

# КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ СПЕКТРАМИ, РАССЕЯНИЕМ, РАСПАДАМИ (Уроки квантовой интуиции)

*Б.Н.Захарьев, В.М.Чабанов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор знакомит с алгоритмами построения квантовых систем с желаемыми спектральными параметрами и характеристиками рассеяния. На основе поучительных иллюстраций и их простых качественных объяснений показано, как нужно изменить потенциал, чтобы устранить из дискретного спектра произвольный уровень, не трогая остальных, или породить на заданном месте новый, сдвинуть локализацию отдельных состояний в конфигурационном пространстве и на энергетической шкале, изменить скорости распадов избранных квазистационарных состояний (резонансов), обеспечить полную прозрачность в обычных пространствах (случаи одного и многих зацепленных уравнений Шредингера) и на решетках. Выяснена удивительная роль специальных потенциальных ям — «переносчиков» избранных состояний. С их помощью можно пронести сквозь потенциальные барьеры и квазисвязанные состояния, управляя тем самым ширинами резонансов. Причем такой механизм управления носит универсальный характер. Все эти иллюстрации получены с помощью точно решаемых моделей обратной задачи. Данные модели составляют полный набор, что делает квантовую механику единой (устраняется асимметрия между прямой и обратной задачами). Обзор существенно обогащает квантовую интуицию, поднимает понимание волновой механики на более высокий уровень.

This review acquaints one with the algorithms of construction of quantum systems with desirable spectral parameters and scattering properties. It is shown with the instructive illustrations and their simple qualitative explanations how to change the potentials in order to remove selected level(s) from the discrete spectrum whereas other levels remain unchanged, or to create one at the chosen place, to shift the range of localization of arbitrary state(s) in the ordinary space and on the energy scale, to change the decay rates of chosen quasi-stable states (resonances), to provide the absolute transparency (the cases of one- and multichannel Schroedinger equations) in the usual spaces and on the lattices. It was clarified how the special potential wells play the part of «carriers» of chosen states. Analogous wells can carry also quasi-stable states through the potential barriers, which allows one to manage the resonance widths. Such a management mechanism has a universal character. All these illustrations were obtained with the aid of exactly solvable models of the inverse problem. The given models are the complete set, that makes the quantum mechanics unified (the asymmetry of the direct and the inverse problems is considerably weakened). This review enriches quantum intuition and takes up the understanding of wave mechanics at higher level.

Я хотел, чтобы большинство из Вас смогло оценить красоту нашего прекрасного мира и вместе с тем то, что составляет сейчас главную часть истинной культуры нашей эпохи. (Вероятно найдутся преподаватели других дисциплин, которые захотят что-то возразить, но я-то знаю, что они абсолютно неправы). А может быть, Вы сумеете не только отдать должное этой культуре, — не исключено, что и Вас самих потянет подключиться к этому величайшему дерзанию, на которое когда-либо пускался человеческий ум.

*Р.Фейнман (о квантовой механике)*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Становлению единой квантовой теории способствуют новые, точно решаемые модели. Кто-то удачно назвал их верстовыми столбами познания. Благодаря последним успехам точно решаемых моделей возникает симметрия между двумя главными составными частями нерелятивистской квантовой теории — прямой и обратной задачами.

1. Прямая задача ( $V \rightarrow S$ ) по данным потенциалам взаимодействия  $V$  определяет различные свойства квантовой системы  $S$  — данные рассеяния, спектральные параметры и др.

2. Обратная задача ( $S \rightarrow V$ ) определяет потенциалы, необходимые для того, чтобы система обладала данными свойствами  $S$ . Но главный вклад обратной задачи состоит в качественном обновлении наших представлений о микромире.

Обычно физикам, знакомым в основном с прямой квантовой задачей, известно не больше десятка таких моделей: с прямоугольным, осцилляторным, кулоновским и т.п. потенциалами. В обратной же задаче найдены многие классы *полных (!) наборов* точных моделей. Так, в одномерном случае или при разделении переменных этими моделями можно, в принципе, как угодно точно аппроксимировать практически произвольную квантовую систему. Знакомство с некоторыми из моделей сопровождается здесь наглядными иллюстрациями, дополняющими известные «книги квантовых картинок» Брандта и Дамена [13] в традиционной теории. Полные наборы точно решаемых моделей, которыми мы теперь располагаем, делают современную квантовую механику единой (перебрасывается мостик между ранее разрозненными частями теории).

Со времени написания нашего последнего обзора [1] в данной области произошли большие изменения. Настоящий обзор позволит взглянуть на остававшиеся неосвещенными области квантовой механики (невидимой,

другой ее половины при привычном прямом подходе — обратной задачи). Это не было сделано раньше, так как квантовой обратной задачей больше занимались математики, а не физики. Последние же, подходя узко утилитарно (восстановление потенциалов), часто еще не знают о широких возможностях уже разработанного математического аппарата. Математики обычно интересуются теоремами существования и т.п. Они обходятся аналитическими выражениями без графических иллюстраций, а для физических приложений последние очень нужны, чтобы выделить физическую суть формул, добиться понимания рассматриваемых явлений на интуитивном уровне. Теперь стала яснее связь методов обратной задачи и подхода суперсимметрии в нерелятивистской квантовой теории [3,4,15,19,21,29,35,36,41,43].

О новых возможностях квантовой теории будет рассказано доступно, наглядно, с удивительно простыми качественными комментариями поучительных картинок:

— как устранить из дискретного спектра произвольный уровень, не трогая остальных, или породить на заданном месте новый;

— как сдвигать локализацию отдельных состояний в пространстве и на энергетической шкале, с помощью вспомогательных потенциальных ямок — «переносчиков» избранных состояний;

— как изменять скорости распадов отдельных квазистационарных состояний (резонансов), пронося квазисвязанные состояния сквозь потенциальные барьеры, управляя тем самым ширинами резонансов;

— как аналогично управлять переходами между дискретными состояниями, меняя интегралы перекрытия;

— как управлять прозрачностью в обычных пространствах и на решетках.

Выяснен механизм «опрозрачивания» одноканальных квантовых систем, а также поняты особенности формы многоканальных потенциальных матриц  $V_{ij}(x)$ , не дающих отраженных волн при любых энергиях. Удивительно, что возникающие в  $V_{ij}(x)$  потенциальные барьеры не портят прозрачности! Как ни парадоксально, они даже необходимы для 100-процентной проницаемости. И это не при отдельных значениях энергии, как в резонансном туннелировании, а во всем непрерывном спектре (!).

Таким образом, появилась возможность просто объяснить многое из того, что еще недавно скрывалось в черном ящике квантовых загадок.

Хотя все это демонстрируется на точных моделях, но качественно верно и в общем случае. Так что читатель сможет легко предсказывать многие результаты без формул и компьютеров.

Продолжено поучительное сравнение квантовой механики для пространств с непрерывными и дискретными переменными (экзотика решений

разностного уравнения Шредингера и движения волн по решеткам каналов и смешиваемых конфигураций, обобщенные разностные уравнения Шредингера высшего (4-го, 6-го...) порядков). Хотя сейчас все знают о знаменитых солитонах, которым соответствуют безотражательные потенциалы, однако особенность распространения волн по дискретной переменной проявляется в невозможности построить прозрачный локальный потенциал  $v(n)$ . Любая локальная потенциальная яма приводит к спуску верхней границы разрешенной зоны (свешивающемуся сверху барьеру), что обязательно вызывает отражение. Эту трудность удалось обойти, введя минимальную не-локальность (потенциалы  $u(n)$  на соседних с главной диагоналях матрично-конечно-разностного гамильтониана), уничтожающую мешающие барьеры. В данном случае оказался полезным подход суперсимметрии [11,36].

Трудно переоценить значение квантового управления для современной микроэлектроники, лазерной техники, квантовой оптики и др. И дело не столько в перспективах практических приложений, сколько в переходе на новый уровень понимания закономерностей квантового мира. В процессе интенсивного развития квантовой теории («перманентная революция») идет не только накопление массы новых данных, но и сокращается разрыв между новейшими достижениями и тем, что известно широкому кругу специалистов и что преподается в вузах. В конечном счете цель всякой науки — сконцентрировать знания о природе в квинтэссенцию, максимально экономную в смысле занимаемой памяти и необходимых усилий при использовании в приложениях. Интуиция облегчит продвижение в океане нерешенных еще проблем ядерной, атомной и молекулярной физики. Каждому, кто имеет какое-то отношение к квантовой физике, полезно хотя бы раз взглянуть на приводимые здесь картинки.

## 2. КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ ОТДЕЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

...переход на единственный (!) уровень молекулы хлорофилла запускает механизм всей жизнедеятельности на Земле.

*Р.Эверт, С.Айкхорн*

Как наглядную иллюстрацию новой ситуации, сложившейся в квантовой механике, продемонстрируем в этом разделе деформации потенциалов при удалении из их спектров отдельных уровней и потенциальные возмущения, необходимые для пространственного сдвига избранных квантовых состояний. Получены такие картинки, которые нам удалось просто

объяснить, и теперь нам представляется, что они дают нам недостающие элементы квантовой граммоты.

Первыми, кто привел формулы для возмущений, убирающих уровни, были Абрагам и Мозес [17]. Строго говоря, одна тривиальная иллюстрация удаления основного состояния из осциллятора уже приводилась (в работе Сукумара [15]). Благодаря эквидистантности спектра, если не нарушать симметрию, в этом случае происходит сдвиг вверх по энергии на один межуровневый интервал кривой осцилляторного потенциала без каких-либо искажений ее формы. Но догадаться, какие изменения в той же бесконечной яме необходимы для исчезновения второго или следующих уровней, нам не удавалось без компьютерной графики, хотя мы и задавали себе этот вопрос.

Была попытка использовать опыт деформации потенциалов для сдвига отдельных уровней (уже достигнута ясность [6,1,2,], какая форма возмущений  $\Delta V$  обеспечивает смещение избранных собственных значений энергии). Однако «уничтожение» уровня эквивалентно бесконечному (!) числу таких сдвигов. Действительно, сдвинув «нежелательный» уровень на место ближайшего соседа сверху, и того, в свою очередь, на место верхнего соседа и т.д. до бесконечности, мы убеждаемся в том, что избранное состояние как бы пропало. Но сложно представить себе, как суммируется такое неограниченное число возмущений.

Суть преобразования потенциала оказалось проще объяснить так: в каждом из бесконечного числа состояний выше удаляемого убирается по одному узлу. Для этого собственные функции нужно сделать «короче на полволны», что достигается сужением потенциальной ямы, например, сдвигом левой стенки вправо, как на рис.2. Можно добиться того же и сдвигом правой стенки. По-видимому, существует и соответствующее симметричное возмущение, форма которого предсказывается «симметризацией» кривых с рис.2.

Первые результаты расчетов (см. рис.2) даже показались неправдоподобными из-за нарушения симметрии потенциала при удалении уровня. Ведь исходная яма была симметричной, и модуль «уничтожаемого» состояния симметричен. Форма же симметричного потенциала полностью задается своим спектром. Откуда же берется асимметрия? Дело здесь в том, что операция поглощения уровня является неоднозначной: свободными параметрами остаются нормировочные константы, которые, наряду со значениями уровней, являются фундаментальными спектральными данными. В подходе Марченко, которым мы воспользовались, нормировки фиксируют асимптотическое поведение собственных функций с одной из сторон. Мы для простоты оставляли их у всех сохраняемых уровней неизменными, а устремляли к нулю или к бесконечности нормировку избранного состояния, внося тем самым наблюдаемую асимметрию.

**2.1. Элементы теории обратной задачи.** Чтобы напомнить суть методов обратной задачи [2], сделаем несколько элементарных замечаний, которые послужат максимально доступным и кратким введением в формализм.

Рассмотрим некоторую потенциальную яму с лесенкой дискретных уровней энергии  $E_\nu$  связанных состояний с ортонормированными волновыми функциями  $\psi_\nu(x)$ , которые мы рассматриваем как репер в бесконечномерном пространстве. Помимо уровней энергии есть еще фундаментальные спектральные параметры — нормировочные константы. Для задачи на полуоси  $[0, \infty)$  это могут быть коэффициенты пропорциональности  $c_\nu$  между нормированными на единицу функциями  $\psi_\nu(x)$  и так называемыми регулярными решениями  $\phi_\nu(x)$ , имеющими в точке  $x = 0$  производную, равную единице:

$$\psi_\nu(x) = c_\nu \phi_\nu(x). \quad (1)$$

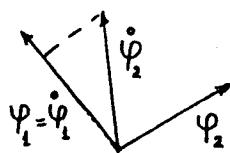
Двойной набор спектральных параметров  $\{E_\nu, c_\nu\}$  полностью задает форму бесконечной потенциальной ямы. Те же функции при фиксированном значении координаты  $x$  и при всех значениях  $E_\nu$  можно рассматривать как другие вектора и тоже ортонормированные, только в этом случае свойство ортонормированности (по энергетической переменной с весом  $c_\nu^2$ ) лучше известно как соотношение полноты:

$$\sum_\nu c_\nu^2 \phi_\nu(x) \phi_\nu(y) = \delta(x - y). \quad (2)$$

Этому соотношению удовлетворяют решения как исходного, так и возмущенного потенциалов, только они взяты при значениях энергии разных спектров и ортонормированы они с разным весом  $c_\nu^2$  и  $c_\nu^2$ . А обратная задача перехода от исходного потенциала к возмущенному  $\hat{V} \rightarrow \check{V}$  сводится к перенормировке ортов: при изменении весовой функции исходные собственные функции уже не будут ортогональны. Напомним стандартную процедуру ортогонализации Шмидта на примере двух первоначально неортогональных (в смысле новой весовой функции) векторов  $\check{\phi}_1, \check{\phi}_2$  (см. рис.1).

В качестве первого орта  $\phi_1$  новой системы возьмем первый невозмущенный орт  $\check{\phi}_1$ , а второй построим из второго же невозмущенного, только вычтем из него все, что в нем имеется лишнего (параллельного  $\check{\phi}_2$ ), для ортонормированности с новым весом.

Рис. 1. Для ортогонализации исходных векторов  $\overset{\circ}{\varphi}_1, \overset{\circ}{\varphi}_2$  можно оставить первый прежним, а из второго выбросить проекцию на него первого (в смысле скалярного произведения с новым весом)



$$\varphi_1 = \overset{\circ}{\varphi}_1; \quad \varphi_2 = \overset{\circ}{\varphi}_2 - K_{21} \overset{\circ}{\varphi}_1.$$

Начинать ортогонализацию можно с любого вектора. Непрерывным аналогом этой процедуры, когда роль индексов-номеров ортов играют значения  $x$ , а ортонормирование ведется по энергетической переменной (роль условий ортогональности здесь играет соотношение полноты), является выражение

$$\varphi_\nu(x) = \overset{\circ}{\varphi}_\nu(x) + \int K(x, y) \overset{\circ}{\varphi}_\nu(y) dy, \quad (3)$$

где пределы интегрирования  $0, x$  — в подходе Гельфанда — Левитана и  $x, \infty$  — в подходе Марченко. Коэффициенты  $K$ , связывающие функции исходного потенциала с функциями нового, определяются из условия ортонормировки  $\varphi_\nu(x)$  ко всем векторам с «номерами» ( $y < x$  или  $y > x$  в подходах Гельфанда — Левитана или Марченко соответственно), уже использованными при построении новых ортов, пока шли к точке  $x$  (слева или справа по подходу Гельфанда — Левитана или Марченко). Этими уравнениями для  $K$  как раз и являются уравнения обратной задачи (с пределами интегрирования, как и в (3)):

$$K(x, y) + Q(x, y) + \int K(x, t) Q(t, y) dt = 0, \quad (4)$$

а ядро  $Q$  строится из невозмущенных функций при старых и новых спектральных параметрах:

$$Q(x, y) = \sum_\nu c_\nu^2 \overset{\circ}{\varphi}_\nu(x) \overset{\circ}{\varphi}_\nu(y) - \sum_\mu \overset{\circ}{c}_\mu^2 \overset{\circ}{\varphi}_\mu(x) \overset{\circ}{\varphi}_\mu(y) + \int \dots \quad (5)$$

Первая сумма здесь задается возмущенными параметрами  $E$  и  $s$ , а вторая — исходными. В наших задачах изменений непрерывного спектра не будет, поэтому интеграл, отвечающий изменениям данных рассеяния, пропадает.

Если изменить спектральные параметры конечного числа связанных состояний, то для остальных соответствующие члены в левой и правой суммах взаимно сократятся, так что в  $Q$  останется конечное число членов, факторизованных по «номерам»  $x$  и  $y$ . С таким вырожденным ядром уравнение обратной задачи сводится к системе конечного числа алгебраических урав-

нений. По найденному из них  $K$  определяется новый (возмущенный) потенциал.

Процесс ортогонализации Грама — Шмидта можно начинать с любого исходного вектора. Поскольку в обратной задаче «номером» вектора служит координата, можно начинать ортогонализацию из асимптотики  $x = \infty$  — это подход Марченко, или из начала координат — это подход Гельфанда — Левитана.

**2.2. Трансформированные потенциалы.** Рассмотрим ядро  $Q$  интегрального уравнения обратной задачи (в подходе Марченко, см., например, [2]):

$$K(x, y) + Q(x, y) + \int_x^\infty K(x, t) Q(t, y) dt = 0. \quad (6)$$

Оно является как бы «вывернутым наизнанку» уравнением Шредингера. Вместо процедуры прямой задачи, когда в обычное уравнение Шредингера вкладывается некоторый потенциал  $V(x)$  и после решения находятся физические свойства данной квантовой системы, мы можем в обратной задаче вложить *желаемые* спектральные параметры в ядро  $Q$ :

$$Q(x, y) = \sum_v^N \overset{\circ}{\psi}(k_v, x) \overset{\circ}{\psi}(k_v, y) - \sum_\mu^M \overset{\circ}{\psi}(k_\mu, x) \overset{\circ}{\psi}(k_\mu, y), \quad (7)$$

где константы  $k_v^2 = E_v$ ,  $k_\mu^2 = E_\mu$  определяют уровни энергии в новой  $V$  и исходной  $\overset{\circ}{V}$  ямах (которых в нашем случае бесконечное число  $N = M = \infty$ ), а интеграл (лишь символически помеченный в (5)) относится к состояниям непрерывного спектра, которого в бесконечных ямах нет. Решения  $\overset{\circ}{\psi}_v$  в первой сумме отвечают уравнению Шредингера с исходным потенциалом, но берутся при собственных значениях энергии для возмущенной ямы и с соответствующими нормировочными множителями. Если функции в левой сумме для сохраняемых уровней брать теми же, что и в правой, это будет означать выбор для них прежних нормировочных множителей. Тогда при удалении конечного числа уровней из исходной ямы  $\overset{\circ}{V}$  в (7) остаются лишь отвечающие им члены второй суммы, поскольку параметры остальных уровней предполагаются неизменными, и соответствующие члены в первой и второй суммах взаимно сокращаются. С этим *вырожденным* ядром  $Q$  уравнение обратной задачи сводится к алгебраическому. Его решить просто, т.е. найти  $K$ , которое, в свою очередь, является ядром интегрального оператора обобщенного сдвига, переводящего волновые функции исходной невозмущенной системы  $\overset{\circ}{\psi}$  в функции с новым потенциалом  $V(x) = \overset{\circ}{V}(x) - 2K'(x, x)$ . При уничтожении одного уровня имеем



$$V(x) = \overset{\circ}{V}(x) - 2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{\overset{\circ}{\Psi}_\mu^2(x)}{1 - \int_x^\infty \overset{\circ}{\Psi}_\mu^2(y) dy} \right]. \quad (8)$$

На рис.2 для исходных осцилляторной и линейной ямы показаны возмущенные ямы при исчезновении первого, второго и третьего уровней.

Рельеф нижней части возмущенной ямы определяется тем, что после ее сужения поднимается конечное число уровней под уничтожаемым, и их нужно сместить вниз согласно правилу, обсуждавшемуся в [6,2]. Число локальных минимумов равно числу максимумов модуля функции ближайшего к «спектральной дыре» снизу состояния, поскольку оно наиболее чувствительно к возмущениям там, где вероятность обнаружить частицу на данном уровне наибольшая. Опускание более низких состояний не так отчетливо отражается на форме возмущения (оно лишь «модулирует несущую частоту» наиболее энергичного из группы состояний под создаваемой спектральной дырой).

В случае удаления двух уровней сужение исходной ямы получается примерно вдвое больше.

Теперь можно с большой степенью надежности предсказать, что для порождения нового уровня нужно расширять яму, а конечное число расположенных ниже состояний удерживать на старых местах, подталкивая снизу вблизи точек максимумов модулей их функций.

Возмущение потенциала стремится к нулю при больших  $|x|$ , в чем можно убедиться, используя правило Лопиталья при раскрытии неопределенности  $0/0$ .

При вариациях одного из полного набора спектральных параметров  $\{E_\lambda, c_\lambda\}$  или  $\{E_\lambda, M_\lambda\}$  в формализме Марченко, меняются все собственные функции (и тех состояний, спектральные параметры которых не менялись). О выборе нормировок  $M_\lambda$  вместо  $c_\lambda$  см. ниже.

Результаты для потенциалов на полуоси имеют отношение и к трехмерным симметричным задачам. Нужно, правда, отметить, что в этом случае мы имеем дело лишь с уровнями, отвечающими определенному значению орбитального момента  $l$ : при уничтожении, например,  $s$ -уровня уровни с другими  $l > 0$  будут смещаться. Чтобы не дать им двигаться, нужно вводить в потенциал дополнительную зависимость, нелокальную по углам. Результаты на всей оси тоже применимы в трехмерном случае, только с потенциалами, не зависящими от двух из трех переменных.

Приведенные выше простые объяснения результатов позволяют делать довольно надежные предположения о качественных характеристиках потенциалов, которые должны получиться при других постановках задачи.

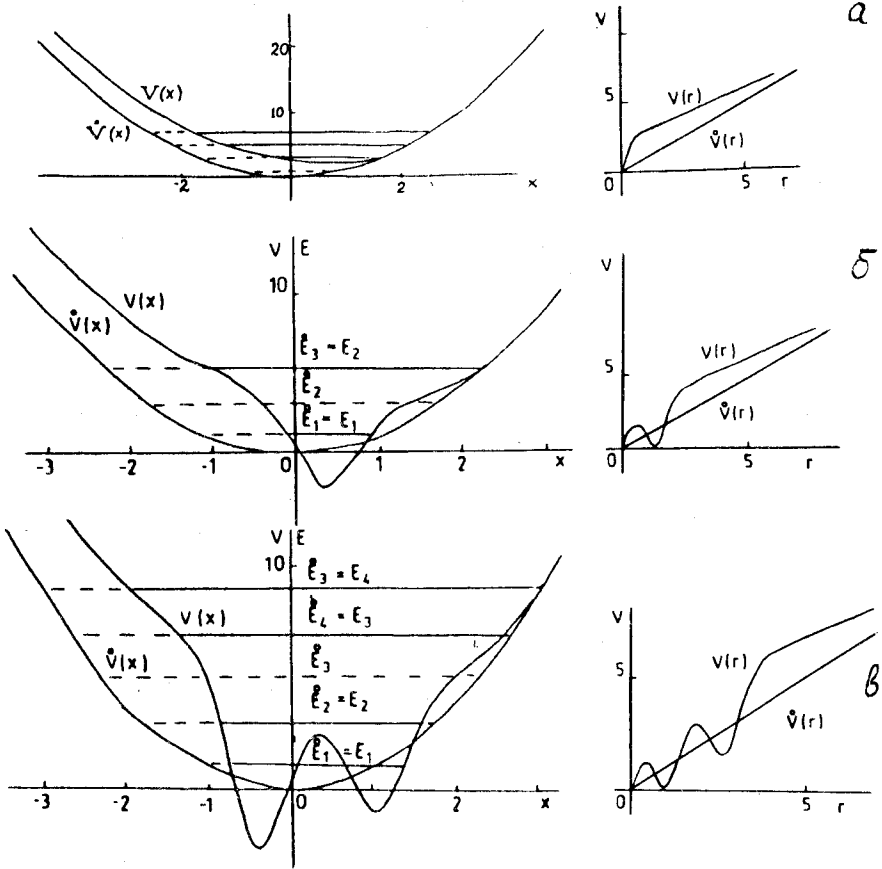


Рис. 2. Изменения формы осцилляторной и линейной ямы при исчезновении первого (а), второго (б) и третьего (в) уровней. Сужение ям (а—в) вызвано сокращением на полколебания осцилляций собственных функций состояний, расположенных выше ликвидированного уровня (ср. с рис.3—5, где расширение ямы вызвано рождением новых уровней). Дополнительная ямка в случае (б) возвращает на прежнее место уровень, поднимающийся при сжатии ямы, в случае (в) две дополнительные ямки возвращают первый и второй уровни на свое место

Если в формулах обратной задачи в подходе Марченко поменять пределы интегрирования по пространственной координате  $[x, \infty)$  на  $(-\infty, x]$ , то полученные потенциалы и функции окажутся зеркально отраженными относительно точки  $x = 0$ .

В подходе Гельфанда — Левитана для осцилляторного потенциала на полуоси (с пределами интегрирования  $[0, x]$ ) вертикальная потенциальная

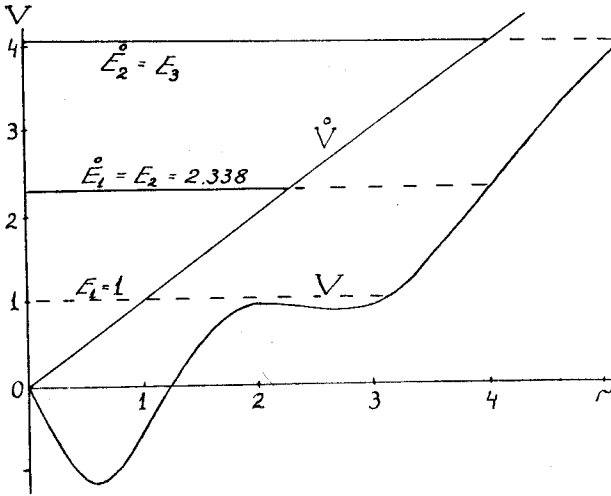


Рис. 3. Добавление нового (ниже основного) уровня  $E_1 = 1$  к спектру линейной ямы. Яма расширяется, чтобы состояния выше рожденного получили прибавку в полколебания. Рельеф дна ямы обеспечивает нужное положение рожденного уровня

стенка в нуле должна оставаться неподвижной, а двигаться будет правый край бесконечной ямы. Это подтвердилось расчетами по формуле (см. рис.2 для случая линейной ямы):

$$V(x) = \overset{\circ}{V}(x) + 2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{\overset{\circ}{\Psi}_\mu^2(x)}{1 - \int_0^x \overset{\circ}{\Psi}_\mu^2(y) dy} \right]. \tag{9}$$

Если симметрично продолжить на левую полуось возмущенную яму, то в полученных ямах лишь уровни с нечетными состояниями будут совпадать с уровнями симметричного осциллятора, поскольку только они являются одновременно и уровнями ямы на полуоси. Поэтому и форма правой стенки возмущенной потенциальной ямы на полуоси должна отличаться от случая выкидывания «того же» уровня в подходе Марченко на всей оси, поскольку в игре на полуоси участвуют лишь нечетные состояния симметричной ямы.

*Добавление уровня.* Если вместо уничтожения имеющихся уровней породить новые состояния, то следует, естественно, ожидать соответствующего расширения потенциальных ям. Случай рождения уровня в линейной

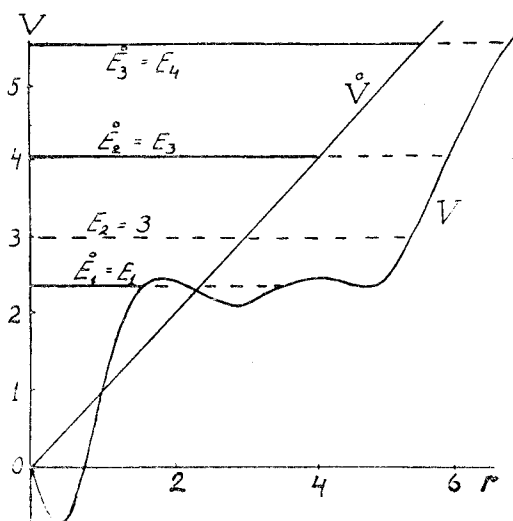


Рис. 4. Добавление нового уровня  $E_2 = 3$  к спектру линейной ямы. Рельеф дна ямы обеспечивает нужное положение пары нижних уровней (поддерживает основное состояние на прежнем уровне при расширении ямы)

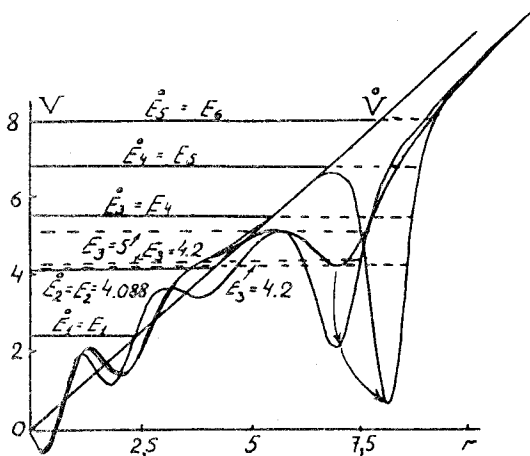
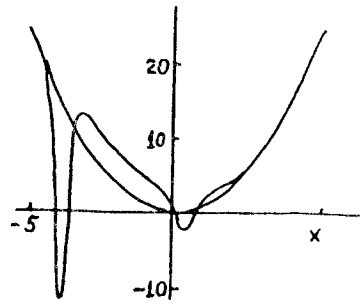


Рис. 5. Добавление нового уровня  $E_3 = 5$ , или  $E_3 = 4,2$ , или  $E_3 = 4,1$  к спектру линейной ямы. Обратите внимание на изменение формы ямы при приближении уровня  $E_3$  к  $E_2 = 3$

яме  $v(r) = r$  показаны на рис.3—5 (а в конечной прямоугольной яме — на рис.9). При этом в формулах для потенциала типа (8) в этом случае в знаменателе нужно заменить минус на плюс. Формулами типа (8) при добавлении уровня пользоваться сложнее, так как понадобятся *нефизические* решения в исходной яме при значениях энергии *между* связанными состояниями (для прямоугольной ямы это не сложно).

Основное состояние симметрично выкидывается с помощью техники суперсимметрии [3]. Интересно было бы также обобщить данную работу на многоканальные системы.

Рис. 6. Трансформация осцилляторного потенциала при приближении к нулю нормировочной константы  $M_2$  (в подходе Марченко) для состояния второго уровня: в возмущенном потенциале появляется узкая ямка («сосулька-ловушка»), уносящая на минус бесконечность область локализации этого состояния при  $M_2 \rightarrow 0$ , что можно рассматривать как его постепенное «устранение». Состояния, лежащие выше по энергии, остаются в основной яме и имеют по узлу под барьером, отделяющим сосульку от основной ямы. Внутри сосульки они делают последнее колебание с амплитудой, быстро убывающей при удалении сосульки



**2.3. Выбрасывание уровня  $E_\mu$  как предел  $c_\mu \rightarrow 0$  (или  $M_\mu \rightarrow 0$ ).** Изменения величины нормировочного множителя  $c_\mu$  (или в подходе Марченко — коэффициента  $M_\mu$  при затухающей экспоненте в асимптотическом поведении справа собственной функции  $\mu$ -го состояния) можно связать с устранением соответствующего энергетического уровня из спектра. Из формулы

$$Q(x, y) = c_\mu^2 \hat{\phi}_\mu(x) \hat{\phi}_\mu(y) - \hat{c}_\mu^2 \hat{\phi}_\mu(x) \hat{\phi}_\mu(y) \quad (10)$$

следует, что при выборе нулевой нормировки  $c_\mu$  выражение для ядра  $Q$  совпадает с тем, что получается при выбрасывании  $\mu$ -го уровня:

$$Q(x, y) = -\hat{c}_\mu^2 \hat{\phi}_\mu(x) \hat{\phi}_\mu(y). \quad (11)$$

Казалось бы, невозможно представить себе, как с помощью непрерывного процесса изменения нормировки, когда все уровни остаются на своих местах, можно добиться исключения уровня, совершаемого скачком. Типичная картина при выборе близкой к нулю нормировки показана на рис.6. В данном случае характерная «сосулька-ловушка» в возмущенном потенциале получена в подходе Марченко при очень малой нормировке  $M_2$ .

Форма сосульки такова, что в ней создаются благоприятные условия для стоячей полуволны избранного состояния, а для всех других происходит самогашение за счет неконструктивной интерференции волн, многократно отраженных от стенок, и тем более сильное, чем дальше уходит сосулька. Это свойство «выскальзывания» (slidability) выбранного связанного состояния из стопки остальных при изменении соответствующей нормировки — характерная реакция квантовой системы. В случае одноуровневой системы двигается целиком вся яма. Вместе с тем вырастает барьер, сужающий исходную осцилляторную яму и уменьшающий число узлов состояний выше

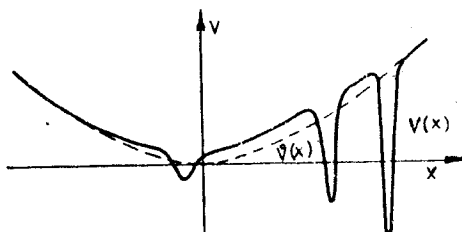


Рис. 7 Перемещение локализации двух состояний (второго и третьего) при увеличении соответствующих нормировочных параметров  $M_2$  и  $M_3$  производится путем комбинации двух сосулек

избранного в главной части ямы. Последние узлы (по одному для этих состояний) уходят под барьер, разделяющий сосульку и основную яму. В пределе эти последние узлы удаляются на бесконечность. При уничтожении нескольких уровней (стремлением нормировок к нулю) появляются несколько сосулек, взаимное расположение которых зависит от соотношения величин нормировочных множителей. В частности, сосульки могут располагаться с одной или разных сторон от главной ямы. При больших  $M_\mu$  или малых  $c_\mu$  сосульки образуются справа.

Это проливает дополнительный свет на, казалось бы, уже раньше полностью понятое нами возмущение потенциалов при изменении нормировок (см. [6,2]). Например, изменение приведенных ширин в бесконечной прямоугольной яме дает возмущенный потенциал с «зародышами» сосулек, играющих одновременно роль корректировщиков положения нижних уровней на энергетической шкале. В ямах с невертикальными стенками эти зародыши (один или несколько, см. рис.7) могут быть сдвинуты на любое расстояние. При этом каждый из них уносит с собой по одному узлу соответствующей функции.

На рис.8 демонстрируется смещение вправо локализации состояния первого и второго уровня исходной конечной прямоугольной ямы с пятью связанными состояниями. Ямка-переносчик здесь имеет солитонобразный вид (чтобы, благодаря своей безотражательности, не портить непрерывный спектр исходного потенциала). Характерный «потенциальный зуб» возник для компенсации сглаживания резкого края исходной прямоугольной ямы: чтобы в непрерывном спектре оставались прежние свойства рассеяния. Сравните с соответствующими возмущениями дна осцилляторной ямы (рис.2а,б).

*Порождение уровня при наличии непрерывного спектра.* На рис.9 показан пример порождения нового (6-го) уровня в конечной прямоугольной яме. Осцилляции возмущения плоского дна потенциала нужны, с одной стороны, для подъема на прежние места старых уровней, которые иначе опустились бы из-за расширения исходной ямы за счет дополнительной ямки справа. С другой стороны, нарастание осцилляций потенциала влево служит

Рис. 8. Смещение из прямоугольной потенциальной ямы, имеющей пять связанных состояний; а) основного состояния вправо; б) сдвиг локализации второго состояния (ср. трансформацию дна прямоугольной и осцилляторной (рис.6) ям)

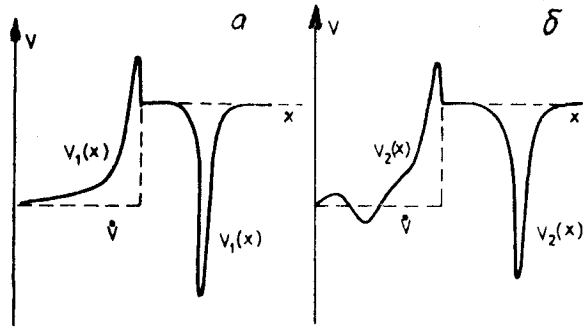
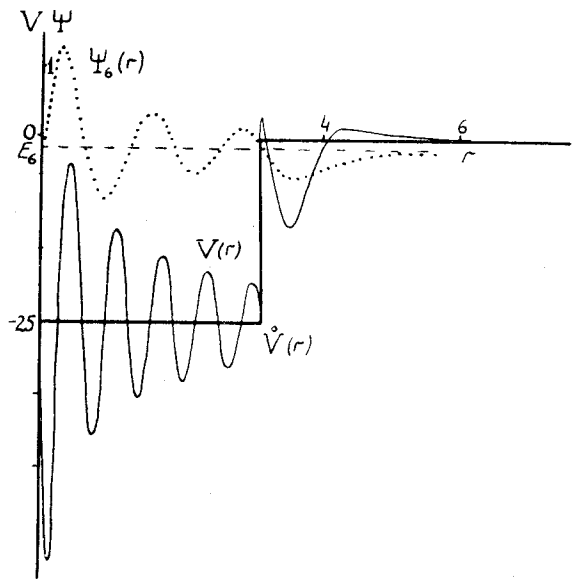


Рис. 9. Порождение нового, шестого уровня, показанного штриховой линией, в конечной прямоугольной потенциальной яме глубиной 25 и шириной  $\pi$ , имевшей пять связанных состояний (ср. с трансформацией линейного потенциала на рис.3—5). Пунктиром показана нормированная волновая функция порожденного состояния



сгребанию порожденного состояния к началу координат, поскольку мы выбрали большую производную  $\Psi'_6(0)$ . Барьер («потенциальный зуб» на месте скачка исходной прямоугольной ямы) между основной и дополнительной ямами нужен для сохранения неизменной спектральной функции непрерывного спектра (ср. с рис.3—5, где показаны деформации бесконечно глубокой линейной ямы при добавлении в спектр новых уровней).

Формулы изменения нормировочных констант были получены с помощью техники суперсимметрии [3] (1988, 1991 гг.) значительно позднее, чем в обратной задаче.

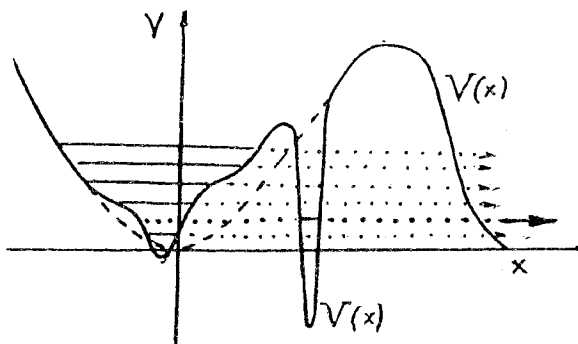


Рис. 10. Искажение формы исходной осцилляторной ямы (штриховая линия) при увеличении нормировочного множителя  $M_2$  второго состояния. Вспомогательная узкая яма, как и на рис.6, уносит избранное состояние тем дальше, чем больше выбранное значение нормировочной константы, определяющей величину функции справа. Если еще за-

гнуть одну из бесконечных стенок исходной осцилляторной ямы так, чтобы она превратилась в потенциальный барьер конечной величины, то связанные состояния превращаются в квазистабильные, а перенос избранного состояния к краю барьера увеличивает вероятность его распада на заданную величину

Интересно распространить указанные результаты на многоканальный случай и, возможно, на задачи с разностными уравнениями (с дискретной переменной), в частности, на «уравнения Шредингера высшего порядка» (см. [1]).

**2.4. Протаскивание сквозь барьер избранных состояний.** Интуиция позволяет качественно предсказать свойства квантовых систем без использования формул и компьютеров. Рассмотрим картину (см. рис.10) преобразования осцилляторной ямы в яму с конечным барьером вместо ее правой, неограниченно растущей ветви, при увеличении нормировочной константы множителя  $M_\lambda$  в асимптотическом поведении волновой функции справа. Вспомогательная узкая яма уносит избранное состояние тем дальше, чем сильнее изменено выбранное значение  $M_2$ .

Если трансформировать одну из бесконечных стенок осцилляторной ямы в конечный потенциальный барьер, то связанные состояния превратятся в квазистабильные (резонансы). Хотя это кардинально меняет характер системы, свойство вспомогательной ямки — переносить избранные состояния — при соответствующей подстройке ее формы не пропадает. Здесь нам помогает квантовая интуиция (в решении задачи на собственные значения для квазистационарных состояний, требующей поиска резонансов в комплексной плоскости  $k$ ). Ясно, что перенос состояния под барьером ближе к его внешнему краю облегчает распад и увеличивает ширину избранного резонанса, не меняя остальные. Естественно предположить, что при этом нижние состояния возмущаются не сильно. Вспомогательная узкая яма, сдвигающая локализацию избранного состояния, наводит на мысль, что



это явление можно использовать для управления матричными элементами переходов между различными связанными состояниями.

**2.5. Управление переходами.** Понимание явления локализации волновых функций в ограниченной области системы потенциальных ям можно использовать для формирования желаемых интенсивностей переходов между уровнями\*. Например, в предельном случае можно произвольно задать решетку уровней и потребовать, чтобы был переход лишь между  $i$ -м и  $j$ -м состояниями: отличен от нуля только матричный элемент некоторого локального оператора  $O$  ( $\langle j|O|i\rangle$ ). Такую квантовую систему легко построить, помещая выделенные уровни в одну парциальную ямку, а все остальные уровни — по одному в отдельные ямки, разделенные барьерами с пренебрежимой проницаемостью. Отсутствие перекрывания функций исключит нежелательные переходы. Подобную процедуру можно себе представить и в более общем случае, когда заданы определенные соотношения между вероятностями переходов произвольного дискретного спектра. Дополнительными рычагами влияния на величины матричных элементов являются «парциальные приведенные ширины» состояний в отдельных ямках, регулируемые по правилам изменения нормировочных спектральных параметров подбором формы этих парциальных ямок.

### 3. ИЗМЕНЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ ШИРИН В РАМКАХ МНОГОКАНАЛЬНОГО ПОДХОДА

О том, какие возмущения в одноканальном случае приводят к изменению приведенной ширины (производной на краю бесконечной прямоугольной ямы) произвольно выбранного состояния, говорилось в [2,6]. Теперь мы приведем пример управления этими фундаментальными спектральными параметрами в многоканальной системе. Приведенные ниже рисунки пополняют коллекцию квантовых картинок.

Будем уменьшать в основном состоянии модуль производной  $\psi_1'(0)$  функции второго канала у левой бесконечной потенциальной стенки исходной двухканальной системы с постоянной матрицей взаимодействия

$$\overset{\circ}{V}_{11}(x) = \overset{\circ}{V}_{22}(x) \equiv 0; \quad \overset{\circ}{V}_{12}(x) = \overset{\circ}{V}_{21}(x) \equiv 0,3.$$

\*Здесь уместно привести высказывание Томаса Дж. Питерса: «Меня постоянно обвиняют в том, что я открываю очевидное. Один... зашел так далеко, что назвал мою работу ослепляющей вспышкой очевидного... я доволен этой характеристикой».

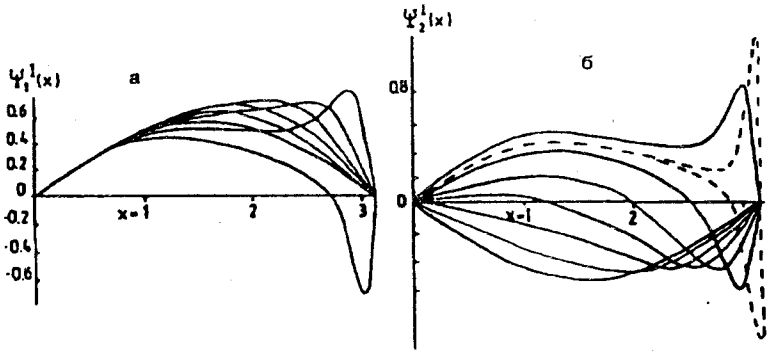


Рис. 11. Изменение волновых функций основного (а,б) состояния двухканальной задачи, когда производная функции основного состояния во втором канале на левой границе  $\psi_2'(0, \lambda_1)$  возрастает от исходной отрицательной величины  $\dot{\gamma}_2 = -1\sqrt{\pi}$  по закону  $\dot{\gamma}_2 + 0,2m$ ;  $m = 1, 2, \dots, 6$  — сплошные линии; штриховой линией нанесена промежуточная функция, чтобы яснее было поведение функции при исчезновении узла. Волны «перетекают» из канала в канал

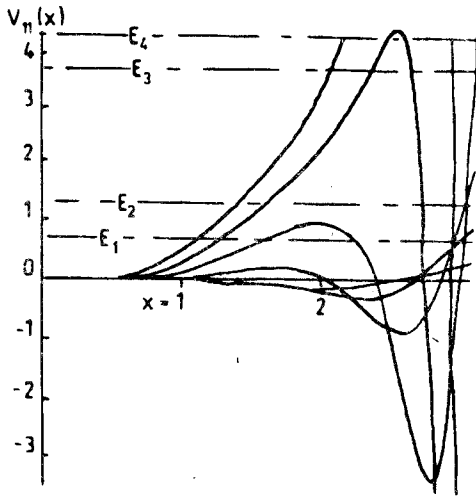


Рис. 12. Возмущающие добавки к элементу  $V_{11}$  матрицы взаимодействия, отвечающие увеличению производной функции основного состояния во втором канале, как показано на рис.11,б. Горизонтальные штрихпунктирные линии отмечают положение уровней энергии — двух нижних дублетов

На рис.11—13 показано, как при этом меняются каналовые функции и матрица взаимодействия.

Сначала (при небольшом увеличении производной в точке  $x = 0$ ) поведение функции во втором канале напоминает одноканальный случай: функция как бы «выдавливается» слева направо, только теперь без сохранения нормировки — часть ее «перетекает» в первый канал за счет связи  $V_{21}(x)$ . При этом изменения в функции первого канала не должны затрагивать ее левую часть, так как производная в точке  $x = 0$  остается фиксированной. Это проявляется в росте  $\psi_1(x)$  в центре ямы. При переходе к

положительным значениям производной в точке  $x = 0$  во втором канале и дальнейшем ее росте слева происходит возвратное «отсасывание» волны из первого канала в центральной части рассматриваемого отрезка. Это приводит теперь к проседанию  $\psi_1(x)$  в центре ямы.

В то же время отрицательная часть волновой функции второго канала ужимается и при этом из-за связи каналов

она передается в первый канал, где справа образуется выпученность волновой функции. В отличие от одноканального случая, здесь возможно одновременное обращение в нуль функции и производной второй каналовой функции — см. рис.11 на левом крае при  $x = 0$ . За счет связи с первым каналом, где производная при  $x = 0$  отлична от нуля,  $\psi_2(x)$  приобретает ненулевые значения при удалении от точки  $x = 0^*$ .

Мы познакомились с некоторыми чертами собственных функций с измененной приведенной шириной, но наша цель — *понять, как форма элементов матрицы взаимодействия  $V_{\alpha\beta}(x)$  управляет спектральными параметрами*. При малых изменениях  $\gamma_2$  потенциал  $V_{22}(x)$  во втором канале напоминает соответствующий одноканальный (см. рис.13, барьер слева и ямка справа). При дальнейшем увеличении  $\gamma_2$  эти барьер и ямка сдвигают вправо и сжимают отрицательную часть функции  $\psi_2(x)$ . В первом канале  $V_{11}(x)$  слева близок к нулю (рис.12), что соответствует неизменности наклона функции  $\psi_1(x)$  слева. А барьер и яма в  $V_{11}(x)$  справа способствуют образованию пучности функции  $\psi_1(x)$  справа.

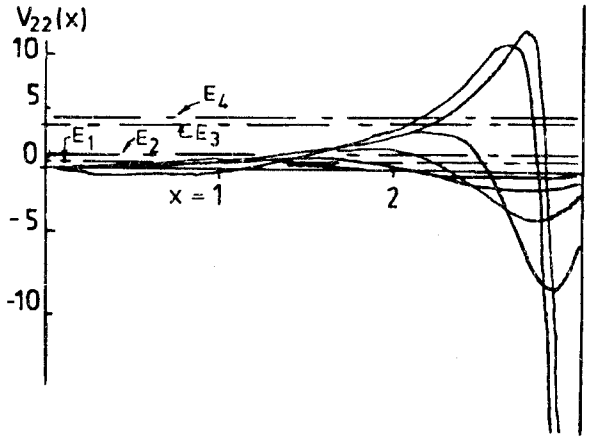


Рис. 13. То же, что на рис.12, для  $V_{22}$

\*Такая ситуация бывает при связанных состояниях в непрерывном спектре для матриц взаимодействия конечного радиуса. Тогда в открытом канале функция может быть тождественно равна нулю вне области взаимодействия и отлична от нуля внутри.

#### 4. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ОДНО- И МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

**Неожиданные особенности.** Недавно [25] удалось достигнуть ясности в понимании особенности формы многоканальных потенциальных матриц  $V_{ij}(x)$ , не дающих отраженных волн при любых энергиях. Удивительно, что возникающие в  $V_{ij}(x)$  потенциальные барьеры не портят прозрачности! Как ни парадоксально, они даже необходимы для 100-процентной прозрачности. И это не при отдельных значениях энергии, как в резонансном туннелировании, а во всем непрерывном спектре(!).

Мало кто не знает сейчас о солитонах, которым соответствуют безотражательные потенциалы (см. примеры на рис.14—16). Они уже стали ценными элементами квантовой интуиции (хотя и здесь еще далеко не достигнута исчерпывающая интуитивная ясность). Но одноканальные системы — лишь предельно простой случай квантовых объектов. К пониманию реального мира многоканальных процессов и структур предстоит еще продвигаться и сделать на этом пути бесчисленные открытия.

К удивительным квантовым системам теперь уже можно добавить многоканальные матрицы взаимодействия, абсолютно прозрачные для падающих волн в любых каналах. А подход обратной задачи позволяет получить такие матрицы и соответствующие решения в замкнутом виде. Так что здесь мы покажем, какую они имеют форму, как аналитически, так и графически (картинки безотражательных матричных потенциалов). К тому же нам удалось наглядно («на пальцах») объяснить замечательные свойства этих матриц, связанные с особенностями их, казалось бы, запутанной структуры. К догадке нас подтолкнула некоторая аналогия данного явления с резонансным тун-

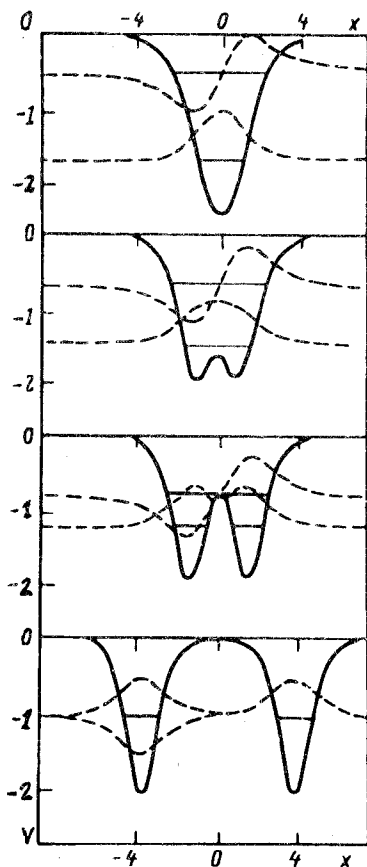


Рис. 14. Примеры безотражательных потенциалов с двумя связанными состояниями [34, 39] (1980, 1986). Одноуровневая яма подобна верхней яме с двумя уровнями, но менее глубокая

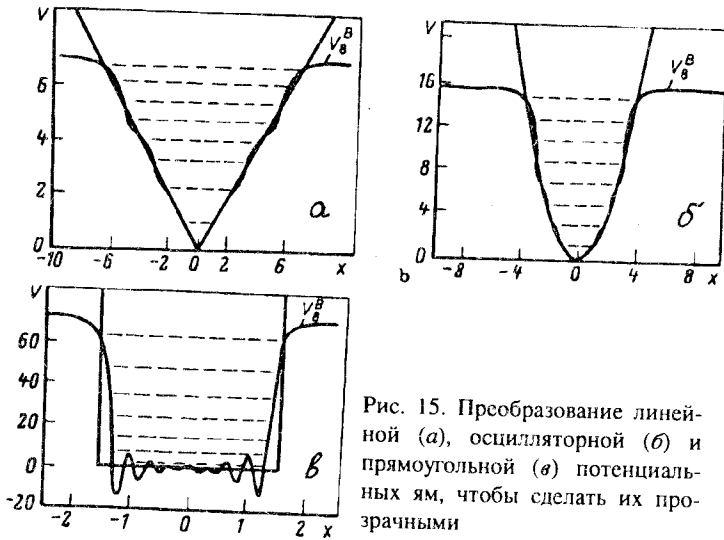


Рис. 15. Пресобразование линейной (а), осцилляторной (б) и прямоугольной (в) потенциальных ям, чтобы сделать их прозрачными

нелированием, которому ранее одним из авторов (Б.З.) было дано нетрадиционное истолкование [2], а также идея огибания барьера в уравнениях высшего порядка [1].

Имеется вечное противоречие между чистой и прикладной наукой. Желанию описать реальные системы мешают бесчисленные детали, среди которых часто трудно выделить интересующий нас эффект. А идеальная модель, хотя и кристально ясно демонстрирующая новое явление, может быть и неосуществимой в реальности. В данном случае мы как раз обсуждаем такую идеальную модель. Поняв на ней суть физики многоканальной прозрачности, легче будет искать ее черты в самых запутанных реальных ситуациях.

**4.1. Одноканальные примеры.** Напомним сначала однокомпонентный (скалярный) случай, некоторые прозрачные потенциалы для которого изображены на рис.15—16.

В работе [25] было выяснено, как можно приблизиться к пониманию (на интуитивном уровне) одноканального рассеяния. Оказалось, что для этого можно использовать рисунки восстановления бесконечных потенциальных ям по нижней части дискретного спектра с помощью прозрачных ям конечной глубины (см. рис.15, 16 [34,39]).

Для ямы с одним уровнем имеется семейство прозрачных потенциалов с двумя свободными параметрами. Это положение уровня  $E$  и нормировка  $M$  — множитель при затухающей экспоненте в асимптотике волновой функции связанного состояния справа от ямы, фиксирующий место потенциальной ямы на оси  $x$ . (Потенциал «скользит» по оси  $x$  при изме-

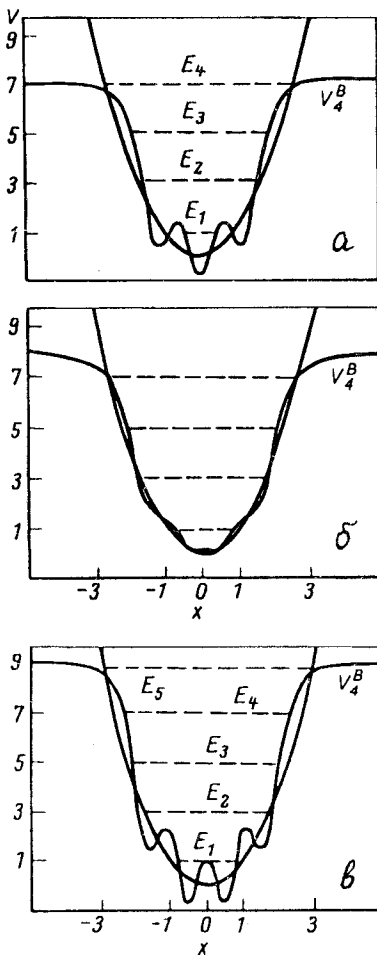


Рис. 16. Качество аппроксимации нижней части бесконечной осцилляторной ямы с помощью прозрачных ям конечной глубины сильно зависит от того, как близко к непрерывному спектру расположен верхний уровень прозрачной ямы. Уровень осциллятора, ближайший к краю конечной ямы, особенно чувствителен к «отгибанию» бесконечных стенок, и требуются большие осцилляции потенциала (бугорки в области пучностей волновой функции), чтобы оставить его при этом на месте

нении  $M$ , поскольку в асимптотическом поведении функции связанного состо-

яния  $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} M \exp(-kx)$  сдвиг по  $x$  на  $\Delta x$  эквивалентен перенормировке  $M \rightarrow M \exp(-k\Delta x)$ . Класс безотражательных потенциалов с двумя уровнями характеризуется уже четырьмя свободными параметрами ( $E_1, E_2, M_1, M_2$ ).

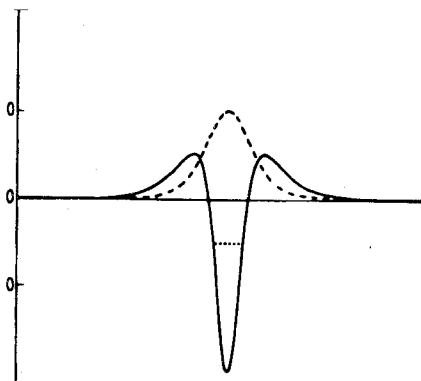
Здесь нормировки определяют не только общее положение потенциала на оси  $x$ , но и относительное расстояние между двумя его «составляющими». Правда, потенциалы на рис. 14—16 симметричны относительно  $x = 0$  и поэтому их форма задается лишь положениями уровней (без задания факторов  $M$  [2]). При сближении уровней отдельные солитонные ямы становятся все более похожими

друг на друга и расходятся в стороны, обеспечивая в пределе двухкратное вырождение.

Поучительно еще познакомиться с картинками, показывающими, какие изменения нужно ввести, например, в прямоугольную, линейную и обрезанную осцилляторную потенциальные ямы конечной глубины, чтобы сделать их прозрачными.

Из рис. 15, 16 следует, что чем резче меняется исходный потенциал или чем ближе уровень ямы к нулевой энергии, тем большие поправки необходимы, чтобы придать ему прозрачность. Можно еще сказать, что добавочные осцилляции как бы «залечивают» возмущения непрерывного спектра.

Рис. 17. Исходный отталкивающий потенциал, обозначенный пунктиром, можно деформировать так, что появится связанное состояние, но коэффициент отражения  $R(E)$  останется неизменным [15] (1987)



Приведем еще пример аналогичного построения потенциала, сохраняющего отражательные свойства исходного потенциального барьера (рис.17). Варьируя нормировку  $M$  связанного состояния, можно было, конечно, нарушить симметрию потенциала, смещая создаваемое углубление относительно исходного барьера.

**4.2. Система сильносвязанных уравнений Шредингера.** Рассмотрим многоканальную систему связанных одномерных уравнений Шредингера [2,5,6]:

$$-\psi_i''(x) + \sum_j V_{ij}(x) \psi_j(x) = E_i \psi_i(x). \quad (12)$$

Здесь  $E_i = E - \varepsilon_i$  — энергия в каналах,  $\varepsilon_i$  — значения порогов непрерывного спектра в отдельных каналах. Система (12) устанавливает *прямую* связь между матрицей взаимодействия  $V_{ij}(x)$  и каналовыми волновыми функциями  $\psi_i(x)$ , определяющими наблюдаемые свойства соответствующего модельного квантового объекта. В общем случае, глядя на (12), практически трудно предугадать эти свойства.

Можно, однако, использовать подход *обратной* квантовой задачи и сначала задавать желаемые данные рассеяния или спектральные параметры [2,1,7]. Так, можно потребовать, чтобы потенциальная матрица в системе (12) была безотражательна, то есть чтобы ее рассеивающие свойства не отличались от системы без взаимодействия для несвязанных уравнений, описывающих свободное движение волн (полная проницаемость при любых значениях энергии непрерывного спектра), но при этом имелись связанные состояния. Используем для этого уравнения обратной задачи в подходе Марченко (см., например, [2,6]) с нулевой исходной матрицей взаимодействия  $V_{ij}^0 = 0$ :

$$K_{ij}(x, x') + Q_{ij}(x, x') + \int_x^\infty K_{il}(x, x'') Q_{lj}(x'', x') dx'' = 0, \quad (13)$$

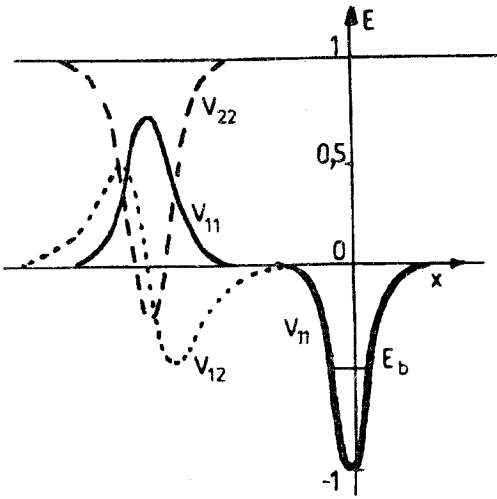


Рис. 18. Прозрачная матрица взаимодействия с одним связанным состоянием при  $E = -0,5$ ;  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 0,001$ . Пороги, при которых открываются каналы:  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 1$ . Отражение от барьера в потенциале  $V_{11}(x)$ , показанного сплошной линией, подавляется волнами от «распада» (из второго в первый канал) состояний, «удерживаемых» ямой  $V_{22}(x) + \epsilon_2$ , изображенной штриховой линией. При малых энергиях волны, которым надо бы туннелировать сквозь барьер в  $V_{11}(x)$ , частично обходят его по второму каналу за счет связи каналов  $V_{12}(x) = V_{21}(x)$  (пунктир), обращаясь в нуль в точке вершины барьера

$$Q_{ij}(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_i x) [r_{ij}^{\circ}(k_i) - r_{ij}(k_i)] \exp(ik_j x') dk_i + \sum_v^N \exp(-\kappa_i^v x) M_i^v M_j^v \exp(-\kappa_j^v x'). \tag{14}$$

Закладывая в  $Q$  желаемые спектральные параметры связанных состояний (энергии связи  $E_v = \epsilon_i + \kappa_i^{v2}$  и нормировочные константы  $M_i^v$ ), а также данные рассеяния (коэффициенты отражения), мы находим из уравнений обратной задачи соответствующее  $K$ , которое, в свою очередь, определяет искомую матрицу взаимодействия:

$$V_{ij}(x) = -2 \frac{d}{dx} K_{ij}(x, x). \tag{15}$$

В нашем случае (свободное движение в исходной системе) в ядре  $Q$  исчезает интегральный член, поскольку разницу функций рассеяния (коэффициентов отражения)  $r^{\circ} - r$  мы специально выбрали равной нулю. В результате мы имеем вырожденное (факторизованное по переменным) ядро интегрального уравнения (12), сводящееся к алгебраическим уравнениям [6], решение которых в частном случае одного порождаемого связанного состояния выражается через решения Йоста свободного движения



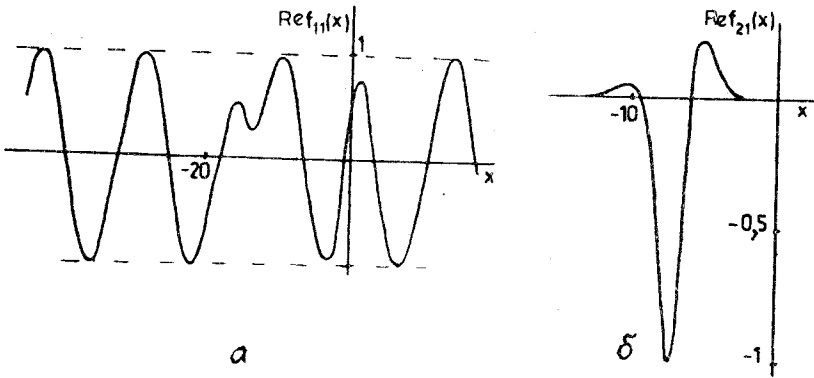


Рис. 19. Каналовые функции (показаны лишь их вещественные компоненты) в первом (а) и втором (б) каналах при энергии  $E = 0,2$  между порогами. В открытом первом канале с двух сторон вне области взаимодействия решение — невозмущенная синусоида с единичной амплитудой (нет отражения). В закрытом канале решение экспоненциально затухает в обе стороны

в расцепленных каналах  $\mathring{F}_{ii}(x) = e^{-k_i x}$  при значениях энергии  $E_b$  порождаемого связанного состояния:

$$K_{ij}(x, y) = - \frac{M_i \mathring{F}_{ii}(x) M_j \mathring{F}_{jj}(y)}{1 + \sum_m \int_x^\infty [M_m \mathring{F}_{mm}(y)]^2 dy} \quad (16)$$

с суммой по каналам. Энергия  $E_b$ , нормировочные константы  $M_1$  и  $M_2$  и разность каналовых порогов являются свободными параметрами. В соответствии с (15) и (16) имеем четырехпараметрическое семейство вещественных безотражательных матриц взаимодействия с одним связанным состоянием, одна из которых показана на рис.18. А соответствующие решения Йоста прозрачной системы при произвольных энергиях имеют вид

$$F_{ij}(x) = \mathring{F}_{ij}(x) + \sum_m \int_x^\infty K_{im}(x, y) \mathring{F}_{mj}(y) dy. \quad (17)$$

Некоторые из решений Йоста (векторные при одном открытом канале и матричные — при двух) показаны на рис.19. Правая цифра в индексе функций помечает, в каком канале имеется падающая волна, т.е. фиксирует граничные условия. Левая цифра в индексе решений обозначает канал, в котором имеется данная волна.

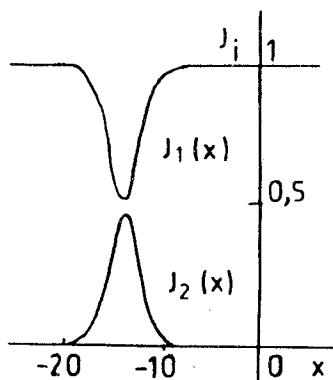


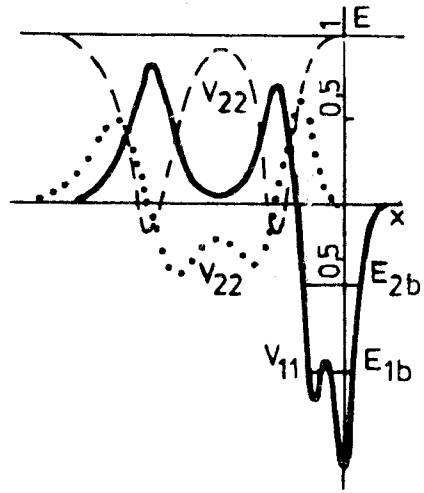
Рис. 20. Парциальные потоки  $J_i$  в двух каналах при энергии, когда открыт лишь первый канал (падающие волны имеются только в первом канале). Сохраняется лишь полный поток  $J_1 + J_2 = \text{const}$ . В области солитообразной ямы в  $V_{11}(x)$  нет потока во втором канале

Яма справа в потенциале  $V_{11}$ , выделенная жирной линией, имеет вид одноуровневой безотражательной ямы, но совершенно неожиданным было появление барьера в потенциале  $V_{11}$ , который, казалось бы, дол-

жен безнадежно нарушить безотражательность взаимодействия. Действительно, такой барьер вызывает отражение, но оно как раз необходимо для гашения других нежелательных волн.

Явление туннелирования составляет самую сердцевину квантовой механики. Уже несколькими нобелевскими премиями были отмечены прорывы в понимании и практическом его использовании. До сих пор это было связано в основном с одноканальными процессами. Но реальный мир существенно богаче одноканальных явлений. Хотя и в них еще многое остается загадочным, начинаются попытки осваивать и многоканальную физику. Здесь мы делаем шаг к пониманию механизма обхода препятствий, избегая трудности подбарьерного туннелирования, используя лишние (каналовые) степени свободы (см. [2], гл. 7). На рис. 18 в области потенциального барьера первого канала во втором канале образуется потенциальная яма  $V_{22}$ , куда частично перебрасывается волна из первого канала. Если энергия падающей волны лежит между двумя порогами, то второй канал закрыт, и волна в нем оказывается запертой в указанной яме, из которой она может распасться только в первый канал, причем в обе стороны. Оказывается, что такие распадные волны, идущие направо, имеют ту же амплитуду, что и отраженные от барьера в первом канале, но противоположную фазу, и потому уничтожаются. Это напоминает истолкование эффекта резонансного туннелирования, предложенное в книге [2] (одним из авторов — Б.З.). Но там подобное взаимное уничтожение отраженной и распадной волн происходило лишь при одном значении энергии (или их конечном числе) в непрерывном спектре (на множестве меры нуль среди спектрального континуума). Почему же в двухканальном случае это возможно при всех энергиях непрерывного спектра? Дополнительная степень свободы возникает благодаря недиагональным элементам матрицы взаимодействия (континуальная степень свобо-

Рис. 21. Прозрачная потенциальная матрица взаимодействия с двумя уровнями  $E_1 = -0,5$ ;  $M_{11} = 1$ ,  $M_{12} = 0,01$  и  $E_2 = -1$ ;  $M_{21} = 1,2$ ,  $M_{22} = 0,001$ . В первом канале в потенциале  $V_{11}$ , показанном сплошной линией, образуются два барьера, а во втором канале в  $V_{22} + \epsilon_2$  (штриховая линия) — две «компенсирующие» ямы на тех же местах. Пунктиром показан недиагональный матричный элемент  $V_{12}$ , осуществляющий связь каналов и равный нулю в точках максимумов барьеров



ды выбора  $V_{12}$ ). Полезно также сравнить указанный эффект обхода барьеров (см. рис.20) с подобным эффектом при движении волн в уравнениях высшего порядка [1] (которые мы назвали «обобщенными уравнениями Шредингера»), только там окружным путем служил не другой канал, а другая ветвь спектра.

После знакомства с одноуровневой матрицей взаимодействия, нетрудно и в более сложной двухуровневой матрице  $V_{ij}(x)$  (см.рис.21) найти «составляющие» ее элементы, показанные на рис.18.

Меняя положения уровней  $E_i$ , управляющие глубинами ям и высотами барьеров, и нормировки  $M_i$  связанных состояний, фиксирующих положения ям и барьеров на оси  $x$ , получаем широкий класс многоканальных безотражательных моделей.

Было бы поучительно построить потенциалы-фильтры, дающие близкое к 100% отражение при отдельных избранных значениях энергии или на некоторых конечных участках непрерывного спектра и почти полностью прозрачные на остальных.

Явление многоканальной прозрачности обеспечивается тремя особенностями матрицы взаимодействия. Барьеры в ее матричных элементах дают сильное отражение, но подбарьерное туннелирование заменяется «огибанием» барьеров по другим каналам, где вместо барьеров расположены потенциальные ямы, а распадные волны из этих ям во входном канале уничтожаются с отраженными от барьеров.

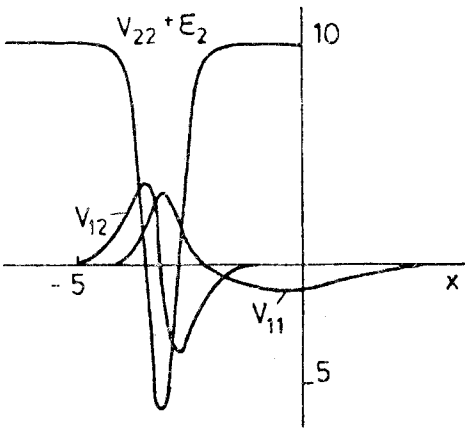


Рис. 22. То же, что на рис.18, с увеличенной в 10 раз разницей порогов двух каналов

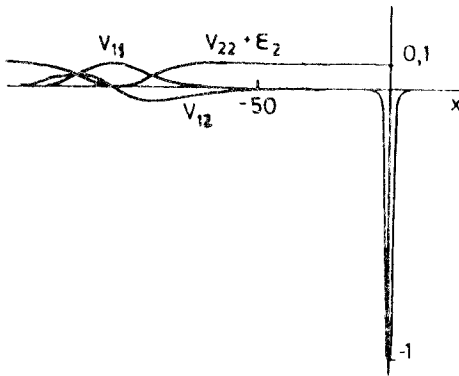


Рис. 23. То же, что на рис.18, с уменьшенной в 10 раз разницей порогов двух каналов. Барьер в  $V_{11}$  сдвигается влево с уменьшением пороговой разницы, а все элементы матрицы взаимодействия становятся шире

Рассмотренные модели, хотя и не отвечают реальным объектам квантового мира, но обогащают наш опыт пониманием качественно новых механизмов усиления прозрачности составных систем (волны используют возможности перехода из канала в канал для «огибания» препятствий и межканальной интерференции для подавления отражения).

Для полноты приведем еще на рис.22, 23 матрицу взаимодействия с увеличенной и уменьшенной в десять раз разницей порогов каналов, а на рис.24 — трехканальную прозрачную матрицу взаимодействия. В последнем случае ямы и барьеры в соседних каналах почему-то оказываются несколько смещенными друг относительно друга (ср. с рис.18). Правда, ямы более высоких каналов сдвигаются относительно барьеров, которые они призваны помочь обойти, навстречу падающему потоку. Формы всех недиагональных элементов довольно похожи.

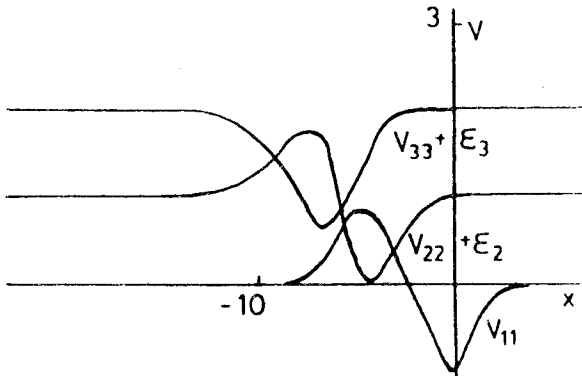


Рис. 24. Диагональные элементы безотражательной матрицы взаимодействия для трехканальной системы со связанным состоянием  $E = -0,5$  (с парциальными нормировочными множителями  $M_1 = 1$ ;  $M_2 = 0,1$ ;  $M_3 = 0,01$ ). Пороги каналов равны 0,1,2. Чтобы легче было их рассматривать, диагональные элементы отсчитываются от соответствующих порогов (матрица зануляется на асимптотике). Ср. с двухканальными матрицами на рис. 18, 22 и 23

## 5. ПРОЗРАЧНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НА РЕШЕТКАХ И В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### Элементы качественной теории движения волн по каналам

Особенность распространения волн по дискретной переменной  $n$  проявляется в невозможности построить прозрачный при всех энергиях разрешенной зоны локальный потенциал  $v(n)$ . Любая локальная потенциальная яма, изгибая в плоскости  $E, n$  разрешенную зону (см. рис.25), приводит к спуску ее верхней границы — появлению барьера, свешивающегося сверху, что обязательно вызывает отражение. Выправить мешающие выступы верхней запрещенной зоны позволяет минимальная нелокальность (потенциалы  $u(n)$  на соседних с главной диагоналях матричного конечно-разностного гамильтониана). Вместе же солитоноподобные по форме  $v(n)$  и  $u(n)$  потенциалы оказываются безотражательными. В периодическом поле роль минимально нелокального возмущения играют условия сшивания функций соседних интервалов (периодов).

**5.1. Вводные замечания.** Параллельно с обычной квантовой механикой с непрерывными координатами развивается и ее дискретный вариант, описывающий движение волн по решеткам. Конечно-разностное уравнение

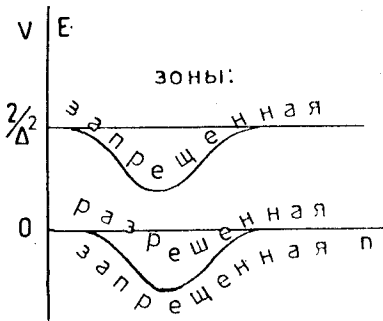


Рис. 25. Локальный потенциал  $v(x)$  изгибает разрешенную зону в плоскости  $(E, n)$ , не меняя ее ширины (ср. с действием минимальной нелокальной составляющей потенциала, управляющей шириной зоны, как показано на рис.26). Дискретные значения функций на рис.25—28 соединены для наглядности сплошными линиями

Шредингера используется для описания волн в кристаллах и может служить моделью для исследования распространения волн по решеткам дискретных переменных, например, нумерующих связанные каналы или смешиваемые конфигурации [1].

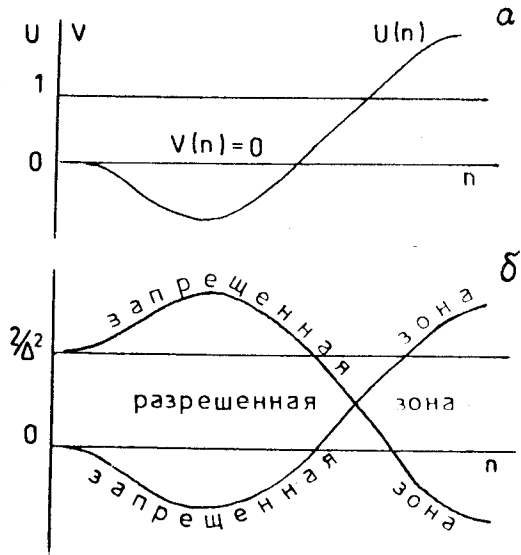
Глубже понять особенности квантовой физики позволяют точно решаемые модели. Многочисленные и обширные классы таких моделей в обычной квантовой механике получались и с помощью методов суперсимметрии [3,4,42].

В данной работе мы построим потенциал, прозрачный для волн на решетке при любых значениях энергии из непрерывного спектра (в разрешенной зоне), используя подход суперсимметричной квантовой механики (факторизация гамильтонианов).

С одной стороны, по аналогии с непрерывным случаем, можно было ожидать солитонобразной формы прозрачного дискретного потенциала  $v(n)$ . Но локальный потенциал изгибает полосу разрешенного движения (в плоскости  $E, n$ , см. рис.25) без изменения ее ширины, так что притягивающая яма прогибается вниз верхнюю границу разрешенной зоны, что создает эффективный барьер из свешивающейся вниз, в разрешенную зону, верхней запрещенной зоны. Казалось бы, это делает безнадежным построение прозрачной мишени. Найти выход здесь помогла интуиция, приобретенная в работах [1,58,59] по управлению спектрами в дискретной квантовой механике. Требуется, помимо  $v(n)$ , вводить связь функций в соседних дискретных точках — минимальную нелокальность (тридиагональность) потенциала. Значения потенциала на диагоналях, соседних с главной, мы будем обозначать  $u(n)$ :

$$\begin{aligned}
 & - [\psi(n+1) - 2\psi(n) + \psi(n-1)]/\Delta^2 + \\
 & + u(n+1)\psi(n+1) + v(n)\psi(n) + u(n)\psi(n-1) = E\psi(n), \quad (18)
 \end{aligned}$$

Рис. 26. Потенциал  $u(n)$  — (а), определяющий взаимное влияние соседних точек (минимальную нелокальность), управляет изменением ширины разрешенной зоны (б) в разных точках  $n$



где  $\delta$  — шаг разностного дифференцирования. С помощью этих недиагональных потенциальных членов  $u(n)$  можно управлять шириной разрешенной зоны [1,58] (см. рис.26).

Появление  $u(n)$  подобно введению переменного шага  $\Delta/[1 - n(n)]$ . В частности, можно при введении солитонообразной ямы  $v(n)$  убрать свешивающийся сверху барьер, выравнивая верхнюю границу запрещенной зоны. Семейство таких прозрачных потенциалов, как и в непрерывном случае, зависит от  $2N$  непрерывных параметров: положений уровней энергии  $N$  связанных состояний и соответствующих нормировочных констант, определяющих положение локализации связанных состояний на оси  $n$ . Можно еще построить прозрачные потенциалы со связанными состояниями над (!) непрерывным спектром или с дискретными уровнями энергии как под, так и над разрешенной зоной.

Когда стало понятно, как строить прозрачные возмущения на решетках, возник вопрос об объяснении безотражательных возмущений  $\Delta v(x)$  периодического поля. Подход обратной задачи давал локальные  $\Delta v(x)$ , а аналогия с дискретным случаем подсказала необходимость нелокальных добавок, чтобы скомпенсировать эффективные барьеры при прогибах разрешенных зон. Выход из тупика оказался в том, что роль эффективной минимальной нелокальности взаимодействия здесь играют («тридиагональные») связи возмущенных решений на границах участков соседних периодов невозмущенной задачи.

**5.2. Факторизация гамильтонианов.** Построим прозрачный потенциал с одним связанным состоянием при отрицательной энергии  $\lambda$  из функций  $\exp(\pm kn)$ , удовлетворяющих свободному (без потенциала) уравнению при той же энергии. Выберем разностный гамильтониан  $H_-$  в виде произведения сопряженных разностных операторов  $A^+$  и  $A^-$  первого порядка (см. [42]):

$$A^- \psi(n) = s(n) \psi(n-1) + r(n) \psi(n), \quad (19)$$

$$A^+ \psi(n) = s(n+1) \psi(n+1) + r(n) \psi(n) \quad (20)$$

плюс константа, равная фиксированному значению энергии  $\lambda = 2 - 1 \cosh(\kappa)$ , при которой мы хотим породить связанное состояние:

$$H_- = A^+ A^- + \lambda. \quad (21)$$

Возьмем в качестве решения свободного разностного уравнения Шредингера (уравнения (18) с  $v(n) = u(n) = 0$ ) при отрицательной энергии  $\lambda$  линейную комбинацию:

$$\psi(n) = \exp(\kappa n) + c \exp(-\kappa n), \quad (22)$$

из условия, что коэффициенты в свободном разностном уравнении Шредингера в точках  $n \pm 1$  равны  $-1$ , имеем

$$r(n) = -s^{-1}(n), \quad (23)$$

а из (23) и выбора (см. [11])

$$A^- \psi(n) = 0 \quad (24)$$

следует

$$r(n) = \sqrt{\frac{\exp(-\kappa(n-1)) + c \exp(\kappa(n-1))}{\exp(-\kappa n) + c \exp(\kappa(n))}}, \quad (25)$$

$$s(n) = -\sqrt{\frac{\exp(-\kappa(n)) + c \exp(\kappa n)}{\exp(-\kappa(n-1)) + c \exp(\kappa(n-1))}}. \quad (26)$$

Из операторов (20) строим новый гамильтониан

$$H_+ = A^- A^+ + \lambda, \quad (27)$$

являющийся суперсимметричным партнером для  $H_-$ , в котором отличный от нуля безотражательный (минимально нелокальный — тридиагональный) потенциал

$$v(n) = s^2(n) + r^2(n) = \frac{\exp(\kappa(n-1)) + c \exp(\kappa(n-1))}{\exp(\kappa n) + c \exp(\kappa(n-1))} + \frac{\exp(\kappa(n-1)) + c \exp(\kappa(n-1))}{\exp(\kappa n) + c \exp(\kappa(n-1))}, \quad (28)$$

$$u(n) = 1 + \frac{\exp(\kappa(n)) \exp(\kappa n)}{\exp(\kappa(n-1)) + c \exp(\kappa(n-1))} \frac{\exp(\kappa(n-1)) + c \exp(\kappa(n-1))}{\exp(\kappa n) + c \exp(\kappa(n-1))} \quad (29)$$

является разностным аналогом солитонного потенциала. Форма этих потенциалов  $v(n)$ ,  $u(n)$  показана на рис.27. Решения уравнения с



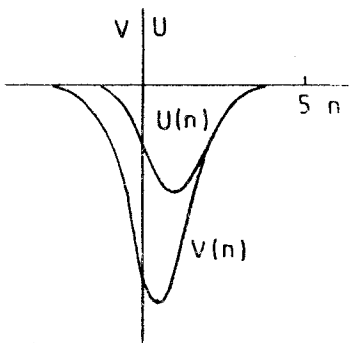


Рис. 27. Солитообразная форма потенциалов  $v(n), u(n)$  безотражательного разностного гамильтониана. Потенциал  $u(n)$  необходим для «исправления» прогиба запрещенной зоны внутрь, вызываемого потенциалом  $v(n)$

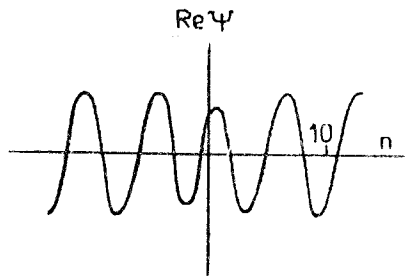


Рис. 28. Волновые функции рассеяния в поле безотражательного потенциала

гамильтонианом получаются из решений, отвечающих свободному движению, действием оператора  $A_-$  (см. рис.28 для  $\psi(n)$ ). Чтобы породить связанное состояние выше разрешенной зоны, используем решения

$$\psi(n) = (-1)^n \exp(kn) + c(-1)^n \exp(-kn). \quad (30)$$

Соответствующие потенциалы отличаются от показанных на рис.27 лишь знаком  $v(n)$ , а  $u(n)$  вообще не меняется, что можно было предвидеть интуитивно (ср. с алгоритмами управления решеточными системами в [1]). Функция  $\psi(n)$  связанного состояния над непрерывным спектром меняет знак в каждой соседней точке, а по модулю равна соответствующей функции связанного состояния под непрерывным спектром.

## 6. ЛИТЕРАТУРНЫЕ КОММЕНТАРИИ

Книгу одного из авторов (Б.З.) «Уроки квантовой интуиции» [8], подготовленную к печати, можно скопировать у автора с дискеты (ее постоянно совершенствуемый LaTeX-вариант будет сосуществовать с обычным).

Рознер [16] предложил аппроксимировать периодические структуры с полосатыми спектрами с помощью безотражательных потенциалов. В рабо-

те [35] В.Спиридонов рассматривает точные модели  $q$ -деформированной квантовой механики. В частном случае получается растяжение спектра  $E^+ = q^2 E^-$ . Стали яснее некоторые параллели между методами обратной задачи и суперсимметрии [4,3]. Мозес и Кей [60] обобщили формализм обратной задачи на многомерный случай, обходя трудность несоответствия числа переменных, от которых зависят данные рассеяния и потенциал, путем введения нелокальности взаимодействия по углам  $V(r, \theta, \phi, \theta', \phi')$ . В [2] то же было достигнуто с помощью многоканального формализма.  $V_{lm'l'm'}(r)$  зависит от четырех дискретных и одной непрерывной переменной, что соответствует нелокальности (например, по углам).

В работе [26] (1984) рассмотрена обратная задача на собственные значения с разрывными собственными функциями. Восстанавливаются и скачки функций, и их положение, и одно граничное условие, если потенциал известен на половине интервала, известно одно граничное условие и собственные значения. Случай симметричных потенциалов обсуждается в [26].

На всей оси лишь для потенциалов, спадающих быстрее  $x^{-2}$ , обратная задача решается однозначно по коэффициентам отражения, спектру связанных состояний и нормировкам. Потеря однозначности показана в [18].

Квазиточно решаемые модели рассмотрены в [27,32,33,30]. До сих пор недостаточно ясна их связь с точно решаемыми.

Правила сумм обсуждаются в ряде работ [37] (формулы следов, связывающие спектральные параметры с потенциалом).

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подход обратной задачи вместе с качественной теорией управления спектрами, рассеянием, распадами кардинально обновляет квантовую теорию. Полученные здесь результаты помогут дальнейшим исследованиям волнового микромира и всевозможным практическим приложениям, их нужно скорее и шире внедрять в курсы квантовой механики («снабдить» квантовой интуицией каждого физика).

Дальнейший прогресс этой науки нам видится в развитии алгоритмов многоканального управления. В идеале хотелось бы выделять независимые параметры (спектральные, рассеяния, распадов), меняя которые можно было бы получать квантовые картинки локальных потенциалов. А из последних хорошо бы научиться извлекать физическую суть (простые связи взаимодействия и наблюдаемых) так же, как было показано выше.

Авторы выражают благодарность за поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 94-02-04788) и сотрудникам ЛТФ ОИЯИ за стимулирующий интерес к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захарьев Б.Н. — ЭЧАЯ, 1992, т.23, №5, с.1387.
2. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. — Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985. Переработанное английское издание: Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.
3. Березовой В.П., Пашнев А.И. — ТМФ, 1987, т.70, с.146; 1988, т.74, с.392; Z. Phys., 1991, vol.C51, p.525.
4. Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В. — ТМФ, 1984, т.61, с.183; 1987, т.72, с.97; Phys. Lett., 1984, A105, p.19; Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, вып.1.
5. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. — Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. М.: Атомиздат, 1974.
6. Захарьев Б.Н., Костов Н., Плеханов Е.Б. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.914.
7. Захарьев Б.Н., Сердюкова С.И. — Сообщение ОИЯИ, P4-92-10, Дубна, 1992; Phys. Rev. A, 1993, vol.47, No.5, p.3518; Сердюкова С.И. — Препринт ОИЯИ P11-92-434, Дубна, 1992.
8. Захарьев Б.Н. — Уроки квантовой интуиции. ОИЯИ (подготовлена к печати, можно скопировать у автора на дискету ee LaTeX-вариант).
9. Моговиллов А.К. — ТМФ, 1994, т.98, №2, с.248.
10. Захарьев Б.Н., Нехамкин Л.И., Чабанов В.М. — Сообщение ОИЯИ P4-92-496, Дубна, 1992.
11. Захарьев Б.Н., Пашнев В.И. — Сообщение ОИЯИ P4-94-335, Дубна, 1994.
12. Фаддеев Л.Д. — Успехи мат. наук, 1959, т.14, вып.4 (88), с.57.
13. Brandt S., Dahmen H.D. — The Picture Book of Quantum Mechanics. J.Wiley and Sons, NY, 1985; Quantum Mechanics on the Personal Computer. Springer, Heidelberg, 1990.
14. Chabanov V.M., Zakhariev B.N. — Phys. Rev. A, 1994, vol.A49, No.5, p.3159.
15. Sukumar C.V. — J. Phys., 1985, vol.A18, p.L57; 1985, p.2917, 2937; 1988, vol.A21, No.8, p.L455; J.Phys., 1985, vol.A18, p.2917, 2937; vol.A18, p.L57; L697; 1986, vol.A19, p.2297; 1987, A20, p.2461.
16. Rosner J.L. — Ann. Phys. (N.Y.), 1990, vol.200, p.101.
17. Abraham P.B., Moses H.F. — Phys., Rev. 1980, vol.A22, p.1333.
18. Abraham P., DeFacio D., Moses H.E. — Phys. Rev. Lett., 1981, vol.46, p.1657.
19. Amado R.D., Cannata F., Dedonder J.P. — Phys. Rev. Lett., 1988, vol.61, p.2901; Phys. Rev., 1988, vol.A38, p.3797.
20. Beckers J., Debergh N. — Z. Phys., 1991, vol.C51, p.519; J. Phys., 1993, vol.A26, p.L853; 1990, vol.23, p.L751S, L1073; J. Math. Phys., 1993, vol.34(8), p.3378; 1991, vol.32, p.1808, 3094, 1815; 1990, vol.31(6), p.1513; Nucl. Phys., 1990, vol.B340, p.767.
21. Cannata F., Ioffe M.V. — Phys. Lett., 1992, vol.B278, p.399.
22. Fukui T. — Phys. Lett., 1993, vol.A178, p.1.

23. **Poshel J., Trubovitz E.** — Inverse Spectral Theory. Academic, New York, 1987.
24. **Daskalov V.B.** — On the Inverse Problems for the Regular Sturm-Liouville Operator (to be published).
25. **Chabanov V.M., Zakhariev B.N.** — Phys. Lett., 1993, vol.B319, p.13; Сообщение ОИЯИ Р4-93-111, Дубна, 1993.
26. **Hald O.H.** — Comm. Pure Appl. Math., 1984, vol.37, No.5, p.539; Acta Math., 1978, vol.141, p.263.
27. **Zaslavsky O.B.** — J. Phys., 1993, vol.A26, p.6563; Изв. вузов. Физика, 1990, №1, с.17.
28. **Ulyanov V.V., Zaslavsky O.B.** — Phys. Rep., 1992, vol.216, p.179.
29. **Pursey D.L.** — Phys. Rev., 1986, vol.D33, p.431, 1048, 2267; *ibid.* 1987, vol.D36, p.1103; 1986, vol.D33, p.2267.
30. **Shifman M.A.** — Int. J. Mod. Phys., 1989, vol.A4, p.2897.
31. **Shifman M.A., Turbiner A.V.** — Commun. Math. Phys., 1989, vol.126, p.347.
32. **Turbiner A.V.** — Commun. Math. Phys., 1988, vol.118, p.467.
33. **Ushveridze A.G.** — Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics, Inst. Phys., Publ. Bristol, 1994; Mod. Phys. Lett., 1991, vol.6A, p.977; ЭЧАЯ, 1989, т.20, с.1185.
34. **Schonfeld J.F. et al.** — Ann. Phys., 1980, vol.128, p.1.
35. **Spiridonov V.** — Mod. Phys. Lett., 1992, vol.7, p.1241.
36. **Spiridonov V., Vinet L., Zhedanov A.S.** — Lett. Math. Phys., 1993, vol.29, №1, p.63; Preprint CRM-1880 LPN-TH-145, Univ. Montreal, 1993.
37. **Gesztesy F. et al.** — Bull. Amer. Math. Soc., 1993, vol.29, p.250; Rev. Math. Phys. (to be publ.).
38. **Schroedinger E.** — Proc. Royal. Irish. Acad., 1940, vol.A46, p.9; *ibid.*, 1941, p.183.
39. **Thacker H.B. et al.** — Phys. Rev., 1978, vol.D18, p.274.
40. **Infeld L., Hull T.E.** — Rev. Mod. Phys., 1951, vol.23, p.21.
41. **Zhedanov A.S.** — Phys. Lett., 1993, vol.A176, p.300.
42. **Spiridonov V., Zhedanov A.S.** — Preprint CRM-1928, 1929, Univ. Montreal, 1993 (sub. to Ann. Phys.).
43. **Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V.P.** — Phys. Lett., 1993, vol.A174, p.273.
44. **Сулов С.К., Атакишиев Н.М.** — ТМФ, 1991, т.87, с.442.
45. **Атакишиев Н.М., Сулов С.К.** — ТМФ, 1990, т.85, с.1055.
46. **Никифоров А.Ф., Сулов С.К., Уваров В.Б.** — Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.
47. **Гельфонд А.О.** — Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
48. **Фаддеев Л.Д.** — УМН, 1959, т.14, вып.4, с.55.
49. **Plekhanov E.B., Suzko A.A., Zakhariev B.N.** — Ann. Phys., 1982, vol.39, No.5, p.313.
50. **Case K.M., Chui S.C., Lau C.W.** — J. Math. Phys., 1973, vol.14, p.594.
51. **Case K.M., Кас M.J.** — J. Math. Phys., 1973, vol.14, p.594.
52. **Гусейнов Г.С.** — Мат. заметки, 1978, т.23, с.709; 1982, т.32, с.737; ДАН СССР, 1976, т.231, с.1045; Изв. АН СССР, сер. мат., 1976, т.12, с.365.
53. **Gladwell G.M.L., Willms M.B.** — Inverse Probl., 1989, vol.5, p.165.
54. **Gallinar J.-P., Mattis D.C.** — J. Phys., 1985, vol.A18, p.2583.
55. **Chalband E., Gallinar J.-P., Mata J.** — J. Phys., 1986, vol.A19, p.L385.

56. **Callinar J.-P.** — Phys. Lett., 1984, vol.A103, p.72.
57. **Mattis D.C.** — Rev. Mod. Phys., 1986, vol.58, p.361.
58. **Serdyukova S.I., Zakhariev B.N.** — Phys. Rev., 1992, vol.A46, p.58; 1993, vol.A47, No.5.
59. **Сердюкова С.И.** — Препринт ОИЯИ P11-92-434, Дубна, 1992.
60. **Kay I., Moses H.E.** — Nuovo Cim., 1961, vol.22, p.689; Comm. Pure Appl. Math., 1961, vol.14, p.435.
61. **Fernandez D.J.** — Lett. Math. Phys., 1984, vol.8, p.337.
62. **Fernandez D.J., Hussin V., Nieto L.M.** — Preprint CRM, 1993.
63. **Geramb H.V. et al.** — Phys. Rev. C, 1989, vol.40, p.912.