

# НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА $(\varphi^4)_d$ -ТЕОРИИ ПОЛЯ

*Г.В.Ефимов, С.Н.Неделько*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор непertурбативных методов исследования структуры вакуума квантово-полевых моделей (вариационный подход, конструктивная квантовая теория поля, метод канонических преобразований и др.). Обсуждается проблема унитарно неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений. Наиболее подробно рассмотрен метод исследования фазовой структуры суперперенормируемых теорий самодействующего скалярного поля при произвольных константе связи и температуре, основанный на канонических преобразованиях и формализме ренормгруппы. В этом подходе с помощью канонических преобразований вводится набор пробных вакуумных векторов (неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений). Лидирующие динамические вклады, формирующие основное состояние системы, учитываются посредством ренормгрупповых уравнений. Критерии отбора основного состояния базируются на сравнении плотностей свободной энергии и эффективных констант связи, характеризующих каждое представление. Механизмы перестройки основного состояния, исследованные в работе, могут найти применение при анализе реалистических квантово-полевых теорий.

The nonperturbative methods for investigation of the phase structure of quantum field models (variational approach, constructive quantum field theory, the canonical transformation method and so on) are reviewed. The problem of the unitary nonequivalent representations of the canonical commutation relations is discussed. An application of the method, based on the canonical transformations and renormalization group, to the self-interacting scalar field model at arbitrary coupling constant and temperature is considered in details. The trial vacuum vectors (nonequivalent representations of the canonical commutation relations) are introduced by means of the canonical transformations. The leading dynamical terms forming the ground state of the system are taken into account with the renormalization group equations. The methods considered in the paper can be applied to the realistic quantum field models.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Около двадцати лет назад Коулменом и Вайнбергом [1] было установлено, что радиационные поправки могут приводить к спонтанному нарушению симметрии (SSB) в теориях, в которых квазиклассическое (древесное) приближение не показывает такого нарушения. Приблизительно в то же время Киржниц и Линде показали [2,3], что в некоторых теориях

поля с SSB, постулируемым при нулевой температуре, с ростом температуры происходит восстановление симметрии (см. также [4—7]).

В основе этих выводов лежит идея о возникновении во всем пространстве постоянного классического скалярного поля (конденсата). Появление такого конденсата означает перестройку основного состояния системы, в результате которой поля, взаимодействующие со скалярным полем, изменяют свою массу. Меняется и характер взаимодействия полей друг с другом. Оказалось, что квантово-полевые системы обладают сложной фазовой (вакуумной) структурой, и при определенных значениях констант связи и температуры в них могут происходить фазовые переходы.

Методы, предложенные в [1, 3], базируются на петлевом разложении эффективного потенциала, а потому их применимость ограничена условием слабой связи. Дальнейший прогресс в исследовании фазовой структуры полевых систем связан с использованием непertурбативных методов. Внимание исследователей в основном сосредоточилось на теориях скалярного поля с лагранжианами:

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x) - \frac{g}{4} \varphi^4(x), \quad (1.1)$$

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) \left( \square + \frac{1}{2} m^2 \right) \varphi(x) - \frac{g}{4} \varphi^4(x), \quad (1.2)$$

$$L(x) = \frac{1}{2} \sum_i^N \varphi_i(x) (\square - m^2) \varphi_i(x) - \frac{g}{4} \left( \sum_i^N \varphi_i^2(x) \right)^2 \quad (1.3)$$

в пространстве-времени  $R^d$  ( $d = 2, 3, 4$ ) при конечной и нулевой температуре  $T$ . Здесь  $x = (x, t)$ .

Лагранжианы (1.1) и (1.2) описывают однокомпонентное скалярное поле, они инвариантны относительно замены  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Лагранжиан (1.3) описывает  $O(N)$ -мультиплет скалярных полей и инвариантен относительно  $O(N)$ -преобразований, а также замены  $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$ . Параметры  $m$  и  $g$  положительны.

Если безразмерные параметры  $G = \frac{g}{2\pi m^{4-d}}$  и  $\theta = \frac{T}{m}$  достаточно малы, то в квантовой теории лагранжианы (1.1) и (1.3) описывают симметричное взаимодействие, а лагранжиан (1.2) соответствует спонтанно нарушенной симметрии.

В рамках конструктивной квантовой теории поля (КТП) Саймоном и Гриффитсом [8, 9], Глимом и Джаффе [10, 11], Мак Брайеном и Розеном [12] и др. был получен ряд строгих теорем, которые доказывают существование нетривиальных двумерных теорий самодействующего скалярно-

го поля. Эти теоремы устанавливают существование фазового перехода в двух- [9,10,11] и трехмерных [12]  $\varphi^4$ -теориях поля при нулевой температуре. Получены указания на то, что эти переходы — второго рода, но доказательство этого не является полным [11,12]. Вместе с тем в рамках конструктивной КТП не удалось получить какой-либо информации о критическом значении константы связи или найти явную зависимость массы и параметра порядка от константы связи.

Близко к этой тематике примыкают исследования так называемой проблемы тривиальности  $(\varphi^4)_d$ -теории. Строго доказано, что при  $d > 4$  такая теория оказывается либо невзаимодействующей (голый заряд равен нулю в пределе снятия регуляризации), либо нестабильной (заряд отрицателен) [13]. В случае  $d = 4$  прийти к каким-либо окончательным выводам не удается [14].

Очень привлекательный с физической точки зрения подход к проблеме фазовой структуры обеспечивается вариационным методом гауссовского эффективного потенциала (ГЕР). Начало этому направлению в теории поля было положено в работах Барнеса и Чандора [15], Бардина и Моше [16], Стевенсона [17], Консоли и др. [18]. Другие исследования в этом направлении были предприняты Чангом [19], Магрудером [20], Баумом и Гринштейном [21], Грасси, Хакимом и Сиваком [22]. Эти работы различаются способами перенормировки, методами учета температурных эффектов, использованием или нет  $1/N$ -разложения при изучении  $O(N)$ -инвариантных систем и т.д. Выход за рамки ГЕР (так называемая постгауссовская аппроксимация) был предпринят Полли и Ритчелом при изучении  $(\varphi^4)_2$ -теории [23].

В рамках вариационного подхода приближенно найдены критические значения константы связи и температуры, зависимость массы и параметра порядка (конденсата) от константы связи и температуры в различных теориях самодействующего скалярного поля. Полли и Ритчелом [23] в  $(\varphi^4)_2$ -теории получен фазовый переход второго рода, как это и предсказывают упомянутые выше теоремы (см. также [63]).

Вместе с тем специфика вариационных методов в КТП делает их результаты весьма ненадежными, если в теории имеются расходимости в высших порядках теории возмущений (см. статью Фейнмана [24]). Именно такая ситуация имеет место в моделях (1.1) — (1.3) при  $d > 2$ . Как отмечалось многими авторами [25—27], эта проблема кроется в самой постановке задачи в вариационном подходе. С одной стороны, вариационный принцип применяется к фиксированному гамильтониану с данным набором голых параметров (массы и константы связи), а с другой — физически

значимой величиной является эффективный потенциал с данным набором перенормированных параметров. После перенормировки основное неравенство вариационного подхода

$$U_{\text{eff}}^+(\varphi) \equiv \min_{\psi} \langle \psi | H | \psi \rangle \geq U_{\text{eff}}(\varphi) \quad (1.4)$$

оказывается бесполезным, т.к. УФ-расходимости вариационной оценки  $U_{\text{eff}}^+$  и точного эффективного потенциала  $U_{\text{eff}}$  различны, и, следовательно, разница между  $U_{\text{eff}}^+$  и  $U_{\text{eff}}$  бесконечно велика [25]. Неравенство (1.4) может быть осмысленным лишь в том случае, когда гамильтониан является оператором на пространстве состояний, т.е. если в теории имеются только нормально упорядочиваемые расходимости ((1.1)—(1.3) при  $d = 2$ ).

Другая проблема связана с невозможностью контролировать точность аппроксимации в вариационном методе даже в том случае, когда неравенство (1.4) применимо [28].

Отметим еще оригинальный подход Чанга [29] и Магрудера [20], прямо основанный на учете структуры перенормировки точного потенциала в рамках ТВ. Чанг и Магрудер исследовали фазовую структуру модели (1.2) в  $R^3$  и обнаружили, что с ростом константы связи симметрия восстанавливается. Это противоречит результатам GEP-аппроксимации [30].

В настоящей работе используется модификация метода канонических преобразований, которая позволяет учесть структуру перенормировки в высших порядках и контролировать точность аппроксимации. Этот подход впервые был применен в работе [31] при исследовании моделей (1.1), (1.3) в  $R^2$ . Обобщение на более сложные случаи трех- и четырехмерных теорий и на системы при конечной температуре было сделано в работах [32—36]. Окончательная формулировка метода приведена в статье [35].

Суть подхода состоит в комбинации двух методов КТП: канонических преобразований и ренормгруппы (РГ). Идея такой комбинации исходит из фундаментальных свойств локальной КТП: неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений (ККС) и УФ-расходимостей (см., например, [47,57]). С физической точки зрения существование неэквивалентных представлений означает, что вакуумное состояние не единственно. В то же время динамическая нестабильность вакуума связана с радиационными поправками к физическим параметрам системы. Перенормировка ( $R$ ), по существу, соответствует учету лидирующих радиационных поправок. Поэтому можно ожидать, что  $R$ -структура модели содержит основную (по

крайней мере качественную) информацию о ее вакуумной структуре (см. также [8]).

Согласно этой интуитивной мотивации за исходную точку принимается следующее:

- фазы проявляются в КТП как неэквивалентные представления,
- основная информация о фазовой структуре теории заложена в структуре перенормировки.

Если перенормированная константа связи  $G$  мала и температура равна нулю, то для квантования моделей (1.1)—(1.3) можно применить каноническую процедуру в представлении Фока для частиц с перенормированной массой  $m$ . Процедура построения  $S$ -матрицы предполагает фиксацию схемы перенормировки. Имея это в виду, мы хотим знать, что представляет собой полевая система при других значениях  $G$  и  $\theta$  при фиксированной схеме перенормировки. Сформулируем проблему следующим образом:

*Какое представление ККС является подходящим для различных значений  $G$  и  $\theta$ , и какая физическая картина соответствует этому представлению?*

*При этом будем понимать под различными фазами системы неэквивалентные представления, имеющиеся в теории для данных  $G$  и  $\theta$ .*

Обзор имеет следующую структуру. Во втором и третьем разделах кратко излагается метод канонического квантования и аппарат ренорм-группы, на которые существенно опирается используемый в работе метод. В четвертом разделе обсуждается взаимосвязь проблемы вакуумной структуры квантово-полевой системы и неэквивалентных представлений ККС, рассмотрены наиболее важные проявления неэквивалентных представлений в КТП. В пятом разделе различные аспекты квантования, неэквивалентных представлений, канонических преобразований и ренорм-группы, мотивирующие метод канонических преобразований в КТП, объединены в последовательной формулировке этого метода. В остальных разделах исследуется фазовая структура конкретных моделей.

## 2. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И $S$ -МАТРИЦА

Чтобы изучать поведение квантово-полевой системы при изменении ее параметров, необходимо прежде всего описать эту систему при каких-либо фиксированных значениях параметров. Другими словами, нужно определить своего рода «граничное условие». Без этого постановка задачи не будет полной.

Будем считать, что *при нулевой температуре в пределе слабой связи* самодействующее скалярное поле может быть описано в рамках *стандарт-*

ного формализма канонического квантования и построения  $S$ -матрицы по теории возмущений (ТВ) (см. [42]). Классический лагранжиан системы запишем в виде

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2(\mu)) \varphi(x) - \frac{g(\mu)}{4} \varphi^4(x) + \\ + \frac{1}{2} (Z_2 - 1) \varphi(x) \square \varphi(x) - \frac{1}{2} \delta m^2(\mu) \varphi^2(x) - \\ - \frac{1}{4} (Z_1 - 1) g(\mu) \varphi^4(x) - \delta E. \quad (2.1)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для перенормированных поля  $\varphi$ , массы  $m(\mu)$  и константы связи  $g(\mu)$ . Параметр  $\mu$  характеризует масштаб перенормировки, осуществляемой с помощью контрчленов, приведенных во второй строке (2.1). Ниже мы специально остановимся на вопросах перенормировки.

В качестве канонических переменных выберем перенормированное поле  $\varphi$  и канонически сопряженный импульс, который равен

$$\pi(x, x_0) = \frac{\delta}{\delta \dot{\varphi}(x, x_0)} \int dy L(y, x_0) = Z_2 \dot{\varphi}(x, x_0).$$

Канонические коммутационные соотношения имеют вид

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_{x_0=y_0} = [\pi(x), \pi(y)]_{x_0=y_0} = 0, \\ [\varphi(x), \pi(y)]_{x_0=y_0} = i\delta(x - y). \quad (2.2)$$

Запишем плотность гамильтониана:

$$H = \pi \dot{\varphi} - L = H_0 + H_I + H_{ct}, \\ H_0 = \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2(\mu) \varphi^2], \quad H_I = \frac{1}{4} g(\mu) \varphi^4, \\ H_{ct} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{Z_2} - 1 \right) \pi^2 + (Z_2 - 1) (\nabla\varphi)^2 + \delta m^2(\mu) \varphi^2 \right] + \frac{1}{4} (Z_1 - 1) g(\mu) \varphi^4. \quad (2.3)$$

В представлении взаимодействия  $H$  разбивается на свободную часть  $H_0$  (по которой строится пространство состояний) и гамильтониан взаимодействия. Операторы  $\varphi$  и  $\pi$  можно представить в виде

$$\varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[ a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega x_0} + a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega x_0} \right], \\ \pi(x) = \frac{1}{i} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \sqrt{\omega} \left[ a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega x_0} - a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega x_0} \right],$$

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2(\mu)}, \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.4)$$

Операторы рождения  $a^\dagger(\mathbf{k})$  и уничтожения  $a(\mathbf{k})$  определены на пространстве Фока свободных частиц с массой  $m(\mu)$  и вакуумным вектором  $|0\rangle$ , удовлетворяющим условиям:

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (2.5)$$

В рамках ТВ матрица рассеяния строится с помощью итераций по степеням гамильтониана взаимодействия  $(H_I + H_{ct})$ , так что окончательное выражение принимает вид (см., например, [43]):

$$S = \lim T \exp \left\{ -i \int d^d x [H_I(x) + H_{ct}(x)] \right\}, \quad (2.6)$$

где операторы  $H_I$  и  $H_{ct}$  записаны в представлении взаимодействия, а символ  $\lim$  означает снятие УФ-регуляризации. Оператор  $H_{ct}$  подбирается так, чтобы каждый член ряда ТВ для  $S$ -матрицы был конечным при снятии регуляризации. Регуляризация может вводиться непосредственно в ряде ТВ (можно использовать размерную регуляризацию [45, 49], введение формфактора [44, 46, 57] и т.д.).

Заметим, что формализм термополевой динамики (TFD) [58, 64, 65] позволяет естественным образом включить в рассмотрение температурные эффекты в рамках канонического квантования. На этом мы подробно остановимся в двух последних разделах.

Безразмерными параметрами модели являются перенормированная константа связи  $g(\mu)$  и (при ненулевой температуре  $T$ )  $\theta = T/m(\mu)$ . В случае размерности пространства-времени  $d < 4$  безразмерная (пертурбативная) константа связи определяется отношением  $G = g/m^{4-d}(\mu)$ .

Для дальнейшего важно отметить, что изложенная выше схема построения  $S$ -матрицы основывается, в частности, на следующих предположениях:

- 1) выполняются одновременные соотношения коммутации (2.2), набор канонических переменных является полным;
- 2) существует пуанкаре-инвариантный нормируемый вакуум;
- 3) вакуумное состояние единственно.

Кроме того, поскольку выражение для  $S$ -матрицы (2.6) получено итерациями, то предполагается применимость ТВ, а следовательно, и малость перенормированной константы связи:  $g(\mu) \ll 1$ .

Приведенная процедура отражает и тот факт, что для построения  $S$ -матрицы недостаточно задать лагранжиан, но необходимо еще определить «правила вычисления» коэффициентных функций в ряде ТВ [42]. Эта необходимость связана с наличием УФ-расходимостей и может быть

сведена к произволу в определении хронологического произведения операторов в совпадающих точках. При введении в определение матрицы рассеяния (2.6) оператора  $H_{ct}$  указанный произвол в  $T$ -произведении заменяется произволом в выборе схемы перенормировки ( $R$ -схемы), которая и должна быть зафиксирована.

Если перенормировка осуществляется на массовой поверхности, т.е. по построению перенормированная масса равна физической (полюсной) массе и вычет двухточечной функции Грина в полюсе равен единице, то упомянутое выше пространство Фока описывает асимптотические in- и out-состояния.

### 3. РЕНОРМГРУППА

**3.1. Схемы перенормировки.** Определение матрицы рассеяния (2.6) требует фиксации схемы перенормировки. Используются самые разные способы устранения УФ-расходимостей. Они могут быть разбиты на два класса (см., например, [48]): класс не зависящих от массы  $R$ -схем и  $R$ -схемы, основанные на вычитании из расходящейся диаграммы ее значения при определенных значениях внешних импульсов (например, каноническая  $\mu$ -схема, вычитание при нулевых внешних импульсах и т.д.).

Примером не зависящих от массы перенормировочных предписаний является схема минимальных вычитаний (MS) (см., например, [45, 49, 50]). По существу, перенормировка в этом случае сводится к тому, что в рамках размерной регуляризации из диаграмм вычитаются только полюса по переменной  $\epsilon = d_{ph} - d$ , где  $d_{ph}$  — размерность физического пространства-времени. При этом уже при регуляризации появляется произвольный параметр  $\mu$ , имеющий размерность массы. Его значение не фиксируется MS-схемой самой по себе. Для этого нужно задать некоторое дополнительное условие.

Упомянутая выше каноническая  $\mu$ -схема определяется следующими условиями на перенормированные

а) пропагатор:

$$D(p^2) \rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2(\mu) + i0} \quad \text{при } p^2 \rightarrow \mu^2, \quad (3.1)$$

б) четырехточечную вершинную функцию:

$$\Gamma^{(4)}(s, t, u) = g(\mu) \quad \text{при } s = g = u = \frac{4}{3}\mu^2,$$

где  $m(\mu)$  и  $g(\mu)$  — перенормированные масса и константа связи. Переменные Мандельштама  $s, t, u$  связаны с внешними импульсами обычным образом:



$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2.$$

В  $\varphi^4$ -теории точка вычитания  $\mu$  должна удовлетворять неравенству

$$\mu^2 \leq 9m^2(\mu),$$

а в остальном является произвольной. Так что, как и в случае MS-схемы, масштаб перенормировки  $\mu$  должен фиксироваться дополнительно.

В общем случае при определении схемы перенормировки выбирается некоторый однопараметрический  $R_\mu$ -класс предписаний и, кроме того, фиксируется масштаб перенормировки  $\mu$ . Последнее наиболее естественно сделать через параметры самой теории. В нашем случае такой способ состоит в фиксации отношения  $m(\mu)/\mu$  ( $m(\mu) \neq 0$ ).

Таким образом, будем говорить, что схема перенормировки фиксирована, если

- выбран однопараметрический  $R_\mu$ -класс перенормировочных предписаний;
- масштаб перенормировки фиксирован соотношением  $\frac{m(\mu)}{\mu} = C$ , где  $m(\mu)$  — перенормированная масса, а  $C$  — некоторое число.

В заключение этого пункта заметим, что условие перенормировки на массовой поверхности соответствует  $\mu$ -схеме при  $\mu = m$  ( $C = 1$ ) (см. (3.1)). В этом случае перенормированная и физическая массы совпадают:  $m = m_{ph}$ . Мы используем этот простой факт при анализе фазовой структуры модели (2.1) в  $R^4$ .

**3.2. Ренормгрупповые уравнения.** Перепишем лагранжиан (2.1) в терминах затравочных поля  $\varphi_B$ , массы  $m_B$  и константы связи  $g_B$ :

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi_B(x) (\square - m_B^2) \varphi_B(x) - \frac{g_B}{4} \varphi_B^4(x).$$

Затравочные и перенормированные величины связаны соотношениями

$$\varphi_B = \sqrt{Z_2} \varphi, \quad m_B^2 = Z_m m^2, \quad g_B = Z_g g.$$

Идея ренормализационной инвариантности состоит в том, что изменение схемы перенормировки, сказывающееся на константах  $Z_i$ , компенсируется изменением перенормированных поля, массы и константы связи так, что затравочные величины не меняются. Это приводит к тому, что  $\mathcal{S}$ -матрица теории не зависит от выбора R-схемы. Эта идея приобретает конструктивный смысл, если найдена связь между перенормированными величинами в разных схемах перенормировки. Такая связь устанавливается ренормгрупповыми (РГ) уравнениями [42,45]. Выпишем формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Если изменение в перенормировочном предписании состоит только в изменении масштаба перенормировки  $\mu$  в рамках одного  $R_\mu$ -класса, то РГ-уравнения имеют вид [45]:

$$\begin{aligned} \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} &= \beta \left( g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right), \\ \frac{\nu}{m^2(\nu)} \frac{dm^2(\nu)}{d\nu} &= -\gamma_m \left( g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right), \\ \nu \frac{d\zeta(\nu)}{d\nu} &= -\frac{1}{2} \gamma \left( g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\zeta$  — константа конечной перенормировки поля при изменении масштаба  $\nu$ . Граничные условия таковы:

$$g(\nu) = g, \quad m(\nu) = m, \quad \zeta(\nu) = 1 \quad \text{при } \nu = \mu. \quad (3.3)$$

Ренормгрупповые функции  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}_m$  и  $\bar{\gamma}$  определяются системой уравнений, следующей из требования инвариантности затравочных величин:

$$\begin{aligned} \bar{\beta} \left( g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right) &= -\nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_g, \\ \bar{\gamma}_m \left( g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right) &= \nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_m, \\ \bar{\gamma} \left( g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right) &= \nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функции  $\beta$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma$  получаются из решений системы (3.4) предельным переходом  $\beta = \lim \bar{\beta}$ ,  $\gamma_m = \lim \bar{\gamma}_m$ ,  $\gamma = \lim \bar{\gamma}$ , соответствующим снятию УФ-регуляризации. Если используется не зависящая от массы R-схема, то уравнения (3.2) можно просто решить в общем виде.

Традиционное применение РГ-формализма состоит в анализе асимптотик функций Грина по энергетическим переменным. Другими словами, интересуются зависимостью перенормированных величин (заряда, массы, функций Грина) от масштаба перенормировки  $\nu$ . Эта зависимость как раз и описывается уравнениями (3.2).

*В настоящей работе исследуется задача иного рода. Нас интересует поведение основного состояния при изменении параметров  $g$  и  $m$ , содержащихся в граничных условиях (3.3), при фиксированной схеме перенормировки. Ренормгруппа оказывается полезной при решении и этой задачи.*

#### 4. НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ККС

Проблема унитарно неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений возникла в модели Ван Хова [51]. Детальный математический анализ этой проблемы впервые дал Фридрихс [52]. Дальнейшие результаты были получены Хаагом [54], Вайтманом и др. [53,56]. Подробный анализ всего круга вопросов, касающихся неэквивалентных представлений, содержится в монографиях [74,57,58], а в работе [59] обсуждается аксиоматика релятивистски-инвариантной канонической теории поля с несепарабельным гильбертовым пространством состояний.

**4.1. Бесконечное число степеней свободы.** Характерная особенность, отличающая поле от других физических систем, состоит в том, что оно обладает бесконечным (мощности континуума) числом степеней свободы.

Рассмотрим нормировочный ящик с периодическими граничными условиями. Нейтральное скалярное поле может быть разложено на взаимно независимые нормальные колебания типа плоских волн

$$\varphi(x) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} [2\omega(\mathbf{k})]^{-1/2} [a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} + a_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}x}],$$

где  $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . Канонические коммутационные соотношения для  $a, a^+$  имеют вид

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},$$

откуда видно, что каждое нормальное колебание имеет структуру гармонического осциллятора. Каждый такой осциллятор имеет свое собственное гильбертово пространство с основным состоянием  $|0; \mathbf{k}\rangle$ , характеризующимся соотношениями  $a_{\mathbf{k}} |0; \mathbf{k}\rangle = 0, \langle 0; \mathbf{k} | 0; \mathbf{k}\rangle = 1$ , и бесконечную последовательность собственных состояний оператора числа частиц  $N_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}$ . Гильбертово пространство всего поля является прямым произведением гильбертовых пространств простых осцилляторов. Векторы состояний поля будем обозначать  $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$ , где  $n_i$  — число квантов с импульсом  $\mathbf{k}_i$ . Поскольку каждый осциллятор имеет счетное множество ( $M$ ) состояний и существует счетное множество ( $N$ ) осцилляторов, то число измерений полного гильбертова пространства определяется мощностью множества  $M^N$ , которая равна мощности континуума.

Множество  $\{|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle\}$  не может быть использовано в качестве базиса сепарабельного гильбертова пространства, ввиду его несчет-

ности. Существует бесконечно много способов выбора таких счетных подмножеств, которые могут служить базисом сепарабельного гильбертова пространства. Если какие-либо два подмножества являются базисами представлений для операторов  $(a_i, a_i^+; i = 1, 2, \dots)$ , то эти два представления являются *унитарно неэквивалентными по отношению друг к другу* в том смысле, что вектор одного представления не является суперпозицией базисных векторов другого представления.

Если взаимодействие в системе отсутствует, то полное число частиц — сохраняющаяся величина. Поэтому множество  $\{n_1, \dots, n_i, \dots\}$  оказывается излишне большим для описания свободного поля; можно ограничиться подмножеством

$$\{n_1, \dots, n_i, \dots\}; \sum_i n_i = \text{конечное число}.$$

Такое подмножество счетно (см., например, [58]). После введения в нем операции внутреннего произведения получается сепарабельное гильбертово пространство, которое и называется пространством Фока.

В случае взаимодействующих полей ситуация меняется, проявлением чего является теорема Хаага и ее следствия [53—56]. Доказательство теоремы Хаага существенно опирается на требование единственности вакуума, которое неявно предполагает отсутствие неэквивалентных представлений и приспособленность пространства Фока к представлению взаимодействующих полей [47]. Поэтому радикальным способом исправления ситуации могло бы быть включение неэквивалентных представлений в структуру теории посредством определения поля как оператора в несепарабельном гильбертовом пространстве (при этом необходимо отказаться от единственности вакуума). Обсуждение аксиоматики такого рода теории можно найти, например, в работе [59]. Однако реализации этой идеи препятствует уже хотя бы то, что до настоящего времени не существует последовательной классификации неэквивалентных представлений ККС.

Мы поставим себе более узкую задачу. Будем традиционно считать, что формализм, введенный в предыдущих параграфах, дает достаточные основания для вычисления элементов  $S$ -матрицы при условии, что перенормированная константа связи мала:  $g(\mu) \ll 1$ . Известно, что при описании электромагнитных и слабых взаимодействий такой подход оказывается успешным. При этом, конечно, следует отдавать себе отчет в том, что все принципиальные проблемы, ассоциирующиеся с теоремой Хаага, остаются.

Попробуем все же ослабить условие единственности вакуума. Выражение «вакуум не единственен» означает, что гильбертово пространство

содержит несколько нормируемых и инвариантных векторов. Эти векторы обязательно неэквивалентны (в указанном выше смысле). В этом случае отождествление вакуума и основного состояния более не является возможным. Необходимо найти собственное основное состояние системы путем явного обращения к ее динамике. Для этого нужно ввести с учетом динамики набор вакуумных векторов (пространств Фока) и выбрать из них тот, который при данных константе связи и температуре является лучшим претендентом на роль основного состояния. Заметим, что для этого нет необходимости строить полное (несепарабельное) пространство состояний. Достаточно считать, что оно существует, а все рассматриваемые пространства Фока являются его подпространствами. В каждом из этих пробных подпространств действует стандартный формализм канонического квантования.

Метод, которым эта программа может быть реализована, будет подробно сформулирован в следующем разделе. Здесь же отметим, что набор пробных вакуумных векторов (неэквивалентных представлений) вводится с помощью канонических преобразований, динамика учитывается посредством ренормгрупповых уравнений, а критерии отбора основного состояния базируются на сравнении эффективных констант связи и плотностей свободной энергии, характеризующих каждое представление.

Прежде чем перейти к формулировке метода, рассмотрим несколько известных примеров неэквивалентных представлений. Одновременно мы проясним мотивировку нашего метода и введем формулы, которые будут использованы в последующих вычислениях.

**4.2. Канонические преобразования бозонных операторов.** Рассмотрим два набора бозонных операторов  $[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k})]$  и  $[b(\mathbf{k}), b^+(\mathbf{k})]$ . Пространство Фока, на котором действуют эти операторы, обозначим  $\mathcal{H}[a, b]$ . Вакуумное состояние  $|0\rangle$  в нем удовлетворяет соотношениям

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad b(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}.$$

Алгебраические свойства операторов даются выражениями

$$[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [b(\mathbf{k}), b^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

а остальные коммутаторы обращаются в нуль. Введем операторы  $\alpha(\mathbf{k}), \beta(\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{k}) &= c(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - d(\mathbf{k}) b^+(-\mathbf{k}) \\ \beta(\mathbf{k}) &= c(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) - d(\mathbf{k}) a^+(-\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь численные коэффициенты  $c$  и  $d$  — вещественные функции  $\mathbf{k}^2$ , они удовлетворяют условию  $c^2 - d^2 = 1$ .

Оно гарантирует, что  $\alpha$  и  $\beta$  имеют те же алгебраические свойства, что и  $a$ ,  $b$ . Иными словами, преобразование (4.1) является каноническим, оно носит название преобразования Боголюбова [60—62]. Будем считать коэффициент  $c$  положительным, тогда можно принять:  $c = \cosh \xi$ ,  $d = \sinh \xi$ .

Введем оператор

$$O[\xi] = \exp \{A[\xi]\}, \quad (4.2)$$

$$A[\xi] = \int d^3k \xi(k) [a(k) b(-k) - b^+(k) a^+(-k)],$$

так что

$$[a(k), A(\xi)] = -\xi(k) b^+(-k),$$

$$[b^+(-k), A(\xi)] = -\xi(k) a(k).$$

Повторно применяя эти соотношения, получаем

$$O^{-1}(\xi) a(k) O(\xi) = a(k) \cosh \xi - b^+(-k) \sinh \xi = \alpha(k). \quad (4.3)$$

Аналогично

$$\beta(k) = O^{-1}(\xi) b(k) O(\xi). \quad (4.4)$$

Преобразования (4.3), (4.4) лишь по форме выглядят как унитарные. Чтобы проверить это, рассмотрим матричный элемент

$$o_0(\xi) = \langle 0|0; \xi \rangle, \quad \text{где } |0; \xi \rangle = O^{-1}[\xi] |0 \rangle.$$

Можно показать [58], что

$$o_0(\xi) = \exp \left\{ -\delta^3(0) \int d^3k \ln [\cosh \xi(k)] \right\} \left( \delta^{(3)}(0) = \frac{V}{(2\pi)^3} \right),$$

откуда следует, что в пределе бесконечного объема  $V$  он обращается в нуль независимо от сходимости интеграла, так что  $|0; \xi \rangle$  не принадлежит  $H[a, b]$ . Другими словами,  $O^{-1}[\xi]$  не отображает  $H[a, b]$  на себя. С другой стороны, в силу (4.3) и (4.4) имеем

$$\alpha(k)|0; \xi \rangle = 0, \quad \beta(k)|0; \xi \rangle = 0,$$

откуда следует, что  $|0; \xi \rangle$  — вакуум в отношении действия операторов  $\alpha, \beta$ , и можно построить соответствующее пространство Фока  $H[\alpha, \beta]$ . Приведенные выше соображения показывают, что  $H[a, b]$  и  $H[\alpha, \beta]$  — два унитарно неэквивалентных представления ККС в том смысле, что в  $H[\alpha, \beta]$  существует вектор, который нельзя представить в виде суперпозиции базисных векторов  $H[a, b]$ . Более того, это утверждение справедливо для любого вектора из  $H[\alpha, \beta]$ . Такая ситуация обычно харак-

теризуется интуитивным утверждением об ортогональности пространств  $H[a, b]$  и  $H[\alpha, \beta]$ .

Эти результаты не означают, что нельзя определить действие операторов  $\alpha$  и  $\beta$  на векторы в  $H[a, b]$ . Такое определение дается соотношениями (4.11). То, что было показано выше, сводится к утверждению, что каноническое преобразование (4.1) не реализуется унитарным преобразованием, а операторы  $\alpha$  и  $\beta$  не являются операторами уничтожения в  $H[a, b]$ , поскольку в этом пространстве отсутствует соответствующий им вакуум.

Приведем еще один известный пример канонического преобразования, порождающего неэквивалентные представления. Пусть оператор  $\alpha$  связан с оператором уничтожения бозонного поля  $a$  соотношением

$$\alpha(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}) + c(\mathbf{k}), \tag{4.5}$$

где  $c$  —  $c$ -числовая функция. Такое преобразование порождает сдвиг поля на  $c$ -число. В операторной форме преобразование (4.5) имеет вид

$$\alpha(\mathbf{k}) = O^{-1}[c] a(\mathbf{k}) O[c], \tag{4.6}$$

$$O[c] = \exp \left\{ - \int d^3k [c^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - c(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k})] \right\}. \tag{4.7}$$

Отсюда легко получается соотношение

$$|0; c\rangle \equiv O^{-1}[c] |0\rangle = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int d^3k |c(\mathbf{k})|^2 \right\} \exp \left\{ - \int d^3k c(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) \right\} |0\rangle.$$

Если имеет место равенство (например, при  $c(\mathbf{k}) = c\delta(\mathbf{k})$ )

$$\int d^3k |c(\mathbf{k})|^2 = \infty,$$

то представления  $H[a]$  и  $H[\alpha]$  унитарно неэквивалентны друг другу.

**4.3. Ренормгрупповые преобразования.** Среди преобразований вида (4.1) имеется два важных частных случая. Это — переход к полю с новой массой и масштабное преобразование поля.

Пусть  $\{\varphi, \pi\}$  — канонические переменные, описывающие свободное скалярное поле с массой  $m$ , так что они удовлетворяют ККС (2.2) и выражаются через операторы рождения  $a^+$  и уничтожения  $a$  посредством соотношений (2.4) с  $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$ .

Введем операторы  $(\alpha, \alpha^+)$ , связанные с  $(a, a^+)$  преобразованием

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{k}) &= \cosh \xi(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - \sinh \xi(\mathbf{k}) a^+(-\mathbf{k}), \\ \alpha^+(\mathbf{k}) &= \cosh \xi(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) - \sinh \xi(\mathbf{k}) a(-\mathbf{k}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

или в операторной форме:

$$\alpha(\mathbf{k}) = O^{-1}[\xi] a(\mathbf{k}) O[\xi], \quad (4.9)$$

$$O[\xi] = \exp \left\{ \int d^3k \xi(\mathbf{k}) [a(-\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - a^+(\mathbf{k}) a^+(-\mathbf{k})] \right\}.$$

Если выбрать параметр  $\xi$  в виде

$$\xi(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \ln \left( \xi^2 \frac{\omega}{\Omega} \right), \quad \xi = \text{const}, \quad \Omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}, \quad (4.10)$$

то (4.8) соответствует переходу к новой массе  $M$  и масштабному преобразованию поля. Иначе говоря, формулы (4.8) и (4.10) задают каноническое преобразование вида

$$\{\varphi, \pi\} \rightarrow \{\xi\Phi, \xi^{-1}\Pi\}, \quad (4.11)$$

где поля  $\Phi$  и  $\Pi$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + \alpha^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}], \\ \Pi(x) &= \frac{1}{i} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{2}} [\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} - \alpha^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пространства Фока, связанные с операторами  $a'$  и  $\alpha$ , являются унитарно неэквивалентными.

Если  $M = m$ , то формулы (4.8) задают только масштабное преобразование поля, а при  $\xi = 1$  — только переход к новой массе. Преобразование (4.8) для модели (2.2) — (2.6) соответствует РГ-преобразованию при условии, что одновременно осуществляется конечная перенормировка константы связи, а  $M$  и  $\xi$  удовлетворяют РГ-уравнениям (3.2).

С другой стороны, обратимся к квантованной  $\varphi^4$ -теории, заданной соотношениями (2.2) — (2.6), причем схема перенормировки фиксирована, т.е. выбран определенный  $R_\mu$ -класс, а масштаб перенормировки задан отношением  $m/\mu = C$  (см. п.3.1). Далее, посредством канонического преобразования перейдем к полям с некоторой новой массой  $M = tm(\mu)$ , где  $t$  — параметр преобразования. Ясно, что такое преобразование изменяет R-схему:  $M/\mu \neq C$ . Отсюда следует, что если мы делаем канонические преобразования, включающие переход к новой массе, и хотим при этом сохранить схему перенормировки неизменной, то необходимо произвести и компенсирующее РГ-преобразование  $\mu \rightarrow \nu = t\mu$  с тем, чтобы выполнялось соотношение  $\frac{M}{\nu} = \frac{m}{\mu}$ , т.е. чтобы отношение массы к масштабу перенормировки было одинаковым в разных представлениях.



Такое РГ-преобразование включает масштабное преобразование поля (см. (4.8)) и конечную перенормировку константы связи.

Как раз такого рода ситуация возникает при исследовании фазовой структуры: с помощью канонических преобразований вводится набор неэквивалентных представлений ККС, и требуется, чтобы R-схема была одной и той же во всех этих представлениях.

## 5. МЕТОД КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В предыдущих параграфах мы затронули методы и проблемы, так или иначе связанные с методом канонических преобразований. По ходу дела мы уже анонсировали некоторые существенные черты этого метода. Различные аспекты метода, описанного ниже, можно найти в [31—36]. Исходной точкой являются следующие предположения:

1) в квантовой теории поля различные фазы проявляются как унитарно неэквивалентные представления ККС;

2) основная информация о фазовой структуре теории заложена в структуре перенормировки.

Если перенормированная константа связи  $G$  мала и температура равна нулю, то для квантования моделей (1.1)—(1.3) можно применить каноническую процедуру в представлении Фока для скалярных частиц с перенормированной массой  $m$ . Процедура построения  $S$ -матрицы предполагает фиксацию схемы перенормировки. Имея это в виду, мы хотим знать, что представляет собой полевая система при других значениях  $G$  и  $\theta$  и при фиксированной схеме перенормировки. Сформулируем проблему следующим образом:

*Какое представление ККС является подходящим для различных значений  $G$  и  $\theta$ , и какая физическая картина соответствует этому представлению?*

*Под различными фазами системы будем понимать неэквивалентные представления, имеющиеся в теории для данных  $G$  и  $\theta$ .*

Метод канонических преобразований сводится к следующему.

1. Производится каноническое квантование теории в представлении, имеющем разумную физическую интерпретацию в пределе слабой связи, т.е. при  $G \ll 1$ . Схема перенормировки фиксирована. Это означает, что

а) выбран определенный однопараметрический класс  $R_\mu$  перенормировочных предписаний;

б) масштаб перенормировки  $\mu$  фиксирован соотношением  $\frac{m}{\mu} = C$ , где  $m$  — перенормированная масса,  $C$  — некоторая константа.

2. С помощью канонических преобразований вводится набор неэквивалентных представлений ККС так, что гамильтониан имеет правильную форму в каждом из этих представлений. Это значит, что

$$H = H_0 + H_I + H_{ct} + VE.$$

Здесь  $H_0$  — стандартный свободный гамильтониан. Гамильтониан взаимодействия  $H_I$  содержит операторы поля в степени больше второй. Оператор  $H_{ct}$  определяется  $H_0$  и  $H_I$  и соответствует эквивалентным R-схемам во всех представлениях.

R-схемы в двух представлениях с различными массами  $m$  и  $M$  будем считать эквивалентными, если

- в обоих представлениях используется один и тот же  $R_\mu$ -класс перенормировочных предписаний;
- масштабы перенормировки  $\mu$  и  $\nu$  в первом и втором представлениях удовлетворяют соотношению

$$\frac{m}{\mu} = \frac{M}{\nu}. \quad (5.1)$$

Выполнение требования эквивалентности R-схем обеспечивается компенсирующим РГ-преобразованием, посредством которого и учитывается динамика системы.

Величина  $E$  связана с плотностью свободной энергии  $F$  согласно формуле  $F = E - TS$ , где  $S$  — плотность энтропии.

3. Выбирается представление с минимальной плотностью свободной энергии и наименьшей эффективной константой связи  $G_{\text{eff}}(G, \theta)$ . При  $d < 4$  эта величина определяется равенством  $G_{\text{eff}} = \frac{g}{2\pi M^{4-d}}$ . В четырехмерном случае определение несколько сложнее и мы его дадим позже.

В теории фазовых переходов обычно используется критерий, основанный на сравнении свободных энергий. Однако в квантовой теории поля критерий слабой связи представляется более осмысленным. С физической точки зрения величина  $F$  не играет никакой роли, поскольку не дает вклада в элементы  $S$ -матрицы. Кроме того, плотность свободной энергии никогда не удастся найти точно или хотя бы с одинаковой точностью в разных фазах, так что сравнение в значительной мере теряет смысл. В то же время естественно предположить, что большая константа связи в  $H$  означает, что представление, связанное с  $H_0$ , не описывает реальные состояния и не может рассматриваться как подходящее пред-

ставление для гамильтониана  $H$ . Вместе с тем наши вычисления в [32—35] показывают, что оба критерия дают одинаковый результат.

Требование эквивалентности  $R$ -схем в различных фазах обусловлено самой постановкой задачи. Действительно, нас интересует, как *меняется структура основного состояния системы в зависимости от изменения параметров  $g$  и  $t$ , фигурирующих в граничном условии (3.3), при фиксированной схеме перенормировки.*

Требование правильной формы гамильтониана и критерий слабой связи относятся к обычной картине рассеяния в КТП. Гамильтониан  $H_0$  описывает свободные асимптотические поля.  $H_I$  описывает взаимодействие частиц, и он не должен содержать линейные и квадратичные по полям слагаемые, поскольку они не приводят к какому-либо нетривиальному взаимодействию, а лишь переопределяют параметры свободного гамильтониана. Обычное пертурбативное разложение для амплитуд рассеяния осмысленно, если эффективная (пертурбативная) константа связи достаточно мала. Поэтому мы рассматриваем представление как приемлемое, если гамильтониан имеет правильную форму, а эффективная константа связи мала. Кроме того,  $G_{\text{eff}}$  можно использовать для контроля точности аппроксимации.

### 6. $\varphi^4$ -ТЕОРИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОГО ПОЛЯ

Трехмерные модели (1.1)—(1.3) интересны прежде всего тем, что, являясь суперперенормируемыми, они содержат двух-, трех- и четырехпетлевые расходимости в диаграммах, показанных на рис.1. Это обстоятельство делает проблематичным использование вариационных методов [25—27, 38—30] и приводит к различию результатов в разных подходах. Остановимся на этом подробнее.

Обратимся к случаю  $R^2$ . GEP-аппроксимация [19,37], оригинальный расчет Чанга [29], основанный на учете структуры перенормировки и метод канонических преобразований [31] приводят к одним и тем же результатам для модели (1.1). Критическая константа связи  $G_c$ , при которой происходит фазовый переход первого рода, масса частиц в фазе с нарушенной симметрией (BS) одинаковы во всех этих подходах.

Случай  $N > 1$  (1.3) исследовался в рамках GEP-аппроксимации [30],  $1/N$ -разложения [41] и метода канонических преобразований

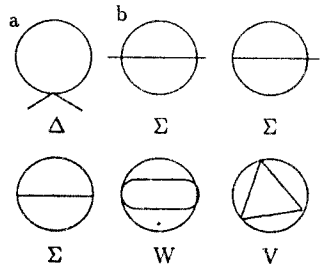


Рис.1. Расходящиеся диаграммы в  $R^3$

[31]. Согласно работам [30,31] в системе имеется фазовый переход первого рода с нарушением симметрии. В BS-фазе имеется  $(N-1)$ -мультиплет полей с ненулевыми массами. Вместе с тем  $1/N$ -разложение не показывает какого-либо фазового перехода [41]. Это разногласие имеет естественное объяснение, приведенное в [30]. Применимость  $1/N$ -разложения ограничена условием  $NG < 1$  и, хотя GER в пределе  $N \gg 1$  совпадает с эффективным потенциалом  $1/N$ -разложения, критическая точка  $G_c$  не видна в  $1/N$ -разложении ( $NG_c \gg 1$  при  $N \gg 1$ ).

Теорема Голдстоуна запрещает спонтанное нарушение непрерывной симметрии в  $R^2$ , поскольку частицы с нулевой массой в этом случае не существуют. Тем не менее два различных метода [30,31] указывают на нарушение  $O(N)$ -симметрии, но «голдстоуновские частицы» имеют ненулевую массу.

Сложнее дело обстоит в трехмерном случае. Существенная разница между  $R^2$  и  $R^3$  заключается в структуре перенормировки рассматриваемых моделей. Разные методы отражают это в неодинаковой степени.

Вычисления Чанга [29] и Магрудера [20] прямо основаны на структуре перенормировки точного эффективного потенциала в рамках ТВ. В работах [29] и [20] установлено, что дискретная симметрия, спонтанно нарушенная при  $G \ll 1$  в модели (1.2) в  $R^3$ , восстанавливается с ростом  $G$ . Такая картина прямо противоположна ситуации в  $R^2$  [19,33].

В то же время GER-аппроксимация в моделях (1.1) — (1.3) в  $R^3$  ведет к фазовой структуре, аналогичной двумерному случаю [30]. Это противоречит результатам Чанга и Магрудера.

**6.1. Гамильтониан  $\varphi^4$  в  $R^3$ .** Удобно рассмотреть модель со следующей плотностью лагранжиана:

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x) - g_3 \varphi^3(x) - \frac{g_4}{4} \varphi^4(x), \quad (6.1)$$

где  $g_3$  и  $g_4$  — константы взаимодействия,  $x = (x, t) = (x_1, x_2, t)$ .

Плотность гамильтониана, соответствующая лагранжиану (6.1), имеет вид

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_I + H_{ct}, \\ H_0[\varphi, \pi] &= \frac{1}{2} : [\pi^2(x) + (\nabla\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x)] :, \\ H_I[\varphi, \pi] &= : \left[ \frac{1}{4} g_4 \varphi^4(x) + g_3 \varphi^3(x) \right] :, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}],$$

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{1}{i} \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2}} [a(k) e^{ikx} - a^+(k) e^{-ikx}], \\ \omega(k) &= \sqrt{k^2 + m^2}, \quad [a(k), a^+(k')] = \delta(k - k').\end{aligned}\quad (6.3)$$

Поля  $\varphi$ ,  $\pi$  являются каноническими переменными и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\varphi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y).$$

Операторы рождения и уничтожения ( $a^+$ ,  $a$ ) действуют на пространстве Фока с вакуумным вектором, определенным выражением

$$a(k)|0\rangle = 0, \quad \forall k \in R^2. \quad (6.4)$$

Все операторы в (6.2) нормально упорядочены по отношению к вакууму (6.4). Модель суперперенормируема, имеется конечное число расходящихся диаграмм (рис.1). Для удаления этих расходимостей необходимо ввести в гамильтониан оператор  $H_{ct}$ , содержащий контрчлены. В схеме вычитаний при нулевом импульсе имеем:

$$\begin{aligned}H_{ct}(m) &= : \left[ \frac{1}{2} A(m) \varphi^2(x) + C(m) \varphi(x) + \delta E(m) \right] :, \\ A(m) &= 3! g_4^2 \Sigma_0(m), \quad C(m) = 3! g_3 g_4 \Sigma_0(m),\end{aligned}\quad (6.5)$$

$$\delta E(m) = \frac{3}{4} g_4^2 W_0(m) - \frac{9}{2} g_4^3 V_0(m) + \frac{1}{2} 3! g_3^2 \Sigma_0(m).$$

Здесь и ниже индекс 0 обозначает нулевую температуру. Функции, фигурирующие в (6.5), имеют вид

$$\begin{aligned}\Sigma_0(m) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-3ms}, \\ W_0(m) &= \frac{1}{(4\pi)^3} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-4ms}, \\ V_0(m) &= \frac{1}{4(2\pi)^5} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \arctan^3 \left( \frac{s}{2m} \right).\end{aligned}\quad (6.6)$$

Здесь подразумевается некоторая регуляризация.

**6.2. Канонические преобразования.** Произведем следующее каноническое преобразование:

$$\pi(x) \rightarrow \pi_f(x), \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi_f(x) + B, \quad (6.7)$$

где поля  $\varphi_t$  и  $\pi_t$  имеют вид (6.3), но с новой массой  $M = mt$ . Константа  $B$  имеет смысл вакуумного конденсата. Преобразование (6.7) можно представить в терминах операторов рождения и уничтожения:

$$a(k) \rightarrow a(k, t) - 2\pi m B \delta(k) = U_2^{-1}(t) U_1^{-1}(B) a(k) U_1(B) U_2(t),$$

$$U_1(B) = \exp \left\{ -2\pi m B \int dk \delta(k) [a(k) - a^+(k)] \right\}, \quad (6.8)$$

$$U_2(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dk \lambda(k, t) [a(-k) a(k) - a^+(k) a^+(-k)] \right\}.$$

$U_1$ -преобразование сдвигает поле  $\varphi$  на константу  $B$ . Преобразование, обратное  $U_2$ , можно представить в форме

$$a(k) = a(k, t) \cosh(\lambda) + a^+(-k, t) \sinh(\lambda)$$

$$a^+(k) = a^+(k, t) \cosh(\lambda) + a(-k, t) \sinh(\lambda). \quad (6.9)$$

Если параметр  $\lambda$  выбран следующим образом:

$$\lambda(k, t) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\omega(k)}{\omega(k, t)} \right), \quad \omega(k, t) = \sqrt{k^2 + m^2 t^2},$$

то, используя (6.9), получаем представление полей  $\varphi_t, \pi_t$  с массой  $M$  в терминах операторов  $a(k, t), a^+(k, t)$ . Эти операторы действуют на пространстве Фока с вакуумным вектором, удовлетворяющим соотношениям

$$|0(t, B)\rangle = U_2^{-1}(t) U_1^{-1}(B) |0\rangle, \quad a(k, t) |0(t, B)\rangle = 0 \quad \forall k. \quad (6.10)$$

При  $B \neq 0$  и  $t \neq 1$  представления ККС, определенные уравнениями (6.4), (6.10), унитарно неэквивалентны.

Выразим плотность гамильтониана (6.2) в новых канонических переменных, перейдем к нормальному упорядочению операторов ( $a(k, t), a^+(k, t)$ ) и введем контрчлены в соответствии с новым представлением свободного гамильтониана в рамках схемы вычитаний при нулевом импульсе. В результате получим

$$H = H'_0 + H'_1 + H'_{ct} + H_1 + E,$$

$$H'_0 = \frac{1}{2} : [\pi_t^2(x) + (\nabla \varphi_t(x))^2 + M^2 \varphi_t^2(x)]:, \quad (6.11)$$

$$H'_1 = : \left[ \frac{1}{4} h_4 \varphi_t^4(x) + h_3 \varphi_t^3(x) \right]:, \quad h_3 = g_3 + g_4 B, \quad h_4 = g_4.$$

Оператор  $H'_{ct}$  имеет структуру выражений (6.5), (6.6), где необходимо сделать замену:

$$\varphi \rightarrow \varphi_t, \quad m \rightarrow M, \quad g_3 \rightarrow h_3, \quad g_4 \rightarrow h_4.$$

Оператор  $H_1$  имеет вид

$$H_1 = : \left[ \frac{1}{2} R(t, B) \varphi_t^2(x) + P(t, B) \varphi_t(x) \right] :,$$

$$R = m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D_0) + 6g_3B + 6g_4^2(\Sigma_0(m) - \Sigma_0(M)), \quad (6.12)$$

$$P = m^2B + g_4(B^3 - 3BD_0) + 3g_3(B^2 - D_0) + 6g_4(g_3 + g_4B)(\Sigma_0(M) - \Sigma_0(m)),$$

плотность энергии вакуума  $E$ :

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + E_3,$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m^2 B^2 + L_0(t),$$

$$E_1 = \frac{1}{4} g_4(B^4 - 6D_0B^2 + 3D_0^2) + g_3(B^3 - 3D_0B),$$

$$E_2 = \frac{3}{4} g_4^2(W_0(m) - W_0(M) - 4D_0\Sigma_0(M)) +$$

$$+ 3(g_4B + g_3)^2(\Sigma_0(m) - \Sigma_0(M)),$$

$$E_3 = -\frac{9}{2} g_4^3(V_0(m) - V_0(M)), \quad (6.13)$$

$$D_0(t) = \Delta_0(0, m) - \Delta_0(0, M) =$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} - \frac{1}{\omega(\mathbf{k}, t)} \right] = \frac{m}{4\pi} (t - 1), \quad (6.14)$$

$$L_0(t) = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[ \omega(\mathbf{k}, t) - \omega(\mathbf{k}) - \frac{M^2 - m^2}{2\omega(\mathbf{k}, t)} \right] =$$

$$= \frac{m^3}{24\pi} (t - 1)^2 (2 + t). \quad (6.15)$$

Условие

$$H_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R(t, B) = 0 \\ P(t, B) = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

обеспечивает правильную форму гамильтониана  $H$  и определяет параметры  $t$  и  $B$ . С физической точки зрения это означает, что  $H$  описывает скалярные частицы с массой  $M$ , зависящей от константы связи. Эта зависимость определяется уравнениями (6.16) и (6.12). Вводя безразмерные переменные

$$G_4 = \frac{g_4}{2\pi m}, \quad G_3 = \frac{g_3}{m\sqrt{4\pi m}}, \quad b = B\sqrt{\frac{4\pi}{m}} \quad (6.17)$$

и пользуясь (6.12), представляем (6.16) в виде

$$-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}G_4(b^2 - t + 1) + 3G_3b + \frac{3}{4}G_4^2 \ln t = 0,$$

$$b + \frac{1}{2}G_4b(b^2 - 3t + 3) + 3G_3(b^2 - t + 1) + 3G_4\left(G_3 + \frac{G_4}{2}b\right) \ln t = 0. \quad (6.18)$$

Плотность энергии (6.13) конечна, ее явный вид можно найти в [32, 33]. Решения уравнений (6.18) описывают возможные фазы теории. Система существует в той из них, которой соответствуют минимальные энергия и эффективная константа связи

$$G_{\text{eff}}(G) = \frac{G}{t(G)}. \quad (6.19)$$

**6.3. Симметричная модель.** Рассмотрим фазовую структуру теории с симметричным лагранжианом (1.1). Этот случай соответствует выбору:  $G_4 = G$ ,  $G_3 = 0$ . Из (6.18) получаем уравнения для симметричной модели:

$$t^2 - 1 - \frac{3}{2}G(b^2 - t + 1) - \frac{3}{2}G^2 \ln t = 0,$$

$$b \left[ 1 + \frac{1}{2}G(b^2 - 3t + 3) + \frac{3}{2}G^2 \ln t \right] = 0. \quad (6.20)$$

Используя первое уравнение, для второго находим два решения:  $b = 0$  (симметричное),  $b^2 = t^2/G$  (несимметричное). Рассмотрим фазу с нарушенной симметрией.

**BS-фаза.** В этом случае имеем

$$b^2 = \frac{t^2}{G},$$

$$t^2 - 3Gt + 3G^2 \ln t + 2 + 3G = 0. \quad (6.21)$$

Второе из уравнений (6.21) при любых  $G$  имеет решение  $t(G) < 1$ , так что эффективная константа связи  $G_{\text{eff}}$  (рис.2) удовлетворяет неравенству

$$G_{\text{eff}}(G) > G \quad \forall G. \quad (6.22)$$

Плотность энергии в BS-фазе положительна для любых значений  $G$  (см. рис.3). Это указывает на то, что BS-фаза не реализуется в системе.



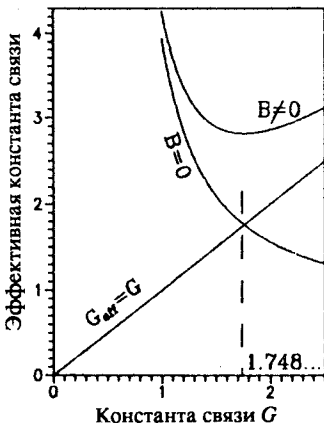


Рис.2. Эффективные константы связи в модели (1.1) в  $R^3$

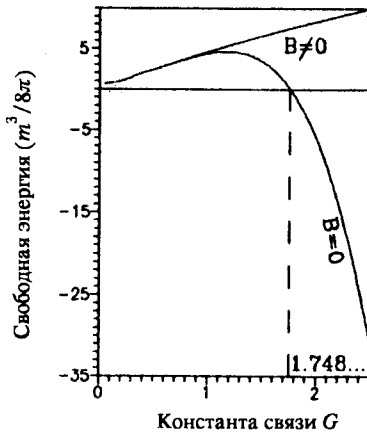


Рис.3. Плотность свободной энергии в модели (1.1) в  $R^3$

**S-фаза.** Используя (6.20) с  $b = 0$ , получаем следующее уравнение для  $t$ :

$$2t^2 + 3Gt - 3G^2 \ln t - 2 - 3G = 0. \quad (6.23)$$

Прежде всего, видим, что (6.23) имеет два решения:  $t_1(G) \equiv 1$  (соответствует исходному представлению (6.2)) и  $t_2(G)$ , причем

$$t_2 < 1, \text{ если } G < G_c, \quad t_2 \geq 1, \text{ если } G \geq G_c, \quad G_c = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{19}{3}} \right) = 1,758\dots$$

Поведение энергии как функции  $G$  показано на рис.3. Плотность энергии для решения  $t_2$  отрицательна при  $G > G_c$  и равна нулю для  $t_1$ . Таким образом, точка  $G_c$  соответствует фазовому переходу из одной S-фазы в другую. В пределе сильной связи  $G \gg 1$  масса, эффективная константа связи и плотность энергии ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} M(G) &= mG \sqrt{\frac{3}{2} \ln G} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\ln G}\right) \right], \\ G_{\text{eff}}(G) &= \sqrt{\frac{2}{3 \ln G}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\ln G}\right) \right] \ll 1, \\ \varepsilon(G) &= -\frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} G^2 \ln G \right)^{3/2} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\ln G}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из асимптотики (6.24) видно, что второе симметричное представление достаточно точно описывает систему в пределе сильной связи. В то же время при  $G \sim 1$  ни одно из представлений не является приемлемым, т.к.  $G_{\text{eff}} \sim 1$ . Однако в любом случае справедливы следующие выводы.

- Нарушение симметрии отсутствует в модели (1.1) для любых  $G$ .
- Имеются две S-фазы и фазовый переход без перестройки симметрии имеет место при  $G \approx 1,758$ .

**6.4. Модель с исходно нарушенной симметрией.** Рассмотрим фазовую структуру модели (1.2). Уравнения для  $t$  и  $b$  получаются из (6.18) подстановкой  $G_4 = G$ ,  $G_3 = \sqrt{G}/2$ . В результате получаем

$$t^2 - 1 - \frac{3}{2}G(b^2 - t + 1) - 3\sqrt{G}b - \frac{3}{2}G^2 \ln t = 0, \quad (6.25)$$

$$2b + Gb(b^2 - 3t + 1) + 3\sqrt{G}(b^2 - t + 1) + 3G\sqrt{G}(1 + \sqrt{G}b) \ln t = 0.$$

Та же подстановка должна быть сделана в (6.13) для плотности свободной энергии. Два решения для  $b$  следуют из (6.25):

$$b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \quad (\text{симметричное}), \quad b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \pm \frac{t}{\sqrt{G}} \quad (\text{несимметричное}).$$

**BS-фаза.** Второе уравнение (6.25) принимает вид

$$t^2 - 3Gt + 3G^2 \ln t - 1 + 3G = 0. \quad (6.26)$$

Это уравнение имеет единственное решение  $t \equiv 1$ , которое ведет к исходному представлению с SSB:  $M = m$ ,  $G_{\text{eff}} = G$ ,  $E = 0$ .

**S-фаза.** Для симметричного случая ( $b = -1/\sqrt{G}$ ) получаем

$$2t^2 + 3Gt - 3G^2 \ln t + 1 - 3G = 0. \quad (6.27)$$

Можно убедиться, что уравнение (6.27) имеет вещественное решение только при  $G \geq G_c = 2,817\dots$ . Подставляя это решение в выражение для энергии (6.13), получаем функцию, представленную на рис.4. При  $G \gg 1$  масса, эффективная константа связи и плотность свободной энергии имеют те же асимптотики (6.24), что и в случае симметричной модели. Они показывают, что описание является достаточно точным вне критической области. В то же время критическая точка  $G_c$  найдена весьма приблизительно, т.к. вблизи этой точки  $G_{\text{eff}} \sim O(1)$  (см. рис.5). Поскольку

параметр порядка  $\sigma = \pm \frac{t(G)}{\sqrt{G}}$  разрывен в точке  $G_c$ , то фазовый переход —

первого рода. Суммируем выводы:

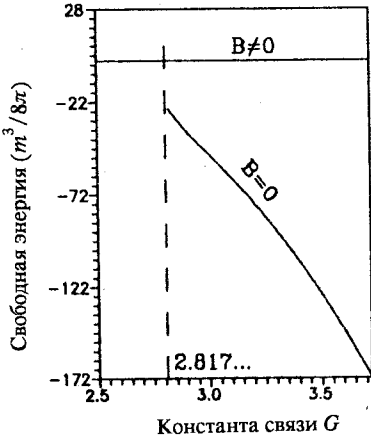


Рис. 4. Плотность свободной энергии в модели (1.2) в  $R^3$

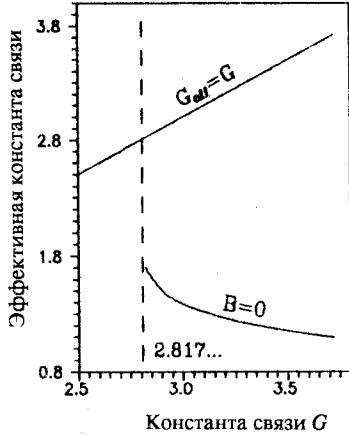


Рис. 5. Эффективные константы связи в модели (1.2) в  $R^3$

1. Симметрия восстанавливается в системе (1.2), если константа связи достаточно велика.

2. Имеется фазовый переход между BS- и S-фазами в точке  $G_c \sim 2,817\dots$

Эти выводы согласуются с результатами [20,29], но противоречат GER-аппроксимации. В двумерном случае, когда вариационный подход применим, метод канонических преобразований ведет к результатам, совпадающим с результатами GER-аппроксимации [19]. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим модель  $\phi_2^4$  [31].

**6.5. Двумерная модель (1.1).** Поскольку в этом случае расходятся только диаграмма рис.1,а и соответствующая вакуумная диаграмма, то в (6.12), (6.13) нужно учесть только слагаемые первого порядка по константе связи  $g = g_4$  ( $g_3 = 0$  для (1.1)). Согласно (6.16), (6.13) имеем

$$\begin{aligned} m^2 - M^2 + 3g(B^2 - D_0(t)) &= 0, \\ m^2 B + g(B^3 - 3BD_0(t)) &= 0, \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$E = \frac{1}{2} m^2 B^2 + L_0(t) + \frac{1}{4} g(B^4 - 6D_0(t) B^2 + 3D_0^2(t)), \tag{6.29}$$

где  $t = M^2/m^2$ . Для двумерного случая функции  $D_0$  и  $L_0$  имеют вид

$$D_0(t) = \frac{1}{4\pi} \ln t, \quad L_0(t) = \frac{m^2}{8\pi} (t - 1 - \ln t).$$

Уравнения (6.28) определяют минимум  $E(t, B)$  по переменным  $t$  и  $B$  и совпадают с условиями минимума ГЕР. Второе уравнение (6.28) имеет два решения:  $B = 0$  (симметричное) и  $B \neq 0$  (с нарушенной симметрией).

**Симметричная фаза.** Полагая  $B = 0$  в первом уравнении (6.28), получаем

$$2(t-1) = -3G \ln t, \quad G = \frac{g}{2\pi m^2}.$$

Имеется единственное решение  $t \equiv 1$  с энергией вакуума  $E_S \equiv 0$ .

**Фаза с нарушенной симметрией.** В этом случае перепишем (6.28) в виде

$$B^2 = \frac{t}{2\pi G}, \quad t + 2 = 3G \ln t.$$

С учетом этих уравнений плотность энергии (6.29) принимает вид

$$E_B = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ t - 1 - \frac{t^2 + 2}{2(t+2)} \ln t \right\}.$$

Можно показать, что  $E_B(G) \leq 0$  при  $G \geq G_0 = 1,625\dots$ . Критическое значение константы связи  $G_0$  совпадает с результатом ГЕР [19]. В пределе сильной связи  $G \gg 1$  получаем следующие асимптотики:

$$B^2 \rightarrow \frac{3}{4\pi} \ln G, \quad t \rightarrow 3G \ln G, \quad E_B \rightarrow -\frac{3m^2}{16\pi} G (\ln G)^2,$$

$$G_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{g}{2\pi M^2} \rightarrow \frac{1}{3 \ln G}, \quad G_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{g}{2\pi M^2} \sqrt{\sqrt{4\pi} B} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3 \ln G}}.$$

Более подробно двумерные модели (1.1), (1.2) мы обсудим в разд.10.

## 7. $O(N)$ -ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ

**7.1. Модель  $(\varphi^2)^2$  в  $R^3$ .** Исследуем фазовую структуру модели (1.3). Плотность гамильтониана в представлении, соответствующем  $G \ll 1$ , имеет вид

$$H = H_0 + H_I + H_{ct},$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N : [\pi_i^2 + (\nabla \varphi_i)^2 + m^2 \varphi_i^2] :, \quad H_I = \frac{g}{4} : \left[ \sum_i^N \varphi_i^2 \right]^2 :,$$

$$H_{ct} = : \left[ \frac{1}{2} A(m) \sum_i^N \varphi_i^2 + \delta E(m) \right] :,$$

$$A(m) = 2(N+2) g^2 \Sigma_0(m),$$

$$\delta E(m) = \frac{1}{4} N(N+2) g^2 W_0(m) - \frac{1}{2} N(N+2)^2 V_0(m). \quad (7.1)$$

Функции  $\Sigma_0$ ,  $W_0$ ,  $V_0$  — те же, что и в (6.6). Поля  $\varphi_i$  и  $\pi_i$  имеют вид (6.3) и удовлетворяют обычным ККС:

$$[\varphi_i(x), \pi_j(y)] = i\delta_{ij}\delta(x-y).$$

Состояния системы описываются пространством Фока с вакуумным вектором  $|0\rangle$ :

$$a_j(k)|0\rangle = 0, \quad \forall j, k, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Гамильтониан (7.1) взят в форме нормального произведения относительно вакуума  $|0\rangle$ .

**7.2. Каноническое преобразование.** В полной аналогии с тем, как мы поступали в случае однокомпонентного поля, произведем каноническое преобразование вида

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \pi_i) &\rightarrow (\Phi_i, \Pi_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ (\varphi_N, \pi_N) &\rightarrow (\Phi + B, \Pi). \end{aligned}$$

Здесь  $(\Phi_i, \Pi_i)$  — мультиплет полей с массой  $M_0 = mt_0$ ,  $(\Phi, \Pi)$  — поля с массой  $M = mt$ ,  $B$  — константа. Операторная форма этих преобразований имеет вид, аналогичный (6.8)–(6.9). Поля  $(\Phi_i, \Pi_i)$  и  $(\Phi, \Pi)$  имеют вид (6.3), но с новыми массами  $M_0$  и  $M$  и новыми операторами рождения и уничтожения  $(\alpha_i^+, \alpha_i)$ , действующими на пространстве Фока с вакуумным вектором  $|0\rangle$ :

$$\alpha_i(k)|0\rangle = 0, \quad \forall i, k.$$

Это новое пространство Фока унитарно неэквивалентно исходному.

В новых переменных гамильтониан, нормально упорядоченный относительно вакуума  $|0\rangle$ , в схеме перенормировки при нулевом внешнем импульсе принимает вид

$$\begin{aligned} H &= H'_0 + H'_I + H'_{ct} + H_1 + E, \\ H'_0 &= \frac{1}{2} : \left[ \sum_i^{N-1} (\Pi_i^2 + (\nabla\Phi_i)^2 + M_0^2\Phi_i^2) + \Pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + M^2\Phi^2 \right] :, \\ H'_I &= \frac{g}{4} : \left[ \Phi^4 + 4B\Phi^3 + 4B\Phi \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + 2\Phi^2 \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \left( \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 \right)^2 \right] :, \end{aligned}$$

$$H'_{ct} = \left[ \frac{1}{2} A_{\Phi}(M, M_0) \Phi^2 + \frac{1}{2} A_{\Phi_i}(M, M_0) \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \right. \\ \left. + C(M, M_0) \Phi + \delta E(M, M_0) \right] ;,$$

$$H_1 = \left[ \frac{1}{2} R(B, M, M_0) \Phi^2 + \frac{1}{2} P(B, M, M_0) \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + Q(B, M, M_0) \Phi \right] ;,$$

$$R(B, M, M_0) = m^2 - M^2 - g(3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)) + 3gB^2 + \\ + A(m) - A_{\Phi}(M, M_0),$$

$$P(B, M, M_0) = m^2 - M_0^2 - g(3D_0(t) + (N+1)D_0(t_0)) + gB^2 + \\ + A(m) - A_{\Phi_i}(M, M_0),$$

$$Q(B, M, M_0) = m^2 B + gB^3 - gB(3D_0(t) - (N+1)D_0(t_0)) + \\ + BA(m) - C(M, M_0),$$

$$E = \frac{m^2}{2} B^2 + \frac{g}{4} B^4 + L_0(t_0) + \frac{g}{4} \left\{ -2[3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)] B^2 + \right. \\ \left. + 3D_0^2(t) + (N-1)D_0^2(t_0) + 2(N-1)D_0(t)D_0(t_0) \right\} + \\ + \frac{1}{2} A(m) B^2 - \frac{1}{2} A(m) [D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)] + \delta E(m) - \delta E(M, M_0).$$

Здесь введены обозначения:

$$A_{\Phi} = 2g^2 [3\Sigma_0(M) + (N-1)\Sigma_0^1(M, M_0)],$$

$$A_{\Phi_i} = 2g^2 [3\Sigma_0^1(M_0, M) + (N+1)\Sigma_0^1(M_0)],$$

$$C = 2g^2 B [3\Sigma_0(M) + (N+1)\Sigma_0^1(M, M_0)],$$

$$\delta E(M, M_0) = \delta E_1 + \delta E_2 + \delta E_3,$$

$$\delta E_1 = g^2 B^2 [3\Sigma_0(M) + (N-1)\Sigma_0^1(M, M_0)],$$

$$\delta E_2 = \frac{1}{4} g^2 [3W_0(M) + (N^2 - 1)W_0(M_0) + 2(N - 1)W_0^1(M, M_0)],$$

$$\delta E_3 = -\frac{1}{2} g^3 [9V_0(M) + (N - 1)(N + 1)^2V_0(M_0) + 3(N - 1)V_0^1(M_0, M) + 3(N - 1)^2V_0^1(M, M_0) + 8(N - 1)V_2(M, M_0)],$$

$D_0, L_0, \Sigma_0, W_0$  и  $V_0$  уже встречались в (6.6), (6.14), а остальные расходящиеся интегралы равны

$$\Sigma_0^1(M, M_0) = \frac{1}{(4\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \{-s(M + 2M_0)\},$$

$$W_0^1(M, M_0) = \frac{1}{(4\pi)^3} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \{-2s(M + M_0)\},$$

$$V_0^1(M, M_0) = \frac{1}{4(2\pi)^5} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \arctan \left( \frac{s}{2M_0} \right) \arctan^2 \left( \frac{s}{2M} \right),$$

$$V_0^2(M, M_0) = \frac{1}{4(2\pi)^5} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \arctan^3 \left( \frac{s}{M + M_0} \right).$$

Соответствие между расходящимися интегралами и диаграммами иллюстрируется рис.6. Вид плотности энергии в терминах безразмерных переменных (6.17) приведен в [32].

Потребуем, чтобы  $H_1 = 0$ . Это требование обеспечивает правильную форму гамильтониана и дает уравнения на параметры  $t, t_0, B$ . В безразмерных переменных эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 3Gb^2 - 2f(1 + 2f) - 3Gf - (N - 1)Gf_0 + 3G^2 \ln t + \\ + (N - 1)G^2 \ln \left( \frac{t + 2t_0}{3} \right) = 0, \\ Gb^2 - 4f_0 \left( 1 + \frac{f_0}{2} \right) - Gf - (N + 1)Gf_0 + \\ + (N + 1)G^2 \ln t_0 + G^2 \ln \left( \frac{t_0 + 2t}{3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} b \left[ 2 + Gb^2 - 3Gf - (N - 1)Gf_0 + 3G^2 \ln t + \right. \\ \left. + (N - 1)G^2 \ln \left( \frac{t + 2t_0}{3} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

где  $f = t - 1, f_0 = t_0 - 1$ . Все логарифмические слагаемые в уравнениях (7.2) появились из-за перенормировки в порядке  $G^2$ .

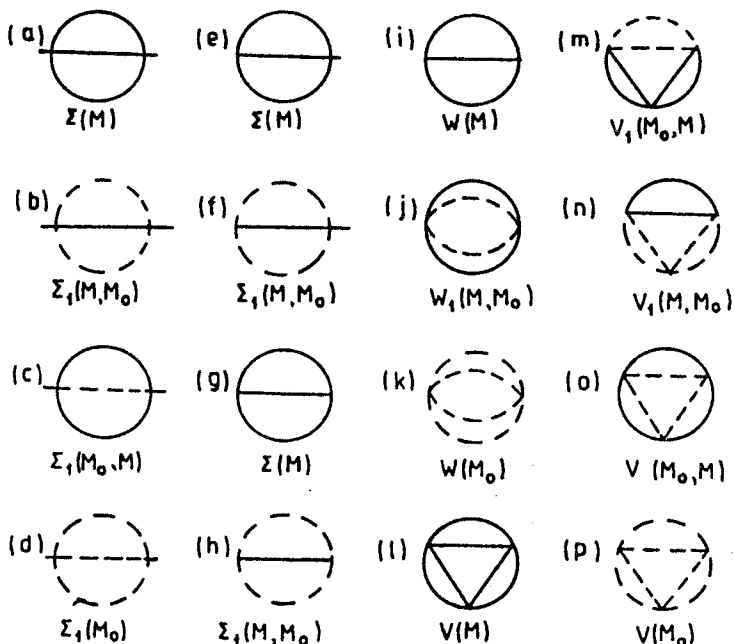


Рис. 6. Расходящиеся вакуумные диаграммы: сплошная линия — поле  $\Phi$ , пунктирная —  $\Phi_i$ ; диаграммы (a, b) дают вклад в  $A_\Phi$ ; (c, d) —  $A_{\Phi_i}$ ; (e, f) —  $C$ ; (g, h) —  $\delta E_1$ ; (i-k) —  $\delta E_2$ ; (l-p) —  $\delta E_3$

7.3. Фазовая структура. Имеются следующие возможные фазы:

$$S_1(B = 0, M = M_0 = m, O(N) \text{ — симметричная})$$

$$S_2(B = 0, M = M_0 \neq m, O(N) \text{ — симметричная})$$

$$BS_1(B = 0, M \neq M_0, O(N-1) \text{ — и } \Phi \rightarrow -\Phi \text{ симметричная})$$

$$BS_2(B \neq 0, M \neq M_0, O(N-1) \text{ — симметричная}).$$

Эти фазы соответствуют различным решениям системы (7.2).  $O(N)$ -симметричные фазы определяются условиями:  $b = 0, t_0 = t$ . Используя эти условия в (7.2), получаем следующее уравнение ( $f = t - 1$ ):

$$2f(2 + f) + (N + 2)Gf - (N + 2)G^2 \ln(1 + f) = 0. \quad (7.3)$$

$S_1$ -фаза с  $M_0 = M = m$ . Уравнение (7.3) имеет тривиальное решение  $f \equiv 0$  ( $t \equiv 1$ ) при любых  $G$ , которое соответствует исходному представле-



Рис.7. Плотность свободной энергии в модели (1.3) в  $R^3$  ( $N = 4$ )

нию. Энергия, масса и эффективная константа связи ( $\equiv G$ ) показаны на рис.7—9 сплошной линией.

$S_2$ -фаза с  $M_0 = M \neq m$ . Чтобы исключить решение  $t \equiv 1$ , перепишем (7.3) в виде

$$2 + 2t + (N + 2)G = (N + 2)G^2 \frac{\ln t}{t - 1}. \quad (7.4)$$

Это уравнение имеет единственное решение для любых  $G$ . Критическое значение  $G = G_0$ , при котором происходит переход

из одной  $S$ -фазы в другую, определяется из условия равенства нулю энергии в фазе с массой  $M$ . Это имеет место при  $t = 1$ . Подставляя  $t = 1$  в (7.4), находим

$$G_0 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{N + 18}{N + 2}} \right]. \quad (7.5)$$

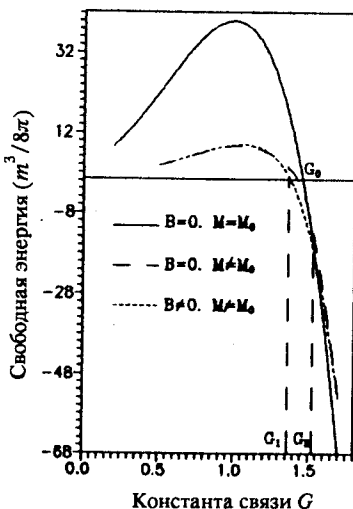
Асимптотики для режима сильной связи  $G \gg 1$  имеют вид

$$t(G) \rightarrow \sqrt{\frac{N + 2}{2}} G \sqrt{\ln G}, \quad G_{\text{eff}}(G) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{(N + 2) \ln G}} \ll 1, \quad (7.6)$$

$$E(G) \rightarrow -\frac{m^3}{8\pi} N(N + 2) \sqrt{\frac{N + 2}{2}} G^3 \ln^{3/2}(G).$$

Функции  $E(G)$ ,  $t(G)$  и  $G_{\text{eff}}(G)$  при промежуточных  $G$  показаны на рис.7—9.

$BS_1$ : расщепление масс при нулевом конденсате  $b = 0$ . Нарушение  $O(N)$ -инвариантности только за счет расщепления масс в мультиплете  $M \neq M_0$  соответствует  $b = 0$ ,  $t \neq t_0$ . Гамильтониан в этой фазе инвариантен относительно группы  $O(N - 1)$  и дискретного преобразования  $\Phi \rightarrow -\Phi$ . Эта фаза описывается системой (7.3) с  $b = 0$ . Чтобы исключить из (7.3) решение  $t = t_0$ , удобно ввести переменную  $r = t_0/t$ , вычест второе уравнение из первого и разделить результат на  $1 - r$ . Таким образом, получается следующая система уравнений:



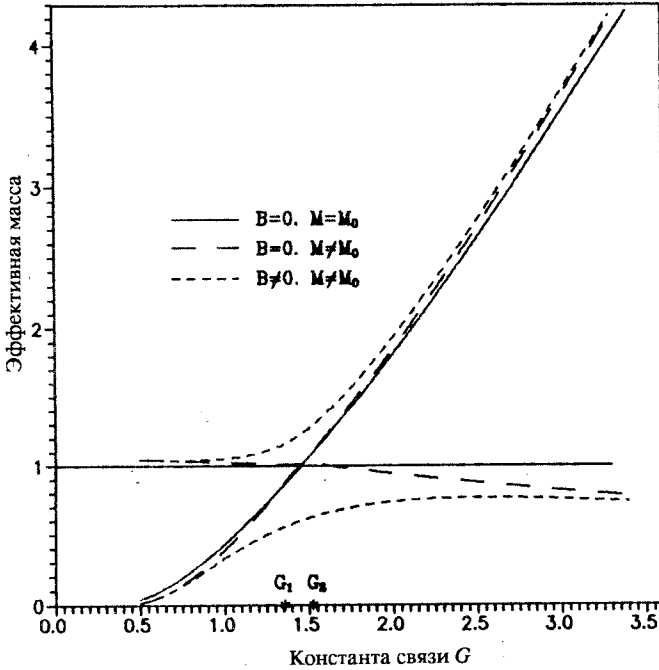


Рис. 8. Масса в различных фазах ( $N = 4$ ): верхняя и нижняя пунктирные линии —  $M_0$  и  $M$  в BS-фазах соответственно; сплошная линия —  $M$  в S-фазах

$$\begin{aligned}
 & 2(r + 1) t^2 + 2Gt - (N + 1)G^2 \frac{\ln r}{1 - r} + \\
 & + (N - 1)G^2 \frac{\ln \left( \frac{1 + 2r}{3} \right)}{1 - r} - G^2 \frac{\ln \left( \frac{2 + r}{3} \right)}{1 - r} = 0, \\
 & 2 + (N + 2) G - rt(2rt + (N + 1)G) - Gt + \\
 & + (N + 2) G^2 \ln(rt) + G^2 \ln \left( \frac{r + 2}{3r} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим асимптотики при  $G \gg 1$ :

$$\begin{aligned}
 t_0 & \rightarrow \sqrt{\frac{N + 2}{2}} G \sqrt{\ln G}, & t & \rightarrow \sqrt{\frac{N + 2}{2}} G^{\frac{1-N}{3}} \sqrt{\ln G}, \\
 G_{\text{eff}}^0 & = \frac{G}{t_0(G)} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(N + 2) \ln G}} \ll 1,
 \end{aligned}$$

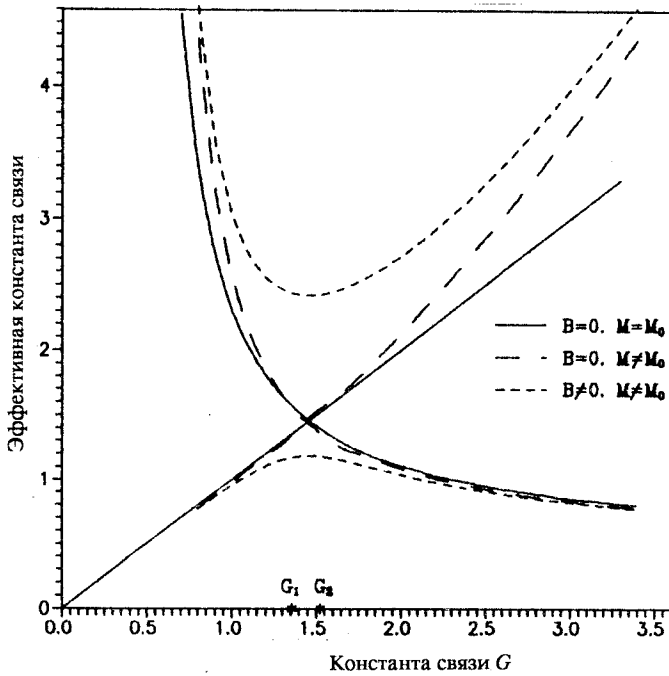


Рис.9. Эффективные константы связи в различных фазах ( $N = 4$ ): верхняя и нижняя пунктирные линии —  $G_{\text{eff}}$  и  $G_{\text{eff}}^{(0)}$  в BS-фазах соответственно; сплошная линия —  $G_{\text{eff}}$  в S-фазах

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{t(G)} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(N+2) \ln G}} G^{\frac{N+2}{3}} \gg 1, \quad (7.7)$$

$$E \rightarrow -\frac{m^3}{24\pi} (N^2 + 3N - 4) \sqrt{\frac{N+2}{2}} G^3 \sqrt{\ln^3 G}.$$

Энергия, массы и эффективные константы связи как функции  $G$  приведены на рис. 7—9.

**BS<sub>2</sub>**: фаза с расщеплением масс и  $b \neq 0$ . Последнее уравнение системы (7.2) имеет ненулевое решение для  $b$ :

$$Gb^2 = -2 + (N-2)G + 3Gt + (N-1)Gt_0 - 3G^2 \ln t - (N-1)G^2 \ln \left( \frac{t+2t_0}{3} \right). \quad (7.8)$$

Соответствующая этому решению фаза  $O(N - 1)$ -инвариантна и характеризуется расщеплением масс  $M \neq M_0$  и ненулевым конденсатом  $B \neq 0$ . Она описывается первыми двумя уравнениями системы (7.2) и уравнением (7.8), которые удобно представить в виде

$$b^2 = \frac{t^2}{G},$$

$$-2r^2 t^2 + 2G(1-r)t + 3G^2 \ln r + G^2 \ln \left( \frac{2+r}{3r} \right) - (N-1)G^2 \ln \left( \frac{1+2r}{3r} \right) = 0,$$

$$(1-2r^2)t^2 - (N+1)Grt - Gt + 2 + (N+2)G^2 \ln(rt) + G^2 \ln \left( \frac{2+r}{3r} \right) = 0,$$

где  $r = t_0/t$ . Асимптотическое поведение функций  $t$ ,  $t_0$ ,  $G_{\text{eff}}$ ,  $G_{\text{eff}}^0$  и  $E$  (см. рис.7—9) то же, что и в предыдущем случае (7.7). Конденсат  $b(G)$  при  $G \gg 1$  имеет вид

$$b(G) \rightarrow \sqrt{\frac{N+2}{2}} G^{-(2N+1)/6} \sqrt{\ln G}.$$

Существенный момент, касающийся обеих фаз с нарушенной симметрией, состоит в том, что масса  $M_0$  полей  $\Phi_i$ , принадлежащих  $O(N - 1)$ -мультиплету, больше массы  $M$  поля  $\Phi$  (см. рис.8). Это противоречит теореме Голдстоуна: «голдстоуновские бозоны»  $\Phi_i$  должны иметь нулевую массу. Заметим, что уравнения (7.2) имеют и решения  $M_0 < M$ , но энергии, соответствующие этим решениям, положительны и увеличиваются с ростом  $G$ .

Из асимптотик (7.6), (7.7) следует, что в режиме сильной связи реализуется  $S_2$ -фаза, поскольку только в ней эффективная константа связи убывает с ростом  $G$ . Сравнение асимптотик энергий подтверждает этот вывод. Для любого  $N$  энергия  $S_2$ -фазы меньше энергий остальных фаз. Переход между первой (исходной) и второй симметричными фазами происходит в точке  $G_0$  (см. (7.5)).

Более детальная, хотя и приближительная (эффективные константы связи порядка единицы), информация следует из сравнения энергий. Из рис.7 видно, что возможны фазовые переходы со следующей перестройкой симметрии:

$$O(N) \rightarrow O(N - 1) \rightarrow O(N).$$

Система переходит из исходной  $S_1$ -фазы в  $BS_2$  с  $B \neq 0$ , а затем в  $S_2$ -фазу с  $M \neq m$ . Например, при  $N = 4$  критические константы связи равны:

$G_1 = 1,357\dots, G_2 = 1,525\dots$ . Качественно эта картина не зависит от  $N: G_1 < G_0 < G_2 \forall N$ .

В любом случае справедливо следующее. При  $G \ll 1$  и  $G \gg 1$  система существует в первой и второй симметричных фазах соответственно. Вакуум и гамильтониан  $O(N)$ -инвариантны, а эффективное взаимодействие слабо.

#### 7.4. Модель $(\varphi^2)^2$ в $R^2$ .

Как и в случае однокомпонентного поля, GEP-аппроксимация [30] и метод канонических преобразований [31] ведут к одинаковому результату для модели (1.3) в  $R^2$ .

В этом случае расходятся только диаграммы первого порядка по константе связи (рис. 1, а), так что в двумерном пространстве-времени из требования  $H_1 = 0$  получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m^2 - M^2 - g(3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)) + 3gB^2 &= 0, \\ m^2 - M_0^2 - g(3D_0(t) + (N+1)D_0(t_0)) + gB^2 &= 0, \\ m^2B + gB^3 - gB(3D_0(t) - (N+1)D_0(t_0)) &= 0, \end{aligned} \quad (7.9)$$

а выражение для плотности энергии имеет вид

$$\begin{aligned} E &= \frac{m^2}{2} B^2 + \frac{g}{4} B^4 + (N-1)L_0(t_0) + L_0(t) + \\ &+ \frac{g}{4} \left\{ -2[3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)]B^2 + 3D_0^2(t) + \right. \\ &\left. + (N-1)D_0^2(t_0) + 2(N-1)D_0(t)D_0(t_0) \right\}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$D_0(t) = \frac{1}{4\pi} \ln t, \quad L_0(t) = \frac{m^2}{8\pi} (t - 1 - \ln t),$$

где  $t = M^2/m^2, t_0 = M_0^2/m^2$ . Уравнения (7.9) определяют минимум энергии (7.10) как функции  $(t, t_0, B)$  и совпадают с уравнениями, минимизирующими GEP.

Решение  $B = 0$  третьего уравнения (7.9) ведет к исходному симметричному представлению с  $M \equiv M_0 \equiv m$  и  $E \equiv 0$ . Других симметричных решений в отличие от трехмерного случая нет. Нетривиальное решение последнего уравнения (7.9) имеет вид

$$B^2 = 3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0) - \frac{m^2}{g}.$$

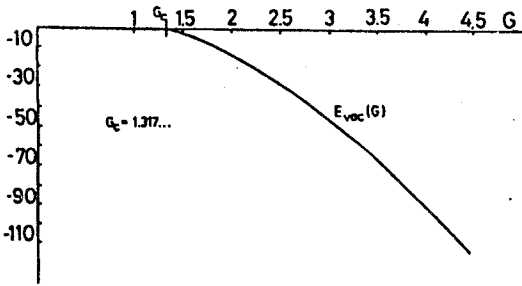


Рис.10. Эффективные константы связи для модели (1.3) в  $R^2$

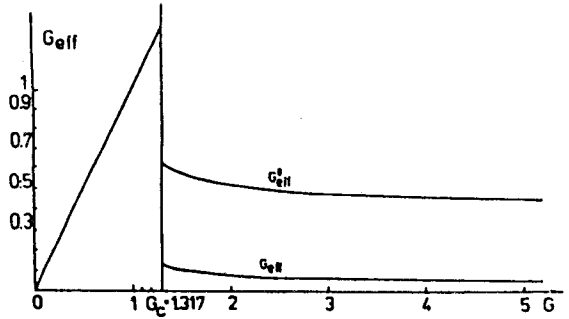


Рис.11. Плотность энергии вакуума для модели (1.3) в  $R^2$

Подставляя его в оставшиеся уравнения, находим

$$t+2=G(3 \ln t+(N-1) \ln t_0), \quad t_0=G \ln \left( \frac{t}{t_0} \right),$$

где  $G = g/2\pi m^2$ . Критическая константа связи определяется из условия  $E(G_c) = 0$ . Для  $N = 4$  она равна  $G_c = 1,317\dots$ . Зависимость энергии от  $G$  представлена на рис.10. При  $G \gg 1$  имеем

$$t(G) \rightarrow (N+2)G \ln G, \quad t_0(G) \rightarrow G \ln \ln G, \quad E_B(G) \rightarrow -\frac{m^2}{8\pi} \frac{3}{4} G \ln^2 G,$$

$$G_{\text{eff}}(G) = \frac{g}{2\pi M^2} \rightarrow \frac{1}{(N+2) \ln G}, \quad G_{\text{eff}}^0(G) = \frac{g}{2\pi M_0^2} \rightarrow \frac{1}{\ln \ln G}.$$

Эффективные константы связи как функции  $G$  при  $N = 4$  показаны на рис.11.

Из рис.10,11 видно, что точка  $G_c$  является критической и соответствует фазовому переходу с нарушением симметрии. Поскольку параметр порядка  $B$  разрывен в точке  $G_c$ , то происходит фазовый переход первого рода. Все эти выводы совпадают с результатами GEP-аппроксимации (см. [30]).

## 8. СТАБИЛЬНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫБОРА СХЕМЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ИСХОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В этом разделе мы будем исследовать стабильность результатов, полученных в разд.6, относительно выбора R-схемы. Прежде всего, приведем задачу к виду, удобному для этой цели. Лагранжиан (1.1) запишем в виде

$$L = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m_B^2) \varphi(x) - \frac{1}{4} g \varphi^4(x),$$

где  $m_B^2 = m^2(\mu) + \delta m^2(\mu)$ , а  $m(\mu)$  и  $\delta m(\mu)$  — перенормированная масса и массовый контрчлен в некоторой фиксированной R-схеме (см. п.3.1). Параметром теории является безразмерная константа связи  $G = g/2\pi t(\mu)$ . Плотность гамильтониана в представлении с массой  $m(\mu)$  имеет вид

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_I + H_{ct}, \\ H_0 &= \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2(\mu)\varphi^2], & H_I &= \frac{1}{4} g \varphi^4, \\ H_{ct} &= \frac{1}{2} \delta m^2(\mu) \varphi^2. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Операторы  $\varphi$  и  $\pi$  удовлетворяют обычным ККС.

Произведем каноническое преобразование к представлению с новой массой  $M = m(\mu)t$  и конденсатом  $B = \text{const}$ :

$$(\varphi, \pi) \rightarrow (\Phi + B, \Pi), \quad (8.2)$$

сопровождав его компенсирующим ренормгрупповым преобразованием (см. п.4.4):  $\mu \rightarrow \nu = \mu t$ , с тем чтобы обеспечить условие эквивалентности R-схем в разных представлениях:

$$\frac{m(\mu)}{\mu} = \frac{M}{\nu}. \quad (8.3)$$

В новом представлении плотность гамильтониана принимает вид

$$\begin{aligned} H &= H'_0 + H'_I + H'_{ct} + H_1, \\ H'_0 &= \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + M^2\Phi^2], & H'_I &= \frac{1}{4} g (\Phi^4 + 4B\Phi^3), \\ H'_{ct} &= \frac{1}{2} \delta m^2(\mu t) \Phi^2 + \delta m^2(\mu t) B\Phi, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} [m^2(\mu t) + 3gB^2 - M^2] \Phi^2 + [m^2(\mu t) + gB^2] B\Phi.$$

Чтобы обеспечить правильную форму гамильтониана, положим  $H_1 = 0$ , что ведет к следующим уравнениям на  $B$  и  $t$ :

$$m^2(\mu t) + 3gB^2 - m^2(\mu)t^2 = 0, \quad (8.5)$$

$$B[m^2(\mu t) + gB^2] = 0.$$

Будем исследовать R-схемную зависимость уравнений (8.5). В случае симметричного решения  $B = 0$  первое уравнение (8.5) принимает вид

$$m^2(\mu t) = t^2 m^2(\mu). \quad (8.6)$$

Решим это уравнение, вычисляя массу  $m(\mu t)$  в различных R-схемах.

**8.1. Схема вычитаний при нулевом импульсе с произвольной «массой».** В этой схеме массовые контрчлены даются диаграммами (см. рис.1, а, б) с нулевым внешним импульсом и произвольной «массой»  $\mu$  в пропагаторах. Это один из возможных в  $(\varphi^4)_3$  способов ввести масштаб  $\mu$ . Положим

$$m_B^2 = \bar{m}^2(\mu) + \delta\bar{m}_a^2(\mu) + \delta\bar{m}_b^2(\mu), \quad (8.7)$$

где  $\delta\bar{m}_a^2(\mu)$  и  $\delta\bar{m}_b^2(\mu)$  соответствуют диаграммам а и б рис.1. Эти контрчлены легко вычисляются:

$$\delta\bar{m}_a^2(\mu) = -3g\Delta_{\text{reg}}(\mu), \quad \delta\bar{m}_b^2(\mu) = 3!g^2\Sigma_{\text{reg}}(\mu),$$

$$\Delta_{\text{reg}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{duu^2}{u^2 + \mu^2}, \quad (8.8)$$

$$\Sigma_{\text{reg}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp\{-3\mu t\}.$$

Пусть в исходном представлении используется обычная схема перенормировки при нулевом импульсе, которая соответствует частному выбору параметра  $\mu$ , равного перенормированной массе  $m$ , т.е. условие

$$\bar{m}(m) = m \quad (8.9)$$

фиксирует стандартную схему вычитаний при нулевом импульсе в рамках R-схемы с произвольным  $\mu$ . Уравнение (8.6) принимает вид

$$\bar{m}^2(mt) = t^2 m^2. \quad (8.10)$$

Используя R-инвариантность затравочной массы  $m_B$  и (8.9), находим

$$\bar{m}^2(\mu) = m^2 \left[ 1 + \frac{3}{2} G \left( 1 - \frac{\mu}{m} \right) + \frac{3}{2} G^2 \ln \left( \frac{\mu}{m} \right) \right], \quad (8.11)$$

где  $G = g/2\pi m$ . Используя (8.11) с  $\mu = mt$  в (8.10), получаем уравнение (6.23).



**8.2. Размерная регуляризация: MS-схема.** Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = 3 - d, \quad \alpha = \frac{g}{2\pi}, \quad m_B^2 = m^2(\mu) + \delta m_a^2 + \delta m_b^2, \quad (8.12)$$

$m(\mu)$  — бегущая масса в MS-схеме. Проводя стандартные вычисления для диаграммы рис.1,а находим

$$\delta m_a^2 = -3gm(\mu) \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left( \frac{2\pi\mu}{m(\mu)} \right)^\varepsilon \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right).$$

Полагая  $d = 3$ , получаем конечный результат

$$\delta m_a^2 = \frac{3}{2} \alpha m(\mu), \quad (8.13)$$

что является естественным для размерной регуляризации в случае нечетной размерности «физического» пространства-времени. Вычисление диаграммы рис.1,б при нулевом внешнем импульсе дает

$$\Sigma_{\text{рег}} = \frac{3}{4} \alpha^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2(\mu)} \right) - \gamma_E + O(\varepsilon) \right]. \quad (8.14)$$

В MS-схеме только расходящаяся часть этого выражения включается в контрчлен:

$$\delta m_b^2 = \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{1}{\varepsilon}. \quad (8.15)$$

Подставляя (8.13), (8.15) в (8.12), получаем

$$m_B^2 = m^2(\mu) + \frac{3}{2} \alpha m(\mu) + \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{1}{\varepsilon}. \quad (8.16)$$

Перейдем в (8.16) к новому масштабу  $\nu$ . В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$m^2(\nu) + \frac{3}{2} \alpha m(\nu) - \frac{3}{2} \alpha^2 \ln \left( \frac{\nu}{\mu} \right) - m^2(\mu) - \frac{3}{2} \alpha m(\mu) = 0 \quad (8.17)$$

с очевидным условием

$$m(\nu) \Big|_{\nu=\mu} = m(\mu). \quad (8.18)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее (8.18), имеет вид

$$m(\nu) = -m(\mu) - \frac{3}{2} \alpha + \sqrt{\left[ 2m(\mu) + \frac{3}{2} \alpha \right]^2 + 6\alpha^2 \ln \left( \frac{\nu}{\mu} \right)}. \quad (8.19)$$

Полагая в (8.17)  $\nu = \mu t$  и  $m(\nu) = m(\mu)t$ , получаем уравнение, совпадающее с (6.23). Таким образом, в обоих случаях функция  $t(\cdot)$  оказывается одинаковой, в то время как бегущие массы  $\bar{m}(\nu)$  и  $m(\nu)$  совершенно различны (см. (8.11), (8.19)).

**8.3. Размерная регуляризация: вычитания при нулевом импульсе.** Включим в контрчлен  $\delta m_b^2$  не только полюсное слагаемое выражения (8.14), но и его конечную часть. Затравочная масса принимает вид

$$m_B^2 = \tilde{m}^2(\mu) + \frac{3}{2} \alpha \tilde{m}(\mu) + \frac{3}{4} \alpha^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left( \frac{4\pi\mu}{\tilde{m}^2(\mu)} \right) \right]. \quad (8.20)$$

Стандартным образом переходя в (8.20) к новому масштабу  $\nu$ , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{m}^2(\nu) - \tilde{m}^2(\mu) + \frac{3}{2} \alpha [\tilde{m}(\nu) - \tilde{m}(\mu)] - \\ - \frac{3}{2} \alpha^2 \ln \left( \frac{\nu}{\mu} \right) + \frac{3}{4} \alpha^2 \ln \left( \frac{\tilde{m}^2(\mu) \nu^2}{\tilde{m}^2(\nu) \mu^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Видим, что бегущая масса  $\tilde{m}$ , определяемая уравнением (8.21), отличается от  $\bar{m}$  и  $m$  (см. (8.11), (8.19)). Тем не менее подстановка

$$\nu = \mu t, \quad \tilde{m}(\nu) = \tilde{m}(\mu) t$$

в (8.21) дает уравнение, совпадающее с (6.23).

Вышеприведенные вычисления позволяют заключить, что, хотя бегущая масса зависит от R-схемы очень сильно, уравнение на параметр  $t$  более стабильно относительно выбора схемы перенормировки.

## 9. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ $\varphi^4$ -ТЕОРИЯ

**9.1. Гамильтониан  $(\varphi^4)_4$  и канонические преобразования.** Плотность гамильтониана, описывающего систему (1.1), (2.1) в режиме слабой связи, имеет вид (2.3). Канонические переменные  $\varphi$  и  $\pi$  можно представить в виде (2.4). Они удовлетворяют обычным ККС. Операторы рождения  $a^+(\mathbf{k})$  и уничтожения  $a(\mathbf{k})$ , через которые выражаются  $\varphi$  и  $\pi$ , определены на пространстве Фока частиц с массой  $m(\mu)$  и вакуумным вектором  $|0\rangle$ , удовлетворяющим условиям:

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Схема перенормировки в (2.3) фиксирована, т.е. выбран определенный  $R_\mu$ -класс и фиксировано отношение  $C = m(\mu)/\mu$ .

Представление (2.3) соответствует  $g(\mu) \ll 1$ . Имея это в виду, мы хотим знать, что представляет собой система в режиме сильной связи  $g(\mu) \gg 1$ .

Произведем следующее каноническое преобразование:

$$(\varphi, \pi) \rightarrow \left( \frac{1}{\xi} \Phi + \frac{1}{\xi} B, \xi \Pi \right). \quad (9.1)$$

Здесь  $(\Phi, \Pi)$  — поля с массой  $M = tm(\mu)$ ,  $B$  — константа. Согласно требованию эквивалентности R-схем в разных представлениях (см. п.4.4) каноническое преобразование к новой массе  $M$  сопровождается компенсирующим изменением точки перенормировки  $\mu \rightarrow \nu = \xi\mu$ , вследствие чего в (9.1) появляется константа конечной перенормировки поля  $\xi$ . Явный вид канонического преобразования (9.1) в терминах операторов рождения и уничтожения приведен в (4.8), (4.9). Поля  $(\Phi, \Pi)$  удовлетворяют ККС. При  $t \neq 1$  и  $B \neq 0$  они определены на пространстве Фока, унитарно неэквивалентном исходному.

Плотность гамильтониана в новом представлении принимает вид

$$\begin{aligned} H &= H'_0 + H'_1 + H'_{ct} + H_1, \\ H'_0 &= \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + M^2\Phi^2], \quad H'_1 = \frac{1}{4} g(\nu) [\Phi^4 + 4B\Phi^3], \\ H'_{ct} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{Z'_2} - 1 \right) \Pi^2 + (Z'_2 - 1)(\nabla\Phi)^2 \right] + \frac{1}{2} [\delta m^2(\nu) + 3(Z'_1 - 1)g(\nu)B^2] \Phi + \\ &+ \frac{1}{4} (Z'_1 - 1) g(\nu) (\Phi^4 + 4B\Phi^3) + [\delta m^2(\nu) + (Z'_1 - 1) g(\nu)B^2] B\Phi, \quad (9.2) \\ H_1 &= \frac{1}{2} [m^2(\nu) + 3g(\nu)B^2 - M^2] \Phi^2 + [m^2(\nu) + g(\nu)B^2] B\Phi. \end{aligned}$$

Здесь  $\nu = \xi\mu$ ,  $M = tm(\mu)$ . Для получения правильной формы гамильтониана положим  $H_1 = 0$ , что ведет к уравнениям

$$\begin{aligned} m^2(\mu t) + 3g(\mu t) B^2 - m^2(\mu) t^2 &= 0, \\ B [m^2(\mu t) + g(\mu t) B^2] &= 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Величины  $m(\mu t)$  и  $g(\mu t)$  связаны с  $m(\mu)$  и  $g(\mu)$  масштабным преобразованием и определяются РГ-уравнениями (3.2) с  $\nu = \xi\mu$  и граничными условиями:

$$g(\mu t) = g(\mu) \text{ при } t = 1, \quad m(\mu t) = m(\mu) \text{ при } t = 1. \quad (9.4)$$

Уравнения (9.3), (9.4) описывают в общем виде фазовую структуру  $(\varphi^4)_4$ -теории в произвольной схеме перенормировки. Эти уравнения сводят проблему фазовой структуры к свойствам РГ-функций.

9.2. Симметричная фаза. Полагая  $B = 0$ , получаем уравнение для  $t$ :

$$m^2(\mu t) = t^2 m^2(\mu). \quad (9.5)$$

Заметим, что (9.5) имеет ту же форму, что и соответствующее уравнение в  $R^3$  (8.6).

Примечательно, что совместно с уравнением (9.5) систему (3.2) можно решить в общем виде (не зная  $\gamma_m$ - и  $\beta$ -функций) в произвольной  $R$ -схеме, в то время как для самой системы (3.2) это может быть сделано только в не зависящих от массы схемах перенормировки. Действительно, второе уравнение (3.2) и (9.5) означают, что параметр  $t$  является функцией константы связи, которая в этих уравнениях может рассматриваться как независимая переменная. Так что систему (3.2), (9.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \frac{dt}{d\bar{g}} &= \beta^{-1}\left(\bar{g}, \frac{m(\mu t)}{\mu t}\right), \\ \frac{2}{t} \frac{dt}{d\bar{g}} &= -\gamma_m\left(\bar{g}, \frac{m(\mu t)}{\mu t}\right) \beta^{-1}\left(\bar{g}, \frac{m(\mu t)}{\mu t}\right), \\ m(\mu t) &= tm(\mu), \end{aligned} \quad (9.6)$$

где  $\bar{g}$  означает перенормированную константу связи. В силу граничных условий (9.4) имеем

$$t(\bar{g}) = 1 \quad \text{при} \quad \bar{g} = g. \quad (9.7)$$

Первые два уравнения (9.6) с учетом третьего принимают форму

$$\frac{d \ln t}{d\bar{g}} = \frac{1}{\beta(\bar{g}, C)}, \quad 2 \frac{d \ln t}{d\bar{g}} = -\frac{\gamma_m(\bar{g}, C)}{\beta(\bar{g}, C)}. \quad (9.8)$$

Константа  $C$  была фиксирована при построении исходного представления (2.3).

Свободным параметром в системе (9.8) с граничным условием (9.7) является граничное значение константы связи  $g$ . Интегрируя (9.8) по  $\bar{g}$  и учитывая (9.7), получаем

$$\ln t = \int_g^{G_{\text{eff}}} \frac{dx}{\beta(x, C)}, \quad \int_g^{G_{\text{eff}}} dx \frac{2 + \gamma_m(x, C)}{\beta(x, C)} = 0, \quad (9.9)$$

где  $G_{\text{eff}} = \bar{g}(g)$  — эффективная константа связи. В силу (9.7) эти уравнения имеют решение  $t \equiv 1$ ,  $G_{\text{eff}} \equiv g$ . Существование других решений зависит от вида РГ-функций. Чтобы снять вопрос о схемной зависимости, будем считать, что в исходном представлении (2.3) используется ка-

ноническая  $\mu$ -схема и  $C = 1$  (подробнее см. п.3.1). Напомним, что в  $\mu$ -схеме двухточечная функция Грина нормирована условием

$$\tilde{G}(p^2) \xrightarrow{p^2 \rightarrow \mu^2} \frac{i}{p^2 - m^2(\mu)}, \quad (9.10)$$

и при  $C = m(\mu)/\mu = 1$  мы получаем схему перенормировки на массовой поверхности, т.е.  $m(\mu)$  совпадает с физической массой  $m_{ph}$  по построению. Система (9.9) принимает вид

$$\ln t = \int_g^{G_{\text{eff}}} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad \int_g^{G_{\text{eff}}} dx \frac{2 + \gamma_m(x)}{\beta(x)} = 0, \quad M = m_{ph} t, \quad (9.11)$$

где

$$\gamma_m(g) \equiv \gamma_m(g, 1), \quad \beta(g) \equiv \beta(g, 1),$$

а  $\gamma_m\left(g, \frac{m(\mu)}{\mu}\right)$  и  $\beta\left(g, \frac{m(\mu)}{\mu}\right)$  вычислены в рамках канонической  $\mu$ -схемы.

Заметим, что (9.5) в этом случае имеет вид

$$\frac{m(m_{ph} t)}{m_{ph} t} \equiv \frac{m(M)}{M} = 1, \quad (9.12)$$

так что  $M$ , так же, как и  $m_{ph}$ , удовлетворяет условию перенормировки на массовой поверхности

$$\tilde{G}(p^2) \xrightarrow{p^2 \rightarrow M^2} \frac{i}{p^2 - M^2}, \quad (9.13)$$

и, следовательно, имеет смысл физической массы в новом представлении (9.2).

Вернемся к системе (9.11). Поскольку точные  $\gamma_m$ - и  $\beta$ -функции неизвестны, то просто рассмотрим различные возможности. Поведение  $\gamma_m(x)$  и  $\beta(x)$  при малых  $x$  можно найти по теории возмущений. Подынтегральное выражение во втором уравнении (9.11) ведет себя как

$$F(x) = \frac{2 + \gamma_m(x)}{\beta(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\beta_1 \alpha^2}, \quad (9.14)$$

здесь  $\alpha = 3!x/(4\pi)^2$ ,  $\beta_1 = 3/2$ . Известно, что  $\beta$ -функция положительная при  $x \in (0, g^*)$ , где УФ-стабильная точка  $g^*$  может быть как конечной, так и бесконечной. Если функция  $F(x)$  не меняет знак в интервале  $(0, g^*)$ , то (9.11) имеет только тривиальное решение  $G_{\text{eff}} \equiv g$ ,  $t \equiv 1$ . Другая возмож-

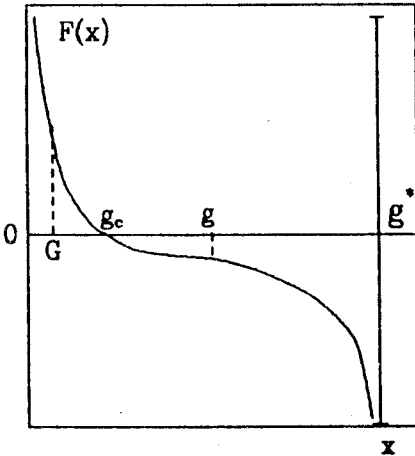


Рис.12. Возможное поведение подынтегральной функции

ность проиллюстрирована рис.12. Второе решение (9.11) существует, если  $F(x)$  меняет знак в некоторой точке  $g_c \in (0, g^*)$ .

Например, пусть

$$\gamma_m = -ax, \quad \beta = bx^2 (g^* = \infty),$$

где  $a > 0, b > 0$ .

После интегрирования находим из (9.11):

$$-\frac{1}{G_{\text{eff}}} + \frac{1}{g} - \frac{a}{2} \ln \left( \frac{G_{\text{eff}}}{g} \right) = 0, \quad b \ln t = \frac{1}{g} - \frac{1}{G_{\text{eff}}}.$$

Асимптотики в режиме сильной связи имеют вид

$$t(g) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} g^{-\frac{a}{2b}} \ll 1, \quad G_{\text{eff}}(g) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \frac{2}{a \ln g} \ll 1. \quad (9.15)$$

Этот пример иллюстрирует общую картину. Эффективная константа связи зависит только от  $g$ , причем

$$G_{\text{eff}}(g) \xrightarrow{g \rightarrow 0} g^*, \quad G_{\text{eff}}(g_c) = g_c, \quad G_{\text{eff}}(g) \xrightarrow{g \rightarrow g^*} 0, \quad (9.16)$$

и, т.к.  $\beta(x) > 0$ ,

$$t(g) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \infty, \quad t(g_c) = 1, \quad t(g) \xrightarrow{g \rightarrow g^*} 0. \quad (9.17)$$

Из сравнения асимптотик эффективных констант связи заключаем, что в режиме слабой связи ( $g \ll 1$ ) система существует в фазе с массой  $m_{ph}$ , а в пределе сильной связи ( $g \rightarrow g^*$ ) реализуется другая симметричная фаза с физической массой  $M \ll m_{ph}$  (см. (9.13)) и константой связи  $G_{\text{eff}} \ll 1$ . Фазовый переход имеет место при таком значении  $g_c$  константы связи  $g$ , что аномальная размерность оператора  $\varphi^2$  компенсирует его каноническую размерность:  $2 + \gamma_m(g_c) = 0$ .

9.3. Динамическое нарушение симметрии. Гамильтониан  $H'_{ct}$  отражает хорошо известный факт, что контрчлены для  $(\varphi^4)_4$  со спонтанным

нарушением симметрии полностью определяются контрчленами для симметричного случая (например, см. [45]). Так что  $m(\mu t)$  и  $g(\mu t)$  в (9.3) определяются одними и теми же уравнениями (3.2) при  $B = 0$  и  $B \neq 0$ .

Уравнения (9.3) могут быть легко переписаны в следующем виде:

$$B^2 = - \frac{m^2(\mu t)}{g(\mu t)}, \quad t^2 = - 2 \frac{m^2(\mu t)}{m^2(\mu)}. \quad (9.18)$$

Уравнения (9.18) не имеют вещественных решений, если  $m^2(\mu t) > 0$ ,  $\forall g(\mu), t$ . Именно такая ситуация имеет место для любой не зависящей от массы R-схемы. Так что, по крайней мере в этом случае, в системе нет представлений с  $B \neq 0$ , и, следовательно, отсутствует динамическое нарушение симметрии.

**9.4. Корреляция между фазовой структурой и УФ-расходимостями.** Теперь можно сравнить фазовую структуру моделей (1.1), (1.2), (1.3) в  $R^4, R^3$  и  $R^2$  [31]. Из таблицы хорошо видно, что поведение систем при разных  $d$  совершенно различно. Независимо от симметрии исходного

Таблица. Фазы в режиме сильной связи

	$G \ll 1$	$G \gg 1$
$R^2$	$\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} g \varphi^4$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4 + gB(g) \Phi^3$ (BS)
$R^3$		$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4$ (S)
$R^4$	$\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} g \varphi^4$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} G_{\text{eff}} \Phi^4$ , (S) если $\exists g_c \in (0, g^*): 2 + \gamma_m(g_c) = 0$
		?, если $\forall g \in (0, g^*) 2 + \gamma_m(g) > 0$
$R^2$	$\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} g \varphi^4 + m \sqrt{\frac{g}{2}} \varphi^3$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4 + gB(g) \Phi^3$ (S)
$R^3$		$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4$ (S)
$R^2$	$\frac{1}{2} m^2 \sum_i^N \varphi_i^2 + \frac{1}{4} g \left[ \sum_i^N \varphi_i^2 \right]^2$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{2} M_0^2 \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 +$ (BS) $+ \frac{1}{4} g \left[ \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \Phi^2 \right] + gB(g) \Phi \left[ \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \Phi^2 \right]$
$R^3$		$\frac{1}{2} M^2 \sum_i^N \Phi_i^2 + \frac{1}{4} g \left[ \sum_i^N \Phi_i^2 \right]^2$ (S)

лагранжиана при  $G \gg 1$  в  $R^2$  реализуется BS-фаза, в то время как в  $R^3$  имеем S-фазу. Можно заключить, что разное УФ-поведение ведет к разной фазовой структуре. Следующее эвристическое рассуждение (см., например, монографию Саймона [8]) в какой-то мере объясняет корреляцию между фазовой структурой теории и характером ее УФ-расходимостей. Интуитивно ясная причина нарушения симметрии в  $(\varphi^4)_2$  состоит в нормальном упорядочении гамильтониана. Другими словами, нарушение симметрии в этом случае объясняется вкладом в перенормировку массы диаграммы рис.1,а, который в режиме сильной связи меняет знак затравочной массы  $m_B$ . Противоположная ситуация имеет место в  $(\varphi^4)_3$ , поскольку уже две диаграммы дают вклад в  $m_B$  с разными знаками. Затравочная масса оказывается положительной при больших  $g$ , и нарушение симметрии отсутствует. В  $(\varphi^4)_4$  картина гораздо сложнее, т.к. затравочная масса представлена знакопеременным рядом. Этот ряд может быть положительным для любых  $g$ , так что причины для появления фазы с нарушенной симметрией будут вообще отсутствовать.

## 10. $(\varphi^4)_2$ -ТЕОРИЯ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Сама постановка задачи о динамической перестройке основного состояния квантово-полевой системы при изменении константы связи (типа постоянной тонкой структуры) выглядит достаточно искусственной, хотя и представляет интерес с чисто теоретической точки зрения. Гораздо более близким к реальной физике является исследование поведения полевой системы при изменении температуры. Такая задача имеет прямое отношение к ряду задач физики твердого тела [6,58], к системам типа кварк-глюонной плазмы или к проблеме эволюции Вселенной на ранних стадиях [3].

Активное исследование динамических температурных эффектов в КТП началось с работы Киржница [2]. В большинстве работ исследуются четырехмерные теории в одно- и двухпетлевом приближении к эффективному потенциалу. Фазовая структура  $(\varphi^4)_2$  в рамках высокотемпературного разложения исследовалась в работах [4—6].

Мы получим фазовые диаграммы в  $(G, \theta)$ -плоскости для теорий (1.1), (1.2). Напомним, что  $G = g/2\pi m^{4-d}$  и  $\theta = T/m$  — безразмерные параметры теории. Если по переменной  $G$  поведение систем в  $R^2$  и  $R^3$  совершенно различно (см. таблицу), то зависимость от температуры, напротив, каче-



ственно одна и та же в обоих случаях: независимо от исходной симметрии система находится в симметричной фазе, если температура достаточно велика. Это наиболее общий вывод из вида фазовых диаграмм.

**10.1. Гамильтониан при нулевой температуре и канонические преобразования.** С физической точки зрения любое представление ККС будет адекватным только в том случае, когда масса частиц зависит от температуры. Априори эта зависимость неизвестна даже в пределе слабой связи. Поэтому начнем построение конечно-температурной теории с представления ККС при  $T = 0$ , а затем, пользуясь методом канонических преобразований, введем температурную зависимость. Как и в разд.6, будем иметь дело с лагранжианом (6.1), объединяющим обе модели (1.1), (1.2).

Исходное представление при  $G \ll 1$ ,  $T = 0$ . Для устранения всех расходимостей достаточно записать плотность гамильтониана в нормальной форме:

$$H = H_0 + H_I, \quad H_0[\varphi, \pi] = \frac{1}{2} : [\pi^2(x) + (\nabla\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x)]:, \\ H_I[\varphi, \pi] = : \left[ \frac{1}{4} g_4 \varphi^4(x) + g_3 \varphi^3(x) \right] :. \quad (10.1)$$

Операторы  $\varphi, \pi$  удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям. Операторы рождения и уничтожения  $a^+(k)$  и  $a(k)$  действуют на пространстве Фока с массой  $m$ . Вакуумный вектор  $|0\rangle$  подчиняется условию:  $a(k)|0\rangle = 0, \forall k$ .

**Каноническое преобразование.** Произведем каноническое преобразование:

$$\pi(x) \rightarrow \pi_t(x), \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi_t(x) + B, \quad (10.2)$$

$\varphi_t$  и  $\pi_t$  — поля с массой  $M = mt$ . Новые операторы рождения и уничтожения  $a^+(k, t)$ ,  $a(k, t)$  действуют на пространстве Фока с вакуумным вектором

$$|0(t, B)\rangle = U_2^{-1}(t)U_1^{-1}(B)|0\rangle, \quad a(k, t)|0(t, B)\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (10.3)$$

$U_1$  и  $U_2$  представлены формулами (6.8).

Выражая гамильтониан в новых переменных и переходя к нормальному упорядочению относительно вакуума  $|0(t, B)\rangle$ , получаем

$$H = H'_0 + H'_I + H_1 + E, \\ H'_0 = \frac{1}{2} : [\pi_t^2(x) + (\nabla\varphi_t(x))^2 + M^2\varphi_t^2(x)]:, \quad (10.4) \\ H'_I = : \left[ \frac{1}{4} h_4 \varphi_t^4(x) + h_3 \varphi_t^3(x) \right] :, \quad h_3 = g_3 + g_4 B, \quad h_4 = g_4,$$

$$H_1 = : \left[ \frac{1}{2} R(t, B) \varphi_t^2(x) + P(t, B) \varphi_t(x) \right] :,$$

$$R = m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D_0) + 6g_3B, \quad (10.5)$$

$$P = m^2B + g_4(B^3 - 3BD_0) + 3g_3(B^2 - D_0),$$

$$E = \frac{1}{2} m^2B^2 + L_0 + \frac{g_4}{4} [b^4 - 6B^2D_0 + D_0^2] + g_3B[B^2 - 3D_0],$$

$$D_0(t) = \frac{1}{4\pi} \ln t, \quad L_0(t) = \frac{m^2}{8\pi} [t - 1 - \ln t]. \quad (10.6)$$

Чтобы ввести температурную зависимость, произведем еще одно каноническое преобразование, составляющее основную идею метода термополевой динамики (TFD).

**10.2. Термополевая динамика.** Детальное описание TFD можно найти в обзоре [64] или в монографии [58]. Здесь мы ограничимся кратким изложением основной идеи.

Принципиальный момент TFD состоит в удвоении числа полевых переменных при  $T > 0$ . Интуитивное обоснование этого сводится к следующему. Наличие термостата приводит к существованию большого числа возбужденных квантов и свободных уровней энергии, называемых дырками. Поэтому поглощение энергии системой происходит двумя способами: либо за счет возбуждения дополнительных квантов, либо за счет заполнения свободных мест в пространстве частиц, т.е. уничтожения дырок с отрицательной энергией (подчеркнем отличие от античастиц в обычном понимании, являющихся дырками в пространстве состояний с отрицательной энергией). Эти два механизма поглощения независимы друг от друга, что и ведет к удвоению числа полевых переменных.

В соответствии с этой мотивацией строятся следующие операторы:

$$\alpha(k) = a(k, t) \otimes 1, \quad \tilde{\alpha}(k) = 1 \otimes a(k, t), \quad (10.7)$$

которые удовлетворяют обычным ККС:

$$[\alpha(k), \alpha^+(k')] = \delta(k - k'), \quad [\tilde{\alpha}(k), \tilde{\alpha}^+(k')] = \delta(k - k')$$

и действуют на пространстве Фока с вакуумом:

$$|0(t, B)\rangle = |0(t, B)\rangle \otimes |0(t, B)\rangle. \quad (10.8)$$

Оператор  $\alpha(k)$  описывает уничтожение частиц, а  $\tilde{\alpha}(k)$  — дырок. При ненулевой температуре основное состояние системы не является состоянием без частиц. Среднее число частиц описывается функцией распре-

деления (бозонной или фермионной). Следующий шаг состоит в переходе к квазичастичной картине. Квазичастицы соответствуют возбуждениям над физическим основным состоянием — термальным вакуумом.

Зависящие от температуры операторы  $\alpha(k, \beta)$ ,  $\tilde{\alpha}(k, \beta)$  ( $\beta = 1/T$ ) вводятся с помощью температурного преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned} \alpha(k, \beta) &= \alpha(k) \cosh(\xi) - \tilde{\alpha}^+(k) \sinh(\xi) \\ \tilde{\alpha}(k, \beta) &= \tilde{\alpha}(k) \cosh(\xi) - \alpha^+(k) \sinh(\xi), \end{aligned} \tag{10.9}$$

или то же самое в операторной форме:

$$\begin{aligned} \alpha(k, \beta) &= U^{-1}(\beta) \alpha(k) U(\beta), & \tilde{\alpha}(k, \beta) &= U^{-1}(\beta) \tilde{\alpha}(k) U(\beta), \\ U(\beta) &= \exp \left\{ \int dk \xi(k, \beta) [\tilde{\alpha}(k) \alpha(k) - \alpha^+(k) \tilde{\alpha}^+(k)] \right\}. \end{aligned}$$

Операторы  $\alpha(k, \beta)$ ,  $\tilde{\alpha}(k, \beta)$  определены на пространстве Фока с термальным вакуумом

$$|0(\beta, t, B)\rangle = U^{-1}(\beta) |0(t, B)\rangle, \tag{10.10}$$

причем

$$\alpha(k, \beta) |0(\beta, t, B)\rangle = \tilde{\alpha}(k, \beta) |0(\beta, t, B)\rangle = 0 \quad \forall k, \beta.$$

Параметр  $\xi(k, \beta)$  определяется из требования, чтобы среднее число частиц в состоянии  $|0(\beta, t, B)\rangle$  равнялось статистической функции распределения:

$$\langle 0(\beta, t, B) | \alpha^+(k) \alpha(k) | 0(\beta, t, B) \rangle = n(\omega(k, t)) = [\exp \{ \beta \omega(k, t) \} - 1]^{-1}.$$

Используя (10.7) и преобразование, обратное (10.9), находим

$$\sinh^2(\xi) = [\exp \{ \beta \omega(k, t) \} - 1]^{-1}. \tag{10.11}$$

Условие (10.11) гарантирует, что введенная величина  $T = 1/\beta$  имеет смысл статистической температуры. В соответствии с (10.7) строятся поля  $(\Phi, \Pi)$  и  $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi})$ , определенные на пространстве Фока с вакуумом (10.8). Выражения для тильда-сопряженных переменных  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi}$  получаются из  $\Phi, \Pi$  подстановкой  $(\alpha, \alpha^+) \rightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^+)$ .

Для определения полей на пространстве с термальным вакуумом (10.10) используется преобразование, обратное (10.9), с помощью которого операторы  $\Phi, \Pi, \tilde{\Phi}, \tilde{\Pi}$  выражаются через  $\alpha(k, \beta), \alpha^+(k, \beta), \tilde{\alpha}(k, \beta), \tilde{\alpha}^+(k, \beta)$ .

Плотность полного гамильтониана в TFD-формализме определяется формулой

$$\hat{H} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} = H \otimes 1, \quad \tilde{\mathcal{H}} = 1 \otimes H. \tag{10.12}$$

Здесь  $\mathcal{H}$  описывает частицы, а  $\tilde{\mathcal{H}}$  — дырки с отрицательной энергией, чем и обусловлен знак «-» перед  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Плотность гамильтониана  $\mathcal{H}$  в представлении термального вакуума (10.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0'' + \mathcal{H}_I'' + \mathcal{H}_1' + E', \\ \mathcal{H}_0'' &= \frac{1}{2} : [\Pi^2(x) + (\nabla\Phi(x))^2 + M^2\Phi^2(x)] :, \\ \mathcal{H}_I'' &= : \left[ \frac{1}{4} h_4 \Phi^4(x) + h_3 \Phi^3(x) \right] :, \\ \mathcal{H}_1' &= : \left[ \frac{1}{2} \mathcal{H}(t, B; \beta) \Phi^2(x) + \mathcal{H}(t, B; \beta) \Phi(x) \right] :, \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D) + 6g_3B, \\ \mathfrak{P} &= m^2B + g_4(B^3 - 3BD) + 3g_3(B^2 - D), \\ D(t, \beta) &= \frac{1}{4\pi} \ln t - \frac{1}{\pi} d(\theta/\sqrt{t}),\end{aligned}$$

Плотность энергии  $E'$  получается из  $E$  заменой  $D_0 \rightarrow D$ ,  $L_0 \rightarrow L$ , где

$$\begin{aligned}L(t, \beta) &= \frac{m^2}{8\pi} \{ t - 1 - D(t, \theta) + 4t [2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \}, \\ d(z) &= \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \left( \exp \left\{ \frac{1}{z} \sqrt{1+u^2} \right\} - 1 \right)^{-1}, \\ s(z) &= \int_0^\infty \frac{du u^2}{\sqrt{1+u^2}} \left( \exp \left\{ \frac{1}{z} \sqrt{1+u^2} \right\} - 1 \right)^{-1}.\end{aligned} \quad (10.14)$$

Согласно требованию эквивалентности R-схем нормальное произведение в этих формулах относится к  $\alpha(k, \beta)$ ,  $\alpha^+(k, \beta)$ . Оператор  $\tilde{\mathcal{H}}$  строится по правилу  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*[\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi}]$ .

Плотность внутренней энергии  $E'$  состояния  $|0(t, B; \beta)\rangle$  связана с плотностью свободной энергии  $F$  соотношением

$$F = E' - TS, \quad (10.15)$$

где  $S$  — плотность энтропии:

$$\begin{aligned}S &= - \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} [n(k, t) \ln n(k, t) - (1 - n(k, t)) \ln(1 - n(k, t))] = \\ &= \frac{m^2}{\pi} \frac{t}{T} [2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})], \\ n(k, t) &= [\exp(\beta\omega(k, t)) - 1]^{-1}.\end{aligned} \quad (10.16)$$

Из (10.6), (10.14), (10.15) и (10.16) получаем

$$F = \frac{1}{2} m^2 B^2 + \frac{g_4}{4} [B^4 - 6B^2 D(t; \beta) + 3D^2(t; \beta)] + g_3 B [B^2 - 3D] + \frac{m^2}{8\pi} \{t - 1 - 4\pi D(t; \theta) - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})]\}. \quad (10.17)$$

Потребуем, чтобы

$$\mathfrak{R}(t, B; \theta) = 0, \quad \mathfrak{P}(t, B; \theta) = 0. \quad (10.18)$$

Легко проверить эквивалентность (10.18) уравнениям

$$\frac{\partial F(t, B)}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(t, B)}{\partial B^2} = M^2 = m^2 t,$$

которые аналогичны условиям минимальности и стабильности эффективного потенциала [3]. С другой стороны, (10.18) определяют минимум  $F(t, B)$  как функции двух переменных  $t$  и  $B$  только при  $\theta = 0$ . Так что только в этом случае наши результаты должны совпадать с результатами ГЕР-аппроксимации.

**10.3. Симметричная модель.** При  $g_3 = 0$  и  $g_4 = g$  получаем из (10.18) и (10.13) следующие уравнения на  $B$  и  $t$  ( $G = g/2\pi m^2$ ):

$$\begin{aligned} B[gB - 3gD(t; \theta) + m^2] &= 0, \\ 3gB^2 - 3gD(t; \theta) - m^2(t - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

**Симметричная фаза.** Полагая  $B = 0$  во втором уравнении (10.19), получаем

$$\frac{2}{3G}(t - 1) = -\ln t + 4d(\theta/\sqrt{t}). \quad (10.20)$$

Это уравнение имеет единственное решение при любых  $G$  и  $\theta$ , причем  $t(G, \theta) \equiv 1$  только при  $\theta = 0$ . Плотность свободной энергии имеет вид

$$F_S = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ \left( \frac{2}{3G} + 1 \right) (t - 1) + \frac{(t - 1)^2}{3G} - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}. \quad (10.21)$$

**Фаза с нарушенной симметрией.** Используя ненулевое решение для  $B$ , перепишем (10.19) в виде

$$B^2 = \frac{t}{4\pi G}, \quad \frac{t}{3G} + \frac{2}{3G} = \ln t - 4d(\theta/\sqrt{t}).$$

Второе уравнение имеет решение только для таких  $G$  и  $\theta$ , что  $G \geq G_c(\theta)$ . Функция  $G_c(\theta)$  представлена на рис.13. Плотность свободной энергии дается выражением:

$$F_B = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ -\frac{1}{2G} + \left( 1 - \frac{1}{3G} \right) (t - 1) - \frac{(t - 1)^2}{6G} - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}. \quad (10.22)$$

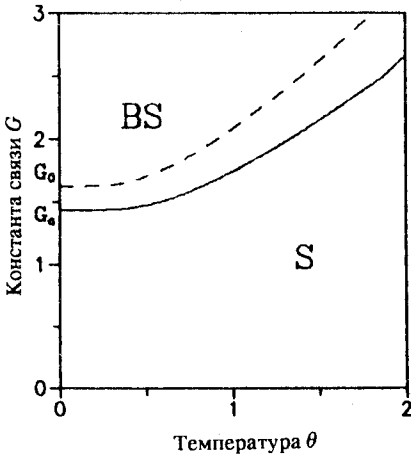


Рис.13. Фазовая диаграмма для симметричной  $(\varphi^4)_2$

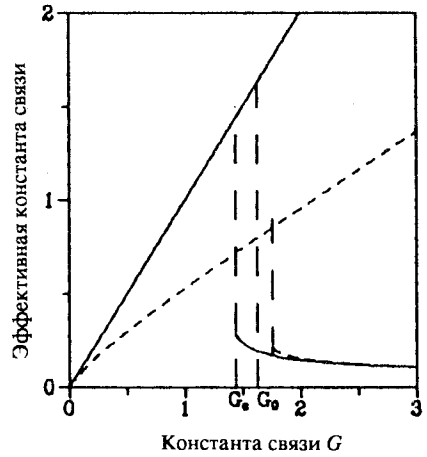


Рис.14. Эффективные константы связи для симметричной  $(\varphi^4)_2$ : верхние линии — S-фаза; пунктирная линия —  $\theta = 1$ , сплошная —  $\theta = 0$

Сравнивая эффективные константы связи  $G_{\text{eff}} = G/t(G, \theta)$  в S- и BS-фазах, находим, что граница фаз дается функцией  $G_c(\theta)$  (сплошная линия на рис.13). Из сравнения свободных энергий  $F_S$  и  $F_B$  получаем границу, представленную на рис.13 пунктирной линией. Видно, что эти две границы не противоречат друг другу. Значение  $G_0 = 1,625\dots$  совпадает с критической константой связи в GEP-аппроксимации, поскольку при  $\theta = 0$  уравнения (10.19) совпадают с уравнениями, минимизирующими гауссовский эффективный потенциал.

В критической области эффективная константа связи достаточно велика в обеих фазах (см. рис.14), так что пертурбативные поправки будут велики и могут изменить границу, представленную пунктирной линией. Чтобы оценить это изменение, вычислим поправки к свободной энергии при нулевой температуре. При этом мы ограничимся порядком  $O(G^3)$  для S-фазы и  $O(G_{\text{eff}}^2)$  для BS. Необходимые диаграммы показаны на рис.15,16. В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta F_S &= \frac{m^2}{8\pi} (-1,671G^2 + 4,039G^3 + O(G^4)), \\ \Delta F_B &= \frac{M^2}{8\pi} (-1,758G_{\text{eff}}^2 - 4,316G_{\text{eff}}^3 - O(G_{\text{eff}}^3)). \end{aligned} \tag{10.23}$$

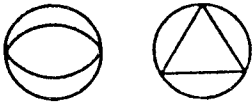


Рис.15. Диаграммы  $O(G^2)$  и  $O(G^3)$  в S-фазе

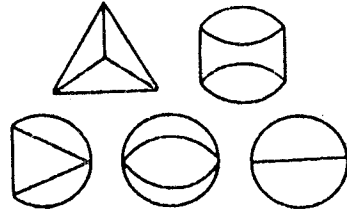


Рис.16. Диаграммы  $O(G_{eff})$  и  $O(G_{eff}^2)$  в BS-фазе

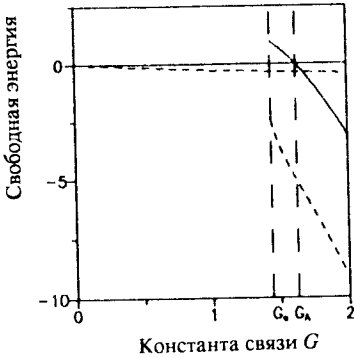


Рис.17. Плотность свободной энергии: пунктирная линия —  $F_S, F_B$ ; сплошная —  $F_S + \Delta D_S, F_B + \Delta F_B$

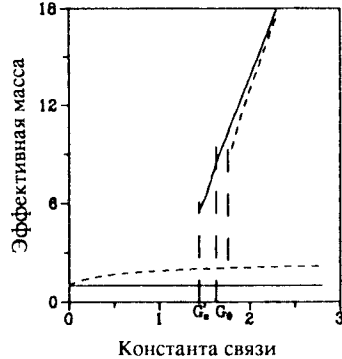


Рис.18. Массы в симметричной модели: пунктирная линия —  $\theta = 1$ ; сплошная —  $\theta = 0$ ; верхние линии — BS-фаза

Видно, что ряд (асимптотический) для  $\Delta F_B$  — знакпостоянный. Это обычное свойство систем с вырожденным вакуумом (см., например, [66]). Суммируя по Борелю разложения (10.23), находим

$$\Delta F_S = \frac{m^2}{8\pi} \left( \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1 + 0,806Gt}{1 + 0,806Gt + 0,836(Gt)^2} - 1 \right),$$

$$\Delta F_B = - \frac{M^2}{8\pi} \left( \text{VP} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1 + 0,531G_{eff}t}{1 - 1,228G_{eff}t} - 1 \right),$$

Символ VP означает главное значение интеграла в смысле Коши (о методах суммирования знакпостоянных асимптотических рядов см. [66]). Сплошной и пунктирной линиями на рис.17 показана свободная энергия без учета и с учетом поправок соответственно. Поправки сдвигают критическую точку из  $G_0 \sim 1,625\dots$  в  $G_c(0) \sim 1,44\dots$ . Аналогичная картина должна иметь место и при  $\theta \neq 0$ .

Параметр порядка

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{t(G, \theta)}{4\pi G}} \quad (10.24)$$

и масса  $M^2 = m^2 t(G, \theta)$  (рис.18) разрывны на границе фаз, так что мы имеем переход первого рода. Однако этот результат ненадежен из-за большого значения  $G_{\text{eff}}$  вблизи границы. В режимах сильной и слабой связи описание достаточно точное, т.к. эффективная константа связи в этих случаях мала.

**10.4. Модель с исходно нарушенной симметрией.** Подставляя в (10.18) и (10.13)  $g_4 = g$  и  $g_3 = m\sqrt{g/2}$ , получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} gB^3 + 3m\sqrt{g/2}B^2 + B[m^2 - 3gD(t, \theta)] - 3m\sqrt{g/2}D(t, \theta) &= 0, \\ 3gB^2 + 3m\sqrt{2g}B - 3gD(t, \theta) - M^2 + m^2 &= 0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Согласно решениям этой системы, имеются две фазы с нарушенной симметрией и одна симметричная.

**S-фаза.** Первое уравнение (10.25) имеет решение

$$B = -\frac{1}{\sqrt{4\pi G}}. \quad (10.26)$$

Из (10.26) и второго уравнения (10.25) получаем уравнение на  $t$ :

$$\frac{2}{3G}t + \frac{1}{3G} = -\ln t + 4d(\theta\sqrt{t}). \quad (10.27)$$

Существует единственное решение для любых  $G, \theta$ . С учетом соотношений (10.26) и (10.27) получается следующее выражение для плотности энергии:

$$F_S = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ \frac{1}{2G} + \left(1 + \frac{2}{3G}\right)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{3G} - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}. \quad (10.28)$$

**BS-фазы.** Используя остальные решения первого уравнения (10.25):

$$B = -\frac{1 \pm \sqrt{t}}{4\pi G},$$

из второго получаем

$$\frac{1}{3G}t - \frac{1}{3G} = \ln t - 4d(\theta/\sqrt{t}). \quad (10.29)$$

Это уравнение имеет решения только для таких  $(G, \theta)$ , что

$$G \leq G_c^{(1)}(\theta) \quad \text{или} \quad G \geq G_c^{(2)}(\theta).$$



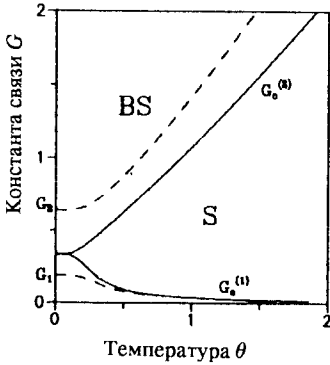
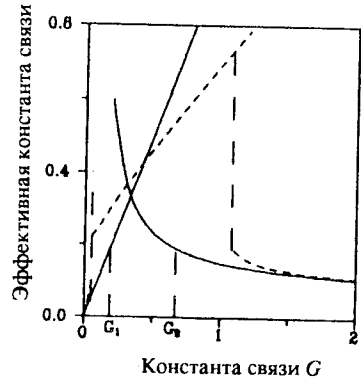


Рис.19. Фазовая диаграмма для  $(\varphi^4)_2$  с исходно нарушенной симметрией

Рис.20. Эффективные константы связи для  $(\varphi^4)_2$  с исходно нарушенной симметрией:  $\theta = 0$  — сплошная линия,  $\theta = 1$  — пунктирная; S-фаза — верхняя пунктирная линия



Функции  $G_c^{(1)}(\theta)$  и  $G_c^{(2)}(\theta)$  представлены на рис.19. Имеются два решения, и они равны друг другу при  $G = G_c^{(1)}(\theta)$  или  $G = G_c^{(2)}(\theta)$ . Эти решения представляют собой две разных BS-фазы. Из рис.19 видно, что  $G_c^{(1)}(0) = G_c^{(2)}(0) = G_c$ . Подставляя  $t = 1$  в (10.29), находим:  $G_c = \frac{1}{3}$ . Область на фазовой плоскости ниже  $G_c^{(1)}(\theta)$  соответствует первой BS-фазе, область выше  $G_c^{(2)}(\theta)$  представляет вторую BS-фазу. Плотность свободной энергии имеет вид

$$F_B = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3G} \right) (t - 1) - \frac{(t - 1)^2}{6G} - 4t [2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}.$$

Как видно из рис. 19, границы фаз, найденные из сравнения эффективных констант связи (рис.20) и свободных энергий, не противоречат друг другу. Значения  $G_1 = 0,19\dots$  и  $G_2 = 0,64\dots$  на рис.19 совпадают с критическими точками ГЕР-аппроксимации при нулевой температуре [19].

Таким образом, имеются две BS- и одна S-фаза. При нулевой температуре симметрия нарушена для любых  $G$ , хотя при  $G = \frac{1}{3}$  имеется фазовый переход без изменения симметрии. Вместе с тем при любом фиксированном  $G$  симметрия восстанавливается, если температура достаточно велика. Фазовые переходы — первого рода, поскольку масса и параметр порядка (10.24) разрывны на границах фаз (см. рис.21,  $\theta = 1$ ).

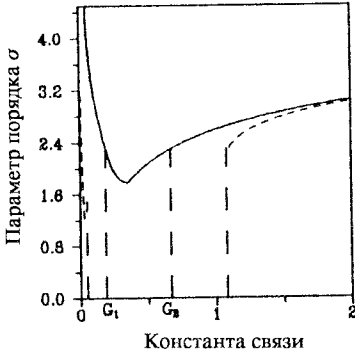


Рис.21. Параметр порядка:  $\theta = 0$  — сплошная линия,  $\theta = 1$  — пунктирная

Эффективная константа связи мала всюду, кроме критических областей, где  $G_{\text{eff}} \sim O(1)$ , так что наше описание довольно точное только вне окрестности фазовых переходов.

Граница  $G_c^{(1)}(\theta)$  лежит в области применимости высокотемпературного разложения ( $\theta \gg G$ ). Ее вид согласуется с результатами этого метода [4—6].

## 11. ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ $\varphi^4$ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

**11.1. Представление термального вакуума.** Каноническое преобразование к полям с новой массой и ненулевым конденсатом было выполнено в разд.6 (см. (6.2), (6.11)). Поэтому мы не будем воспроизводить здесь выкладки, связанные с этим преобразованием. Кроме того, переход от представления (6.11) к нижеследующим формулам осуществляется в полной аналогии с двумерным случаем (см. (10.7) — (10.12)). Единственное принципиальное отличие связано с дополнительными контрчленами, устраняющими расходимость диаграммы второго порядка (см. рис.1,б). Поэтому мы сразу начнем с выражения для плотности гамильтониана  $\mathcal{H}$  в представлении термального вакуума  $|\theta(\beta, t, B)\rangle$  (10.10):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0'' + \mathcal{H}_I'' + \mathcal{H}_{ct}'' + \mathcal{H}_I',$$

$$\mathcal{H}_0'' = \frac{1}{2} : [\Pi^2(\mathbf{x}) + (\nabla\Phi(\mathbf{x}))^2 + M^2\Phi^2(\mathbf{x})] :, \quad (11.1)$$

$$\mathcal{H}_I'' = : \left[ \frac{1}{4} h_4 \Phi^4(\mathbf{x}) + h_3 \Phi^3(\mathbf{x}) \right] :.$$

Нормальное упорядочение в этих формулах относится к зависящим от температуры операторам  $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$ ,  $\alpha^+(\mathbf{k}, \beta)$ . Контрчленный оператор  $\mathcal{H}_{ct}''$  в этом представлении принимает форму

$$\mathcal{H}_{ct}''(M, \beta) = : \left[ \frac{1}{2} A(M) \Phi^2(\mathbf{x}) + C(M) \Phi(\mathbf{x}) \right] :, \quad (11.2)$$

зависящие от температуры функции  $A$ ,  $C$  имеют вид [36]:

$$\begin{aligned}
 A(M) &= 3!g_4^2\Sigma(M), & C(M) &= 3!g_3g_4\Sigma(M), \\
 \Sigma(M) &= \Sigma_0(M) + 3\Sigma_\beta(M) + 3\Sigma_{\beta\beta}(M), \\
 \Sigma_\beta(M) &= \frac{1}{2(2\pi)^2}\sigma_\beta(t, \theta), & \Sigma_{\beta\beta}(M) &= \frac{1}{2(2\pi)^2}\sigma_{\beta\beta}(t, \theta), \quad (11.3)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_\beta(t, \theta) = -\ln 3 \cdot \frac{\theta}{t} \ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right),$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) &= \int_1^\infty \int_1^\infty dx dy \left[ \exp \left\{ \frac{xt}{\theta} \right\} - 1 \right]^{-1} \left[ \exp \left\{ \frac{yt}{\theta} \right\} - 1 \right]^{-1} \times \\
 &\times \left[ \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + xy) - 3}} + \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 - xy) - 3}} \right]. \quad (11.4)
 \end{aligned}$$

В схеме вычитаний при нулевом импульсе оператор  $\mathcal{H}'_1$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}'_1 &= : \left[ \frac{1}{2} \mathcal{R}(t, B, \beta) \Phi^2(\mathbf{x}) + \mathcal{P}(t, B, \beta) \Phi(\mathbf{x}) \right] :, \\
 \mathcal{R} &= m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D) + 6g_3B + 6g_4^2(\Sigma_0(m) - \Sigma(M)), \quad (11.5)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = m^2B + g_4(B^3 - 3BD) + 3g_3(B^2 - D) + 6g_4(g_3 + g_4B)(\Sigma_0(m) - \Sigma(M)),$$

$$D(t, \beta) = \frac{m}{4\pi} \left[ t - 1 + 2\theta \ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) \right]. \quad (11.6)$$

Плотность гамильтониана  $\tilde{\mathcal{H}}$  строится согласно правилу  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*[\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi}]$ . Чтобы гамильтониан имел правильную форму, потребуем, чтобы

$$\mathcal{H}'_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(t, B, \beta) = 0 \\ \mathcal{P}(t, B, \beta) = 0. \end{cases} \quad (11.7)$$

С физической точки зрения, это означает, что  $\mathcal{H}$  описывает скалярные частицы с массой  $M$ , зависящей от константы связи  $G$  и температуры  $\theta$ . Эта зависимость определяется уравнениями (11.7). Удобно перейти к следующим безразмерным величинам:

$$G_4 = \frac{g_4}{2\pi m}, \quad G_3 = \frac{g_3}{m\sqrt{4\pi m}}, \quad b = B\sqrt{\frac{4\pi}{m}}. \quad (11.8)$$

Используя определения (11.8), представим (11.5) в виде

$$-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}G_4(b^2 - d(t, \theta)) + 3G_3b + \frac{3}{4}G_4^2(\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0,$$

$$b + \frac{1}{2} G_4 b(b^2 - 3d(t, \theta)) + 3G_3(b^2 - d(t, \theta)) + \tag{11.9}$$

$$+ 3G_4 \left( G_3 + \frac{G_4}{2} b \right) (\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0,$$

$$d(t, \theta) = t - 1 + 2\theta \ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right). \tag{11.10}$$

Различные решения этих уравнений описывают возможные фазы системы.

**11.2. Симметричная модель.** Рассмотрим модель с лагранжианом (1.1). Для этого положим  $G_4 = G$ ,  $G_3 = 0$ . Используя (11.9), получаем

$$t^2 - 1 - \frac{3}{2} G(b^2 - d(t, \theta)) - \frac{3}{2} G^2 (\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0, \tag{11.11}$$

$$b \left[ 1 + \frac{1}{2} G(b^2 - 3d(t, \theta)) + \frac{3}{2} G^2 (\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) \right] = 0.$$

**S-фаза.** Из (11.11), (11.10) и (11.3) получаем уравнение для  $t$ :

$$2t^2 + 3Gt - 2 - 3G - 3G^2 \ln t + 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) + \tag{11.12}$$

$$+ 6G \left( \theta - 3 \ln 3 G \frac{\theta}{t} \right) \ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) = 0,$$

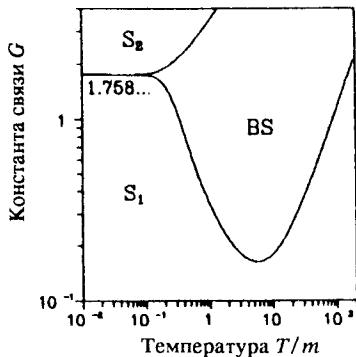


Рис.22. Фазовая диаграмма для симметричной  $(\varphi^4)_3$

где функция  $\sigma_{\beta\beta}$  определена в (11.4). Уравнение (11.12) имеет два решения в областях  $S_1$  и  $S_2$  на рис.22, а в области BS решения отсутствуют, причем

$$t_2(G, \theta) < t_1(G, \theta) \neq 1, \quad \text{если } (\theta, G) \in S_1$$

$$t_2(G, \theta) > t_1(G, \theta) \neq 1, \quad \text{если } (\theta, G) \in S_2.$$

Согласно критерию отбора фаз по эффективному взаимодействию необходимо положить:

$$t(G, \theta) = \begin{cases} t_1(G, \theta), & \text{если } (\theta, G) \in S_1 \\ t_2(G, \theta), & \text{если } (\theta, G) \in S_2. \end{cases} \tag{11.13}$$

Подчеркнем, что при ненулевой температуре ни  $t_1$ , ни  $t_2$  не соответствуют исходному представлению (6.2).

Высокотемпературная асимптотика ( $\theta \gg 1, t \gg 1$ ) определяется линейным по  $G$  членом. Это становится очевидным, если заметить, что (см. (11.4))

$$\sigma_{\beta\beta}(t, \theta) \xrightarrow{\theta \gg t \gg 1} C \frac{\theta^2}{t^2} + O\left(\frac{\theta}{t} \ln \frac{\theta}{t}\right),$$

$$C = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dx dy}{xy} \left[ \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + xy) - 3}} + \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 - xy) - 3}} \right] \quad (11.14)$$

и

$$\theta \gg \frac{\theta}{t}, \quad \theta \ln \theta \gg \frac{\theta^2}{t^2}.$$

Асимптотики массы  $M = mt$  и эффективной константы связи  $G_{\text{eff}} = G/t$  имеют вид

$$\begin{aligned} t \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{3G\theta \ln \theta}, & \quad t \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{\frac{3}{2} G^2 \ln G}, \\ G_{\text{eff}} \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{\frac{G}{3\theta \ln \theta}} \ll 1, & \quad G_{\text{eff}} \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{\frac{2}{3 \ln G}} \ll 1. \end{aligned} \quad (11.15)$$

**BS-фаза.** В этом случае имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{t^2}{G}, \\ t^2 - 3Gt + 3G^2 \ln t - 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) - \\ &- 6G\left(\theta - 3 \ln 3G \frac{\theta}{t}\right) \ln\left(1 - \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\}\right) = 0, \end{aligned} \quad (11.16)$$

для вывода которых использовались формулы (11.11), (11.10) и (11.3).

Второе уравнение (11.16) при любых  $(\theta, G)$  имеет единственное решение. Можно убедиться, что решение с асимптотиками типа  $1 \ll t \ll \theta$  или  $t \gg \theta$  при  $\theta \gg 1$  отсутствует. Это означает, что при высокой температуре  $G_{\text{eff}}(G, \theta)$  в S-фазе меньше, чем в BS-фазе. Отсюда заключаем, что система симметрична при высокой температуре. Численное решение уравнений (11.12) и (11.16) показывает, что то же самое имеет место при любых  $(\theta, G) \in S_1, S_2$ .

Результат удобно представить в виде фазовой диаграммы на рис.22. Границы фаз соответствуют переходам первого рода, поскольку параметр порядка разрывен в критических точках. Асимптотики эффективной константы связи показывают (см. (11.15)), что наш подход достаточно точен вне критической области.

Суммируем выводы этого пункта:

- Нарушение симметрии отсутствует в трехмерной модели (1.1)  $\forall \theta$ , если  $G \ll 1$ .
- Имеются две S-фазы и одна BS-фаза, переход с перестройкой симметрии системы происходит при промежуточных значениях  $G, \theta$  (рис.22).
- Система симметрична, если температура  $\theta$  или константа связи  $G$  достаточно велики.

**11.3. Исходно нарушенная симметрия.** Рассмотрим фазовую структуру модели (1.2) с исходно нарушенной симметрией. Уравнения на параметры  $t$  и  $b$  получаются из (11.9) подстановкой

$$G_4 = G, \quad G_3 = \frac{1}{2} \sqrt{G}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} t^2 - 1 - \frac{3}{2} G(b^2 - d(t, \theta)) - 3\sqrt{Gb} - \frac{3}{2} G^2(\ln t - 6\sigma_{\beta}(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0, \\ 2b + Gb(b^2 - 3d(t, \theta)) + 3\sqrt{G}(b^2 - d(t, \theta)) + \\ + 3G\sqrt{G}(1 + \sqrt{Gb})(\ln t - 6\sigma_{\beta}(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Два решения для  $b$  следуют из (11.17):

$$b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \text{ (симметричное)}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \pm \frac{t}{\sqrt{G}} \text{ (несимметричное)}.$$

Используя несимметричное решение, получаем уравнение

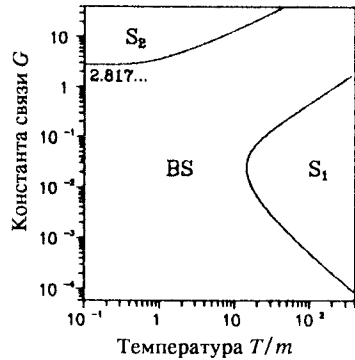
$$\begin{aligned} t^2 - 3Gt - 1 + 3G + 3G^2 \ln t - 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) - \\ - 6G \left( \theta - 3 \ln 3G \frac{\theta}{t} \right) \ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) = 0, \end{aligned} \quad (11.18)$$

в то время как для симметричного ( $b = -1/\sqrt{G}$ ) имеем

$$\begin{aligned} 2t^2 + 3Gt + 1 - 3G - 3G^2 \ln t + 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) + \\ + 6G \left( \theta - 3 \ln 3G \frac{\theta}{t} \right) \ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11.19)$$

**S-фаза.** Имеется два решения (11.19) в областях  $S_1, S_2$  на рис.23, а в области BS решений нет. Асимптотики массы  $M = mt$  и эффективной константы связи  $G_{\text{eff}} = G/t$  — те же, что и в (11.15).

Рис. 23. Фазовая диаграмма для  $(\varphi^4)_3$  с исходно нарушенной симметрией



**BS-фаза.** Уравнение (11.18) имеет единственное решение для любых  $(G, \theta)$ . Анализ асимптотик, численное решение уравнений (11.19) и (11.18) и сравнение эффективных констант связи дают фазовую диаграмму, представленную на рис. 23. Граница фаз при  $G \ll 1$  согласуется с той, которая могла бы ожидаться из пертурбативного вычисления эффективного потенциала [3]. Описание является достаточно точным вне критических областей (см. (11.15)). Вместе с тем границы фаз определены лишь приблизительно, т.к. эффективная константа связи достаточно велика в окрестности фазовых переходов.

Параметр порядка разрывен на границе, так что мы имеем фазовые переходы первого рода. Подчеркнем, что этот результат не может рассматриваться как хорошо установленный в нашем подходе. Подведем итоги.

- В системе (1.2) симметрия восстанавливается, если температура или константа связи достаточно велики.
- Имеются фазовые переходы между BS- и S-фазами, границы между которыми приблизительно показаны на рис. 23.
- Метод канонических преобразований дает возможность определить температурную зависимость массы. Процедура определения достаточно точна вне критических областей.
- Если  $G_{\text{eff}}(G, \theta) \ll 1$ , то можно производить обычные пертурбативные вычисления, используя гамильтониан (11.1), (11.2).

**11.4. Системы в  $R^2$  и  $R^3$ .** Сравним фазовую структуру моделей (1.1), (1.2) в  $R^3$  и  $R^2$  при конечной температуре. Фазовые диаграммы для двумерных моделей показаны на рис. 13 и 19. Поведение систем по переменной  $G$  совершенно различно в  $R^2$  и  $R^3$  (см. также таблицу). Имеем BS-фазу в пространстве-времени  $R^2$  и S-фазу в  $R^3$  при  $G \gg 1$  независимо от симметрии исходных лагранжианов (1.1), (1.2). В то же время поведение по переменной  $\theta$  качественно одно и то же в  $R^2$  и  $R^3$ . Системы симметричны, если температура достаточно велика.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coleman S., Weinberg E. — *Phys.Rev.D*, 1973, vol.7, p.1888.
2. Киржниц Д.А. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.15, с.745.
3. Linde A.D. — *Rep.Prog.Phys.*, 1979, vol.42, p.389; Линде А.Д. — Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
4. Dolan L., Jackiv R. — *Phys.Rev.D*, 1974, vol.9, p.3320.
5. Su R., Bi P., Ni G. — *J.Phys.A*, 1983, vol.16, p.2445.
6. Осипов В.А., Федянин В.К. — ТМФ, 1987, т.73, с.393.
7. Roditi I. — *Phys.Lett.B*, 1986, vol.169, p.264.
8. Simon B. — *The  $P(\phi)_2$  Euclidean (Quantum) Field Theory*. Princeton University Press, Princeton, 1974.
9. Simon B., Griffiths R. — *Comm.Math.Phys.*, 1973, vol.33, p.145.
10. Glimm J., Jaffe A. — *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
11. Glimm J., Jaffe A. — *Phys.Rev.D.*, 1975, vol.10, p.536.
12. Mc Bryan O., Rosen J. — *Comm.Math.Phys.*, 1976, vol.51, p.97.
13. Wilson K.G. — *Phys.Rev.D*, 1972, vol.6, p.419; Fox I.A., Halliway I.G. — *Phys.Lett.B*, 1985, vol.159, p.148.
14. Aizenman M. — *Phys.Rev.Lett.*, 1981, vol.47, No.1, p.1; Frohlich J. — *Nucl.Phys.B.*, 1982, vol.200, No.2, p.281; Arago de Carvalho C., Caracciolo S., Frohlich J. — *Nucl.Phys.B.*, 1983, vol.215, No.2, p.209.
15. Barnes T., Chandour G.I. — *Phys.Rev.D*, 1980, vol.22, No.4, p.924.
16. Bardeen W.A., Moshe M. — *Phys.Rev.D*, 1983, No.6, p.1372.
17. Stevenson P.M. — *Phys.Rev.D*, 1984, vol.30, No.8, p.1712; *Z.Phys.C*, 1984, vol.24, No.1, p.87.
18. Consoli M., Giansito A. — *Nucl.Phys.B*, 1985, vol.254, No.3&4, p.653; Consoli M., Passarino A. — *Phys.Lett.B*, 1985, vol.165, No.1,2&3, p.113; Brihaye Y., Consoli M. — *Phys.Lett.B*, 1985, vol.157, No.1, p.48.
19. Chang S.-J. — *Phys.Rev.D*, 1975, vol.12, No.4, p.1071.
20. Magruder S.F. — *Phys.Rev.D*, 1976, vol.14, No.6, p.1602.
21. Baym G., Grinstein G. — *Phys.Rev.D*, 1977, vol.15, No.10, p.2897.
22. Grassi F., Hakim R., Sivak H.D. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1991, vol.6, No.26, p.4579.
23. Polli L., Ritschel U. — *Phys.Lett.B*, 1989, vol.221, No.1, p.44.
24. Feynman R.P. — In: *Proc. of the Int. Workshop: Variational Calculations in Quantum Field Theory*, eds L.Polley and D.Pottinger, World Scientific, Singapore, 1988.
25. Wudka J. — *Phys.Rev.D*, 1988, vol.37, No.6, p.1464.
26. Tarrach R. — *Class. Quantum Grav.*, 1986, vol.3, No.6, p.1207.
27. Ritschel U. — *Z.Phys.C*, 1991, vol.51, No.3, p.469.
28. Munoz-Tapia R., Taron J., Tarrach R. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1988, vol.3, No.9, p.2143.
29. Chang S.-J. — *Phys.Rev.D*, 1976, vol.13, No.10, p.2778.
30. Stevenson P.M., Alles B., Tarrach R. — *Phys.Rev.D*, 1987, vol.35, No.8, p.2407.
31. Efimov G.V. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1989, vol.4, No.18, p.4977.
32. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1992, vol.7, p.987.
33. Efimov G.V., Nedelko S.N. — Heidelberg University Preprint No.693, 1991.
34. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *J.Phys.A*, 1992, vol.25, No.6, p.2721.
35. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1992, vol.7, No.19, p.4539.
36. Efimov G.V., Nedelko S.N. — JINR Preprint E2-92-287, Dubna, 1992.
37. Stevenson P.M. — *Phys.Rev.D*, 1985, vol.32, No.6, p.1389.
38. Stevenson P.M., Roditi I. — *Phys.Rev.D*, 1986, vol.33, No.8, p.2305.
39. Tarrach R., Alles B. — *Phys.Rev.D*, 1986, vol.33, No.6, p.1718.
40. Kovner A., Rosenstein B. — *Phys.Rev.D*, 1989, vol.40, No.2, p.504.



41. Coleman S., Jackiw R., Politzer H.D. — *Phys.Rev.D*, 1974, vol.10, No.8, p.2491; Root R.J. — *Phys.Rev.D*, 1974, vol.10, p.3322.
42. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
43. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
44. Ефимов Г.В. — Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.
45. Коллинз Дж. — Перенормировка. М.: Мир, 1988.
46. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *JINR Preprint E2-89-478*, Dubna, 1989.
47. Бартон Г. — Дисперсионные методы в теории поля. М.: Атомиздат, 1968.
48. Coquereaux R. — *Ann.Phys.*, 1980, vol.125, No.2, p.401.
49. t'Hoofst G. — *Nucl.Phys.B*, 1973, vol.61, p.455.
50. Завьялов — Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
51. van Hove L. — *Physica*, 1952, vol.18, No.3, p.145.
52. Friedrichs K.O. — *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*. Interscience. New York, 1953.
53. Wightman A.S., Schweber S.S. — *Phys.Rev.*, 1955, vol.98, p.812.
54. Haag R. — *Dan.Mat.Fys.Medd.*, 1955, vol.29, No.12, p.1.
55. Hall D., Wightman A.S. — *Dan.Mat.Fys.Medd.*, 1957, vol.31, No.5, p.1.
56. Greenberg O.W. — *Phys.Rev.*, 1959, vol.115, No.3, p.706.
57. Вайтман А. — Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. М.: Наука, 1968.
58. Умедзава Х., Мацумото Х., Татики М. — Термополевая динамика и конденсированные состояния. М.: Мир, 1985.
59. Завьялов О.И., Сушко В.Н. — В сб.: Статистическая физика и квантовая теория поля (под ред. Н.Н.Боголюбова). М.: Наука, 1973.
60. Bogoliubov N.N. — *Nuovo Cim.*, 1958, vol.7, No.6, p.794.
61. Боголюбов Н.Н. — *ЖЭТФ*, 1958, т.34, 1, с.73.
62. Valatin J. — *Nuovo Cim.*, 1958, vol.7, No.6, p.843.
63. Gandbold G., Efimov G.V. — *JINR Preprint, E2-92-176*, Dubna, 1992.
64. Landsman N.P., van Weert Ch.F. — *Phys.Rep.*, 1987, vol.145, No.3 4, p.141.
65. Matsumoto H., Ojima I., Umezawa H. — *Ann.Phys.*, 1984, vol.152, No.2, p.348.
66. Казаков Д.И., Ширков Д.В. — Препринт ОИЯИ, P2-80-462, Дубна, 1980.