается вопрос о законе площадей и методе сильной связи в КЭД на решетке [21]. Показано, что метод сильной связи, используемый в решеточных вычислениях, непригоден для решения задачи о конфайнменте в непрерывном пределе. В разд.6 перечислены формы, в которых может проявиться конфайнмент. В разд.7 подводятся итоги анализа.

## 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ И КОНФАЙНМЕНТ

«Конфайнмент» в квантовой механике. *Калибровочная группа*  $SO(2)$ . Чтобы поближе познакомиться с особенностью запретов, возникающих в теориях с калибровочной группой, рассмотрим простейшую модель [34,35] с лагранжианом

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{\vec{x}} - yT\vec{x})^2 - \frac{1}{2}\dot{x}^2, \quad \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Лагранжиан (2.1) описывает частицу единичной массы в двумерном пространстве  $\vec{x}(x_1, x_2)$ . Он инвариантен относительно калибровочных преобразований  $\delta\vec{x} = \omega T\vec{x}$ ,  $\delta y = \dot{\omega}$ , где  $\omega(t)$  — бесконечно малая произвольная функция времени, и, по существу, совпадает с лагранжианом скалярной электродинамики в пространстве-времени  $(0+1)$ : компоненты  $\vec{x}$  есть вещественная и мнимая части скалярного комплексного поля, а  $y = A_0$  ( $A_\mu$  — вектор-потенциал). Переход к гамильтонову формализму совершается с учетом первичной связи  $p_y = \partial L / \partial \dot{y} = 0$  (подробнее см. [35,36]):

$$H = \frac{1}{2} (\vec{p}^2 + \vec{x}^2) + y\vec{p}T\vec{x}. \quad (2.2)$$

Запишем (2.2) во вторично квантованном виде

$$\hat{H} = \hat{a}^+ \hat{a} + y \hat{a}^+ T \hat{a}, \quad \hat{a}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p} \pm i\vec{x}), \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2. \quad (2.3)$$

вторичная связь

$$\hat{\sigma} = \hat{a}^+ T \hat{a} \quad (2.4)$$

есть генератор поворотов в плоскостях  $\vec{x}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  или  $(\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+)$ . Связи находятся в инволюции,  $[\hat{p}_y, \hat{\sigma}] = 0$ , откуда следует, что векторы физических состояний  $\Phi$  должны удовлетворять условиям [37]

$$p_y \Phi = 0, \quad \hat{\sigma} \Phi = 0. \quad (2.5)$$

Первое условие (2.5) малосодержательно, второе же исключает часть собственных векторов оператора  $\hat{H}$  (2.3). Действительно, если  $|0\rangle$  — физический «вакуум» ( $\hat{a}|0\rangle = \hat{\sigma}|0\rangle = 0$ ), то любой собственный вектор  $\hat{H}$  получается применением к  $|0\rangle$  операторов вида  $(\hat{a}_1^+)^n (\hat{a}_2^+)^m$ . Второе условие (2.5) означает, что физическому сектору принадлежат лишь состояния, не меняющиеся при калибровочных преобразованиях, т.е. при поворотах в плоскости  $(\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+)$ . Единственный инвариантный оператор, который можно построить из 2-вектора  $\hat{a}^+$ , есть  $(\hat{a}^+)^2$ ; следовательно, базис физического пространства образуют векторы

$$[(\hat{a}^+)^2]^n |0\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

отвечающие собственным значениям оператора  $\hat{H}$  (2.3)  $E_{2n} = 2n + 1$ .

Векторы вида  $\hat{a}_1^+ [(\hat{a}^+)^2]^n |0\rangle$  меняются при калибровочных преобразованиях, генерируемых оператором  $\hat{\sigma}$ , и исключаются вторым условием (2.5). В квантовой теории поля подобный запрет означал бы, что частицы, порождаемые из вакуума оператором  $\hat{a}^+$ , могут появляться лишь парами. По существу, мы имеем пример конфайнмента, если понимать его в широком смысле: уровни с нечетными номерами запрещены.

*Замечание.* Калибровочной орбитой модели является окружность; точки окружности физически неразличимы. В калибровке  $x_2 = 0$  орбита превращается в дискретное множество, состоящее из двух точек оси  $x_1$ , т.е. точки положительной и отрицательной полуосей отождествляются. Вследствие этого частица после достижения начала координат фактически начинает двигаться в обратном направлении [35,36]. Отождествление положительной и отрицательной полуосей  $x_1$  допускает следующую интерпретацию. Можно считать всю ось физической, но предположить существование второй частицы, не отличимой от первой и движущейся зеркально. Тогда первая частица после достижения начала координат продолжает движение по отрицательной полуоси, тогда как зеркальная ей проходит через ноль, имитируя попятное движение первой. Так как существование первой частицы возможно лишь вместе с зеркальной, при таком истолковании рассматриваемая модель служит примером глобального конфайнмента. Подобная интерпретация даже более предпочтительна, поскольку полностью согласуется с ситуацией в теории поля (появление частиц только парами). В квантовой механике второе условие (2.5) в калибровке  $x_2 = 0$  сводится к исключению нечетных функций. Тем самым формирование локализованного волнового пакета на положительной полуоси влечет появление зеркального, т.е. с точки зрения квантовой механики предлагаемая интерпретация тривиальна.

*Калибровочная группа SU(3).* Аналогично обстоят дела и в модели с калибровочной группой  $SU(3)$ , иллюстрирующей ситуацию в хромодинамике. Лагранжиан

$$L(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*, \vec{\xi}, \vec{\xi}^*, y, y) = (\vec{\xi} - iy\vec{\xi})^* (\vec{\xi} - iy\vec{\xi}) - \vec{\xi}^* \vec{\xi} \quad (2.7)$$

(здесь  $\hat{y} = y^a \lambda_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$ ,  $\lambda_a$  — матрицы Гелл-Манна,  $\vec{\xi}_\alpha$  — 3-мерный комплексный вектор,  $\vec{\xi}^* \vec{\xi} = \xi_\alpha^{i*} \xi_i^\alpha$ , индекс  $\alpha$  нумерует «цвет»,  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, 3$ ) инвариантен относительно калибровочных преобразований  $\delta \vec{\xi} = i\hat{\omega} \vec{\xi}$ ,  $\delta \vec{\xi}^* = -i\vec{\xi}^* \hat{\omega}$ ,  $\delta \hat{y} = i[\hat{\omega}, \hat{y}] + \hat{\omega}$ , где  $\hat{\omega} = \omega^a \lambda_a$ ,  $\omega^a(t)$

— произвольные бесконечно малые функции времени. Теория, заданная лагранжианом (2.7), есть скалярная изовекторная хромодинамика в фундаментальном представлении в пространстве-времени (0+1). Первичные связи таковы:  $p_a = \partial L / \partial \dot{y}^a = 0$ . Переходя к гамильтонову формализму,

$$\text{имеем } \vec{p}_\alpha = \partial L / \partial \vec{\xi}^{\alpha*}, \quad \vec{p}^{\alpha*} = \partial L / \partial \vec{\xi}_\alpha^*,$$

$$H = \vec{p} \vec{p}^* + \vec{\xi}^* \vec{\xi} + i \vec{p} \hat{y} \vec{\xi} - i \vec{\xi}^* \hat{y} \vec{p}^*. \quad (2.8)$$

С помощью замены

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p} - i \vec{\xi}^*), & \vec{a}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p}^* + i \vec{\xi}), \\ \vec{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p}^* - i \vec{\xi}), & \vec{b}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p} + i \vec{\xi}^*), \end{aligned} \quad (2.9)$$

гамильтониан (2.8) записываем во «вторично квантованном виде»:

$$H = \vec{a}^* \vec{a} + \vec{b} \vec{b}^* + \vec{a} \hat{y} \vec{a}^* - \vec{b}^* \hat{y} \vec{b}. \quad (2.10)$$

Вторичные связи

$$\sigma^a = \vec{a} \lambda^a \vec{a}^* - \vec{b}^* \lambda^a \vec{b} \quad (2.11)$$

генерируют калибровочные преобразования из группы  $SU(3)$ . Дальнейшее просто. Физические состояния не должны меняться при калибровочных преобразованиях, т.е.

$$\sigma^a \Phi = 0, \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad (2.12)$$

а единственные неприводимые инварианты, которые можно построить из векторов  $\vec{a}^{\alpha+}, \vec{b}_\alpha^+$ , есть

$$\hat{M}_{ij} = \hat{a}_i^{\alpha+} \hat{b}_{\alpha j}^+, \quad \hat{B} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{ijk} \hat{b}_{\alpha i}^+ \hat{b}_{\beta j}^+ \hat{b}_{\gamma k}^+, \quad \hat{B} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{ijk} \hat{a}_i^{\alpha+} \hat{a}_j^{\beta+} \hat{a}_k^{\gamma+}, \quad (2.13)$$

где  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}, \epsilon^{ijk}$  — единичные антисимметричные тензоры, т.е. физическому сектору принадлежат векторы вида

$$\hat{M}_{ij}^n \hat{B}^n \hat{B}^n |0\rangle, \quad \hat{a}_\alpha^+ |0\rangle = \hat{b}^+ |0\rangle = 0, \quad n_{1,2,3} = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

Видно, что требование калибровочной инвариантности допускает в физический сектор лишь бесцветные состояния. Цветные состояния, порождаемые операторами  $(\hat{a}_i^{\alpha+})^n, (\hat{b}_{\beta j}^+)^m$ , исключаются условиями (2.12). Данное обстоятельство можно интерпретировать как наличие в модели конфайнмента. Здесь нет понятия межчастичных сил, но есть запрет на цветные состояния. Рассмотренные модели показывают полез-



ность отделения чисто кинематического (калибровочного) аспекта кон-  
файнмента от динамического.

«Конфайнмент» в квантовой электродинамике. Разобранные приме-  
ры легко обобщаются на полевые теории. Рассмотрим квантовую элект-  
родинамику. Запрет на цветные состояния здесь трансформируется в ус-  
ловие электрической нейтральности Вселенной [29]. Это утверждение  
хорошо известно и легко доказывается для замкнутой Вселенной.  
Выбирая произвольный, не содержащий электрического заряда объем  $V$ ,  
имеем для потока напряженности электрического поля  $E$  через его  
границу  $\partial V$ :

$$\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{s} = 0. \quad (2.15)$$

Но вместе с тем (2.15) есть поток через  $\partial V$  от остальной части Вселенной,  
взятый с обратным знаком, что и доказывает утверждение. В случае  
открытой Вселенной формальное доказательство усложняется. Пусть  $\mathcal{L}$  -  
лагранжиан электромагнитного и заряженного спинорного полей:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi, \quad \hat{D} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\gamma_\mu.$$

В силу калибровочной инвариантности имеется первичная связь  $\pi_0 =$   
 $= \partial \mathcal{L} / \partial \dot{A}_0 = 0$ , и, как хорошо известно [37], гамильтониан записывается  
в виде

$$H_T = H + \int d^3x [\vec{\partial} A_0 \vec{E} + j_0], \quad (2.16)$$

где  $H$  — стандартный гамильтониан полей,  $A_0$  и  $j_0$  — нулевые компонен-  
ты вектор-потенциала электромагнитного поля и электрического тока.  
Обычно в последнем члене (2.16) интегрируют по частям, пренебрегая  
поверхностными членами; затем из условия непротиворечивости теории  
 $\dot{\pi}_0 = \{\pi_0, H_T\} = 0$  получают вторичную связь (закон Гаусса)

$$G(x) = \vec{\partial} \vec{E} - j_0 = 0. \quad (2.17)$$

При выводе (2.17) фактически делается предположение о достаточно  
быстром убывании полей на бесконечности, чего, строго говоря, делать  
нельзя, поскольку  $A_0$  и  $\vec{E}$  есть динамические переменные, и скорость их  
убывания зависит от характера задачи и калибровки. Например, в случае  
 $A_0 \rightarrow \text{const}$  при  $|\vec{x}| \equiv r \rightarrow \infty$  и  $\vec{E} \sim \vec{\partial} 1/r$  внеинтегральный член отличен  
от нуля. Для полей,  $A_0, \vec{E}$ , произведение которых при  $r \rightarrow \infty$  убывает не  
медленнее  $1/r^2$ , запишем формулу интегрирования по частям в виде

$$\int d^3x \vec{\partial} A_0(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int d^3x A_0(\vec{x}) \mathfrak{D}_R \vec{E}(\vec{x}), \quad (2.18)$$

где

$$\mathfrak{D}_R = \vec{\partial} - \vec{f}_R(\vec{x}), \quad \vec{f}_R(\vec{x}) = \int d\vec{s} \delta(\vec{x} - R\vec{n}). \quad (2.19)$$

В (2.19) интегрирование ведется по поверхности сферы радиуса  $R$ ,  $\vec{n}^2(\theta, \varphi) = 1$ ,  $\vec{n} d\vec{s} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ,  $\vec{n} \times d\vec{s} = 0$ . Применяя эту формулу, из условия  $\dot{\pi}_0 = 0$  находим вторичную связь:

$$\sigma(x) = \mathfrak{D}_R \vec{E} - j_0 = 0, \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Очевидно,  $\vec{f}_R(\vec{x}) = 0$  при  $|\vec{x}| \neq R$ , поэтому на конечных расстояниях (2.20) совпадает с законом Гаусса (2.17). Интегрируя (2.20) по всему пространству и учитывая, что

$$\int d^3x \mathfrak{D}_R \vec{E} = 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad |\vec{E}| = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.21)$$

заключаем:

$$Q = \int d^3x j_0(\vec{x}) = 0, \quad (2.22)$$

т.е. если полный электрический заряд Вселенной конечен, то он равен нулю<sup>x</sup>. Смысл этого утверждения прост. Предполагая, что  $\vec{E}$  убывает не медленнее, чем  $1/r^2$ , мы предполагаем отсутствие заряда вне некоторой сферы сколь угодно большого, но конечного радиуса. Теория же формулируется локально, заданием лагранжиана, согласно которому электрические силовые линии начинаются и кончаются на зарядах (или образуют замкнутые линии). Именно поэтому допущение, что весь электрический заряд Вселенной конечен и сосредоточен в конечном объеме, означает равенство его нулю, в противном случае пришлось бы допустить, что равный заряд противоположного знака находится на бесконечности. Впрочем, и в этом случае полный заряд, но уже с учетом бесконечно удаленного, был бы равен нулю.

В квантовой теории оператор  $\hat{\sigma}(x)$  также есть генератор калибровочных преобразований. Он должен коммутировать (слабо, т.е. на физических векторах) со всеми физическими операторами  $\hat{O}$ :

$$[\hat{\sigma}(x), \hat{O}] \approx 0 \quad (2.23)$$

<sup>x</sup>Равенство (2.22) другим способом (методом БРСТ) было получено также в работе [23], но не применительно к Вселенной, поэтому оно отвергалось.

и исчезать на векторах из физического гильбертова подпространства  $\mathcal{H}_{ph}$ :

$$\hat{\sigma}(x)\Phi = 0, \quad \Phi \in \mathcal{H}_{ph}. \quad (2.24)$$

Интегрируя (2.23), (2.24) по всему пространству и учитывая (2.21) (как равенство для матричных элементов в  $\mathcal{H}_{ph}$ ), имеем

$$[\hat{Q}, \hat{O}] \approx 0, \quad \text{т.е.} \quad [\hat{Q}, \hat{O}]\Phi = 0, \quad (2.25)$$

$$\hat{Q}\Phi = 0. \quad (2.26)$$

Отметим, что нет проблемы существования оператора  $\int d^3x \hat{\sigma}(x)$ , поскольку все его матричные элементы между физическими состояниями равны нулю. Условие (2.26) означает: в электродинамике, согласно терминологии [29,38,39], имеет место слабый конфайнмент (частный случай конфайнмента: существует запрет на заряженные состояния, но потенциал между зарядами убывает как  $1/r$ , отсутствует удержание).

Условие (2.25), между прочим, означает, что для электрического заряда имеет место правило суперотбора; как и правило суперотбора для состояний с целым и полуцелым спином [40], оно также является «теоретическим» [29], т.е. нет необходимости постулировать условие (2.25) (в сильном смысле), как это фактически предполагалось в [28].

*Замечание.* Отметим, что из (2.25) следует (2.26). Действительно, любое физическое состояние  $\Phi$  может быть получено из вакуума  $\Phi_0$  воздействием некоторого физического оператора  $\Phi = \hat{O}\Phi_0$ ; но  $\hat{Q}\Phi_0 = 0$ , поэтому, согласно (2.25),  $\hat{Q}\Phi = 0$ . Итак, и из эмпирического правила суперотбора для электрического заряда (2.25), установленного в работе [28], следует, что *полный* электрический заряд физических состояний равен нулю.

**Неабелевы теории. Глобальный конфайнмент.** Приведенные рассуждения во многом верны и для неабелевых теорий. Закон Гаусса в этом случае записывается в виде равенств

$$\sigma^a(x) \equiv \vec{\mathcal{D}}_R^{ab} \vec{E}_b(x) - j_0^a = 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.27)$$

где  $\vec{\mathcal{D}}_R^{ab} = \vec{\mathcal{D}}^{ab} - \vec{f}_R \delta^{ab}$ ,  $\vec{\mathcal{D}}^{ab} = \delta^{ab} \vec{\partial} - ig f^{abc} \vec{A}_c$ ,  $g$  — константа связи,  $f^{abc}$  — структурные постоянные калибровочной группы  $G$ ,  $a, b, c = 1, 2, \dots$ ,  $N = \dim G$ , а  $j_\mu^a$  — ток материи. Обозначая  $\vec{j}_0^a = ig f^{abc} \vec{A}_b \vec{E}_c$  (нулевая компонента тока полей  $A_\mu^a$ ) и интегрируя (2.27) по всему пространству, имеем

$$Q^a = \int d^3x [j_0^a(x) + j_0^a(x)] \equiv \tilde{Q}^a + Q_M^a = 0, \quad (2.28)$$

т.е. полный «заряд» (материя плюс поля  $A_\mu^a$ ), как и в электродинамике, также равен нулю. В квантовой теории интегрирование условий калибровочной инвариантности всех физических операторов  $\hat{O}$  и состояний  $\Phi$

$$[\hat{\sigma}^a(x), \hat{O}] \approx 0, \quad \hat{\sigma}^a(x)\Phi = 0 \quad (2.29)$$

приводит к условиям

$$[\hat{Q}^a, \hat{Q}] \approx 0, \quad \hat{Q}^a\Phi = 0. \quad (2.30)$$

Согласно (2.30) полный цветной заряд физических состояний равен нулю. Данный запрет на цветные состояния, не затрагивающий вопроса о характере удерживающих сил, уместно назвать *глобальным* конфайнментом, поскольку речь идет о полных зарядах. По-другому (в рамках метода БРСТ) и более строго (для локальных операторов и локализованных состояний) равенства (2.30) были получены в работе [23], причем первое из них в виде сильного равенства.

**Неабелевы теории. Группа Вейля и локальный конфайнмент.** К утверждениям, не затрагивающим вопроса о статических силах, относится и утверждение о равенстве нулю функций Вайтмана (о функциях Вайтмана см. [40]), в частности, пропагаторов локальных заряженных полей. Оно универсально, т.е. не зависит ни от калибровочной группы  $G$ , ни от числа измерений пространства, и, следовательно, имеет чисто кинематический характер. По существу, это есть запрет локальных цветных возбуждений.

Пусть  $\hat{\phi}(x)$  — локальное поле, изменяющееся при калибровочных преобразованиях согласно

$$\hat{U}\hat{\phi}(x)\hat{U}^+ = S(x)\hat{\phi}(x), \quad (2.31)$$

где  $\hat{U} = \exp[i \int d^3x \omega^a(\vec{x}, t) \hat{G}_a(\vec{x}, t)]$ ,  $\hat{G}_a$  — генераторы калибровочных преобразований (связи первого рода),  $\omega^a$  — произвольные, убывающие при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  функции, а матрица  $S$ , действующая на  $\hat{\phi}$ , реализует некоторое представление калибровочной группы. Поскольку, аналогично (2.24), (2.29),  $\hat{G}_a\Phi = 0$ ,  $\Phi \in \mathcal{K}_{ph}$ , т.е.

$$\hat{U}\Phi = \Phi, \quad \hat{U}^+\hat{U} = 1, \quad (2.32)$$

имеем

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | S(x) \hat{\phi}(x) S(y) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle; \quad (2.33)$$

здесь мы воспользовались тем, что вакуум есть физическое состояние. Уравнение (2.33) перепишем в виде

$$(\delta_{ik} \partial_{jl} - S_{ik}(x) S_{jl}(y)) \langle 0 | \hat{\phi}_k(x) \hat{\phi}_l(y) | 0 \rangle; \quad (2.34)$$

из (2.34) следует

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = 0. \quad (2.35)$$

Равенство (2.35) означает, что локальное цветное поле  $\hat{\phi}(x)$  не может распространяться, его пропагатор равен нулю. Рассуждение легко обобщить на случай произвольной функции Вайтмана  $\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle$  — все они также равны нулю. Следовательно, локальные возбуждения поля  $\hat{\phi}(x)$ , отвечающие функциям Вайтмана указанного вида, невозможны [38]. По существу, эквивалентные результаты (но в другой форме) получены в [23].

*Замечания.* 1) В обкладках формул (2.33)—(2.35) вместо вакуума можно взять любые физические состояния, удовлетворяющие условию (2.32). 2) При  $x \neq y$  все утверждения остаются в силе и для заряженных полей абелевой теории (КЭД). Это означает, что локальное заряженное поле калибровочной теории не имеет непосредственного физического смысла (ненаблюдаемо); как известно [41], оно отвечает электрону, лишенному кулонова поля (подробнее см. разд.3,4).

Может показаться, что приведенный вывод обесценивается следующим рассуждением. Поскольку поле  $\hat{\phi}$  меняется при калибровочных преобразованиях, не все его степени свободы являются физическими. Эти последние, обозначаемые  $\hat{\phi}_{ph}$ , не преобразуются при непрерывных калибровочных преобразованиях

$$\hat{U} \hat{\phi}_{ph}(x) \hat{U}^+ = \hat{\phi}_{ph}(x), \quad (2.36)$$

и, казалось бы, локальные поля  $\hat{\phi}_{ph}(x)$  могут распространяться. Другими словами, исключив нефизические компоненты  $\hat{\phi}$  подходящим выбором калибровки (положив их равными нулю), получим обыкновенные локальные поля, распространению которых, как будто, ничто не мешает. Более тщательный анализ показывает, что это не так [38] — остаются дискретные калибровочные преобразования, образующие группу Вейля, которые и обеспечивают локальный конфайнмент. Действительно, пусть  $\hat{\phi}$  реализует присоединенное представление  $G$  (рассуждение легко обобщается на любое представление). Тогда имеет место формула [42]:

$$\hat{\phi} = e^{\hat{z}} \hat{h} e^{-\hat{z}}, \quad (2.37)$$

где поле  $\hat{h}(x)$  принадлежит подалгебре Картана  $H$  алгебры Ли  $X$  калибровочной группы, а  $\hat{z} \in X \ominus H$ . Поле  $\hat{h}$ , содержащее  $l$  компонент,  $l = \dim H$ , может рассматриваться как физическое, тогда как поле  $\hat{z}$  ( $N - l$  компонент,  $N = \dim X$ ) всегда можно удалить калибровочным преобразованием; очевидно,  $\hat{h}$  есть стационарный вектор подгруппы Картана. Известно также, что в  $H$  действует дискретная подгруппа группы  $G$  (группа Вейля  $W$  [42]), сохраняющая систему корней группы. Эта группа и обеспечивает локальный конфайнмент поля  $\hat{h}(x)$ . Вместо (2.31) имеем

$$\hat{U}_W \hat{h}(x) \hat{U}_W^+ = \hat{W}(x) \hat{h}(x), \quad \hat{U}_W \in W, \quad (2.38)$$

где  $\hat{W}(x)$  есть  $l \times l$ -матрица, действующая в линейном пространстве  $H$ , т.е. формула (2.34) заменяется на

$$(\delta_{ac} \delta_{bd} - W_{ac}(x) W_{bd}(y)) \langle 0 | \hat{h}_c(x) \hat{h}_d(y) | 0 \rangle = 0, \quad (2.39)$$

$a, \dots, d = 1, 2, \dots, l$ , откуда и следует равенство нулю пропагатора «физического» поля  $\hat{h}$ . Обобщение этого рассуждения на произвольную функцию Вайтмана не представляет труда. Следовательно, локальные возбуждения «физических» полей  $\hat{h}$  также запрещены. Допустимы лишь возбуждения их локальных бесцветных комбинаций.

#### Выводы

1. В калибровочных теориях существуют запреты на состояния с определенными квантовыми числами безотносительно к характеру статического взаимодействия заряженных частиц.

2. Имеется два типа запретов: а) утверждение о равенстве нулю полных зарядов физических состояний (равенства (2.12), (2.26), (2.30), *глобальный* конфайнмент), б) утверждение о равенстве нулю функций Вайтмана локальных заряженных полей (равенство (2.35) и его обобщения, *локальный* конфайнмент).

### 3. КОНФАЙНМЕНТ И ГЕОМЕТРИЯ. РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

**Особенности калибровочных теорий поля.** Уже предварительный анализ разд.2 показал, что проблема естественным образом разбивается на три самостоятельные задачи.

- 1) Формальное доказательство отсутствия цветных объектов в физическом секторе теории.
- 2) Выяснение природы и характера удерживающих сил.

3) Построение теории, позволяющей провести аналитический расчет структуры адронов.

Постановка каждой из двух последних задач предполагает решение предшествующей.

Как мы видим, в рамках схемы квантования Дирака [37] решение первой задачи тривиально, ибо в физический сектор допускаются лишь калибровочно-инвариантные операторы и векторы состояний. Кварки и глюоны, представляемые *локальными* полями, обладают цветными зарядами, поэтому они исключаются из числа физических (наблюдаемых) степеней свободы. Это есть «наивный» ответ на «наивный» вопрос о том, почему мы не видим изолированных кварков.

Ответ на второй вопрос требует более серьезного исследования. Выяснение природы удерживающих сил предполагает выяснение более тонких деталей теории калибровочных полей. Согласившись, что физический смысл имеют лишь калибровочно-инвариантные объекты, мы приходим к задаче о перечислении и классификации всех калибровочных инвариантов, построенных из полей. Только на этом пути можно надеяться получить ответ на вопрос о физической природе конфайнмента. Существо дела в следующем. Можно считать установленным, что удерживающие кварки силы характеризуются линейно растущим потенциалом. Современные квантовые теории поля (в том числе и калибровочные) по природе своей причинны (локальны) — в них заложен принцип близкодействия. Это означает, что взаимодействие между физическими объектами осуществляется через посредство окружающих их полей. Вопрос: в каких формах могут проявляться (возбуждаться) эти поля? Известно, что в электродинамике покоящиеся заряды возбуждают вокруг себя статические поля, обеспечивающие их кулоново взаимодействие. «Физический электрон» (т.е. электрон вместе с окружающим его электрическим полем) описывается нелокальным калибровочно-инвариантным оператором [41]

$$\hat{\Psi}(x) = e^{-ie\Delta^{-1}\vec{\partial}\vec{A}} \hat{\psi}(x) \quad (3.1)$$

(подробнее см. разд.4). В неабелевых теориях из цветных полей также несложно построить калибровочно-инвариантные объекты. Например, это может быть «струна» ( $P$ -экспонента) с кварком и антикварком на концах. В данном случае, как нетрудно видеть, глюонное поле между кварками возбуждено лишь на контуре интегрирования  $P$ -экспоненты, а его энергия пропорциональна длине контура (разд.4). На первый взгляд, это и есть ответ на вопрос о природе удерживающих сил в хромодинамике. Дело однако в том, что, во-первых, подобные объекты можно построить и в электродинамике, во-вторых, неизвестно, какие еще

инвариантные конфигурации полей существуют, т.е. подобные рассуждения недостаточны. Задача заключается в выяснении структуры окружающих заряды полей, т.е. в вопросе о том, распределены ли они по всему пространству или сосредоточены на линии (в трубке), ибо в первом случае следует ожидать убывающего с расстоянием потенциала. Итак, в неабелевых теориях нужно знать ответ на вопрос: допустимы ли (в классике) цветные заряды с калибровочными полями, заполняющими все пространство?

Что касается третьей задачи, то она чрезвычайно сложна. Речь может идти лишь о создании работоспособной схемы приближенных вычислений.

**Роль связей первого рода.** Между экспертами существует молчаливое согласие, что конфайнмент имеет место только в калибровочных теориях. Почему? Чем отличаются калибровочные теории от некалибровочных? Ответ почти очевиден: они отличаются наличием в них связей первого рода [37]. Эта деталь, на первый взгляд тривиальная, есть наиболее существенная особенность калибровочных теорий; именно она выделяет их среди остальных (некалибровочных) теорий и в значительной степени обесценивает единственный хорошо разработанный метод расчета — метод теории возмущений. В отличие от уравнений движения связи не содержат производных по времени; они есть условия на канонические переменные в данный момент времени, т.е. на мгновенные конфигурации полей. Иначе говоря, условия связи отбирают физические состояния полей. Они абсолютны: связи не могут быть нарушены, ибо их нарушение означало бы нарушение калибровочной инвариантности, т.е. отказ от исходного (калибровочно-инвариантного) лагранжиана.

Итак, в калибровочных теориях желательно сперва выявить физические конфигурации полей (разрешить связи), а затем описывать их эволюцию во времени. Было бы, однако, опрометчиво понимать рекомендацию «разрешать связи» буквально. Это трудно сделать в классике и чревато недоразумениями в квантовой теории (связи первого рода нельзя понимать как операторные равенства, см. [37]). К счастью, имеется окольный путь. Вспомним, что связи первого рода есть генераторы калибровочных преобразований<sup>x</sup>, поэтому они должны исчезать на физических векторах состояний и коммутировать с физическими операторами, т.е. физические операторы и состояния должны обладать свойством калибровочной инвариантности. Использование лишь калибровоч-

---

<sup>x</sup>Имеется в виду расширенная по Дираку [37] группа калибровочных преобразований, генерируемая всеми связями первого рода.



но-инвариантных состояний полей и означает, по существу, учет (разрешение) связей.

К чему же ведет учет связей в калибровочных теориях? Обратимся опять к электродинамике. Как отмечалось, физический электрон представляется оператором (3.1), описывающим заряженные объекты вместе с их статическими полями (кулонову полю отвечает экспонента перед  $\hat{\psi}$  [41]). Применение теории возмущений затушевывает это важное обстоятельство: в нулевом приближении  $\hat{\Psi} = \hat{\psi}$ , причем  $\hat{\psi}$  меняется при калибровочных преобразованиях. Именно эти поля фигурируют в приближенных вычислениях и именно благодаря их неинвариантности возникает иллюзия, что калибровочные теории по существу не отличаются от некалибровочных, поскольку и в тех, и в других работают с локальными полями.

Каковы же последствия наличия у зарядов внешних статических полей? Очевидно, внешнее электрическое поле заряда обладает определенной энергией, пропорциональной электромагнитной массе частицы. Ясно также, что если подсчитать энергию электрического поля двух зарядов, то, за вычетом их собственных энергий, получится некоторая функция от расстояния между ними, а именно кулонов потенциал. Таким образом, в электродинамике статическое взаимодействие зарядов можно считать следствием ее калибровочной инвариантности. Данное обстоятельство играет центральную роль и в неабелевых теориях. Изложенное составляет идейную основу последующего анализа.

Хорошо известно, что в неабелевых теориях аналогом экспоненты в (3.1) служит  $P$ -экспонента. В случае двух зарядов различной полярности ее контур идет от данного заряда к другому — это стандартный пример калибровочно-инвариантного объекта в хромодинاميце, обычно отождествляемого с мезоном. Главное, однако, в том, чтобы выяснить, нет ли других допустимых конфигураций полей. Если они существуют, то их необходимо принять во внимание при вычислении энергии взаимодействия зарядов. Другими словами, необходимо знать *все* инвариантные конфигурации полей. Изучение проблемы убеждает, что наиболее прямой путь к цели, заметно проясняющий существо дела, связан с формулированием теории калибровочных полей как теории расслоенных пространств [30,31]. При этом векторные калибровочные поля отождествляются со связностями в главном расслоении, а заряженные поля (поля «материи») образуют ассоциированные расслоения. При такой постановке задачи отыскание калибровочных инвариантов сводится к чисто математической проблеме, обсуждающейся в учебниках по геометрии. Тем самым удается отделить динамические свойства теории от чисто кинематических (геометрических). Такой подход не нов. Аналогичным образом по-

ступают в стандартной теории поля, когда сперва изучают неприводимые представления группы Лорэнца, а затем строят лоренц-инвариантные лагранжианы и амплитуды рассеяния. И здесь постулирование лагранжиана (включение динамики) задает лишь закон, по которому эволюционируют допущенные в физический сектор объекты; их калибровочные (трансформационные) свойства остаются при этом в неприкосновенности. Переход к квантовому описанию уже не представляет труда.

**Калибровочные поля как геометрические объекты** [43]. Пусть  $P(M, G)$  есть главное расслоенное пространство [30,31], в котором база  $M$  — пространство Минковского, а слой  $G$  — простая компактная группа. Определенности ради полагаем, что  $G = SU(n)$ . Пусть, далее, поле  $\psi(x)$  ( $\equiv \psi_x$ ) есть объект представления группы  $G$  (ассоциированное расслоение), т.е.

$$\psi_{x'} = U_g(x)\psi_x, \quad \psi_{x'}^* = \psi_x^* U_g^+(x), \quad g \in G, \quad U_g^+ U_g = 1 \quad (3.2)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение). Нас интересуют билинейные в  $\psi, \psi^*$  инварианты. Построение инвариантов из полей  $\psi_x, \psi_x^*$ , взятых в одной и той же точке, не представляет труда и сводится к конструированию тривиального представления группы из нетривиальных. Важнее знать инварианты с участием полей в разных точках, например,  $\psi_x$  и  $\psi_{x'}$ , поскольку кварки могут находиться в разных точках пространства. Задача имеет смысл лишь при условии, что определена операция параллельного переноса из точки  $x$  в точку  $x'$ . По определению параллельный перенос  $\psi$  из точки  $x$  в бесконечно близкую точку  $x' = x + dx$  задается формулой

$$\tilde{\psi}_{x'} = (1 + A_\mu dx^\mu)\psi_x \equiv P_{x'x}\psi_x. \quad (3.3)$$

Связность  $A_\mu$  есть вектор со значениями из алгебры Ли группы  $G$  (в представлении, реализуемом  $\psi$ ). Билинейный инвариант некоторых одинаково преобразующихся полей  $\psi_x, \varphi_{x'}$  есть

$$\varphi_{x'}^* \tilde{\psi}_{x'}. \quad (3.4)$$

Из формул (3.2)—(3.4) находим:

1) выражение для ковариантной производной

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu \quad (3.5)$$

(как следствие (3.3):  $\psi_{x'} - \tilde{\psi}_{x'} = (\partial_\mu - A_\mu)\psi_x dx^\mu$ );

2) закон преобразования  $A'_\mu$ , вытекающий из условия инвариантности формы (3.4):

$$\varphi_{x'}^* U_g^+(x')(1 + A'_\mu dx^\mu) U_g(x) \psi_x = \varphi_x^* (1 + A_\mu dx^\mu) \psi_x, \quad (3.6)$$

$$A'_\mu = U_g(x) A_\mu(x) U_g^+(x) - U_g(x) \partial_\mu U_g^+(x). \quad (3.7)$$

Формулы (3.5), (3.7) позволяют отождествить связность  $A'_\mu$  в расслоенном пространстве с векторным калибровочным полем.

Параллельный перенос  $\psi$  из точки  $x$  в точку  $x'$  вдоль контура  $c(x', x)$  конечной длины дается согласно (3.3) формулой

$$\tilde{\psi}_{x'} = P[c(x', x)] \psi_x, \quad (3.8)$$

в которой оператор параллельного переноса

$$P[c(x', x)] = P \exp \left[ \int_{c(x', x)} A'_\mu dx^\mu \right] \equiv P_{x'x}, \quad (3.9)$$

получаемый многократным применением элементарной операции (3.3), есть не что иное, как  $P$ -экспонента. Предполагается, что упорядочивающий параметр принимает наименьшее значение в точке  $x$ . Согласно формулам (3.3), (3.6)  $P_{x'x}$  преобразуется по правилу

$$P'_{x'x} = U_g(x') P_{x'x} U_g^+(x), \quad (3.10)$$

т.е. в отличие от  $\psi_x$  оператор  $P_{x'x}$  есть *билокальный* тензор. Из сказанного ясно, что с геометрической точки зрения поля  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $P$ -экспонента (3.9) и инвариантные тензоры (подобные единичному антисимметричному тензору  $\epsilon_{\alpha\beta\dots}$ ) есть единственные объекты, из которых можно строить нелокальные инварианты. Других не существует. Простейший инвариант есть

$$\varphi_{x'}^* P_{x'x} \psi_x. \quad (3.11)$$

Именно биллокальный тензор  $P_{x'x}$  представляет ассоциированное с хроматическими зарядами внешнее поле, аналогичное кулоновскому. Подчеркнем, что, во-первых, все построение носит чисто геометрический характер (динамика отсутствует), во-вторых, выписанные формулы справедливы и тогда, когда группа  $G$  — абелева (в этом случае символ  $P$  в (3.9) можно опустить).

*Замечание.* К связности  $A_\mu$  всегда можно добавить произвольный «тензор»  $B_\mu$ , преобразующийся однородно. С помощью новой связности также можно строить нелокальные инварианты. Соответствующие  $P$ -экспоненты могут появиться при включении динамики [43].

**Инвариантные структуры в электродинамике [44].** Прежде чем переходить к динамике, изучим инварианты простейших групп. Начнем с абелевой группы. Все ее комплексные представления одномерны, поэтому векторное поле  $A_\mu$  и все заряженные поля  $\psi$  преобразуются согласно правилам

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \psi_x \rightarrow \exp(ig \Lambda_x) \psi_x. \quad (3.12)$$

Константа  $g$  фактически классифицирует представления. После введения динамики она отождествляется с постоянной взаимодействия (с электрическим зарядом поля  $\psi$ ). Принимая во внимание закон, по которому преобразуются заряженные поля, важно знать такие линейные по  $A_\mu$  объекты  $B$ , преобразование которых сводится к сдвигу  $B \rightarrow B + \Lambda$ . Зная  $B$ , легко построить искомые инварианты. Перечислим их:

$$B_1 = \int_{-\infty}^x A_\mu dx^\mu, \quad dx_\mu^2 < 0, \quad (3.13)$$

$$B_2 = \Delta_2^{-1}(\vec{\nabla}_\perp, \vec{A}_\perp), \quad \Delta_2 = (\vec{\nabla}_\perp, \vec{\nabla}_\perp) = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad (3.14)$$

$$B_3 = \Delta^{-1}(\vec{\nabla}, \vec{A}), \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \quad (3.15)$$

$$B_4 = -\square^{-1} \partial_\mu A_\mu, \quad \square = -\partial_0^2 = -\partial_0^2 + \Delta. \quad (3.16)$$

С помощью  $B_k$  конструируем инвариантные комбинации полей<sup>x</sup>:

$$\Psi_k(x) = \exp(-igB_k(x)) \psi(x) \equiv P_k(x) \psi(x), \quad k = 1, \dots, 4. \quad (3.17)$$

Все они нелокальны. В  $\Psi_1$  поле  $A_\mu$  сосредоточено на контуре интегрирования, в  $\Psi_2$  — на плоскости  $(x_1, x_2)$ , в  $\Psi_3$  — в трехмерном пространстве, а в  $\Psi_4$  — во всем четырехмерном пространстве-времени. На первый взгляд, это противоречит утверждению, что единственной фундаментальной структурой является  $P$ -экспонента. Парадокс разрешается просто: все новые структуры можно трактовать как составные, построен-

<sup>x</sup>Структуры (3.17) инвариантны относительно группы локальных калибровочных преобразований с произвольными функциями  $\Lambda_x$ , исчезающими на бесконечности ( $\Lambda_x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ ).

ные из линейных (т.е. из  $P$ -экспонент). Однако прежде чем продемонстрировать это, заметим, что поле  $\Psi_4$  представляет особый случай, поскольку оно «нелокально» и по временной координате. Его изменение со временем носит, по существу, нединамический характер, поскольку определяется оператором  $\square^{-1}$  в (3.16). Нас же интересуют лишь статические поля (связи не содержат производных по времени). Но в этом случае (3.16) сводится к (3.15). Действительно,

$$\square^{-1} \partial_\mu A_\mu = \int d^4 x' \square_{xx'}^{-1} \partial_\mu A_\mu(x') = (2\pi)^{-4} \int d^4 k k^{-2} e^{ikx} i k_\mu a_\mu(k),$$

и для статического поля  $a_\mu(k) = 2\pi \delta(k_0) \tilde{a}_\mu(k)$  конфигурация  $\Psi_4$  превращается в  $\Psi_3$ .

Обратимся к  $\Psi_2$  и  $\Psi_3$ . Покажем, что  $P_3$  в (3.17) можно построить из линейных структур  $P_1(x) = \exp(-igB_1(x))$ . Рассмотрим

$$P_3(N, x) = \prod_{i,j}^N \exp\left(-ig \int_{-\infty}^x A_\mu(y_{ij}^\mu) dy_{ij}^\mu\right). \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) есть произведение  $N$  экспонент с интегрированиями по исходящим из точки  $x$  прямым, занумерованным двумя индексами  $i, j$ . Эти индексы фиксируют «координаты» телесного угла (площадки на единичной сфере), приходящегося на каждую прямую:  $(4\pi/N)_{i,j} = \sin \theta_j \Delta \theta_j \Delta \varphi_i$ . Считая произведение  $Ng \equiv e$  фиксированным при  $N \rightarrow \infty$ , имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_3(N, x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[ \frac{ie}{4\pi} \sum_{i,j} \sin \theta_j \Delta \theta_j \Delta \varphi_i \int_0^\infty dr A_r(r, \theta_j, \varphi_i) \right] = \\ &= \exp \left[ \frac{ie}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr A_r \right] \equiv e^{ieI_3}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $A_\mu dy_{ij}^\mu \equiv A_r(r, \theta_j, \varphi_i) dr$ . Интеграл в экспоненте (3.19) перепишем в виде

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 y r^{-2} A_r = \frac{-1}{4\pi} \int d^3 y (\partial_r r^{-1}) A_r = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 y r^{-1} [r^{-2} \partial_r (r^2 A_r)] = -B_3. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Последнее равенство в (3.20) написано с учетом формулы  $-1/4\pi |\vec{x} - \vec{y}|^{-1} \equiv \Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y})$  и выражения для дивергенции в сферических координатах:

$$(\vec{\nabla}, \vec{A}) = r^{-2} \partial_r (r^2 A_r) + (r \sin \theta)^{-1} [\partial_\theta (\sin \theta A_\theta) + \partial_\varphi A_\varphi],$$

а также с учетом того, что  $A_\theta = A_\varphi = 0$ . Из (3.18), (3.20) следует, что фактор  $P_3(x)$ , представляющий кулоново поле частицы, можно рассматривать как составленный из линейных экспонент («струн»). Экспонента  $P_2(x)$  представляется аналогичным образом [44].

Итак, существование инвариантных структур (3.17),  $k = 2, 3, 4$ , в абелевой теории не противоречит утверждению предыдущего пункта, что все инварианты построены из билокальных тензоров  $P_{x'x}$  и локальных заряженных полей  $\psi$ .

*Замечание.* В работах [45, 46] изучалась гипотеза, что число  $N$  у элементарных частиц конечно, хотя и велико ( $N \sim 10^{40}$ ). Там же рассмотрены некоторые экспериментальные следствия гипотезы.

**Инвариантные структуры в теориях с калибровочными группами  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  [44].** Группа  $SU(3)$ . В случае  $G = SU(3)$  появляются следующие особенности. Во-первых, к полю  $\psi$ , реализующему фундаментальное представление, можно присоединить лишь одну струну (в этом же представлении), ибо фундаментальное представление характеризуется лишь одним индексом, принимающим три значения. Во-вторых, струны могут ветвиться. Вспомним, что в данном случае имеются инвариантные единичные, полностью антисимметричные трехиндексные тензоры

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \quad \alpha (\beta, \gamma) = 1, 2, 3, \quad (3.21)$$

фигурирующие в условиях унимодулярности матриц  $U_g(x)$ :  $\det U_g(x) = 1$ . Благодаря этому обстоятельству три струны в фундаментальном представлении могут соединяться в точке, т.е. помимо очевидных инвариантов

$$\bar{\psi}_{x'}^\beta P_\beta^\alpha [c(x', x)] \psi_{\alpha x}, \quad \text{Tr } P[c(x, x)], \quad (3.22)$$

имеются еще, например, и такие:

$$\Theta(x', x) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (P_{x'x})_{\alpha'}^{\alpha} (P'_{x'x})_{\beta}^{\beta'} (P''_{x'x})_{\gamma}^{\gamma'} \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}, \quad (3.23)$$

$$\mathfrak{B}_{x_1 x_2 x_3}(x) = \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} (P_{xx_1})_{\alpha}^{\alpha'} (P_{xx_2})_{\beta}^{\beta'} (P_{xx_3})_{\gamma}^{\gamma'} \bar{\psi}_{x_1}^{\alpha'} \bar{\psi}_{x_2}^{\beta'} \bar{\psi}_{x_3}^{\gamma'}. \quad (3.24)$$

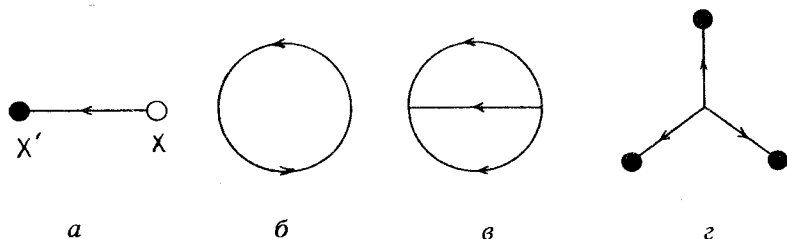


Рис. 1. Струны, отвечающие структурам (3.22) — (3.24)

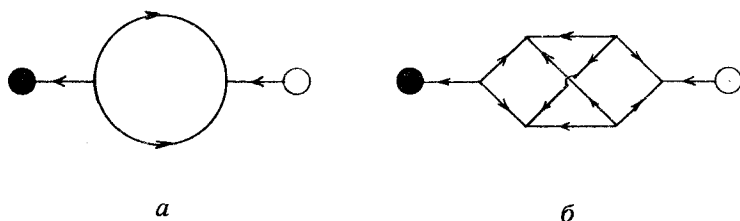


Рис. 2. Струны с нетривиальной топологией, соединяющие кварк и антикварк

$P$ -экспоненты в (3.23) различаются контурами. Из вида выражений (3.22) — (3.24) ясно, что инвариантные структуры удобно изображать графически [44], сопоставляя струнам направленные линии, например, биллокальному тензору  $(P_{x'x}^{\alpha\beta})$  — линию со стрелкой от верхнего индекса к нижнему (от  $x$  к  $x'$ ). Структуры (3.22) — (3.24) представлены графиками, изображенными на рис.1. Светлые кружки на нем сопоставляются полю, содержащему оператор уничтожения, а темные — оператор рождения кварка. Отметим, что благодаря ветвлению кварки могут соединяться струнами с нетривиальной топологией (рис.2).

Разумеется, приведенные диаграммы имеют мало общего с диаграммами Фейнмана. Первые представляют мгновенную конфигурацию струн («неприводимые решения связей»), тогда как последние сопоставляются амплитудам вероятности процессов. Специфика струн проявляется в том, что граф, построенный без учета направленности струн, может оказаться лишенным смысла. Например, невозможна диаграмма с топологией, изображенной на рис.3,а, хотя остальные две диаграммы (б и в) допустимы: стрелки могут или только входить в вершину, или только из нее выходить.

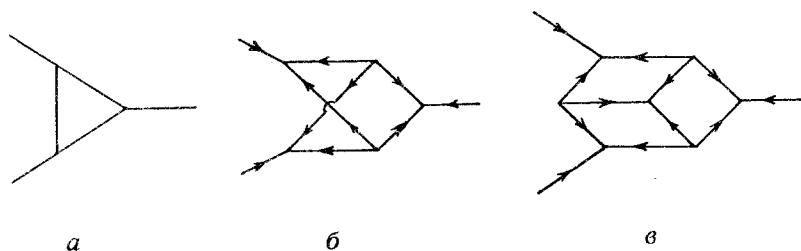


Рис. 3. Примеры структур с тремя струнами на концах. Топология *a* невозможна

*Группа  $SU(2)$ .* Случай, когда  $G = SU(2)$  резко отличается от предыдущего. В группе  $SU(2)$  представление, комплексно сопряженное фундаментальному, ему унитарно эквивалентно [47]: инвариантные антисимметричные тензоры этой группы  $\varepsilon^{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) переводят спиноры с нижним индексом в спиноры с верхним индексом и наоборот. Это радикально меняет структуру струн. Во-первых, исчезают тройные вершины, т.е. струны не могут разветвляться, во-вторых, теряют смысл стрелки на диаграммах, ибо представления с верхними и нижними индексами унитарно эквивалентны. Таким образом, неабелева калибровочная теория с группой  $SU(2)$  отличается от теорий с группами  $SU(n)$ ,  $n > 2$ , структурой (топологией) статических полей. Она скорее сродни электродинамике, в которой также отсутствует ветвление струн. Возможно, именно с этим связан тот факт, что в модели электрослабых взаимодействий перемешиваются поля именно из этих групп (т.е.  $U(1)$  и  $SU(2)$ ).

*Замечание 1.* Рассмотрены лишь простейшие инварианты калибровочных групп. Простота определяется: а) рангом структуры с точки зрения лоренцевых преобразований (например, (3.22), (3.23) — скаляры, а (3.24) — спин-тензор; нетрудно построить лоренцевы тензоры произвольного ранга), б) топологией (числом вершин в диаграммах на рис.1—3), в) числом локальных тензоров (полей материи), формирующих инвариант, т.е. числом струн, оканчивающихся на зарядах, г) приводимостью; калибровочный тензор называется неприводимым, если он есть прямое произведение других тензоров [44]. Наконец, после включения динамики инвариантные структуры целесообразно классифицировать еще и по энергии.

*Замечание 2.* В рамках теории расслоенных пространств естественным образом не возникает объектов типа монополей. Их включение в формализм требует дополнительных предположений.



*Выводы*

1. Геометрический подход подтверждает результаты предыдущего анализа (разд.2): возбуждения полей с открытым цветом запрещены.

2. Геометрический подход позволяет (в принципе) перечислить *все* допустимые конфигурации полей.

#### 4. КОНФАЙНМЕНТ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ. ВКЛЮЧЕНИЕ ДИНАМИКИ. КВАНТОВАНИЕ

**Включение динамики.** До сих пор анализ имел чисто кинематический характер — основные элементы теории (калибровочные поля) фигурировали как объекты теории расслоенных пространств. Постулирование лагранжиана наделяет найденные структуры динамикой. Если лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований из группы  $G$ , то проделанный выше анализ целиком сохраняет свое значение — струны могут меняться, перемещаться, но принципиально иных структур, сверх установленных, не появится.

Стандартный калибровочно-инвариантный лагранжиан ( $G = SU(n)$ ) имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_f \bar{\psi}_f (i\hat{D} - m_f) \psi_f. \quad (4.1)$$

В (4.1)  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$  (мы перешли к вещественным полям  $A_\mu \rightarrow igA_\mu$  и ввели константу связи  $g$ ),  $A_\mu \equiv A_\mu^a \lambda_a$ ,  $\hat{D} = D_\mu \gamma_\mu$ , причем  $\gamma_\mu$  и  $\lambda_a$  — матрицы Дирака и Гелл-Манна,  $\text{Tr} \lambda_a \lambda_b = \delta_{ab}$ ,  $a, b = 1, 2, \dots, n^2 - 1$ ;  $F_{\mu\nu} = i(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)/g$ ,  $f$  нумерует сорта спинорных полей  $\psi$ . В случае квантовой хромодинамики  $n = 3$  ( $G = SU(3)_c$ ), а  $f$  нумерует сорта кварков. Итак, в нашем распоряжении имеется закон, по которому меняются отбираемые связями нелокальные структуры, он задается лагранжианом (4.1) и вытекающими из него уравнениями движения. Для перехода к гамильтонову формализму воспользуемся стандартной процедурой [37]. Гамильтониан дается следующим выражением (в стандартных обозначениях [39]):

$$H = \int d^3y \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}_a^2 + \vec{H}_a^2) + \sum_f \bar{\psi}_f (\gamma_0 \vec{\gamma} \vec{D} + \gamma_0 m_f) \psi_f \right]. \quad (4.2)$$

Классические скобки Пуассона определены обычным образом [37].

*Замечание.* Результаты анализа разд.3 могут быть получены и без обращения к геометрии. Пусть задан лагранжиан (4.1). Он инвариантен относительно преобразований (3.2), (3.7) (с учетом замены  $A_\mu \rightarrow igA_\mu$ ). Умножая обе части (3.7) на  $-1$  и добавляя к ним оператор  $\partial_\mu$ , находим, что  $D_\mu$  (3.5) преобразуется однородно:  $D'_\mu = UD_\mu U^+$  (здесь  $\partial_\mu$  действует на  $U^+$  как оператор,  $\partial_\mu U^+ = (\partial_\mu U^+) + U^+ \partial_\mu$ ). Далее, умножая (3.7) на  $dx^\mu$  и добавляя к обеим частям единицу, получаем закон преобразования  $P_{x'x}: P'_{x'x} = U(x') P_{x'x} U^+(x)$ . Только эти факты и используются в разд.3.

**Квантование.** Переход к квантовому описанию совершается в рамках стандартной процедуры Дирака [37,41]. Нам понадобятся следующие канонические коммутационные соотношения ( $x_0 = y_0$ ):

$$[A_k^a(x), E_b^l(y)]_- = i\delta_b^a \delta_k^l \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\psi_\rho(x), \psi_\lambda^+(y)]_+ = \delta_{\rho\lambda} \delta(\vec{x} - \vec{y}); \quad (4.3)$$

здесь  $k, l = 1, 2, 3$  нумеруют векторные компоненты,  $a, b$  — компоненты присоединенного представления, а, например,  $\rho \equiv i, \alpha$  включает в себя как цветные  $i = 1, \dots, n$ , так и спинорные  $\alpha = 1, \dots, 4$  индексы. Камнем преткновения при квантовании по рецепту Дирака [41] нередко оказывается проблема выбора порядка следования операторов в гамильтониане и в связях. В рамках предлагаемого подхода эта проблема могла бы возникнуть лишь в отношении инвариантных структур. Весь предыдущий анализ в значительной степени обесценивается, если найденные в классике конструкции не сохраняются в квантовой теории. К счастью, этого не происходит. В абелевой теории в линейных экспонентах с пространственно-подобными контурами интегрирования фигурируют лишь взаимокмутирующие поля  $A_\mu$ , и нет необходимости их упорядочивать.

В теориях же с неабелевой калибровочной группой уже в классике вводится упорядочение полей (элементов алгебры Ли) вдоль пути интегрирования в  $P$ -экспоненте. Это упорядочение автоматически переносится на квантовую теорию, сохраняя свой смысл даже тогда, когда поля не коммутируют, как это имеет место в случае времениподобных контуров интегрирования. Итак, внесение динамики и последующее квантование в полном объеме сохраняют результаты геометрического анализа.

*Замечание.* Ветвление струн (в случае  $G = SU(3)$ ) — наличие структур с тройными вершинами, см. рис.1—3) обсуждалось до сих пор как абстрактная возможность. Фиксация лагранжиана вносит новый момент во все рассмотрение, ибо встает вопрос: может ли в процессе движения меняться топология струны? Может ли, например, конфигурация на

рис.1,а перейти в конфигурацию на рис.2,а? Очевидно, это произойдет лишь в том случае, если возможен переход

$$(1 + igA_{\mu} dx^{\mu})'_{\gamma} \rightarrow \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (1 - igA_{\mu} dx^{\mu})'_{\alpha} (1 - igA_{\nu} dx^{\nu})'_{\beta} \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

необходимым условием которого является наличие в лагранжиане инвариантных тензоров  $\varepsilon$  или  $d$  вершин, ибо

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha}^{\alpha'} A_{\beta}^{\beta'} A_{\gamma}^{\gamma'} \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \text{Tr} (A[A, A]_{+}) = \sqrt{2} d^{abc} A^a A^b A^c, \quad (4.4)$$

где  $A_{\mu} dx^{\mu} \rightarrow A$ ,  $\text{Tr} A = 0$ , и  $d^{abc} = 2^{-1/2} \text{Tr} (\lambda^a [\lambda^b, \lambda^c]_{+})$ ; матрицы  $\lambda$  отличаются от стандартных на  $\sqrt{2}$ , отсюда множитель  $2^{-1/2}$  в определении тензора  $d$ . Однако в лагранжиане (4.1) нет ни  $d$ -, ни  $\varepsilon$ -тензоров. Первое слагаемое в (4.1) содержит лишь инвариантный тензор  $f^{abc}$  (структурные константы). Но из тензоров  $f^{abc}$  не построить тензор  $d$  ( $\text{Tr} (F^a [F^b, F^c]_{+}) = 0$ , где  $(F^a)_{bc} = f^{abc}$  [47]). Следовательно, в чистой глюодинамике ( $\mathcal{L} = - \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 / 4$ ) «струны» в фундаментальном представлении не могут ветвиться, т.е. в этом случае сохраняется топология «струны» [44]. Не могут они и рваться, ибо по предположению не существует частиц в фундаментальном представлении, а открытая струна (открытый цвет) — это бессмыслица. Появление вершин типа (4.4) можно ожидать лишь в эффективном лагранжиане спиновой хромодинамики (подробнее см. [39,44]).

Энергия внешних полей статических зарядов. *Электродинамика.* Мы выяснили, что калибровочная инвариантность (наличие связей) влечет появление у зарядов внешних полей. Следуя Дираку [41], выясним их вид в электродинамике. Пусть  $\Phi$  — некоторое физическое состояние, собственный вектор оператора напряженности электрического поля:  $\hat{E}^j \Phi = E_{\Phi}^j \Phi$ . Рассмотрим состояние  $\hat{\Psi}^+(x) \Phi$  (см. (3.15), (3.17)); имеем

$$\begin{aligned} \hat{E}^j(x) \hat{\Psi}_3(y) \Phi &= -i \frac{\delta}{\delta A_j(x)} [\exp(-ig\Delta^{-1} \vec{\partial} \vec{A}(y)) \hat{\Psi}^+(y) \Phi] = \\ &= \left( \frac{g}{4\pi} \frac{(x-y)^j}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} + E_{\Phi}^j \right) \hat{\Psi}_3^+(y) \Phi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Видно, что добавочное электрическое поле, порожаемое оператором  $\hat{\Psi}_3^+$ , идентично кулонову. Аналогичная выкладка для состояния  $\hat{\Psi}_1^+ \Phi$  дает

$$\hat{E}^j(x) \hat{\Psi}_1(y) \Phi = (g \int_{-\infty}^0 d\sigma \frac{dz^j}{d\sigma} \delta(\vec{z}(\sigma) - \vec{x}) + E_{\Phi}^j) \hat{\Psi}_1^+(y) \Phi, \quad (4.6)$$

где  $\vec{z}(\sigma)$  задает контур интегрирования,  $\vec{z}(0) = \vec{y}$ . Из (4.6) видно, что 1) напряженность электрического поля, создаваемого  $\hat{\Phi}_1^+$ , отлична от нуля лишь на контуре интегрирования, 2) отлична от нуля лишь компонента поля, параллельная контуру, 3) на контуре поле бесконечно ( $\sim \delta^{(2)}(0)$ ; обсуждение см. ниже).

Вычислим энергию внешних полей пары разноименных статических источников (за вычетом их собственных энергий), т.е. вычислим энергию состояний

$$P_3(x) P_3^+(x') |0\rangle, \quad (4.7)$$

$$P_{x'x} |0\rangle. \quad (4.8)$$

Здесь  $|0\rangle$  — физический вакуум; в  $P_{x'x}$  интегрируется по прямой, соединяющей точки  $\vec{x}'$ ,  $\vec{x}$ . Нам потребуются коммутационные соотношения

$$[\hat{E}^j(y), P_{x'x}]_- = P_{x'x} g \int_x^{x'} dz^j \delta(\vec{z} - \vec{y}), \quad (4.9)$$

$$[\hat{E}^j(y), P_{3x}]_- = P_{3x} g \int d^3z (\nabla^j \Delta^{-1})_{xz} \delta(\vec{z} - \vec{y}). \quad (4.10)$$

Среднее от гамильтониана электромагнитного поля  $\hat{H}_0 = \int d^3y [\hat{E}^2 + \hat{H}^2]/2$  в случае кулоновских источников есть

$$\begin{aligned} \langle P_{3x} P_{3x}^+ \hat{H}_0 P_{3x} P_{3x}^+ \rangle_0 &= C_0 + \frac{g^2}{2} \int d^3z_1 d^3z_2 [(\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz_1} - (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{x'z_1}] \times \\ &\times \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) [(\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz_2} - (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{x'z_2}], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $C_0 \equiv \langle \hat{H}_0 \rangle_0$ . Второе слагаемое в (4.11) порождается членом  $\vec{E}^2/2$  в  $H_0$ . Вычитая собственные энергии источников (члены  $\int d^3z [(\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz}]^2/2$ ), находим искомую энергию их статического взаимодействия

$$V_{xx'} = -g^2 \int d^3z (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz} (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{x'z} = \frac{-g^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (4.12)$$

Для случая одномерного линейного поля (прямая струна между источниками) имеем [45, 46]:

$$\langle P_{x'x}^+ \hat{H}_0 P_{x'x} \rangle_0 = C_0 + \frac{g^2}{2} \int_x^{x'} dz_1^j \int_x^{x'} dz_2^j \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) =$$

$$= C_0 + \frac{g^2}{2} \delta^{(2)}(0) |\vec{x} - \vec{x}'|. \tag{4.13}$$

Отметим, что в данном случае отсутствуют слагаемые, которые можно было бы отождествить с собственными энергиями источников.

Итак, для состояний, порождаемых операторами типа (4.7), энергия внешнего поля за вычетом собственных энергий источников дается функцией (4.12), а в случае оператора  $P_{x'x}$  (3.9) — функцией (4.13).

Можно ли их отождествить с потенциальной энергией взаимодействия источников? Ответ связан с выяснением вопроса о том, являются ли найденные энергии внешних полей минимально возможными. Энергия (4.12) конечна и, как хорошо известно, являет собой кулонов потенциал. Энергия же (4.13) бесконечна ввиду фактора  $\delta^{(2)}(0)$  (следствие нулевой толщины «струны»), поэтому следует ожидать, что состояние электромагнитного поля источников, порождаемое экспонентой  $P_{x'x}$ , неустойчиво. Анализ показывает, что это действительно так (см. разд.5): после излучения избыточной энергии порождаемое экспонентой (3.9) поле превращается в кулоново. Неустойчивы и поля, порождаемые операторами  $P_{2x}$  (3.17).

*Неабелевы теории.* В неабелевых теориях состояния с определенным значением напряженности хромозлектрического поля  $E_a^j$  не принадлежат к физическому подпространству (поскольку

$$[\hat{E}_a^j(x), D_i^{bc} \hat{E}_c^i(y)] = -i g f^{abc} \hat{E}_c^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0,$$

т.е.  $E_a^j$  не есть калибровочный инвариант), поэтому в них нет аналога формулы (4.6). Вычислим энергию статических источников в фундаментальном представлении (массивные кварки,  $m \rightarrow \infty$ ;  $G = SU(n)$ ), т.е. вычислим среднее значение оператора (4.2) между состояниями  $|\mathbb{M}_{x'x}\rangle = \mathbb{M}_{x'x}|0\rangle$ , где

$$\mathbb{M}_{x'x} = \bar{\psi}_{x'} P_{x'x} \gamma_5 \psi_x, \tag{4.14}$$

а  $|0\rangle$  — физический вакуум; контур интегрирования в  $P_{x'x}$  есть прямая. Покажем, что энергия возбуждения глюонного поля в пределе при  $m \rightarrow \infty$  пропорциональна расстоянию между кварками. При вычислении необходимо учесть следующие обстоятельства.

1) Пусть  $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$ ,  $\bar{\psi} = \bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}$ , где  $\psi^{(+)}$  ( $\bar{\psi}^{(+)}$ ) содержит оператор уничтожения кварка (антикварка). Вообще говоря,  $\hat{\psi}^{(+)}|0\rangle \neq 0$ , но при  $m \rightarrow \infty$ , очевидно,

$$\widehat{\psi}^{(+)}|0\rangle \rightarrow 0, \quad \widehat{\bar{\psi}}^{(+)}|0\rangle \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

поскольку в этом пределе кварковые степени свободы заморожены (не возбуждаются).

2) Рассмотрим одновременные антикоммутаторы

$$S_{\rho\lambda} \equiv [\widehat{\psi}_{\rho}^{(+)}(x), \widehat{\bar{\psi}}_{\lambda}^{(-)}(y)]_{+} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} u_{\alpha}^{\sigma}(p) \bar{u}_{\beta}^{\sigma}(p) \delta_{ij} \quad (4.16)$$

и аналогичное выражение для  $\widetilde{S}_{\rho\lambda} \equiv [\widehat{\psi}_{\rho x}^{(-)}, \widehat{\bar{\psi}}_{\lambda y}^{(+)}]_{+}$ , которое получается из (4.16) заменами:  $u(p) \rightarrow v(p)$  в строке и  $p \rightarrow -p$  в экспоненте. В (4.16) использованы стандартные обозначения и нормировки,  $u^{\sigma}(p) \bar{u}^{\sigma}(p) = (\widehat{p} + m)$ ,  $v^{\sigma}(p) \bar{v}^{\sigma}(p) = \widehat{p} - m$ ,  $E_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $\rho = i, \alpha$ ,  $\lambda = j, \beta$ ;  $\sigma$  фиксирует поляризацию фермиона. Для массивных кварков имеем

$$S_{\rho\lambda} \rightarrow \frac{1}{2} (\gamma_0 + 1)_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \widetilde{S}_{\rho\lambda} \rightarrow \frac{1}{2} (\gamma_0 - 1)_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.17)$$

3) Нормировка состояний  $|\mathfrak{M}\rangle$  такова:  $\langle \mathfrak{M} | \mathfrak{M} \rangle \equiv C = 2 \text{Tr}1 [\delta^{(3)}(0)]^2$ ,  $\text{Tr} 1 = n$ . Нас интересует разность

$$V_{x'x} = [ \langle \mathfrak{M}_{x'x} | \widehat{H} | \mathfrak{M}_{x'x} \rangle - \langle \mathfrak{M}_{xx} | \widehat{H} | \mathfrak{M}_{xx} \rangle ] C^{-1}, \quad (4.18)$$

где  $H$  — гамильтониан (4.2). Вычисление аналогично соответствующей выкладке в электродинамике с той разницей, что в (4.18) явным образом входят фермионные поля, и что простая экспонента заменяется на  $P$ -экспоненту:

$$P_{x'x} = P \exp \left( ig \int_0^1 A_{\mu}^a(z(\tau)) \lambda_a(\tau) \dot{z}^{\mu}(\tau) d\tau \right). \quad (4.19)$$

Здесь  $\dot{z}^{\mu} = dz^{\mu}/d\tau$ ,  $z(0) = x$ ,  $z(1) = x'$ ; следуя Фейнману [48], мы ввели зависящие от упорядочивающего параметра матрицы  $\lambda_a$ , символ  $P$  в (4.19) задает порядок их следования. Нам понадобится коммутационное соотношение, аналогичное (4.9):

$$[\widehat{E}_a^k(y), P_{x'x} 1_{-} = gP [P_{x'x} \int_0^1 \lambda_a(\tau) \dot{z}^k(\tau) \delta(\vec{z}(\tau) - \vec{y}) d\tau]. \quad (4.20)$$

Отметим, что символ упорядочивания  $P$  относится здесь ко всем матрицам  $\lambda$  в квадратных скобках, включая матрицы оператора  $P_{x'x}$ .

Принимая во внимание коммутативность полей  $A_{\mu}^a$  при одинаковых вре-

менах, тождество  $P_{x'x} P_{x'x}^+ = 1$  и соотношения (4.15), (4.17), (4.20), находим для разности (4.18):

$$V_{x'x} = \frac{g^2}{2 \text{Tr} 1} \langle \text{Tr} \{ \int d^3y \tilde{P} [P_{x'x}^+ \int_0^1 \lambda_a(\sigma) \dot{z}^k(\sigma) \delta(\vec{z}(\sigma) - \vec{y}) d\sigma] \times \\ \times P [P_{x'x} \int_0^1 \lambda_a(\tau) \dot{z}^k(\tau) \delta(\vec{z}(\tau) - \vec{y}) d\tau] \} \rangle_0; \quad (4.21)$$

символ  $\tilde{P}$  предписывает антиупорядочивание по отношению к  $P$ , например,  $P_{x'x}^+ = \tilde{P} \exp(-ig \int A_\mu dx^\mu)$ . Искомая энергия возбуждения глюонного поля в состоянии  $|\mathfrak{M}_{x'x}\rangle$  есть

$$V_{x'x} = \frac{g^2}{2 \text{Tr} 1} \text{Tr} \lambda_a^2 \delta^{(2)}(0) |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (4.22)$$

Итак, именно оператор параллельного сдвига (3.9) представляет порождаемое зарядами внешнее поле; эта структура, в случае ее стабильности, ведет к статическому взаимодействию источников, которое описывается линейно растущим потенциалом. Такие потенциалы постулировались для объяснения 1) прямолинейности траекторий Редже, 2) спектра кваркония, 3) конфайнмента (в узком смысле, применительно к адронам; линейный конфайнмент).

*Замечания.* 1. Подчеркнем, что для кварка невозможна конструкция типа (3.18), естественная в электродинамике; к нему можно присоединить лишь одну струну в фундаментальном представлении. 2. Следует ожидать нестабильности струны в присоединенном представлении, поскольку в этом случае роль полей материи играют и векторные калибровочные поля. Но их масса равна нулю, т.е. модель аналогична хромодинамике с безмассовыми кварками, когда струнам выгодно рваться.

**Обсуждение.** Сформулируем предположения, которые фактически использовались при получении формулы (4.22): 1) статические источники (массивные кварки,  $m \rightarrow \infty$ ), 2) «статическая» струна. Особенность задачи в том, что положение струны, как и источников, фиксировано в пространстве, хотя в принципе она может менять свою конфигурацию. Можно ли это условие (фиксированность) сформулировать «параметрически», подобно условию  $m \rightarrow \infty$  для кварков? Очевидно, можно. В случае искривленной струны длиной  $l$  в (4.22) вместо  $g^2 |\vec{x} - \vec{x}'|$  стояло бы  $g^2 l$ , и при  $g^2 \rightarrow \infty$  даже малое ее отклонение от прямой было бы связано с большим увеличением энергии; следовательно, при  $g^2 \rightarrow \infty$  все собственные колебания струны будут подавлены. Именно этот случай и отвечает

результату (4.22): найдена энергия внешнего поля массивных кварков в пределе сильной связи (но без использования метода сильной связи, т.е. без использования разложения по  $1/g^2$ , см. разд.5).

А что происходит при допредельных значениях обоих параметров? Случай бесконечных фермионных масс отвечает «чистой» глюодинамике. Главным следствием включения фермионного поля будет возможность разрыва струн в фундаментальном представлении — теперь кварки могут рождаться (на концах струны обязательно должны находиться заряды). Это влечет появление нового параметра в теории — критической длины струны  $r_c$ , при которой она рвется. На расстояниях  $r > r_c$  потенциал теряет смысл.

В потенциал (4.22) входит бесконечный множитель  $\delta^{(2)}(0)$ . Упрощая существо дела, его можно или заменить на  $c/\pi r_s^2$ , где  $r_s$  — радиус струны,  $c \sim 1$ , или включить в определение натяжения струны  $\sigma$ :  $V_r = \sigma r$ ,  $r$  — расстояние между источниками. Тем самым вводится новый физический параметр  $\sigma$ . Очевидно, эти три параметра ( $r_c$ ,  $m$ ,  $\sigma$ ) связаны между собой:  $r_c \sim m/\sigma$ , т.е. только два из них независимы. Они выбираются из посторонних соображений; выбор тех или иных конкретных их значений может привести к теориям, резко отличающимся друг от друга, хотя и имеющим одну и ту же природу (лагранжианы различаются входящими в них параметрами). Отмеченное обстоятельство — первопричина многообразия форм, в которых может проявляться конфайнмент (см. разд.6).

#### *Выводы*

1. В электродинамике кулоново взаимодействие статических зарядов есть следствие локальной калибровочной инвариантности теории.

2. В неабелевых теориях энергия возбуждения векторного калибровочного поля  $V_{x'x}$ , представляемого  $P$ -экспонентой  $P_{x'x}$ , пропорциональна длине контура интегрирования. Отождествление  $V_{x'x}$  с потенциальной энергией возможно лишь в случае стабильности струны.

## 5. ЭВОЛЮЦИЯ СТРУН В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Замкнутые струны [32,33]. Итак, согласно разд.3, кварк и антикварк в разных точках пространства всегда соединены струной ( $P$ -экспонентой) с более или менее сложной топологией. Энергия глюонного поля, порождаемого оператором  $P_{x'x}$  (3.9), пропорциональна длине контура интегрирования  $c(x', x)$  (разд.4). В соответствии с общей идеологией полевых



теорий эту энергию можно было бы отождествить с потенциальной энергией взаимодействия статических источников, если бы удалось доказать устойчивость данного одномерного возбуждения. В случае неабелевых теорий проследить за эволюцией струноподобных возбуждений, задаваемых оператором  $P_{x'x}$ , — задача достаточно сложная. К счастью, имеются модели, в которых эта задача решается до конца, а именно свободная электродинамика и электродинамика массивных зарядов. В первом случае единственный калибровочно-инвариантный объект — это «замкнутая струна» (экспонента (3.9) с замкнутым контуром), во втором — экспонента (3.9) с контуром, соединяющим разноименные заряды. Анализ показывает, что в электродинамике представляемая оператором (3.9) конфигурация поля неустойчива и расплывается с течением времени, т.е. ее энергия (4.13) не может быть отождествлена с потенциальной энергией статических источников.

Выясним судьбу конкретного возбуждения электромагнитного поля, заданного оператором

$$P_c = \exp \left[ i \oint_c \hat{A}_j(\vec{y}, 0) dy^j \right] = \exp \left[ i \int d^3x \hat{A}(\vec{x}, 0) \vec{J}_c(\vec{x}) \right], \quad (5.1)$$

где

$$\vec{J}_c(\vec{x}) = \int_0^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}(\sigma)) \dot{\vec{y}}(\sigma) d\sigma = \oint_c \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y}; \quad (5.2)$$

очевидно,  $\vec{y}(0) = \vec{y}(1)$ ,  $\dot{\vec{y}} = d\vec{y}/d\sigma$  и  $\vec{\partial} \vec{J}_c(\vec{x}) = 0$  (выбрана калибровка  $A_0 = 0$ ). Гамильтониан свободной теории в физическом секторе зависит только от поперечных полей  $\vec{A}_\perp = \vec{A} - \vec{\partial} \Delta^{-1} (\vec{\partial} \vec{A})$ ,  $\vec{\partial} \vec{A}_\perp = 0$ :

$$\hat{H}_{0\perp} = \frac{1}{2} \int d^3x [\hat{E}_\perp^2 + \hat{H}^2], \quad \vec{\partial} \vec{E}_\perp = 0. \quad (5.3)$$

Легко видеть, что в контурном интеграле (5.1) возможна замена  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}_\perp$ .

В состоянии  $|c\rangle = P_c |0\rangle$ , где  $|0\rangle$  — физический вакуум ( $\vec{\partial} \vec{E} |0\rangle = 0$ ,

$\hat{H}_0 |0\rangle = E_0 |0\rangle$ ), средние значения операторов  $\hat{A}_\perp$ ,  $\vec{E}_\perp$  равны

$$\langle c | \hat{A}_\perp(\vec{x}, 0) | c \rangle = 0, \quad \langle c | \vec{E}_\perp(\vec{x}, 0) | c \rangle = \vec{J}_c(\vec{x}), \quad (5.4)$$

т.е. в состоянии  $|c\rangle$  осцилляторы поля возбуждены лишь на контуре интегрирования  $c$ ; ясно, что  $\vec{J}_c(\vec{x})$  есть смещение центра осцилляций в фазовой плоскости  $(A_\perp^i(\vec{x}, 0), \pi_\perp^i(\vec{x}, 0))$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\pi_\perp^i \equiv E_\perp^i$ . Там, где

$\vec{J}_c = 0$ , т.е. где  $\langle \hat{A}_\perp \rangle_c = \langle \hat{E}_\perp \rangle_c = 0$ , осцилляторы поля находятся в основном состоянии. За время  $t$  состояние  $|c\rangle$  превратится в  $|c, t\rangle = \exp(-i\hat{H}_0 t)|c\rangle$ , также описывающее некоторое когерентное возбуждение поля. Средние значения полей  $\hat{A}_\perp, \hat{E}_\perp$  теперь равны

$$\vec{A}_{\perp c} = \langle c, t | \hat{A}_\perp(x, 0) | c, t \rangle = \langle c | \hat{A}_\perp(x, t) | c \rangle, \quad (5.5)$$

$$\vec{E}_{\perp c} = \langle c, t | \hat{E}_\perp(x, 0) | c, t \rangle = \langle c | \hat{E}_\perp(x, t) | c \rangle. \quad (5.6)$$

Они удовлетворяют волновому уравнению Даламбера;  $\vec{E} = \dot{\vec{A}}$ , поэтому с учетом начальных условий (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\perp c}(\vec{x}, t) &= \int d^3y D(\vec{x} - \vec{y}, t) \vec{J}_c(\vec{y}), \\ \vec{E}_{\perp c}(\vec{x}, t) &= \partial_t \int d^3y D(\vec{x} - \vec{y}, t) \vec{J}_c(\vec{y}), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где  $D(\vec{x}, t)$  есть коммутатор свободного скалярного поля  $\hat{\varphi}$  нулевой массы:

$$D(x) = i[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(0)]_- = \frac{\varepsilon(x_0)}{2\pi} \delta(x^2). \quad (5.8)$$

Из (5.7), (5.8) следует, что по истечении времени  $t$  средние значения операторов  $\hat{A}_\perp, \hat{E}_\perp$  отличны от нуля в той 3-мерной области пространства, до которой дошла волна. Через достаточно большой интервал времени осцилляторы поля на контуре  $c$  (и в любой конечной области) возвращаются в основное состояние. Это означает, что порождаемое  $P_c$  состояние есть чистое излучение — запасенная в нем энергия переносится на бесконечность. Следовательно, одномерные струноподобные возбуждения полей в КЭД, представляемые оператором  $P_c$  (5.1), нестабильны: с течением времени они расплываются.

Струны с массивными зарядами на концах [32,33]. Рассмотрим электромагнитное поле, взаимодействующее с двумя статическими источниками. Действие системы задается функционалом

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - A_0 J_0 \right], \quad J_0(\vec{x}) = g[\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)], \quad (5.9)$$

инвариантным относительно калибровочных преобразований  $\delta A_\mu = \partial_\mu \omega$  с произвольными функциями  $\omega(x)$ , такими, что  $[\omega(\vec{x}, t) - \omega(\vec{x}, -t)] \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Электрические заряды  $\pm g$  расположены в точках  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ . Связи имеют вид

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad \vec{\partial} \vec{E} - J_0(\vec{x}) = 0, \quad (5.10)$$

а гамильтониан системы  $H_0 = \int d^3x [\vec{E}^2 + \vec{H}^2]/2$ . В квантовой теории связи первого рода (5.10) аннулируют физические векторы состояний  $\Phi$ :

$$\hat{\pi}^0 \Phi = 0, \quad (\vec{\partial} \hat{\vec{E}} - J_0) \Phi = 0. \quad (5.11)$$

С учетом (5.11) гамильтониан в физическом подпространстве задается суммой

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{0\perp} - \frac{1}{2} \int d^3x J_0(\vec{x}) \Delta^{-1} J_0(\vec{x}) = \hat{H}_{0\perp} + E_{\text{кул}}, \quad (5.12)$$

где  $\hat{H}_{0\perp}$  есть (5.3), а кулонова энергия  $E_{\text{кул}}$  включает собственные энергии источников. Нам потребуется явный вид функционала основного состояния системы

$$\Phi_0[\vec{A}] = \exp[-i \int d^3x d^3y J_0(\vec{x}) \Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\partial} \vec{A}(\vec{y})] \varphi_0[\vec{A}]; \quad (5.13)$$

здесь  $\varphi_0[\vec{A}] = \varphi_0[\vec{A}_\perp] = \langle \vec{A}_\perp | 0 \rangle$  — функционал основного состояния свободной теории,  $\vec{\partial} \hat{\vec{E}} \varphi_0 = 0$ . Экспонента в (5.13) обеспечивает выполнение закона Гаусса (5.11).

Проследим за эволюцией состояния

$$\Phi_{x_2 x_1}[\vec{A}] = P_{x_2 x_1} \varphi_0[\vec{A}], \quad (5.14)$$

где в операторе

$$P_{x_2 x_1} = \exp\left[ig \int_{x_1}^{x_2} \hat{A}_j(\vec{x}, 0) dx^j\right] \quad (5.15)$$

интеграл берется по прямой, соединяющей точки  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ . Электромагнитное поле в (5.14) возбуждено лишь на контуре интегрирования. Задача решается с помощью тождества

$$\vec{A} = \vec{A}_\perp + \vec{\partial} \Delta^{-1}(\vec{\partial} \vec{A}), \quad (5.16)$$

подстановка которого в (5.15) позволяет записать функционал (5.14) в виде

$$\Phi_{x_2 x_1}[\vec{A}] = \exp\left[ig \int_{x_1}^{x_2} A_{\perp j} dx^j\right] \Phi[\vec{A}]; \quad (5.17)$$

мы воспользовались формулой

$$g \int_{x_1}^{x_2} \partial_j (\Delta^{-1} \vec{\partial} \vec{A}) dx^j = - \int d^3x J_0(\vec{x}) \Delta^{-1} \vec{\partial} \vec{A}(\vec{x}). \quad (5.18)$$

Заметим, что экспонента в (5.17), зависящая лишь от поперечного поля  $\vec{A}_\perp$ , согласно сказанному в начале раздела описывает чистое излучение. Это есть пучок замкнутых силовых линий, все они проходят через контур интегрирования и далее расходятся. Из-за слагаемого  $\vec{\partial}\Delta^{-1}(\vec{\partial}\vec{A})$  в  $\vec{A}_\perp$  (см. (5.16)) концы контура играют роль кулоновых центров. Так как  $\Phi_0$  есть основное состояние системы, а гамильтониан  $\hat{H}_0$  (5.12) в физическом секторе отличается от гамильтониана  $\hat{H}_{0\perp}$  лишь на постоянную, задача, по существу, свелась к задаче с замкнутыми «струнами» из предыдущего пункта: энергия возбуждения поля, отвечающего экспоненте в (5.17), излучается на бесконечность. Состояние  $\Phi_0$  при этом не меняется. Следовательно, возбужденное состояние электромагнитного поля, порождаемое оператором  $P_{x_2x_1}$  в (5.14) («струна с зарядами на концах»), после излучения избыточной энергии превращается в кулоново поле двух статических источников.

*Замечание.* Поскольку контурная экспонента (5.1) есть калибровочно-инвариантный объект, время от времени предпринимаются попытки переформулировать теорию в терминах новых нелокальных переменных  $P_c$ . В свете полученных результатов (неустойчивость «струн») шансы на успех подобных попыток выглядят довольно проблематично.

О методе сильной связи. Изучение модели (5.9) показало, что в электродинамике массивных зарядов линейный конфайнмент невозможен. Это утверждение справедливо независимо от величины зарядов. Между тем можно услышать мнение, что в электродинамике в пределе сильной связи выполняется «закон площадей», знаменующий наличие линейно растущего потенциала. Обычно ссылаются на работу Вильсона [21], в которой данный результат получен в рамках решеточного подхода. При его оценке, однако, необходимо принимать во внимание следующие обстоятельства. Во-первых, в непрерывном пределе метод сильной связи в том виде, в каком он формулируется на решетке, не годится для решения проблемы статических сил. Во-вторых, решеточная формулировка радикально меняет калибровочную теорию (дискретизация пространства, компактность области изменения полей и т.п. [21]); наконец, в решеточной теории могут существовать эффекты, исчезающие в непрерывном пределе.

Действительно, в гамильтоновой формулировке (время непрерывно) оператор энергии на решетке [22, 49] записывается в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, i} \hat{E}_{x,i}^2 + \frac{1}{2g^2} \sum_{\vec{x}, i, j} (1 - \cos g' \hat{F}_{ij}); \quad (5.19)$$

здесь  $g'$  — некоторая постоянная, в непрерывном пределе совпадающая с  $g$ . Второе слагаемое в (5.19) играет роль потенциальной энергии. Оно обеспечивает взаимодействие осцилляторов поля в соседних точках, поскольку содержит пространственные производные полей. Ясно, что в пределе  $g \rightarrow \infty$  связь между соседними осцилляторами выключается и локальные возмущения поля замораживаются — распространение сигнала становится невозможным. В этом пределе когерентное возбуждение электромагнитного поля на контуре интегрирования («струна» (5.15)) становится стабильным. Данный факт не специфичен для калибровочной теории и может быть проиллюстрирован на примере скалярного безмассового поля  $\varphi$ . Аналогом (5.19) в непрерывном пределе служит гамильтониан

$$H_g = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \pi^2 + \frac{1}{g^2} (\vec{\partial}\varphi)^2 \right]. \tag{5.20}$$

В нулевом приближении  $H_\infty = \int d^3x \pi^2/2$ , а вакуумный функционал  $\Phi_0^{(\infty)}$  определяется условием  $\hat{\pi}\Phi_0^{(\infty)} = -i\delta\Phi_0^{(\infty)}/\delta\varphi = 0$ , т.е.  $\Phi_0^{(\infty)} = \text{const}$ . Любой вектор, описывающий когерентное возбуждение поля  $\varphi$

$$|J\rangle_\infty = \exp \left[ i \int d^3x \hat{\varphi} J \right] |0\rangle_\infty, \tag{5.21}$$

теперь стационарен — он является собственным вектором оператора  $\hat{H}_\infty$ :

$$\hat{H}_\infty |J\rangle_\infty = \frac{1}{2} \int d^3x J^2(\vec{x}) |J\rangle_\infty, \tag{5.22}$$

т.е. локальное возбуждение не расплывается. Это утверждение остается верным в любом конечном порядке разложения по степеням  $1/g^2$ . Между прочим, и здесь проявляется коренное различие между решеточной и стандартной теориями поля. В первой, ввиду конечности постоянной решетки, взяв достаточное число членов в разложении по  $1/g^2$ , можно описать корреляцию полей в сколь угодно далеких точках. На это, впрочем, обратил внимание еще Вильсон («...разложение по степеням  $1/g^2$  не очень полезно в пределе...», когда охватываемая контуром минимальная площадь стремится к бесконечности [21, p.2455]). Остается добавить, что в [21] рассматривалась евклидова теория с «лагранжианом»  $\sim F_{\mu\nu}^2/g^2$ , в которой при  $g \rightarrow \infty$  вообще исчезает всякая связь между полями в разных точках пространства-времени. Другими словами, в нулевом приближении, долженствующем по предположению учитывать главные физические эффекты, динамика вообще отсутствует. Но она появляется уже в низших порядках теории возмущений — специфика решеточного подхода.

*Выводы*

1. В электродинамике контурные экспоненты не могут играть роль фундаментальных степеней свободы.
2. В стандартной электродинамике массивных зарядов линейно растущий потенциал невозможен даже в пределе сильной связи.

## 6. «ЛИКИ» КОНФАЙНМЕНТА

«Кинематика» феномена. Перечислим формы, в которых может проявляться конфайнмент. При расширительном толковании термина, принятом здесь, конфайнмент понимается как запрет на состояния с определенными квантовыми числами; вопрос о статических силах между зарядами остается открытым. В узком смысле конфайнмент понимается как наличие в физическом секторе линейно растущего потенциала между массивными зарядами (линейный конфайнмент). Априори нельзя исключить и нелинейного роста потенциала  $\sim r^\alpha$ ,  $\alpha = 1 \pm \varepsilon \approx 1$ .

Итак, если отвлечься от вопроса о динамике (т.е. о статических силах), можно выделить следующие случаи.

1) *Глобальный конфайнмент.* Как показано в разд.2, в любой калибровочной теории физический сектор определяется условием равенства нулю полных зарядов (равенства (2.26), (2.30), см. также [23]). Физическому подпространству принадлежат лишь нейтральные (бесцветные) состояния.

2) *Локальный конфайнмент.* Функции Вайтмана локальных полей, нетривиально преобразующихся при калибровочных преобразованиях, равны нулю (равенство (2.35) и его обобщения). Локальные возбуждения цветных полей запрещены. Локально могут возбуждаться лишь их бесцветные комбинации типа  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  и т.п.

В обоих случаях потенциальная энергия может как расти с увеличением расстояния между статическими зарядами, так и убывать.

3) *Конфайнмент с точки зрения теории расслоенных пространств.* Особое место занимают результаты чисто геометрического анализа инвариантных структур. Если приведенные выше случаи 1, 2 содержат суждения о динамических системах с определенным, но не конкретизированным лагранжианом, то здесь всякая динамика вообще отсутствует. Анализ тем не менее оказывается полезным, так как позволяет выявить допустимые конфигурации полей. По существу, это также есть форма проявления запрета на состояния полей. Важность геометрического подхода в том, что теперь задача о перечислении нелокальных калибровочно-инвариантных конфигураций полей превращается в хорошо определенную чисто математическую задачу.

**Динамические проявления конфайнмента.** Включение динамики заметно разнообразит формы проявления конфайнмента. Новые возможности, связанные с особенностями статического взаимодействия зарядов, удобно классифицировать по упомянутым в разд.4 параметрам  $r_c$  (критическая длина, при которой струна рвется) и  $\sigma$  (натяжение струны). Особое место занимает случай, когда потенциальное взаимодействие зарядов не связано с одномерными возбуждениями полей.

1) *Слабый конфайнмент.* Случай, когда потенциал не растет с увеличением расстояния. Хорошо известным примером служит электродинамика. Полный электрический заряд Вселенной равен нулю, но заряды могут удалиться друг от друга на сколь угодно большое расстояние. Тем не менее это типичный конфайнмент, только «тюрьма» здесь — вся Вселенная.

2) *Сильный или линейный конфайнмент* ( $r_c = \infty$ ). Это классический конфайнмент, когда статическое взаимодействие массивных частиц описывается линейно растущим потенциалом, т.е. когда противоположно заряженные (цветные) частицы соединены струной, которая не может разорваться.

3) *Конфайнмент в физике адронов* ( $0 < r_c < \infty$ ). В реальном мире сильных взаимодействий струны рвутся по достижении некоторой длины  $r_c$ ; при этом рождается  $q\bar{q}$ -пара. С величиной  $r_c$  связан вопрос о наблюдаемости или ненаблюдаемости кварков (вопрос о том, «почему мы не видим физических кварков»). Чтобы быть зарегистрированной современными приборами, заряженная частица должна пройти расстояние порядка атомных размеров  $r_A$ . Если  $r_c < r_A$ , то отдельный кварк не может быть обнаружен с помощью камеры Вильсона (или иного аналогичного прибора). Такая возможность появляется лишь при  $r_c > r_A$ . Но и в том, и в другом случае имеет место конфайнмент! Следовательно, упомянутый вопрос о «невыветании» кварков возникает только при использовании определенных средств наблюдения. Уже опыты по глубоконеупругому рассеянию лептонов на адронах (т.е. применение «лептонного» микроскопа) позволили не только зарегистрировать кварки, но и установить их квантовые числа (спин, изоспин, электрический заряд). Таким образом, пленение кварков не превращает их в ненаблюдаемые объекты — они остаются полноправными частицами<sup>\*</sup>, хотя и существующими в своеобразных условиях, вследствие чего для их изучения требуются специальные приборы.

<sup>\*</sup> Впрочем, это, пожалуй, немножко сильно сказано; некоторое «поражение в правах» все же имеет место — они не могут разлететься.

4) *Экранирование (обесцвечивание,  $r_c = 0$ )*. Если  $r_c \rightarrow 0$ , то поля в форме струн не проявляются. Струна конечной длины коллапсирует, распадается на фрагменты нулевой длины (явление аналогично экранированию электрического заряда в проводнике; разрыв струны означает рождение пары). Феномен хорошо изучен в модели Швингера [24], где безмассовые фермионы могут рождаться в неограниченном количестве [25,26]. Надо полагать, что ввиду безмассовости глюонов струны в присоединенном представлении будут вести себя аналогичным образом.

Типы конфайнмента можно различать и по величине натяжения струны  $\sigma$ .

5) *Мягкий конфайнмент ( $\sigma r_A^2 \ll 1$ )*. Пусть размер адрона характеризуется параметром  $r_h$ . Число  $r_c/r_h$  позволяет выделить два предельных случая. При  $r_c \gg r_h$ , в особенности если  $r_c \gg r_A$ , частицы, будучи плененными, могут удалиться друг от друга на макроскопическое расстояние. Разумеется, такие частицы, если они обладают электрическими зарядами, могут быть зарегистрированы обычными приборами (камерой Вильсона) — даже линейный конфайнмент здесь не помеха. Подобная ситуация возможна при достаточно малых натяжениях струн («либеральный режим заключения»).

6) *Жесткий конфайнмент ( $\sigma r_h^2 \sim 1$ )*. Если  $r_A > r_c \geq r_h$ , плененные частицы по отдельности не наблюдаются. Ситуация имеет место при больших натяжениях струн ( $\sigma r_h^2 \sim 1$ ). Именно такой жесткий конфайнмент имеет место в физике адронов.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дискутируемые в литературе механизмы удержания кварков на базе КХД можно условно разбить на две группы. К первой относятся работы, в которых конфайнмент стараются получить из «первых принципов» (из лагранжиана), не привлекая дополнительных гипотез. В работах второй группы делаются предположения о существовании новых частиц (монополей) и специальной структуры вакуума. Сразу же оговоримся, что в нашу задачу не входит обсуждение весьма полезных полуфеноменологических моделей (таких, как модель мешков МТИ [15]). Особое место занимают численные расчеты на компьютерах в рамках решеточной формулировки КХД [22].

Работы первой группы используют единственный регулярный метод выхода за рамки теории возмущений — квазиклассику [50,51]. Именно



на этом пути первоначально надеялись описать феномен удержания кварков, исходя из лагранжиана КХД [20].

Работы второй группы базируются на теории сверхпроводников второго рода [52]. Здесь физики имеют достаточно хорошо изученный пример механизма, обеспечивающего линейный конфайнмент магнитных монополей: их магнитные силовые линии заключены в трубку. Замена электрических зарядов на магнитные и наоборот приводит к модели, в которой в трубку заключены электрические силовые линии, а монополи образуют вакуумный конденсат, т.е. в заточении оказываются электрические заряды (дуальный эффект Мейснера [16,17]). Применение этой идеи в КХД немедленно дает сильный конфайнмент кварков. Логически построение безупречно. Приходится лишь предполагать, помимо лагранжиана КХД, а) существование хроматических монополей, б) наличие их конденсата в вакууме, т.е. привлекать дополнительные гипотезы. В работах второй группы принципиальную роль играет основное состояние системы. Поскольку предлагаемый в них механизм появления линейного потенциала тождествен (с точностью до дуального преобразования) механизму появления магнитных нитей в сверхпроводниках второго рода, в системе должна существовать фаза деконфайнмента. При достаточно высокой температуре трубки с хроматическими силовыми линиями не могут не разрушаться. В принципе, это должно вести к рождению хромомангнитных монополей, чего, по видимому, на опыте не наблюдалось. Отметим, что фазовый переход существует и в теориях, не прибегающих к специальным гипотезам о структуре вакуума. Поскольку речь идет о возбужденных состояниях системы в ограниченном объеме ( $V \sim r_h^3$ ), при достаточно высокой температуре ( $T \sim r_h^{-1}$ ) будут размораживаться собственные степени свободы струн, т.е. должен иметь место фазовый переход первого рода.

Приведенные соображения относятся и к решеточным формулировкам теории. Здесь обращает на себя внимание естественность, с которой включаются в формализм монополи [22], — следствие компактности области определения калибровочных полей. Разумеется, в этом случае получение удерживающего потенциала также не представляет труда. Вместе с тем следует подчеркнуть, что решеточные теории радикально отличаются от непрерывных — меняются области изменения физических степеней свободы, динамика, пространство (физические процессы разыгрываются на решетке). Более того, переход к непрерывному пределу, вообще говоря, неоднозначен, поэтому в дискретных теориях могут существовать эффекты, отсутствующие в континуальном пределе.

Выше мы видели, что в калибровочных теориях нет необходимости прибегать к специальным ухищрениям для получения линейных (одномерных) объектов — они изначально там присутствуют ( $P$ -экспоненты). Эти структуры имеют глубокий геометрический смысл. Интерпретация векторных калибровочных полей как связностей в главном расслоенном пространстве позволяет отождествить  $P$ -экспоненту с оператором параллельного переноса вдоль контура интегрирования. Включение динамики (постулирование лагранжиана) заметно усложняет рисуемую картину. В абелевой теории представляемые линейными экспонентами струноподобные возбуждения оказываются неустойчивыми и расплываются (разд.5).

Данный факт высвечивает еще одну особенность решеточных теорий. Разные там методы приближенных вычислений могут привести к эффектам, отсутствующим в непрерывной теории. Речь идет об электродинамике массивных зарядов в пределе сильной связи: решеточные расчеты дают закон площадей [21], тогда как точный расчет показывает отсутствие в этой модели конфайнмента [32,33].

Подведем некоторые итоги.

1. В широком смысле конфайнмент имеет место в любой калибровочной теории (разд.2). Конфайнмент кварков есть частный случай данного класса явлений.

2. Удерживающие кварки силы обеспечиваются статическими полями, окружающими цветные заряды (в электродинамике это кулоново поле). Поля обязаны своим появлением вторичным связям первого рода (по закону Гаусса).

3. В моделях, в которых решающую роль играет вакуум (гипотеза о конденсате монополей) существует фаза деконфайнмента. В рамках КХД появление открытого цвета запрещено калибровочной инвариантностью. Тем не менее фазовый переход возможен. Он связан с размораживанием струнных степеней свободы; критическая температура определяется энергией первого возбужденного состояния струны.

4. Струноподобные возбуждения в квантовой электродинамике массивных зарядов, представляемые линейными экспонентами, неустойчивы.

5. Решеточная версия метода сильной связи не годится для решения вопроса о конфайнменте. Можно лишь с большой осторожностью переносить результаты решеточных вычислений на непрерывную теорию.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gell-Mann M. — California Institute of Technology. Synchrotron Laboratory Report CTSL-20, 1961.
2. Ne'eman Y. — Nucl. Phys., 1961, vol.26, p.222.
3. Salam A. — Theoretical Physics, IAEA. Vienna, 1963, p.173.

4. Gell-Mann M. — *Phys. Lett.*, 1964, vol.8, p.214.
5. Zweig G. — CERN Preprints TH-401, 402, Geneva, 1964.
6. Клоуз Ф. — *Кварки и партоны*. М.: Мир, 1982.
7. Боголюбов Н.Н., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н. — Препринт ОИЯИ, Д-1968, Дубна, 1965.
8. Han M.Y., Nambu Y. — *Phys. Rev.*, 1965, vol.139B, p.1006.
9. Miyamoto Y. — *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, 1965, Extra No.187.
10. Feynman R.P. — *Phys. Rev. Lett.*, 1969, vol.23, p.1415.
11. Bjorken J.D., Paschos E.A. — *Phys. Rev.*, 1969, vol.185, p.1975.
12. Weinberg S. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, vol.31, p.494.
13. Pati J., Salam A. — *Phys. Rev.*, 1973, vol.D8, p.1240.
14. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. — *Phys. Lett.*, 1973, vol.B47, p.365.
15. Chodos A., Jaffe R.L., Johnson K., Thorn C.B. et al. — *Phys. Rev.*, 1974, vol.D9, p.3471; vol.D10, p.2599.
16. 't Hooft G. — *High Energy Physics* (Ed. Zichichi A.), Editrice Compositori, Bologna, 1976.
17. Mandelstam S. — *Phys. Rep.*, 1976, vol.23C, p.245.
18. Amati D., Testa M. — *Phys. Lett.*, 1974, vol.48B, p.227.
19. 't Hooft G. — *Nucl. Phys.*, 1978, vol.B138, p.1.
20. Polyakov A.M. — *Nucl. Phys.*, 1977, vol.B120, p.429.
21. Wilson K. — *Phys. Rev.*, 1974, vol.D10, p.2445.
22. Кройц М. — *Кварки, глюоны и решетки*. М.: Мир, 1987.
23. Kugo T., Ojima I. — *Suppl. Progr. Theor. Phys.*, 1979, No.66, p.1.
24. Schwinger J. — *Phys. Rev.*, 1962, vol.128, p.2425.
25. Casher A., Kogut J., Susskind L. — *Phys. Rev.*, 1974, vol.D10, p.732.
26. Danilov G.S., Dyatlov I.T., Petrov V.Yu. — *Nucl. Phys.*, 1980, vol.174B, p.68.
27. Волошин М.Б., Тер-Маргиросян К.А. — *Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц*. М.: Энергоатомиздат, 1984.
28. Wick G.C., Wightman A.S., Wigner E. — *Phys. Rev.*, 1952, vol.88, p.101.
29. Prokhorov L.V. — *Lett. Math. Phys.*, 1990, vol.19, p.245.
30. Daniel M., Viallet C.M. — *Rev. Mod. Phys.*, 1980, vol.52, p.175.
31. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. — *Современная геометрия. Методы и приложения*. М.: Наука, 1986.
32. Fursaev D.V., Prokhorov L.V., Shabanov S.V. — *Mod. Phys. Lett. A*, 1992, vol.7, p.3441.
33. Prokhorov L.V., Fursaev D.V., Shabanov S.V. — *ICTP Preprint IC/92/116*, Trieste, 1992; Прохоров Л.В., Фурсаев Д.В. Шабанов С.В. — *ТМФ*, 1993, т.97, с. 373.
34. Jackiw R. — *Rev. Mod. Phys.*, 1980, vol.25, p.661.
35. Прохоров Л.В. — *ЯФ*, 1982, т.35, с.229.
36. Прохоров Л.В., Шабанов С.В. — *УФН*, 1991, т.161, с.13.
37. Дирак П.А.М. — *Лекции по квантовой механике*. М.: Мир, 1968.
38. Прохоров Л.В. — *Проблемы физики высоких энергий и теории поля*. Тр. XIII семинара, Протвино, июль 9—13, 1990. М.: Наука, 1991, с.156.
39. Prokhorov L.V., Shabanov S.V. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1992, vol.7, p.7815.
40. Стритер Р., Вайтман А.С. — *PCT, спин, статистика и все такое*. М.: Наука, 1966.
41. Дирак П.А.М. — *Принципы квантовой механики*. М.: Физматгиз, 1960, § 80.
42. Желобенко Д.П. — *Компактные группы Ли и их представления*. М.: Наука, 1970.
43. Прохоров Л.В. — *Вестн. СПбУ*, 1992, № 4, с.3.
44. Прохоров Л.В. — *Вестн. ЛГУ*, 1990, № 18, с.3.
45. Прохоров Л.В. — *Проблемы физики высоких энергий и теории поля*. Тр. X семинара, Протвино, июль 6—12, 1987. М.: Наука, 1988, с.131.
46. Prokhorov L.V. — *Carleton Univ. Preprint OCIP-89-04*, Ottawa, 1989.
47. Carruthers P. — *Introduction to Unitary Symmetry*, New York, 1966.
48. Feynman R.P. — *Phys. Rev.*, 1951, vol.84, p.108.

49. Kogut J., Susskind L. — Phys. Rev., 1974, vol.D9, p.3501.
50. Polyakov A.M. — Phys. Lett., 1975, vol.59B, p.82.
51. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S. — Phys. Lett., 1975, vol.59B, p.85.
52. Шмидт В.В. — Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982.