

# КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ И УРАВНЕНИЯ ЯНГА — БАКСТЕРА

А.П.Исаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре изложены основы теории квантовых групп, с точки зрения возможности их применения для деформаций симметрий в физических моделях. Подробно обсуждается  $R$ -матричный подход к теории квантовых групп, на основе которого проведено квантование классических групп Ли, а также некоторых супергрупп Ли. Приведены рациональные и тригонометрические решения уравнения Янга — Бакстера, связанные с квантовыми группами  $GL_q(N)$ ,  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(2n)$ . Приведены также эллиптические решения уравнения Янга — Бакстера. Кратко обсуждаются приложения теории квантовых групп и уравнений Янга — Бакстера в различных областях теоретической физики.

The principles of the quantum group theory are summarized from the point of view of possible deformations of symmetries in physics.  $R$ -matrix approach to the theory of quantum groups is discussed in details and used for the quantizing of the classical Lie groups and some Lie supergroups. Rational and trigonometric solutions of the Yang — Baxter equation which are related to the quantum groups  $GL_q(N)$ ,  $SO_q(N)$  and  $Sp_q(2n)$  are presented. We also reproduce elliptic solutions of the Yang — Baxter equations. The applications of the theory of the quantum groups and Yang — Baxter equations in various areas of theoretical physics are briefly discussed.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В современной теоретической физике идеи симметрии и инвариантности играют весьма заметную роль. Преобразования симметрии, как правило, образуют группы, следовательно, наиболее естественным языком описания симметрий является язык теории групп.

Примерно 15 лет назад, при изучении двумерных интегрируемых систем, в рамках квантового метода обратной задачи [1] возникли новые алгебраические структуры, обобщения которых позднее получили название «квантовые группы». Отметим, что похожие структуры появлялись также и при решении некоторых моделей статистической механики [2] и при изу-

чении факторизованного рассеяния солитонов и струн [3,4]. Объединяющим началом всех этих исследований были так называемые уравнения Янга — Бакстера (УЯБ).

Важнейшими нетривиальными примерами квантовых групп являются квантовые группы Ли и квантовые алгебры Ли, которые можно рассматривать как деформацию или квантование обычных классических групп и алгебр Ли (более точно рассматривается квантование алгебры функций на группе Ли и универсальной обертывающей алгебры Ли). Данное квантование сопровождается введением дополнительного параметра  $q$  (параметра деформации), который играет роль, аналогичную роли постоянной Планка в квантовой механике. При  $q \rightarrow 1$  квантовые группы и алгебры Ли переходят в классические.

Хотя квантовые группы не являются группами в математическом смысле, они, тем не менее, обладают рядом свойств, которые позволяют говорить о них как о «группах симметрии». Так, известны примеры статистических систем (анизотропные магнетики Гайзенберга), а также систем деформированных осцилляторов с гамильтонианами, инвариантными относительно специального действия квантовых групп (см., например, [5]). В связи с этим возникает естественная идея о поиске и конструировании других физических моделей, обладающих такими квантовыми симметриями.

Перечислим несколько существующих направлений, связанных с реализацией идей о квантовании симметрий в физике. Часть этих направлений использует совпадение теории представлений квантовых и классических групп и алгебр Ли (для  $q$ , не равного корням из единицы). В результате мы имеем, например, совпадение размерностей неприводимых представлений (мультиплетов) для группы  $SU(N)$  и (копредставлений) для квантовой группы  $SU_q(N)$ . Таким образом, мы можем применять квантовые группы Ли как для классификации элементарных частиц, так и в исследованиях по ядерной спектроскопии. Далее, естественным является желание исследовать уже существующие теоретико-полевые модели (такие, например, как модель Салама — Вайнберга или стандартная модель) на предмет их связи с некоммутативной геометрией (см. [6]) и, в частности, возможной их инвариантности относительно квантово-групповых преобразований. При этом весьма привлекательной кажется идея о связи параметров деформации квантовых групп с углами смешивания, присутствующими в стандартной модели в качестве свободных параметров. Одна из возможных реализаций этой идеи была предложена в работе [7]. Упомянем здесь также многочисленные попытки деформации групп Лоренца и Пуанкаре и соответствующие этим деформациям построения квантовых версий пространства-времени [8,9].

Перечисленные выше направления, связанные с квантованием симметрий в физике, составляют лишь малую часть всех применений теории кван-

товых групп. Квантовые группы и УЯБ естественно возникают во многих задачах теоретической физики, и это позволяет говорить о них и их теориях как о новой парадигме в математической физике. К сожалению, жесткие рамки обзора не позволяют подробно обсудить все применения квантовых групп и УЯБ. Поэтому автор ограничился лишь кратким перечислением некоторых областей в теоретической физике и математике, где квантовые группы и УЯБ играют существенную роль. Это перечисление сделано в заключении. Во втором разделе излагаются математические основы теории квантовых групп. Значительная часть третьего раздела является подробным изложением некоторых результатов из работы Л.Д.Фаддеева, Н.Ю.Решетихина и Л.А.Тахтаджяна [10], где сформулирован  $R$ -матричный подход к теории квантовых групп. Кроме того, в этом разделе мы рассматриваем вопросы инвариантной бастеризации  $R$ -матриц, многопараметрические деформации групп Ли, а также квантование некоторых супергрупп Ли. В конце третьего раздела мы приводим эллиптические решения уравнений Янга — Бакстера, алгебраическая основа которых (типа квантовых групп Ли в случае тригонометрических решений) до сих пор не прояснена. Читателям, которые совсем не знакомы с теорией квантовых групп, мы советуем начать чтение обзора с пп. 3.3 из третьего раздела.

В заключении, как мы уже упоминали выше, кратко рассматриваются некоторые приложения квантовых групп и УЯБ.

## 2. АЛГЕБРЫ ХОПФА

Данный раздел основывается на публикациях [11—15].

Рассмотрим ассоциативную алгебру  $\mathcal{A}$  с единичным элементом (над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ ; в дальнейшем все алгебры, которые будут вводиться, будут также пониматься над полем комплексных чисел), каждый элемент которой выражается в виде линейной комбинации базисных элементов  $\{e_i\}$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots$  и  $E^i e_i = I$  ( $E^i \in \mathbb{C}$ ) есть единичный элемент. Это значит, что для любых двух элементов  $e_i$  и  $e_j$  мы можем определить их умножение в виде

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{m} \mathcal{A} \Rightarrow e_i \cdot e_j = m_{ij}^k e_k, \quad (2.1)$$

где  $m_{ij}^k$  — некоторый набор комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$E^i m_{ij}^k = m_{ji}^k E^i = \delta_j^k \quad (2.2)$$

для единичного элемента, а также условию

$$m_{ij}^l m_{lk}^n = m_{il}^n m_{jk}^l \equiv m_{ijk}^n, \quad (2.3)$$

эквивалентному условию ассоциативности для алгебры  $\mathcal{A}$

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k). \quad (2.4)$$

Условие ассоциативности (2.4) для умножения (2.1), очевидно, можно представить в виде диаграммы (имеется в виду ее коммутативность),

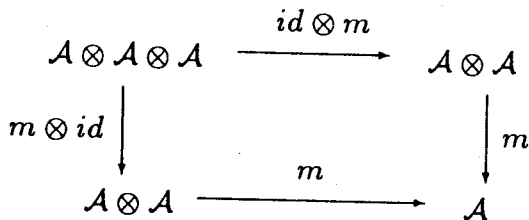


Рис.1. Аксиома ассоциативности

где  $m$  — отображение умножения, а  $id$  обозначает тождественное отображение. Наличие единичного элемента  $I$  означает существование отображения  $i: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$  (вложение  $\mathbb{C}$  в  $\mathcal{A}$ ):

$$k \xrightarrow{i} kI, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (2.5)$$

Для  $I$  мы имеем условие (2.2), которое эквивалентно диаграмме,

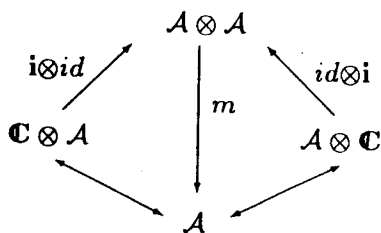


Рис.2. Аксиомы для единичного элемента

где отображения  $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \leftrightarrow \mathcal{A}$  являются естественными изоморфизмами. Одно из достоинств диаграммного языка, использованного выше, заключается в том, что он моментально приводит к определению нового фундаментального объекта — коалгебры, если мы все стрелки на приведенных диаграммах повернем в обратном направлении.

**Определение 1.** Коалгеброй  $C$  называется векторное пространство (с базисом  $\{e_i\}$ ), снабженное отображением  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$

$$\Delta(e_i) = \Delta_i^{kj} e_k \otimes e_j, \tag{2.6}$$

которое называется коумножением, а также снабженное отображением  $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{C}$ , которое называется коединицей. Коалгебра называется коассоциативной, если отображение  $\Delta$  удовлетворяет условию коассоциативности (ср. с первой диаграммой со стрелками в обратном направлении)

$$(id \otimes \Delta) \Delta = (\Delta \otimes id) \Delta \Rightarrow \Delta_i^{nl} \Delta_l^{kj} = \Delta_i^{lj} \Delta_l^{nk} \equiv \Delta_i^{nkj}. \tag{2.7}$$

Для коединицы  $\epsilon$  необходимо выполнение следующих условий (ср. со второй диаграммой):

$$(\epsilon \otimes id) \Delta = (id \otimes \epsilon) \Delta = id \Rightarrow \epsilon_i \Delta_k^{ij} = \Delta_k^{ji} \epsilon_i = \delta_k^j. \tag{2.8}$$

Здесь комплексные числа  $\epsilon_i$  определяются из соотношений  $\epsilon(e_i) = \epsilon_i$ .

Для алгебр и коалгебр можно ввести понятия модулей и комодулей. Так, если  $A$  является алгеброй, то левый  $A$ -модуль может быть определен как векторное пространство  $N$  и отображение  $\psi_L : A \otimes N \rightarrow N$  (действие  $A$  на  $N$ ) такое, что

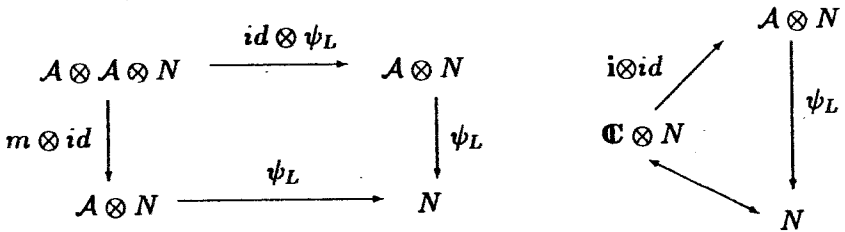


Рис.3. Аксиомы для левого  $A$ -модуля

Другими словами, пространство  $N$  является пространством представления для алгебры  $A$ .

Если  $N$  является (ко)алгеброй и отображение  $\psi_L$  сохраняет (ко)алгебраическую структуру  $N$  (см. ниже), то  $N$  называется левой  $A$ -модульной (ко)алгеброй. Аналогично вводится понятие правого модуля и модульной (ко)алгебры. Если  $N$  является одновременно левым и правым  $A$ -модулем, то  $N$  называется двухсторонним  $A$ -модулем. Очевидно, что сама алгебра  $A$

является двухсторонним  $\mathcal{A}$ -модулем, для которого левое и правое действие задается левым и правым умножением в алгебре.

Пусть  $\mathcal{C}$  есть коалгебра, тогда левый  $\mathcal{C}$ -комодуль может быть определен как пространство  $M$  вместе с отображением  $\Delta_L : M \rightarrow \mathcal{C} \otimes M$  (кодействие  $\mathcal{C}$  на  $M$ ), удовлетворяющим аксиомам (в диаграммах на рис.3, определяющих модули, необходимо заменить все стрелки на обратные).

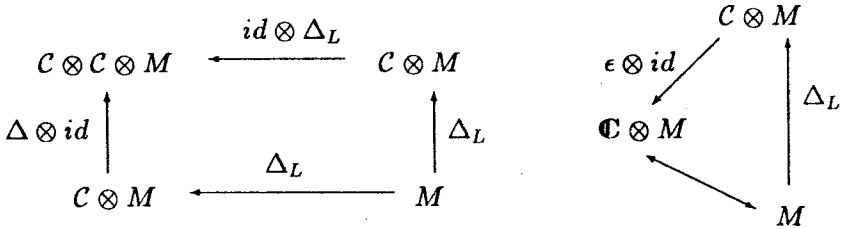


Рис.4. Аксиомы для левого  $\mathcal{A}$ -комодуля

Если  $M$  является (ко)алгеброй и отображение  $\Delta_L$  сохраняет (ко)алгебраическую структуру (например, является гомоморфизмом; см. ниже), то  $M$  называется левой  $\mathcal{C}$ -комодульной (ко)алгеброй. Правые комодули вводятся аналогичным образом, после чего естественным образом определяются двухсторонние комодули. Очевидно, что коалгебра  $\mathcal{C}$  является двухсторонним  $\mathcal{C}$ -комодулем.

Пусть  $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$  — два векторных пространства с базисам  $\{e_j\}, \{\tilde{e}_j\}$ . Обозначим  $\mathcal{V}^*, \tilde{\mathcal{V}}^*$  соответствующие дуальные линейные пространства, базисными элементами которых являются линейные функционалы  $\{e^i\} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}, \{\tilde{e}^i\} : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}$ . Для значений этих функционалов будем использовать формулы:  $\langle e^i | e_j \rangle$  и  $\langle \tilde{e}^i | \tilde{e}_j \rangle$ . Для каждого отображения  $L : \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$  можно определить единственное отображение  $L^* \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$ , индуцированное равенствами

$$\langle \tilde{e}^i | L(e_j) \rangle = \langle L^*(\tilde{e}^i) | e_j \rangle. \tag{2.9}$$

Кроме того, для дуальных объектов существует линейная инъекция

$$\rho : \mathcal{V}^* \otimes \tilde{\mathcal{V}}^* \rightarrow (\mathcal{V} \otimes \tilde{\mathcal{V}})^*,$$

которая задается равенствами

$$\langle \rho(e^i \otimes \tilde{e}^j) | e_k \otimes \tilde{e}_l \rangle = \langle e^i | e_k \rangle \langle \tilde{e}^j | \tilde{e}_l \rangle.$$

Следствием этих фактов является то, что для каждой коалгебры  $(C, \Delta, \epsilon)$  можно определить алгебру  $C^* = \mathcal{A}$  (как дуальный объект к  $C$ ) с умножением  $m = \Delta^*$  и единицей  $I$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$\langle aa' | c \rangle = \langle a \otimes a' | \Delta(c) \rangle = \langle a | c_{(1)} \rangle \langle a' | c_{(2)} \rangle,$$

$$\langle I | c \rangle = \epsilon(c), \quad \forall a, a' \in \mathcal{A}, \quad \forall c \in C.$$

Здесь мы использовали удобные обозначения Свидлера [11] для коумножения в  $C$ :  $\Delta(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}$  (ср. с (2.6)). Знак суммы  $\sum_c$  в формулах обычно опускается.

Итак, дуальность в диаграммных определениях алгебр и коалгебр (замена стрелок на обратные), в частности, приводит к тому, что алгебры и коалгебры действительно дуальны друг к другу.

Естественно ожидать, что аналогичная дуальность прослеживается и для модулей и комодулей. Пусть  $\mathcal{V}$  — левый комодуль для  $C$ . Тогда левое кодействие  $C$  на  $\mathcal{V}$ :  $v \rightarrow \sum_v \bar{v}^{(1)} \otimes v^{(2)}$  ( $\bar{v} \in C$ ) индуцирует правое действие

$\mathcal{A} = C^*$  на  $\mathcal{V}$ :

$$(v \otimes a) \xrightarrow{\Psi_R} v \triangleleft a = \langle a | \bar{v}^{(1)} \rangle v^{(2)}$$

(знак суммы  $\sum_v$  здесь и в дальнейшем мы опускаем) и, следовательно,

$\mathcal{V}$  является правым модулем для  $\mathcal{A}$ . И наоборот, правое кодействие  $C$  на  $\mathcal{V}$ :  $v \rightarrow v^{(1)} \otimes \bar{v}^{(2)}$  индуцирует левое действие  $\mathcal{A} = C^*$  на  $\mathcal{V}$ :

$$(a \otimes v) \xrightarrow{\Psi_L} a \triangleright v = v^{(1)} \langle a | \bar{v}^{(2)} \rangle.$$

Отсюда мы сразу же получаем, что коассоциативная коалгебра  $C$  (которая кодействует сама на себя посредством копроизведения) является естественным модулем для своей дуальной алгебры  $\mathcal{A}$ . Действительно, правое действие  $C \otimes \mathcal{A} \rightarrow C$  задается равенствами

$$(c, a) \rightarrow c \triangleleft a = \langle a | c_{(1)} \rangle c_{(2)}, \quad (2.10)$$

в то время как для левого действия  $\mathcal{A} \otimes C \rightarrow C$  мы имеем

$$(a, c) \rightarrow a \triangleright c = c_{(1)} \langle a | c_{(2)} \rangle. \quad (2.11)$$

Здесь  $a \in \mathcal{A}$ ,  $c \in C$ . Модульные аксиомы (изображенные в виде диаграмм на рис.3) выполняются в силу коассоциативности  $C$ .

Наконец заметим, что действие некоторой алгебры  $H$  на  $S$  слева (справа) индуцирует действие  $H$  на  $A = C^*$  справа (слева). Это очевидно следует из соотношений типа (2.9).

Следующими важными объектами, которые используются в теории квантовых групп, являются так называемые биалгебры.

**Определение 2.** Ассоциативная алгебра с единичным элементом, являющаяся одновременно еще и коассоциативной коалгеброй с коединицей, называется биалгеброй, если алгебраическая и коалгебраическая структуры самосогласованы. А именно: коумножение и коединица должны быть гомоморфизмами алгебры

$$\Delta(e_i) \Delta(e_j) = \Delta(e_i e_j) = m_{ij}^k \Delta(e_k) \Rightarrow \Delta_i^{i''} \Delta_j^{j''} m_{ij}^{k'} = m_{ij}^{k''} = m_{ij}^k \Delta_k^{k''},$$

$$\Delta(I) = I \otimes I, \quad \varepsilon(e_i e_j) = \varepsilon(e_i) \varepsilon(e_j), \quad \varepsilon(I) = 1. \quad (2.12)$$

Заметим, что для каждой биалгебры мы имеем некоторую свободу в определениях умножения (2.1) и коумножения (2.6). Действительно, все аксиомы (2.3), (2.7) и (2.12) выполняются, если мы вместо (2.1) возьмем

$$e_i e_j = m_{ji}^k e_k,$$

или вместо (2.6) выберем

$$\Delta'(e_i) = \Delta_i^{jk} e_k \otimes e_j, \quad (2.13)$$

при этом если  $m_{ij}^k \neq m_{ji}^k$ , то алгебра называется некоммутативной, а если  $\Delta_k^{ij} \neq \Delta_k^{ji}$ , то некокоммутиативной.

В квантовой физике обычно подразумевают, что все алгебры наблюдаемых являются биалгебрами. Действительно, коалгебраическая структура необходима для определения действия алгебры наблюдаемых на состояние  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  системы, являющейся композицией двух независимых систем с волновыми функциями  $|\psi_1\rangle$  и  $|\psi_2\rangle$ . Другими словами, только для биалгебр возможно построение теории представлений, в которой новые представления можно получать путем перемножения старых.

Классическим примером биалгебры является универсальная обертывающая алгебры Ли, и, в частности, алгебра спинов в трехмерном пространстве. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим алгебру Ли  $g$  с генераторами  $J_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ ), удовлетворяющими структурным соотношениям

$$J_\alpha J_\beta - J_\beta J_\alpha = t_{\alpha\beta}^\gamma J_\gamma.$$

Здесь  $t_{\alpha\beta}^\gamma$  — структурные константы. Обертывающей этой алгебры является алгебра  $U_g$  с базисными элементами: единичным элементом  $I$  и элемен-



тами  $e_i = J_{\alpha_1} \dots J_{\alpha_n} \forall n \geq 1$ , где произведения генераторов  $J$  лексикографически упорядочены, т.е.  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ . Коалгебраическая структура для алгебры  $U_g$  задается с помощью отображений

$$\Delta(J_\alpha) = J_\alpha \otimes I + I \otimes J_\alpha, \quad \varepsilon(J_\alpha) = 0, \quad \varepsilon(I) = 1, \quad (2.14)$$

которые удовлетворяют всем аксиомам биалгебры. Отображение  $\Delta$  в (2.14) есть не что иное, как правило сложения спинов.

Рассматривая экспоненты от элементов алгебры Ли, можно прийти к определению групповой биалгебры группы  $G$  со структурными отображениями:

$$\Delta(h) = h \otimes h, \quad \varepsilon(h) = 1 \quad (\forall h \in G), \quad (2.15)$$

которые очевидно вытекают из (2.14). Следующим важным примером биалгебры является алгебра  $\mathcal{A}(G)$  функций на группе ( $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ). Эта алгебра является дуальной к групповой алгебре группы  $G$ , и ее структурные отображения имеют вид ( $f, f' \in \mathcal{A}(G); h, h' \in G$ ):

$$(ff')(h) = f(h)f'(h), \quad (\Delta(f))(h, h') = f(hh'), \quad \varepsilon(f) = f(I_G),$$

где  $I_G$  — единичный элемент в группе  $G$ . В частности, если функции  $T_j^i$  реализуют матричное представление группы  $G$  (функции  $T_j^i$  можно рассматривать как образующие в алгебре  $\mathcal{A}(G)$ ), то мы имеем

$$T_j^i(hh') = T_k^i(h) T_j^k(h') \Rightarrow \Delta(T_j^i) = T_k^i \otimes T_j^k.$$

Заметим, что, если  $g$  — неабелева, то  $U_g$  и  $G$  являются некоммутативными, но кокоммутативными биалгебрами, в то время как  $\mathcal{A}(G)$  является коммутативной, но некокоммутативной биалгеброй. Забегая вперед, скажем, что наиболее интересные квантовые группы связаны с некоммутативными и некокоммутативными биалгебрами.

Очевидно, что для биалгебры  $\mathcal{H}$  также можно ввести понятия левых (ко)модулей и (ко)модульных (ко)алгебр (правые (ко)модули и (ко)модульные (ко)алгебры вводятся абсолютно параллельно). Более того, для биалгебры  $\mathcal{H}$  можно ввести понятие левого (правого) бимодуля  $B$ , т.е. левого (правого)  $\mathcal{H}$ -модуля, который является одновременно и левым (правым)  $\mathcal{H}$ -комодулем, причем модульная и комодульная структуры должны быть самосогласованы:

$$\Delta_L(\mathcal{H} \triangleright B) = \Delta(\mathcal{H}) \triangleright \Delta_L(B),$$

$$(\varepsilon \otimes id) \Delta_L(b) = b, \quad b \in B.$$

С другой стороны, в случае биалгебр условия сохранения (ко)алгебраической структуры (ко)модулей могут быть представлены в более явной фор-

ме. Например, для левой  $\mathcal{H}$ -модульной алгебры  $\mathcal{A}$  мы имеем ( $a, b \in \mathcal{A}; h \in \mathcal{H}$ ):

$$h \triangleright (ab) = (h_{(1)} \triangleright a) (h_{(2)} \triangleright b), \quad h \triangleright I_{\mathcal{A}} = \varepsilon(h) I_{\mathcal{A}}.$$

Кроме того, для левой  $\mathcal{H}$ -модульной коалгебры  $\mathcal{A}$  должны выполняться соотношения:

$$\Delta(h \triangleright a) = \Delta(h) \triangleright \Delta(a) = h_{(1)} \triangleright a_{(1)} \otimes h_{(2)} \triangleright a_{(2)}, \quad \varepsilon(h \triangleright a) = \varepsilon(h) \varepsilon(a).$$

Аналогично алгебра  $\mathcal{A}$  является левой  $\mathcal{H}$ -комодульной алгеброй, если

$$\Delta_L(ab) = \Delta_L(a) \Delta_L(b), \quad \Delta_L(I_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{A}},$$

и, наконец, коалгебра  $\mathcal{A}$  является левой  $\mathcal{H}$ -комодульной коалгеброй, если

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta) \Delta_L(a) &= m_{\mathcal{H}}(\Delta_L \otimes \Delta_L) \Delta(a), \\ (id \otimes \varepsilon_{\mathcal{A}}) \Delta_L(a) &= I_{\mathcal{H}} \varepsilon_{\mathcal{A}}(a), \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$m_{\mathcal{H}}(\Delta_L \otimes \Delta_L) (a \otimes b) = \bar{a}^{(1)} \bar{b}^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}.$$

Рассмотрим теперь биалгебру  $\mathcal{H}$ , которая действует на некоторую модульную алгебру  $\mathcal{A}$ . Еще одним важным свойством биалгебр является то, что мы можем определить новую ассоциативную алгебру  $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$  как кросс-произведение (smash product)  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{H}$ . А именно:

- 1) как векторное пространство  $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$  совпадает с  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ ;
- 2) произведение определяется в виде:

$$(a \# g) (b \# h) = \sum_g a(g_{(1)} \triangleright b) \# (g_{(2)} h) \equiv (a \# I) (\Delta(g) \triangleright (b \# h)); \tag{2.17}$$

- 3) единичный элемент совпадает с  $I \# I$ .

Если алгебра  $\mathcal{A}$  является биалгеброй, дуальной к биалгебре  $\mathcal{H}$ , то формулы (2.17) и (2.11) определяют правила перестановки элементов ( $I \# g$ ) и ( $a \# I$ ):

$$(I \# g) (a \# I) = (a_{(1)} \# I) \langle g_{(1)} \mid a_{(2)} \rangle (I \# g_{(2)}). \tag{2.18}$$

Таким образом, подалгебры  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$  не коммутируют друг с другом. Кросс-произведение зависит от того, какое действие алгебры  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{A}$  мы выберем. Кроме того, кросс-произведение обобщает понятие полупрямого произведения. В частности, если мы возьмем в качестве биалгебры  $\mathcal{H}$  групповую алгебру Лоренца (см. (2.15)), а в качестве модуля  $\mathcal{A}$  — группу трансляций в пространстве Минковского, то кросс-произведение  $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$  определяет структуру группы Пуанкаре.

Коаналог кросс-произведения — кросс-копроизведение  $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$  также может быть определено. Рассмотрим для этого биалгебру  $\mathcal{H}$  и ее комодуль-

ную коалгебру  $\mathcal{A}$ . Тогда на пространстве  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$  можно определить структуру коассоциативной коалгебры:

$$\Delta(a \# h) = (a_{(1)} \# \bar{a}_{(2)}^{(1)} h_{(1)}) \otimes (a_{(2)}^{(2)} \# h_{(2)}),$$

$$\varepsilon(a \# h) = \varepsilon(a) \varepsilon(h). \quad (2.19)$$

Доказательство коассоциативности сводится к проверке тождества

$$(m_{\mathcal{H}}(\Delta_L \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \otimes id) (id \otimes \Delta_L) \Delta_{\mathcal{A}}(a) = (id \otimes id \otimes \Delta_L) (id \otimes \Delta_{\mathcal{A}}) \Delta_L(a),$$

которое выполняется с учетом аксиомы (2.16) и комодульной аксиомы

$$(id \otimes \Delta_L) \Delta_L(a) = (\Delta_{\mathcal{H}} \otimes id) \Delta_L(a). \quad (2.20)$$

Заметим, что из двух биалгебр  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{H}$ , специальным образом действующих и кодействующих друг на друга, можно организовать новую биалгебру, которая одновременно является кросс-произведением и кросс-копроизведением  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{H}$  (бикросс-произведением; см. [14]).

Теперь мы введем основное понятие в теории квантовых групп, а именно понятие алгебры Хопфа.

**Определение 3.** Биалгебра  $\mathcal{A}$ , снабженная дополнительным отображением  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , таким, что

$$m(S \otimes id) \Delta = m(id \otimes S) \Delta = i \cdot \varepsilon, \quad (2.21)$$

называется алгеброй Хопфа (АХ). Отображение  $S$  называется антиподом и является антигомоморфизмом по отношению как к умножению, так и к коумножению

$$S(ab) = S(b) S(a), \quad (S \otimes S) \Delta(a) = \sigma \Delta(S(a)), \quad (2.22)$$

где  $a, b \in \mathcal{A}$ , и  $\sigma$  обозначает оператор перестановки  $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$ . Если мы положим

$$S(e_i) = S_i^j e_j, \quad (2.23)$$

то аксиома (2.21) переписывается в виде

$$\Delta_k^{ij} S_i^n m_{nj}^l = \Delta_k^{ij} S_j^n m_{in}^l = \varepsilon_k E^l. \quad (2.24)$$

Из аксиом для структурных отображений АХ можно получить полезные равенства:

$$S_j^i \varepsilon_i = \varepsilon_j, \quad S_j^i E^j = E^i,$$

$$\Delta_k^{ji} (S^{-1})_i^n m_{nj}^l = \Delta_k^{ji} (S^{-1})_j^n m_{in}^l = \varepsilon_k E^l, \quad (2.25)$$

которые мы будем использовать в дальнейшем. Отметим, что, вообще говоря, антипод  $S$  не обязательно обратим. Обратимый антипод называется биективным.

Примерами кокоммутативных АХ опять могут служить универсальная обертывающая алгебра  $U_g$  и групповая биалгебра группы  $G$ , рассмотренные выше. Примером коммутативной АХ служит биалгебра  $\mathcal{A}(G)$ , также рассмотренная выше. Антиподы для этих алгебр выглядят следующим образом:

$$U_g : S(J_\alpha) = -J_\alpha, \quad S(I) = I,$$

$$G : S(h) = h^{-1},$$

$$\mathcal{A}(G) : S(f)(h) = f(h^{-1}),$$

и удовлетворяют соотношению  $S^2 = id$ , справедливому для всех коммутативных или кокоммутативных АХ.

С точки зрения аксиомы (2.21)  $S(a)$  выглядит как обратный элемент к  $a$ , хотя в общем случае  $S^2 \neq id$ . Напомним, что если множество элементов  $\mathcal{G}$  с ассоциативным умножением  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  и с единицей (полугруппа) содержит и все обратные элементы, то такое множество  $\mathcal{G}$  становится группой. Таким образом, с точки зрения наличия отображения  $S$ , АХ является обобщением групповой алгебры (для которой  $S(h) = h^{-1}$ ), хотя сама по себе, очевидно, групповой алгеброй может и не быть. Согласно определению Дринфельда [13], понятия АХ и квантовой группы являются эквивалентными. Конечно, наиболее интересные примеры квантовых групп возникают при рассмотрении некокоммутативных и некокоммутативных АХ.

Рассмотрим некокоммутативную АХ  $\mathcal{A}$ , для которой  $\Delta \neq \Delta'$ .

**Определение 4.** АХ  $\mathcal{A}$ , для которой существует обратимый элемент  $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  такой, что  $\forall a \in \mathcal{A}$  выполняются уравнения

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \tag{2.26}$$

$$(\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}, \quad (id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \tag{2.27}$$

называется квазитреугольной. Здесь элемент

$$R = \sum_{ij} R^{(ij)} e_i \otimes e_j \tag{2.28}$$

называется универсальной  $R$ -матрицей, а символы  $R_{12}, \dots$  имеют следующий смысл:

$$R_{12} = \sum_{ij} R^{(ij)} e_i \otimes e_j \otimes I, \quad R_{13} = \sum_{ij} R^{(ij)} e_i \otimes I \otimes e_j,$$

$$R_{23} = \sum_{ij} R^{(ij)} I \otimes e_i \otimes e_j.$$

Соотношение (2.26) показывает, что некокоммутативность в квазитреугольной АХ (КАХ) держится «под контролем». Можно показать, что для КАХ универсальная  $R$ -матрица (2.28) удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned}(S \otimes id) R &= R^{-1}, & (id \otimes S) R^{-1} &= R, \\ (id \otimes \varepsilon) R &= (\varepsilon \otimes id) R = I,\end{aligned}\tag{2.29}$$

кроме того, для нее выполняется УЯБ:

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12},\tag{2.30}$$

которому будет посвящена значительная часть обзора. Доказательство уравнения (2.30) сводится к расписыванию выражения  $(id \otimes \Delta')(R)$  двумя различными способами:

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta')(R) &= R^{ij} e_i \otimes R \Delta(e_j) R^{-1} = \\ &= R_{23} (id \otimes \Delta)(R) R_{23}^{-1} = R_{23} R_{13} R_{12} R_{23}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta')(R) &= (id \otimes \sigma)(id \otimes \Delta)(R) = \\ &= (id \otimes \sigma) R_{13} R_{12} = R_{12} R_{13},\end{aligned}\tag{2.32}$$

где  $\sigma$  обозначает оператор перестановки. Сравнивая (2.31) и (2.32), легко получить (2.30).

Следующим важным понятием, которое понадобится нам в дальнейшем, является понятие дуальной АХ  $\mathcal{A}^*$  к АХ  $\mathcal{A}$ . Выберем в  $\mathcal{A}^*$  базисные элементы  $\{e^i\}$  и определим умножение, единицу, коумножение, коединицу и антипод для  $\mathcal{A}^*$  в виде

$$\begin{aligned}e^i e^j &= m_k^{ij} e^k, & I &= \bar{E}_i e^i, & \Delta(e^i) &= \Delta_{jk}^i e^j \otimes e^k, \\ \varepsilon(e^i) &= \bar{\varepsilon}^i, & S(e^i) &= \bar{S}_j^i e^j.\end{aligned}\tag{2.33}$$

**Определение 5.** Две АХ  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  с соответствующими базисами  $\{e_i\}$  и  $\{e^i\}$  называются дуальными друг к другу, если существует невырожденное спаривание  $\langle ., . \rangle : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  такое, что

$$\begin{aligned}\langle e^i e^j | e_k \rangle &\equiv \langle e^i \otimes e^j | \Delta(e_k) \rangle = \langle e^i | e_{k'} \rangle \Delta_k^{k'k''} \langle e^j | e_{k''} \rangle, \\ \langle e^i | e_j e_k \rangle &\equiv \langle \Delta(e^i) | e_j \otimes e_k \rangle = \langle e^i | e_j \rangle \Delta_{i'i''}^i \langle e^{i''} | e_k \rangle, \\ \langle S(e^i) | e_j \rangle &= \langle e^i | S(e_j) \rangle, & \langle e^i | I \rangle &= \varepsilon(e^i), & \langle I | e_i \rangle &= \varepsilon(e_i).\end{aligned}\tag{2.34}$$

В силу невырожденности спаривания  $\langle ., . \rangle$  (2.34) мы всегда можем выбрать базисные элементы  $\{e^i\}$  так, что

$$\langle e^i | e_j \rangle = \delta_j^i. \quad (2.35)$$

Тогда из аксиом для спаривания (2.34) и из определений структурных операций в АХ  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  (2.1), (2.23), (2.33) легко выводятся равенства

$$m_k^{ij} = \Delta_k^{ij}, \quad m_{ij}^k = \Delta_{ij}^k, \quad \bar{S}_j^i = S_j^i, \quad \bar{E}^i = E^i, \quad \bar{E}_i = \varepsilon_i. \quad (2.36)$$

Таким образом, умножение, единица, коумножение, коединица и антипод в АХ определяют соответственно коумножение, коединицу, умножение, единицу и антипод в дуальной АХ.

Обозначим  $\mathcal{A}^o$  алгебру  $\mathcal{A}^*$  с противоположным коумножением:  $\Delta(e^i) = m_{kj}^i e^j \otimes e^k$ . При этом из формул (2.25) следует, что антиподом для  $\mathcal{A}^o$  будет являться не  $S$ , а косо антипод  $S^{-1}$ . Структурные отображения для  $\mathcal{A}^o$  имеют вид

$$e^i e^j = \Delta_k^{ij} e^k, \quad \Delta(e^i) = m_{kj}^i e^j \otimes e^k, \quad S(e^i) = (S^{-1})_j^i e^j. \quad (2.37)$$

Алгебры  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^o$  называются антидуальными, и для них можно ввести антидуальное спаривание  $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle : \mathcal{A}^o \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , которое удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \langle\langle e^i e^j | e_k \rangle\rangle &\equiv \langle\langle e^i \otimes e^j | \Delta(e_k) \rangle\rangle = \Delta_k^{ij}, \\ \langle\langle e^i | e_k e_j \rangle\rangle &\equiv \langle\langle \Delta(e^i) | e_j \otimes e_k \rangle\rangle = m_{kj}^i, \\ \langle\langle S(e^i) | e_j \rangle\rangle &= \langle\langle e^i | S^{-1}(e_j) \rangle\rangle = (S^{-1})_j^i, \\ \langle\langle e^i | S(e_j) \rangle\rangle &= \langle\langle S^{-1}(e^i) | e_j \rangle\rangle = S_j^i, \\ \langle\langle e^i | I \rangle\rangle &= E^i, \quad \langle\langle I | e_i \rangle\rangle = \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (2.38)$$

В.Г.Дринфельд показал [13], что существует КАХ  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , которая является специальным кросс-произведением АХ  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^o$ :  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}^o$  и называется квантовым дублем. Причем универсальная  $R$ -матрица выражается в виде

$$R = (e_i \bowtie I) \otimes (I \bowtie e^i), \quad (2.39)$$

а умножение в  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  задается по формуле (знаки сумм опущены):

$$(a \bowtie \alpha) (b \bowtie \beta) = a((\alpha_{(3)} \triangleright b) \triangleleft S(\alpha_{(1)})) \bowtie \alpha_{(2)} \beta, \quad (2.40)$$

где  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^o$ ;  $a, b \in \mathcal{A}$ ;  $\Delta^2(\alpha) = \alpha_{(1)} \otimes \alpha_{(2)} \otimes \alpha_{(3)}$  и

$$\alpha \triangleright b = b_{(1)} \langle\langle \alpha | b_{(2)} \rangle\rangle, \quad b \triangleleft \alpha = \langle\langle \alpha | b_{(1)} \rangle\rangle b_{(2)}. \quad (2.41)$$

Коалгебраическая структура на квантовом дубле определяется прямым произведением коалгебраических структур на АХ  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^o$ :

$$\Delta(e_i \bowtie e^j) = \Delta(e_i \bowtie I) \Delta(I \bowtie e^j) = \Delta_i^{nk} m_{lp}^j (e_n \bowtie e^p) \otimes (e_k \bowtie e^l). \quad (2.42)$$

Наконец, антипод и коединица для  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  имеют вид

$$S(a \bowtie \alpha) = S(a) \bowtie S(\alpha), \quad \varepsilon(a \bowtie \alpha) = \varepsilon(a) \varepsilon(\alpha). \quad (2.43)$$

Проверка всех аксиом AX для  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  проводится прямым вычислением. Простое доказательство ассоциативности умножения (2.40) и коассоциативности коумножения (2.42) можно найти в [15].

Учитывая (2.41), формулу (2.40) можно переписать как коммутатор для элементов  $(I \bowtie \alpha)$  и  $(b \bowtie I)$ :

$$(I \bowtie \alpha) (b \bowtie I) = \langle\langle S(\alpha_{(1)}) \mid b_{(1)} \rangle\rangle (b_{(2)} \bowtie I) (I \bowtie \alpha_{(2)}) \langle\langle \alpha_{(3)} \mid b_{(3)} \rangle\rangle,$$

или в терминах базисных элементов  $\alpha = e^t$  и  $b = e_s$  имеем [13]:

$$\begin{aligned} (I \bowtie e^t) (e_s \bowtie I) &= m_{klp}^t \Delta_s^{nj} (S^{-1})_n^p (e_j \bowtie I) (I \bowtie e^l) \equiv \\ &\equiv (m_{ip}^t (S^{-1})_n^p \Delta_s^{nr}) (m_{kl}^i \Delta_r^{jk}) (e_j \bowtie I) (I \bowtie e^l), \end{aligned} \quad (2.44)$$

где  $m_{klp}^t$  и  $\Delta_s^{nj}$  определяются в (2.3) и (2.7), а  $(S^{-1})_n^p$  — матрица косога антипода. Из равенств (2.3), (2.7) и из тождеств для косога антипода (2.25) следует соотношение

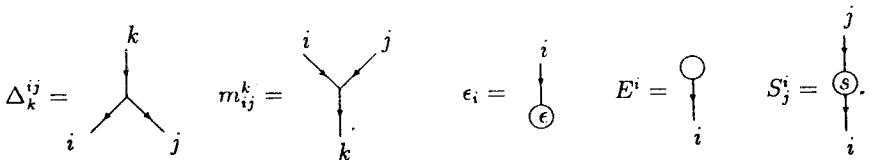
$$(m_{ik}^q \Delta_m^{ks}) (m_{ip}^t (S^{-1})_n^p \Delta_s^{nr}) = \delta_i^q \delta_m^r, \quad (2.45)$$

которое позволяет переписать (2.44) в виде

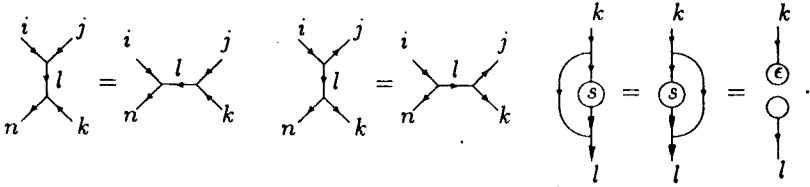
$$(m_{ik}^q \Delta_m^{ks}) (I \bowtie e^t) (e_s \bowtie I) = (m_{kl}^q \Delta_m^{jk}) (e_j \bowtie I) (I \bowtie e^l).$$

Это равенство эквивалентно тому, что  $R$  (2.39) удовлетворяет аксиоме (2.26). Соотношения (2.27) для  $R$  (2.39) проверяются элементарно. Таким образом,  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  действительно является КАХ с универсальной  $R$ -матрицей, представленной формулой (2.39).

В заключение отметим, что многие соотношения для структурных констант AX (например, соотношение (2.45)) могут быть получены и наглядно записаны с помощью следующей диаграммной техники:



Например, аксиомы ассоциативности (2.3), коассоциативности (2.7) и аксиомы для антипода (2.24) представимы в виде



Сделаем два важных замечания, касающихся дальнейшего развития теории алгебр Хопфа.

**Замечание 1.** Рассмотрим квазитреугольную АХ (КАХ)  $(A, \Delta, R)$ , для которой можно определить элемент

$$F = F^{ij} e_i \otimes e_j \in A \otimes A,$$

удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id) F &= F_{13} F_{23}, & (id \otimes \Delta) F &= F_{13} F_{12}, \\ F_{12} F_{13} F_{23} &= F_{23} F_{13} F_{12}, & F_{12} F_{21} &= I \otimes I. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Определим

$$\Delta^{(F)}(a) = F \Delta(a) F^{-1}, \quad R^{(F)} = F_{21} R F_{12}^{-1}, \quad U = m(id \otimes S) F.$$

**Теорема** ([16]).  $(A, \Delta^{(F)}, R^{(F)})$  является КАХ с антиподом и ко-единицей:

$$S^{(F)}(a) = US(a)U^{-1}, \quad \epsilon^{(F)}(a) = \epsilon(a).$$

Новая КАХ  $(A, \Delta^{(F)}, R^{(F)})$  называется скрученной (twisted) КАХ.

**Замечание 2.** Можно ввести деформацию АХ, называемую квазихопфовой алгеброй [17], которая определяется как ассоциативная алгебра  $A$  с единицей, с гомоморфизмом  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ , гомоморфизмом  $\epsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$ , с антиавтоморфизмом  $S : A \rightarrow A$  и обратимым элементом  $\Phi \in A \otimes A \otimes A$ . Причем для  $\Phi$  и  $S$  для выполнены следующие аксиомы:

$$(id \otimes \Delta) \Delta(a) = \Phi \cdot (\Delta \otimes id) \Delta(a) \cdot \Phi^{-1}, \quad a \in A, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} (id \otimes id \otimes \Delta) (\Phi) \cdot (\Delta \otimes id \otimes id) (\Phi) &= \\ = (I \otimes \Phi) \cdot (id \otimes \Delta \otimes id) (\Phi) \cdot (\Phi \otimes I), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes id) \Delta &= id = (id \otimes \epsilon) \Delta, & (id \otimes \epsilon \otimes id) \Phi &= I \otimes I, \\ S(a_{(1)}) b a_{(2)} &= \epsilon(a) b, & a_{(1)} c S(a_{(2)}) &= \epsilon(a) c, \\ \Phi_{(1)} c S(\Phi_{(2)}) b \Phi_{(3)} &= I, & S(\bar{\Phi}_{(1)}) b \bar{\Phi}_{(2)} c S(\bar{\Phi}_{(3)}) &= I, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где  $b, c$  — некоторые фиксированные элементы из  $A$ ,  $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$  и



$$\Phi = \phi_{(1)} \otimes \phi_{(2)} \otimes \phi_{(3)}, \quad \Phi^{-1} = \bar{\phi}_{(1)} \otimes \bar{\phi}_{(2)} \otimes \bar{\phi}_{(3)}.$$

Таким образом, квазихопфова алгебра отличается от обычной АХ тем, что аксиома коассоциативности заменяется более слабым условием (2.47). Другими словами, квазихопфова алгебра некоассоциативна, однако эта некоассоциативность держится под контролем с помощью элемента  $\Phi$ . В работах [17] представлен явный пример квазихопфовой алгебры, связанный с решениями уравнения Книжника — Замолодчикова. С другой стороны, естественно предположить, что в силу возникновения пентагонального соотношения (2.48) для элемента  $\Phi$  квазихопфовы алгебры связаны с многомерными обобщениями уравнений Янга — Бакстера.

### 3. КВАНТОВАНИЕ ГРУПП ЛИ И УРАВНЕНИЯ ЯНГА — БАКСТЕРА

В данном разделе обсуждается  $R$ -матричный подход к теории квантовых групп [10], на основе которого проведено квантование классических групп Ли, а также некоторых супергрупп Ли. Мы представим тригонометрические решения уравнения Янга — Бакстера (УЯБ), инвариантные относительно присоединенного действия квантовых групп  $GL_q(N)$ ,  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(2n)$ . Кратко обсуждаются соответствующие янгианские (рациональные) решения, а также  $Z_N \otimes Z_N$  симметричные эллиптические решения УЯБ.

**3.1. РТТ-алгебры.** Мы будем рассматривать алгебру  $\mathcal{A}$ , генераторами которой являются единичный элемент 1 и элементы  $N \times N$ -матрицы  $T = \|T_j^i\|$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , удовлетворяющие следующим квадратичным РТТ-соотношениям :

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} T_{k_1}^{j_1} T_{k_2}^{j_2} = T_{j_2}^{i_2} T_{j_1}^{i_1} R_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \Leftrightarrow R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12} \Leftrightarrow \mathbf{RTT}' = \mathbf{TT}'\mathbf{R}. \quad (3.1.1)$$

Здесь индексы 1, 2 обозначают номера матричных пространств;  $\mathbf{T} \equiv T_1 \equiv T \otimes I$ ,  $\mathbf{T}' \equiv T_2 \equiv I \otimes T$ ;  $I$  обозначает  $N \times N$ -единичную матрицу;  $\mathbf{R} \equiv R_{12} \equiv P_{12} R_{12} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$  — числовая обратимая матрица и  $P_{12} = \delta_{j_2}^i \delta_{j_1}^i$  — матрица перестановок. Мы будем предполагать, что  $R_{12}$  является блочной нижнетреугольной матрицей и удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера:

$$\begin{aligned} R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} R_{k_1 j_3}^{j_1 i_3} R_{k_2 k_3}^{j_2 i_3} &= R_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} R_{j_1 k_3}^{i_1 i_3} R_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \Rightarrow R_{12} R_{13} R_{23} = \\ &= R_{23} R_{13} R_{12} \Leftrightarrow R_{12} R_{31}^{-1} R_{32}^{-1} = R_{32}^{-1} R_{31}^{-1} R_{12}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

или в кратких обозначениях:

$$\mathbf{RR}'\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{RR}', \quad (3.1.3)$$

где  $\mathbf{R}' \equiv \hat{R}_{23} \equiv P_{23}R_{23}$ , а индексы 1, 2, 3 обозначают номера матричных пространств, в которых соответствующие  $R$ -матрицы действуют нетривиально. Заметим, что прямым следствием (3.1.3) являются равенства

$$X(\mathbf{R})\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{R}X(\mathbf{R}'), \quad \mathbf{RR}'X(\mathbf{R}) = X(\mathbf{R}')\mathbf{RR}', \quad (3.1.4)$$

которые позволяют пронести произвольную функцию  $X(\mathbf{R})$  через операторы  $\mathbf{RR}'$  и  $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ . Условие (3.1.2) и (3.1.3) является достаточным для того, чтобы на мономы третьей степени по  $T$  не возникали дополнительные к (3.1.1) соотношения. Мы будем рассматривать случай, когда  $R$ -матрица зависит от числового параметра  $q = \exp(h)$ , который называется параметром деформации.

Пусть алгебра  $\mathcal{A}$  расширена так, что она содержит и все элементы  $(T^{-1})_j^i$ :

$$(T^{-1})_k^i T_j^k = T_k^i (T^{-1})_j^k = \delta_j^i 1.$$

Тогда  $\mathcal{A}$  становится  $A\mathcal{X}$  со структурными отображениями:

$$\Delta(T_k^i) = T_j^i \otimes T_k^j, \quad \varepsilon(T_j^i) = \delta_j^i, \quad S(T_j^i) = (T^{-1})_j^i, \quad (3.1.5)$$

которые, как легко проверить, удовлетворяют следующим аксиомам (см. предыдущий раздел):

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta) \Delta(T_j^i) &= (\Delta \otimes id) \Delta(T_j^i), \\ (\varepsilon \otimes id) \Delta(T_j^i) &= (id \otimes \varepsilon) \Delta(T_j^i) = T_j^i, \\ m(S \otimes id) \Delta(T_j^i) &= m(id \otimes S) \Delta(T_j^i) = \varepsilon(T_j^i) 1. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Антипод  $S$  не является инволютивной операцией, т.к. вместо  $S^2 = id$  мы имеем равенство

$$S^2(T_j^i) = D_k^i T_l^k (D^{-1})_l^j \quad (3.1.7)$$

(мы докажем это равенство и определим числовую матрицу  $D$  чуть ниже), которое можно переписать в виде

$$D_l^j T_k^l S(T_j^i) = D_k^i. \quad (3.1.8)$$

Соотношения (3.1.7) и (3.1.8) можно интерпретировать как правила перестановки операций взятия обратной матрицы и транспонирования ( $t$ ):

$$D^t (T^{-1})^t = (T^{-1})^{-1} D^t.$$

Из  $RTT$ -соотношений (3.1.1) следует, что числовая матрица  $D$ , с точностью до константы  $c$ , задается равенствами

$$\frac{1}{c} D_j^i = \tilde{R}_{jk}^{ki} = \text{Tr}_{(2)}(P_{12} \tilde{R}_{12}), \quad \tilde{R}_{12} = ((R_{12}^{t_1})^{-1})^{t_1}, \quad (3.1.9)$$

где  $t_1$  обозначает операцию транспонирования в первом матричном пространстве,  $\text{Tr}_{(2)}$  — след по второму матричному пространству, и мы считаем, что матрица  $R_{12}^{t_1}$  обратима. Действительно, соотношения (3.1.1) можно переписать в виде

$$(T^{-1})_{j_2}^{i_2} T_{j_1}^{i_1} = [R_{12}^{t_1} T_1^{t_1} T_2^{-1} (R_{12}^{t_1})^{-1}]_{i_1 j_2}^{j_1 i_2}.$$

Положим в этом равенстве  $j_2 = i_1$ , просуммируем по  $i_1$  и результат умножим слева на  $(R_{12}^{t_1})^{-1}$ . После этого, вводя матрицу  $D$  (3.1.9), мы приходим к соотношениям (3.1.8). Заметим также, что, согласно определению (3.1.9), для матрицы  $D$  можно получить равенства:

$$\frac{1}{c} \text{Tr}_{(2)}(RD_2)_{j_1}^{i_1} = (R_{12})_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \tilde{R}_{i_2 k}^{k j_2} \equiv \delta_{j_1}^{i_1}, \quad (3.1.10)$$

кроме того, для матрицы  $D$  всегда существует обратная матрица  $D^{-1}$ , и из УЯБ следует, что  $cD^{-1} = \text{Tr}_{(2)}(P_{12} \tilde{R}_{12}^{-1})$  [18,15].

Матрица  $D_j^i$  (3.1.9), удовлетворяющая условиям (3.1.7) и (3.1.8), определяет квантовый след [10,18]. Для того чтобы объяснить понятие квантового следа, рассмотрим  $N^2$ -мерный присоединенный  $\mathcal{A}$ -комодуль  $E$ . Мы представим его базисные элементы в виде  $N \times N$ -матрицы  $E = \|E_j^i\|$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . Присоединенное кодействие есть

$$E_j^i \rightarrow T_i^i S(T_j^{j'}) \otimes E_j^{j'} \equiv (TET^{-1})_j^i, \quad (3.1.11)$$

где в последней части формулы (3.1.11) мы ввели краткие обозначения, которые будем использовать в дальнейшем. Заметим, что имеется другой вариант присоединенного кодействия:

$$E_j^i \rightarrow E_j^{j'} \otimes S(T_i^i) T_j^{j'} \equiv (T^{-1}ET)_j^i. \quad (3.1.12)$$

Ясно, что (3.1.11) является левым, а (3.1.12) — правым комодулями. И левый, и правый комодули  $E$  приводимы, и неприводимые подпространства в  $E$  могут быть выделены с помощью квантовых следов. Для случая (3.1.11) квантовый след имеет вид

$$\text{Tr}_q E \equiv \text{Tr}(DE) \equiv \sum_{i,j=1}^N D_j^i E_i^j \quad (3.1.13)$$

и удовлетворяет следующему свойству инвариантности, вытекающему из равенств (3.1.7), (3.1.8):

$$\text{Tr}_q(TET^{-1}) = \text{Tr}_q(E). \quad (3.1.14)$$

Для случая (3.1.12) определение квантового следа должно быть изменено:

$$\overline{\text{Tr}}_q E \equiv \text{Tr}(D^{-1}E) \equiv \sum_{i,j=1}^N (D^{-1})_j^i E_i^j, \quad \overline{\text{Tr}}_q(T^{-1}ET) = \overline{\text{Tr}}_q(E), \quad (3.1.15)$$

что также следует из (3.1.7), (3.1.8). Таким образом,  $\text{Tr}_q(E)$  и  $\overline{\text{Tr}}_q(E)$  являются, соответственно, скалярными частями комодулей  $E$  (3.1.11) и (3.1.12), в то время как  $q$ -бесследовая часть  $E$  формирует  $(N^2 - 1)$ -мерные (приводимые в общем случае и неприводимые в случае линейных квантовых групп)  $\mathcal{A}$ -присоединенные комодули.

Важным следствием определения квантового следа (3.1.14), (3.1.15) и  $RTT$ -соотношений (3.1.1) является следующий факт:

$$T_1^{-1} \text{Tr}_{q_2}(f(\mathbf{R})) T_1 = \text{Tr}_{q_2}(f(\mathbf{R})), \quad T_2 \overline{\text{Tr}}_{q_1}(f(\mathbf{R})) T_2^{-1} = \overline{\text{Tr}}_{q_1}(f(\mathbf{R}))$$

(здесь  $f(\cdot)$  — произвольная функция и  $\text{Tr}_{q_1}, \text{Tr}_{q_2}$  — квантовые следы по первому и второму пространству соответственно), который указывает на то, что матрицы  $\text{Tr}_{q_2}(f(\mathbf{R}))$  и  $\overline{\text{Tr}}_{q_1}(f(\mathbf{R}))$  должны быть пропорциональны единичным матрицам, в случае если  $R$ -матрица действует в неприводимом представлении квантовой группы. В частности, мы должны иметь

$$\text{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^{\pm 1}) = c_{\pm} I_{(1)}, \quad \overline{\text{Tr}}_{q_1}(\mathbf{R}^{\pm 1}) = \bar{c}_{\pm} I_{(2)}, \quad (3.1.16)$$

где  $c_{\pm}, \bar{c}_{\pm}$  — некоторые константы, связанные соотношениями  $c_+ \bar{c}_- = c_- \bar{c}_+$ , а  $I_{(k)}$  — единичная матрица в  $k$ -м пространстве. Заметим, что прямым следствием (3.1.10) является равенство

$$\text{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}) = c I_{(1)}, \quad (3.1.17)$$

которое выполняется для любого невырожденного представления  $R$ -матрицы. Как мы увидим ниже, для квантовых групп классических серий факт (3.1.16) действительно имеет место. В дальнейшем мы будем стараться ограничиваться рассмотрением либо левых, либо правых присоединенных комодулей с квантовыми следами (3.1.13) и (3.1.15). Аналогичные формулы для, соответственно, правых или левых комодулей рассматриваются абсолютно параллельно.

Из сравнения соотношений (3.1.1) и (3.1.2) видно, что для генераторов  $T_j^i$  можно выбрать следующие конечномерные матричные представления:

$$(T_j^i)_l^k = R_{jl}^{ik} \equiv (R^{(+)}_j)_l^i, \quad (T_j^i)_l^k = (R^{-1})_{lj}^{ki} \equiv (R^{(-)}_j)_l^i. \quad (3.1.18)$$

Так как  $R$ -матрица удовлетворяет УЯБ, то существуют линейные функционалы  $(L^\pm)_j^i$ , осуществляющие гомоморфизмы (3.1.18), т.е. имеют место равенства

$$\langle L_2^+, T_1 \rangle = R_{12}, \quad \langle L_2^-, T_1 \rangle = R_{21}^{-1}, \quad (3.1.19)$$

или в общем (матричном) виде

$$\langle L^\pm, T_1, T_2 \dots T_k \rangle = R_1^{(\pm)} R_2^{(\pm)} \dots R_k^{(\pm)}.$$

Теперь УЯБ (3.1.2) можно воспроизвести из  $RTT$ -соотношений (3.1.1) путем усреднения их с  $L$ -операторами.

Из требования, чтобы  $(L^\pm)_j^i$  образовывали алгебру, дуальную к алгебре  $A$  (определение дуальной алгебры дано во втором разделе), мы получаем следующие коммутационные соотношения для генераторов  $L^{(\pm)}$ :

$$\mathbf{R}L^\pm L^\pm = L^\pm L^\pm \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}L^+L^- = L^-L^+ \mathbf{R}. \quad (3.1.20)$$

Данная алгебра, очевидно, является АХ с коумножением, антиподом и коединицей:

$$\Delta(L^\pm)_j^i = (L^\pm)_k^i \otimes (L^\pm)_j^k, \quad S(L^\pm) = (L^\pm)^{-1}, \quad \varepsilon((L^\pm)_j^i) = \langle (L^\pm)_j^i, 1 \rangle = S_j^i,$$

где мы предположили обратимость матриц  $L^\pm$ . Как было показано в [10], для квантовых групп классических серий  $A_n, B_n, C_n, D_n$  (соответственно  $SL_q(N), SO_q(2n+1), Sp_q(2n), SO_q(2n)$ ), соотношения (3.1.20) определяют квантовые алгебры Ли, где часть образующих  $(L^\pm)_j^i$  играют роль квантового аналога базиса Картана — Вейля. Заметим, что алгебра (3.1.20) является ковариантной алгеброй относительно левых и правых копреобразований:

$$\begin{aligned} (L^\pm)_j^i &\rightarrow (T^{-1})_j^k \otimes (L^\pm)_k^i \equiv (L^\pm T^{-1})_j^i, \\ (L^\pm)_j^i &\rightarrow (L^\pm)_k^i \otimes (T^{-1})_k^j \equiv (T^{-1}L^\pm)_j^i. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Таким образом, матрицы  $L_j^i = (S(L^-)L^+)_j^i$  и  $\bar{L} = L^+S(L^-)$  реализуют, соответственно, присоединенный левый и правый комодули (3.1.11), (3.1.12). Легко проверить, что коинварианты

$$C_M = \text{Tr}_q((L)^M) = \frac{c}{c_-} \overline{\text{Tr}}_q((\bar{L})^M) \quad (3.1.22)$$

являются центральными элементами для алгебры (3.1.20). Последнее равенство в (3.1.22) доказывается следующим образом:

$$C_M = \text{Tr}_q(S(L^-) (\bar{L})^M L^-) = \frac{1}{c_-} \overline{\text{Tr}}_{q_1} \text{Tr}_{q_2}(S(L^-) (\bar{L})^M \mathbf{R}^{-1} L^-) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{c_-} \overline{\text{Tr}}_{q_1} \text{Tr}_{q_2}(S(L^-) \mathbf{R}^{-1} L^-(\bar{L})^M) = \\
 &= \frac{1}{c_-} \overline{\text{Tr}}_{q_1} \text{Tr}_{q_2}(L^- \mathbf{R}^{-1} S(L^-) (\bar{L})^M) = \frac{c_-}{c_-} \overline{\text{Tr}}_q((\bar{L})^M),
 \end{aligned}$$

где мы учли (3.1.16) и воспользовались равенствами (3.1.20), из которых, в частности, следуют соотношения

$$L^{\mp'}(\bar{L})^M = \mathbf{R}^{\pm 1}(\bar{L}')^M \mathbf{R}^{\mp 1} L^{\mp'}, \quad (L')^M L^{\pm} = L^{\pm} \mathbf{R}^{\pm 1} (L')^M \mathbf{R}^{\mp 1},$$

которые и демонстрируют центральность элементов (3.1.22).

Отметим также, что генераторы  $L_j^i$  и  $\bar{L}_j^i$  удовлетворяют уравнениям отражения:

$$\mathbf{R} L \mathbf{R} L = L \mathbf{R} L \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} \bar{L}' \mathbf{R} \bar{L}' = \bar{L}' \mathbf{R} \bar{L}' \mathbf{R}. \quad (3.1.23)$$

Первая алгебра из (3.1.23) (аналогично и вторая алгебра) распадается в прямую сумму двух подалгебр, а именно на абелеву алгебру с генератором  $C_1 = \text{Tr}_q(L)$  и алгебру с  $(N^2 - 1)$  бесшпуровыми генераторами:

$$\lambda \tilde{L}_j^i = L_j^i \frac{\text{Tr}_q(I)}{C_1} - \delta_j^i, \quad (3.1.24)$$

где множитель  $\lambda = q - q^{-1}$  введен для того, чтобы операторы  $\tilde{L}$  имели корректный классический предел при  $q \rightarrow 1$ . Для последней алгебры легко получить коммутационные соотношения:

$$\mathbf{R} \tilde{L} \mathbf{R} \tilde{L} - \tilde{L} \mathbf{R} \tilde{L} \mathbf{R} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{R}^2 \tilde{L} - \tilde{L} \mathbf{R}^2), \quad (3.1.25)$$

которые можно рассматривать (для произвольной  $R$ -матрицы, удовлетворяющей УЯБ) как деформацию коммутационных соотношений для алгебр Ли. Соотношения (3.1.23) и (3.1.25) являются чрезвычайно важными и возникают, например, при построении дифференциального исчисления на квантовых группах как коммутационные соотношения для инвариантных векторных полей.

Заметим, что из (3.1.14), (3.1.15) и (3.1.18) сразу можно получить следующие полезные формулы:

$$\text{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^{\pm 1} \mathbf{E} \mathbf{R}^{\mp 1}) = \text{Tr}_q E I_{(1)}, \quad \overline{\text{Tr}}_{q_1}(\mathbf{R}^{\pm 1} \mathbf{E}' \mathbf{R}^{\mp 1}) = \overline{\text{Tr}}_q E' I_{(2)}, \quad (3.1.26)$$

где  $\mathbf{E} \equiv E_1 \equiv E \otimes I$  и  $\mathbf{E}' \equiv E_2 \equiv I \otimes E$ .

Будем теперь считать, что  $R$ -матрица удовлетворяет характеристическому уравнению

$$(\mathbf{R} - \lambda_1) (\mathbf{R} - \lambda_2) \dots (\mathbf{R} - \lambda_M) = 0, \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, \text{ если } i \neq j). \quad (3.1.27)$$

В этом случае спаривания (3.1.19) автоматически являются вырожденными. Для  $R$ -матриц, удовлетворяющих (3.1.27), удобно ввести набор  $M$  проекторов:

$$\mathbf{P}_k = \prod_{j \neq k} \frac{(\mathbf{R} - \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_j)}, \quad (3.1.28)$$

которые можно использовать для спектрального разложения

$$F(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^M F(\lambda_k) \mathbf{P}_k \quad (3.1.29)$$

произвольной функции  $F$  от  $R$ -матрицы. В частности, для  $F = 1$  мы получаем условие полноты. Наконец, отметим, что иногда бывает полезным использовать вместо проекторов (3.1.28) следующие операторы:

$$\sigma_k = \mathbf{1} - 2\mathbf{P}_k, \quad \sigma_k^2 = \mathbf{1}, \quad (3.1.30)$$

связанные соотношениями

$$(M - 2) \mathbf{1} = \sum_{k=1}^M \sigma_k. \quad (3.1.31)$$

**3.2. Квазиклассический предел.** Предположим, что  $R$ -матрица, введенная в (3.1.1), имеет следующее разложение в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  ( $q \rightarrow 1$ ):

$$R_{12} = \mathbf{1} + \hbar r_{12} + O(\hbar^2). \quad (3.2.1)$$

Здесь  $\mathbf{1} = I \otimes I$  обозначает  $(N^2 \times N^2)$ -единичную матрицу. Говорят, что такие  $R$ -матрицы обладают квазиклассическим поведением, а  $r_{12}$  называют квазиклассической  $r$ -матрицей. Из квантового УЯБ (3.1.3) легко получить, что  $r_{12}$  удовлетворяет так называемому классическому УЯБ:

$$[r_{12}, r_{13} + r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (3.2.2)$$

Подставив разложение (3.2.1) в  $RTT$ -соотношения (3.1.1), мы получаем

$$[T_1, T_2] = \hbar [T_1 T_2, r_{12}] + O(\hbar^2). \quad (3.2.3)$$

Это равенство демонстрирует нам, что  $RTT$ -соотношения (3.1.1) можно интерпретировать как квантование (деформацию) классической скобки Пуассона (скобки Склянина [19]):

$$\{T_1, T_2\} = [T_1 T_2, r_{12}]. \quad (3.2.4)$$

Классическое УЯБ (3.2.2) гарантирует выполнение тождества Якоби для скобки (3.2.4). Из требования антисимметричности скобки Пуассона (3.2.4) мы получаем

$$\{T_1, T_2\} = [T_1 T_2, -r_{21}]. \quad (3.2.5)$$

Таким образом, квазиклассическая  $r$ -матрица  $r_{12}^{(-)} = -r_{21}$ , соответствующая представлению  $R^{(-)}$  (3.1.18), также должна быть решением уравнения (3.2.2), в чем легко убедиться, сделав замену  $3 \leftrightarrow 1$  в (3.2.2). С другой стороны, сравнивая (3.2.4) и (3.2.5), мы получаем

$$T_1 T_2 (r_{12} + r_{21}) = (r_{12} + r_{21}) T_1 T_2. \quad (3.2.6)$$

Таким образом, величина

$$t_{12} = \frac{1}{2} (r_{12} + r_{21}) \quad (3.2.7)$$

является инвариантом относительно присоединенного действия матрицы  $T_1 T_2$  (ад-инвариантом). Введем новую квазиклассическую  $r$ -матрицу

$$\tilde{r}_{12} = \frac{1}{2} (r_{12} - r_{21}). \quad (3.2.8)$$

Тогда скобка Складина представляется в явно антисимметричном виде

$$\{T_1, T_2\} = [T_1 T_2, \tilde{r}_{12}], \quad (3.2.9)$$

и матрица  $\tilde{r}$  (3.2.8) удовлетворяет модифицированному классическому УЯБ:

$$\begin{aligned} & [\tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13} + \tilde{r}_{23}] + [\tilde{r}_{13}, \tilde{r}_{23}] = \\ & = (1/4) [r_{23} + r_{32}, r_{13} + r_{31}] = [t_{23}, t_{13}]. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Заметим, что алгебры (3.1.23) также можно рассматривать как результат квантования некоторой пуассоновой структуры. Например, для первой из этих алгебр мы имеем

$$\{L_2, L_1\} = [L_1, [L_2, \tilde{r}_{12}]] + L_1 t_{12} L_2 - L_2 t_{12} L_1,$$

где опять же мы должны считать, что  $[L_1 L_2, t_{12}] = 0$  (ср. с (3.2.6)). С другой стороны, соотношения (3.1.25) в нулевом порядке по  $\hbar$  дают равенства

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = [t_{12}, \tilde{L}_1],$$

что и позволяет говорить о (3.1.25) как о деформации соотношений алгебры Ли.

**3.3. Квантовые группы  $GL_q(N)$  и  $SL_q(N)$  и соответствующие квантовые гиперплоскости.** Обсудим наиболее простые квантовые группы, являющиеся квантованием (деформацией) линейных групп Ли  $GL(N)$  и  $SL(N)$ . Начнем с определения соответствующей квантовой гиперплоскости. Напомним, что группа Ли  $GL(N)$  есть совокупность невырожденных  $(N \times N)$ -матриц  $T_j^i$ , действующих в  $N$ -мерном векторном пространстве, координаты



которого мы обозначим  $\{x^i, i = 1, \dots, N\}$ . Таким образом, мы имеем преобразования

$$x^i \rightarrow \tilde{x}^i = T_j^i x^j, \quad (3.3.1)$$

на которые мы можем взглянуть с иной точки зрения. А именно: пусть  $\{T_j^i\}$  и  $\{x^i\}$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) являются генераторами двух абелевых (коммутирующих) алгебр:

$$[x^i, x^j] = [T_j^i, T_l^k] = [T_j^i, x^k] = 0. \quad (3.3.2)$$

Тогда преобразование (3.3.1) можно рассматривать как действие алгебры  $\{T\}$  на алгебру  $\{x\}$ , сохраняющее абелеву структуру последней, т.е. мы имеем  $[\tilde{x}^i, \tilde{x}^j] = 0$ .

Введем деформированное  $N$ -мерное «векторное пространство», координаты  $\{x^i\}$  которого коммутируют следующим образом:

$$x^i x^j = q x^j x^i, \quad i < j, \quad (3.3.3)$$

где  $q$  — некоторое число (параметр деформации). Другими словами, теперь мы имеем некоммутативную ассоциативную алгебру с  $N$  генераторами  $\{x^i\}$ . В соответствии с (3.3.3) любой элемент этой алгебры, представляющий собой моном произвольной степени

$$x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_k}, \quad (3.3.4)$$

может быть однозначно упорядочен лексикографически, т.е. так, что  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ . О таких алгебрах говорят, что они обладают свойством Пуанкаре — Биркгофа — Витта (ПБВ). Алгебра с  $N$ -генераторами, удовлетворяющими (3.3.3), называется  $N$ -мерной квантовой гиперплоскостью [20, 21]. Соотношения (3.3.3) могут быть записаны в матричной форме

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} x^{j_1} x^{j_2} = q x^{i_2} x^{i_1} \Leftrightarrow R_{12} x_1 x_2 = q x_2 x_1 \Leftrightarrow R x x' = q x x'. \quad (3.3.5)$$

Здесь индексы 1, 2 обозначают номера векторных пространств, на которые действует  $R$ -матрица, реализованная в тензорном квадрате  $\text{Mat}(N)_1 \otimes \text{Mat}(N)_2$ . Таким образом, индексы 1, 2 у  $R$ -матрицы показывают, каким образом  $R$ -матрица действует на прямое произведение первого и второго векторных пространств. Подчеркнем, что  $R$ -матрица зависит от параметра  $q$  и, вообще говоря, ее явный вид неоднозначно восстанавливается из соотношений (3.3.3). Однако, если мы потребуем, чтобы  $R$ -матрица (3.3.5) конструировалась с помощью двух  $GL(N)$ -инвариантных тензоров  $\mathbf{1}_{12}$  и  $P_{12}$ , т.е.

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = (\delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}) a_{i_1 i_2} + (\delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}) b_{i_1 i_2},$$

а также удовлетворяла УЯБ (3.1.1) и имела блочный нижнетреугольный вид ( $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = 0, i_1 < j_1$ ), то мы получим следующее явное представление:

$$R_{12} = R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = q \sum_i (e_{ii}^{i_1} \otimes (e_{ii}^{i_2}) + \sum_{i \neq j} (e_{ii}^{i_1} \otimes (e_{jj}^{i_2}) + \lambda \sum_{i > j} (e_{ij}^{i_1} \otimes (e_{ji}^{i_2}) = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} (1 + (q - 1) \delta^{i_1 i_2}) + \lambda \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \Theta_{i_1 i_2}, \quad (3.3.6)$$

$$\Theta_{ij} = \{1 - \text{если } i > j, 0 - \text{если } i \leq j\}.$$

Здесь  $i, j = 1, \dots, N, (e_{ij}^k)^l = \delta^{ik} \delta_{jl}$  и  $\lambda = q - q^{-1}$ . Можно проверить (используя диаграммную технику п.3.4, то данная  $R$ -матрица удовлетворяет соотношению Гекке (частный случай формулы (3.1.27))

$$\mathbf{R}^2 = \lambda \mathbf{R} + \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{R} - \mathbf{R}^{-1} - \lambda \mathbf{1} = 0. \quad (3.3.7)$$

Из явного вида (3.3.6) для  $GL(N)$   $R$ -матрицы, кроме того, следуют полезные равенства:

$$R_{12}^{t_1 t_2} = R_{21}, \quad R_{12} \left( \frac{1}{q} \right) = R_{12}^{-1}(q).$$

В квазиклассическом пределе (3.2.1) соотношение (3.3.7) переписывается в виде

$$r_{12} + r_{21} = 2P_{12}. \quad (3.3.8)$$

Таким образом, для ли-пуассоновой структуры на группе  $GL(N)$  в качестве ад-инвариантного тензора выбирается матрица перестановки  $t_{12} = P_{12}$ . Для  $\tilde{r}$ -матрицы (3.2.8), определяющей скобку Склинина, мы получим из (3.3.6) выражение

$$\tilde{r}_{12} = \sum_{i > j} [(e_{ij}^{i_1})^1 \otimes (e_{ji}^{i_2})^2 - (e_{ji}^{i_1})^1 \otimes (e_{ij}^{i_2})^2] \in gl(N) \wedge gl(N). \quad (3.3.9)$$

В соответствии с (3.3.7), (3.1.28) и (3.1.29) для  $q^2 \neq -1$  матрица  $\mathbf{R}$  имеет спектральное разложение

$$\mathbf{R} = q\mathbf{P}^+ - q^{-1}\mathbf{P}^-, \quad (3.3.10)$$

где проекторы

$$\mathbf{P}^\pm = (q + q^{-1})^{-1} \{q^{\mp 1} \mathbf{1} \pm \mathbf{R}\}, \quad (3.3.11)$$

являются квантовыми аналогами симметризатора ( $\mathbf{P}^+$ ) и антисимметризатора ( $\mathbf{P}^-$ ), в чем можно убедиться, положив в (3.3.11)  $q = 1$ . Используя проектор  $\mathbf{P}^-$ , определение (3.3.3) квантовой гиперплоскости можно представить в виде

$$\mathbf{P}^- x x' = 0. \quad (3.3.12)$$

Заметим, что соотношения

$$\mathbf{P}^+ x x' = 0 \Leftrightarrow (x^i)^2 = 0, \quad x^i x^j = -q^{-1} x^j x^i \quad (i < j) \quad (3.3.13)$$

определяют фермионную  $N$ -мерную квантовую гиперплоскость, являющуюся деформацией алгебры  $N$ -фермионов  $x^i x^j = -x^j x^i$ .

Для данной  $R$ -матрицы квантовый след (3.1.13) и матрица  $D$  (3.1.9) могут быть выбраны в виде

$$\text{Tr}_q A \equiv \text{Tr} (DA) \equiv \sum_{i=1}^N q^{-N-1+2i} A_i^i,$$

$$D \equiv q^N \text{Tr}_{(2)}(P_{12} \tilde{R}_{12}) = \text{diag} \{q^{-N+1}, q^{-N+3}, \dots, q^{N-1}\}. \quad (3.3.14)$$

Мы также отметим следующие полезные формулы (ср. с (3.1.16)):

$$\text{Tr}_{q(2)} \mathbf{R}^{\pm 1} = q^{\pm N} I_{(1)}, \quad \text{Tr}_q(I) = \text{Tr}(D) = [N]_q, \quad (3.3.15)$$

где  $[N]_q = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$ . В силу диагональности  $D$ -матрицы легко получить циклическое свойство

$$\text{Tr}_{q_1} \text{Tr}_{q_2}(\mathbf{R} E_{12}) = \text{Tr}_{q_1} \text{Tr}_{q_2}(E_{12} \mathbf{R}) \quad (3.3.16)$$

для любой квантовой матрицы  $E_{12} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$ .

Естественным теперь является вопрос о том, каким свойствам должны удовлетворять элементы  $T_j^i$   $N \times N$ -матрицы, определяющие преобразования (3.3.1) квантовой бозонной (3.3.3), (3.3.12) и фермионной (3.3.13) гиперплоскостей, чтобы преобразованные координаты  $\tilde{x}^i$  образовывали те же квантовые алгебры ( $q$ -гиперплоскости) (3.3.12), (3.3.13). Легко понять, что элементы  $T_j^i$   $N \times N$ -матрицы должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{P}^{\pm} \mathbf{T} \mathbf{T}' \mathbf{P}^{\mp} = 0, \quad (3.3.17)$$

которые эквивалентны  $RTT$ -соотношениям (3.1.1).

**Определение.**  $AX$  с единичным генератором  $1$  и  $N^2$  генераторами  $T_j^i$ , удовлетворяющими соотношениям (3.1.1), где  $R$ -матрица определена в (3.3.6), называется алгеброй функций на квантовой группе  $GL_q(N)$  и обозначается  $\text{Fun}(GL_q(N))$ .

Для квантовой группы  $GL_q(N)$  можно определить квантовый детерминант  $\det_q(T)$ , который является деформацией обычного детерминанта, а также является центральным элементом для алгебры  $\text{Fun}(GL_q(N))$ :

$$\begin{aligned} \det_q(T) \mathcal{E}^q_{j_1 j_2 \dots j_N} &= \mathcal{E}^q_{i_1 i_2 \dots i_N} T_{j_1}^{i_1} T_{j_2}^{i_2} \dots T_{j_N}^{i_N}, \\ \det_q(T) \mathcal{E}^q_{i_1 i_2 \dots i_N} &= T_{j_1}^{i_1} T_{j_2}^{i_2} \dots T_{j_N}^{i_N} \mathcal{E}^q_{j_1 j_2 \dots j_N}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Здесь  $q$  — деформированный антисимметричный тензор,  $\mathcal{E}^q_{j_1 j_2 \dots j_N} = \mathcal{E}^q_{j_1 j_2 \dots j_N}$  определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}^q_{12 \dots N} = 1, \quad \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} \mathbf{P}^+_{k, k+1} = 0, \quad 1 \leq k < N, \quad (3.3.19)$$

где во втором равенстве мы понимаем индексы  $1, 2, \dots, N$  как номера векторных пространств, а  $\mathbf{P}^+_{k, k+1} = I^{\otimes (k-1)} \otimes \mathbf{P}^+ \otimes I^{\otimes (N-k-1)}$  определяет симметризатор (3.3.10), действующий в  $k$ -м и  $(k+1)$ -м пространствах. Пользуясь таким способом записи, мы можем представить определения квантового детерминанта (3.3.18) в виде

$$\begin{aligned} \det_q(T) \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} &= \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} T_1 \cdot T_2 \dots T_N, \\ \det_q(T) | \mathcal{E}^q \rangle_{12 \dots N} &= T_1 \cdot T_2 \dots T_N | \mathcal{E}^q \rangle_{12 \dots N}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Здесь  $T_m = I^{\otimes (m-1)} \otimes T \otimes I^{\otimes (N-m)}$ . То, что  $\det_q(T)$  действительно является центральным элементом в алгебре  $GL_q(N)$ , можно установить, используя определение (3.3.20),  $RTT$ -соотношения и равенства

$$\begin{aligned} q I_{N+1} \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} &= \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} R_{1, N+1} \cdot R_{2, N+1} \dots R_{N, N+1}, \\ q^{-1} I_{N+1} \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} &= \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} R_{N+1, 1}^{-1} \cdot R_{N+1, 2}^{-1} \dots R_{N+1, N}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

где индексы  $1, 2, \dots, N+1$  понимаются как номера пространств. Соотношения (3.3.21) следуют из выражений для квантовых детерминантов

$$\det_q(R^{(\pm)}) = q^{\pm 1}, \quad (3.3.22)$$

где  $R^{(\pm)}$  — матричные представления для  $T_j^i$ , приведенные в (3.1.18). В свою очередь, соотношения (3.3.22) следует из того факта, что  $R^{(+)}$  и  $R^{(-)}$  являются, соответственно, блочными ниже- и верхнетреугольными матрицами с диагональными блоками вида

$$(R^{(\pm)})^k_i = \delta^k_i q^{\pm \delta_{ik}}.$$

Сопряженные к (3.3.21) соотношения для тензора  $| \mathcal{E}^q \rangle_{12 \dots N}$  легко могут быть получены из (3.3.21) и тождества для  $GL_q(N)$   $R$ -матрицы

$(\mathbf{R}_{12})^{t_1 t_2} = \mathbf{R}_{12}$ . Заметим, что иногда удобно использовать равенства (3.3.21) и их сопряженные в виде [22]:

$$q^{\pm 1} \langle \Psi |_1 \langle \mathcal{E}^q |_{23\dots N+1} = \langle \Psi |_{N+1} \langle \mathcal{E}^q |_{12\dots N} \mathbf{R}_N^{\pm 1} \dots \mathbf{R}_2^{\pm 1} \mathbf{R}_1^{\pm 1},$$

$$q^{\pm 1} | \Psi \rangle_1 | \mathcal{E}^q \rangle_{23\dots N+1} = \mathbf{R}_1^{\pm 1} \cdot \mathbf{R}_2^{\pm 1} \dots \mathbf{R}_N^{\pm 1} | \Psi \rangle_{N+1} | \mathcal{E}^q \rangle_{12\dots N},$$

где

$$\mathbf{R}_k = I^{\otimes (k-1)} \otimes \mathbf{R} \otimes I^{\otimes (N-k)} \in \text{Mat}(N)^{\otimes (N+1)}. \quad (3.3.23)$$

Теперь алгебра  $\text{Fun}(SL_q(N))$  может быть получена из алгебры  $\text{Fun}(GL_q(N))$  наложением дополнительного условия  $\det_q(T) = 1$  и, согласно формулам (3.3.22), матричные представления (3.1.19) для  $T_j^i \in \text{Fun}(SL_q(N))$  имеют вид

$$\langle L_2^+, T_1 \rangle = \frac{1}{q^{1/N}} R_{12}, \quad \langle L_2^-, T_1 \rangle = q^{1/N} R_{21}^{-1}.$$

Обсудим теперь, каким образом можно определить комплексификацию линейных квантовых групп. Рассмотрим для начала случай группы  $GL_q(N)$  и будем считать, что  $q$  — действительное число.

Мы должны определить инволютивную операцию  $*$  на алгебре  $\text{Fun}(GL_q(N))$  или, другими словами, мы должны определить сопряженную алгебру  $\text{Fun}(\widetilde{GL}_q(N))$  с генераторами  $\tilde{T} = (T^\dagger)^{-1}$  ( $T^\dagger = (T^*)'$ ) и структурными соотношениями, совпадающими с (3.1.1):

$$R_{12} \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 = \tilde{T}_2 \tilde{T}_1 R_{12}. \quad (3.3.24)$$

Введем теперь расширенную алгебру с генераторами  $\{T, \tilde{T}\}$ , являющуюся кросс-произведением алгебр (3.3.1) и (3.3.24) с дополнительными кросс-коммутационными соотношениями (см., например, [10,9]):

$$\mathbf{R} T \tilde{T}' = \tilde{T} T' \mathbf{R}. \quad (3.3.25)$$

Эту алгебру естественно связать с  $\text{Fun}(GL(N, \mathbb{C}))$ .

Случай  $SL_q(N, \mathbb{C})$  получается из  $GL_q(N, \mathbb{C})$  наложением двух дополнительных условий на центральные элементы:

$$\det_q(T) = 1, \quad \det_q(\tilde{T}) = 1. \quad (3.3.26)$$

Вещественная форма  $U_q(N)$  выделяется из  $GL_q(N, \mathbb{C})$ , если мы потребуем

$$T = \tilde{T} = (T^\dagger)^{-1} \quad (3.3.27)$$

и если в дополнение к этому наложить условия (3.3.26), то выделяется группа  $SU_q(N)$ .

В случае  $|q| = 1$  определение инволюций на линейных квантовых группах оказывается нетривиальной проблемой, которая решается [23] только после расширения алгебры функций на квантовых группах до алгебры функций на их кокасательных расслоениях.

**3.4. Многопараметрическая деформация  $GL_{q,r_{ij}}(N)$ .** Рассмотрим многопараметрическую деформацию линейной группы  $GL(N)$  [16,21,24—27]. Многопараметрическая квантовая гиперплоскость определяется соотношениями

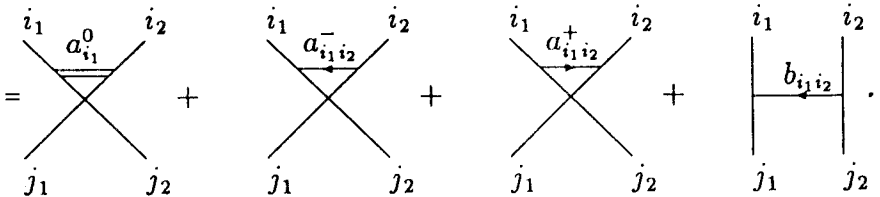
$$x^i x^j = r_{ij} x^j x^i, \quad i < j, \tag{3.4.1}$$

которые можно записать в  $R$ -матричном виде (3.3.5), если ввести дополнительный параметр  $q$ . Таким образом, мы имеем  $\frac{N(N-1)}{2} + 1$  параметров деформации:  $r_{ij}$ ,  $i < j$ , и  $q$ . Соответствующая  $R$ -матрица имеет вид [27]:

$$R_{12} = R_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \left( q \delta^{i_1 i_2} + \Theta_{i_2 i_1} \frac{q}{r_{i_1 i_2}} + \Theta_{i_1 i_2} \frac{r_{i_2 i_1}}{q} \right) + (q - q^{-1}) \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \Theta_{i_1 i_2}, \tag{3.4.2}$$

где  $\Theta_{ij}$  определяется в (3.3.6). Непосредственным вычислением можно убедиться, что  $R$ -матрица (3.4.2) удовлетворяет УЯБ (3.1.3) и условию Гекке (3.3.7), такому же, как и в однопараметрическом случае. При этих вычислениях удобно пользоваться диаграммной техникой:

$$R = \hat{R}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} (a_0^0 \delta^{i_1 i_2} + \Theta_{i_2 i_1} a_{i_1 i_2}^- + \Theta_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2}^+) + b_{i_1 i_2} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \Theta_{i_2 i_1} = \tag{3.4.3}$$



Оказывается, что не все решения УЯБ (3.1.3), представимые в виде (3.4.3), исчерпываются многопараметрическими  $R$ -матрицами (3.4.2). Действительно, если мы подставим матрицу (3.4.3) в УЯБ (3.1.3), то получим следующие условия на коэффициенты  $a_i^0$ ,  $a_{ij}^\pm$ ,  $b_{ij}$ :

$$b_{ij} = b, \quad a_{ij}^+ a_{ji}^- = c, \quad (a_i^0)^2 - ba_i^0 - c = 0 \quad (\forall i, j). \quad (3.4.4)$$

Выберем для удобства вместо параметра  $c$  другой параметр —  $q$ , положив  $c = q(q - b)$ . После этого отнормируем (3.4.3) так, что  $b = q - q^{-1}$ . Тогда  $c = 1$ , а  $a_i^0$  могут принимать два значения  $\pm q^{\pm 1}$ . При такой нормировке  $R$ -матрица (3.4.3) удовлетворяет соотношению Гекке (3.3.7). Если мы положим  $a_i^0 = q$  (или  $a_i^0 = -q^{-1}$ ) для всех  $i$ , то мы приходим к многопараметрическому случаю  $GL_{q,r_{ij}}(N)$  (3.4.2). Если же мы положим

$$a_i^0 = q \quad (1 \leq i \leq K), \quad a_i^0 = -q^{-1} \quad (K + 1 \leq i \leq N), \quad (3.4.5)$$

то  $R$ -матрица (3.4.3) не сводится к (3.4.2) и будет соответствовать многопараметрической деформации супергруппы  $GL(K|N - K)$  (этот случай мы рассмотрим ниже в п. 3.6).

В силу выполнения тождества Гекке (3.3.7) для многопараметрического случая мы можем ввести те же проекторы  $\mathbf{P}^-$  и  $\mathbf{P}^+$ , что и в однопараметрическом случае (3.3.10), причем первый из них определяет бозонную квантовую гиперплоскость (3.4.1) (соотношения (3.3.5) с  $R$ -матрицей (3.4.2)), а второй определяет фермионную квантовую гиперплоскость:

$$\mathbf{P}^+ x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow (x^i)^2 = 0, \quad q^2 x^i x^j = -r_{ij} x^j x^i \quad (i > j). \quad (3.4.6)$$

Рассматривая (3.4.1) и (3.4.6) как комодули для многопараметрической квантовой группы  $GL_{q,r_{ij}}(N)$ , мы получим, что генераторы  $T_j^i$  алгебры  $\text{Fun}(GL_{q,r_{ij}}(N))$  удовлетворяют тем же  $R$ TT-соотношениям (3.1.1), но с  $R$ -матрицей (3.4.2). Отметим, однако, что квантовый детерминант  $\det_q(T)$  (3.3.18) в многопараметрическом случае не является центральным [26]. Это связано с тем, что для многопараметрической  $R$ -матрицы не выполняются равенства типа (3.3.21). Следовательно, редукция к  $SL$ -случаю с помощью соотношения  $\det_q(T) = 1$  возможна только при некоторых ограничениях на параметры  $q, r_{ij}$ . Подробное обсуждение этих фактов можно найти в [26,27]. Заметим, что подходящим «твистованием»  $R$ -матрицы (3.4.2) можно свести многопараметрический случай к однопараметрическому (см. [16,27] и замечание 1 в конце второго раздела).

**3.5.  $GL_q(N)$ -инвариантная бакстеризованная  $R$ -матрица.** Под бакстеризацией мы понимаем построение  $R$ -матрицы, зависящей не только от параметра деформации  $q$ , но и от дополнительного комплексного спектрального параметра  $x$ . При этом  $\mathbf{R}(x)$  должно удовлетворять новому УЯБ,

зависящему также от  $x$  (см. ниже). Если мы хотим найти такое решение  $\mathbf{R}(x)$ , подчиняющееся условию квантовой инвариантности:

$$T_1 T_2 \mathbf{R}(x) (T_1 T_2)^{-1} = \mathbf{R}(x), \quad (T_j^i \in \text{Fun}(GL_q(N))),$$

то мы должны искать его в виде

$$\mathbf{R}(x) = b(x) (1 + a(x) \mathbf{R}), \quad (3.5.1)$$

(здесь  $a(x)$  и  $b(x)$  — некоторые функции от  $x$ ), так как в силу условия Гекке (3.3.7), существуют только две базисные матрицы  $\mathbf{1}$  и  $\mathbf{R}$ , являющиеся инвариантами в смысле соотношений (3.1.1). УЯБ, зависящее от спектрального параметра, выбирается в виде

$$\mathbf{R}(x) \mathbf{R}'(xy) \mathbf{R}(y) = \mathbf{R}'(y) \mathbf{R}(xy) \mathbf{R}'(x). \quad (3.5.2)$$

Из этого уравнения фиксируется только функция  $a(x)$ . Действительно, подставим сюда (3.5.1) и учтем (3.1.3) и условие Гекке (3.3.7), тогда мы получим уравнение

$$a(x) + a(y) + \lambda a(x) a(y) = a(xy), \quad (3.5.3)$$

которое легко решается заменой переменных  $a(x) = (1/\lambda) (\tilde{a}(x) - 1)$ . После этого для  $a$  получаем следующее общее решение:

$$a(x) = (1/\lambda) (x^\xi - 1), \quad (3.5.4)$$

где произвольный параметр  $\xi$  для простоты можно положить равным  $-2$ . Выберем для удобства нормирующую функцию  $b(x) = \lambda x$ . Тогда бакстеризованная  $R$ -матрица, удовлетворяющая УЯБ (3.5.2), будет иметь вид

$$\mathbf{R}(x) = b(x) (1 + (1/\lambda) (x^{-2} - 1) \mathbf{R}) = x^{-1} \mathbf{R} - x \mathbf{R}^{-1}. \quad (3.5.5)$$

Замечательным фактом является то, что соотношения (3.1.20) можно представить следующим образом:

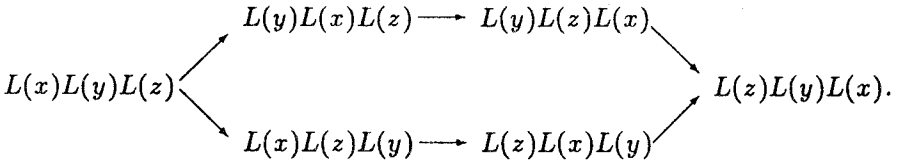
$$\mathbf{R}(x) L'(xy) L(y) = L'(y) L(xy) \mathbf{R}(x), \quad (3.5.6)$$

где спектральные параметры  $x, y$  произвольны и

$$L(x) = x^{-1} L^+ - x L^-. \quad (3.5.7)$$

Более того, если мы усредним соотношение (3.5.6) с матрицей  $T_j^i$ , действующей в третьем пространстве, то мы получим УЯБ (3.5.2). Таким образом, в определенном смысле (3.5.6) обобщает (3.5.2). Напомним также, что (3.5.2) является условием однозначного упорядочивания мономов третьей степени  $L_1(x) L_2(y) L_3(z)$  для алгебры (3.5.6) («diamond»-условие):





Заметим теперь, что из алгебры (3.5.6), отвлекаясь от частного представления (3.5.7) для  $L(x)$ -оператора, можно получить реализацию для янгиана  $Y(gl(N))$  (см. [13]). Действительно, сделаем в (3.5.2) и (3.5.6) замену спектральных параметров

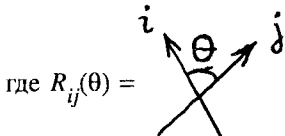
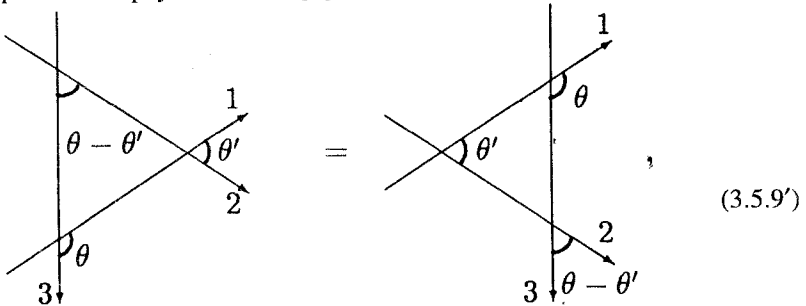
$$x = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda(\theta - \theta')\right), \quad y = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda\theta'\right). \quad (3.5.8)$$

Тогда соотношения (3.5.2) и (3.5.6) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta - \theta') \mathbf{R}'(\theta) \mathbf{R}(\theta') &= \mathbf{R}'(\theta') \mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}'(\theta - \theta') \Rightarrow \\ R_{23}(\theta - \theta') R_{13}(\theta) R_{12}(\theta') &= R_{12}(\theta') R_{13}(\theta) R_{23}(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

$$\mathbf{R}(\theta - \theta') L'(\theta) L(\theta') = L'(\theta') L(\theta) \mathbf{R}(\theta - \theta'). \quad (3.5.10)$$

Заметим, что уравнения (3.5.9) имеют красивое графическое изображение в виде уравнения треугольников [3]:



где  $R_{ij}(\theta) =$

Осуществим теперь в (3.5.10) предельный переход  $\lambda = q - q^{-1} \rightarrow 0$ . Исходя из (3.5.5), выбирая  $b(x) = 1$ , легко получить, что  $R$ -матрица в этом пределе пропорциональна матрице Янга:

$$\mathbf{R}(\theta) = (1 + \theta P_{12}). \quad (3.5.11)$$

Для операторов  $L(\theta)$  мы будем предполагать справедливость следующего разложения:

$$L(\theta)_j^i = \delta_j^i + \sum_{k=1}^{\infty} T_j^{(k)i} \theta^{-k}, \tag{3.5.12}$$

где  $T_j^{(k)i}$  являются образующими янгиана  $Y(gl(N))$  [13]. Определяющие соотношения для янгиана  $Y(gl(N))$  получаются из (3.5.10) подстановкой (3.5.11) и (3.5.12). Коумножение для  $Y(gl(N))$ , очевидно, имеет вид

$$\Delta(L(\theta)_j^i) = L(\theta)_k^i \otimes L(\theta)_j^k. \tag{3.5.13}$$

Янгиан  $Y(sl(N))$  может быть получен из  $Y(gl(N))$  после наложения дополнительного условия на генераторы  $T_j^{(k)i}$ :

$$\det_q(L(\theta)) = 1.$$

Соотношения (3.5.10) играют важную роль в квантовом методе обратной задачи [1]. Матричные представления для операторов (3.5.7), удовлетворяющих (3.5.6), ведут к формулировке решеточных интегрируемых систем (см., например, [28]). Уравнения (3.5.9) являются условиями факторизации  $S$ -матриц в некоторых точно решаемых двумерных моделях квантовой теории поля (см. [3]). Эти вопросы более подробно обсуждаются в последнем разделе обзора.

**3.6. Квантовые супергруппы  $GL_q(N|M)$  и  $SL_q(N|M)$ .** Выберем  $R$ -матрицу (3.4.3) в виде (см. [29]):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \hat{R}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = & (-1)^{(i_1)(i_2)} \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} (q^{1-2(i_1)(i_2)} \delta^{i_1 i_2} + \Theta_{i_2 i_1} + \Theta_{i_1 i_2}) + \\ & + (q - q^{-1}) \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \Theta_{i_2 i_1}, \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

т.е. мы положили

$$a_i^0 = (-1)^{(i)} q^{1-2(i)}, \quad a_{ij}^+ = (a_{ij}^-)^{-1} = (-1)^{(i)(j)}, \quad b = q - q^{-1}.$$

Здесь  $(i) = 0, 1$  и, следовательно,  $a_i^0$  могут принимать два значения:  $\pm q^{\pm 1}$ . Таким образом, как мы предположили в п.3.4,  $R$ -матрица (3.6.1) должна соответствовать некоторой супергруппе. Действительно, пусть  $R$ -матрица действует в пространстве прямого произведения двух супервекторов  $x^{j_1} \otimes y^{j_2}$ , и  $(j) = 0, 1 \pmod{2}$  обозначает четность компонент  $x^j$  супервектора. Для определенности будем считать, что  $(j) = 0$  ( $1 \leq j \leq N$ ) и  $(j) = 1$  ( $N + 1 \leq j \leq N + M$ ). В пределе  $q \rightarrow 1$  мы получаем, что  $\mathbf{R}$  стремится к оператору суперперестановки

$$\mathbf{R}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \rightarrow (-)^{(i_1)(i_2)} \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \equiv \mathcal{P}_{12}.$$

Как было отмечено в п.3.4,  $R$ -матрица (3.6.1) удовлетворяет УЯБ (3.1.3) и соотношению Гекке (3.3.7). Введем вместо матрицы  $\mathbf{R}$  новую  $R$ -матрицу:

$$R_{12} = \mathcal{P}_{12} \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathcal{P}_{12} R_{12} = (-)^{(1)(2)} P_{12} R_{12}.$$

Тогда из УЯБ (3.1.3) для новой  $R$ -матрицы следует градуированный вариант УЯБ [32]:

$$R_{12}(-)^{(2)(3)} R_{13}(-)^{(2)(3)} R_{23} = R_{23}(-)^{(2)(3)} R_{13}(-)^{(2)(3)} R_{12}. \quad (3.6.2)$$

Здесь мы положили  $(-)^{(1)(2)} = (-1)^{(i_1)(i_2)} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}$  и учли тот факт, что  $R_{12}$  является четной  $R$ -матрицей, т.е.

$$\begin{aligned} R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \neq 0, \text{ если } (i_1) + (j_1) + (i_2) + (j_2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-)^{(3)((1)+(2))} R_{12} = R_{12}(-)^{(3)((1)+(2))}. \end{aligned}$$

Наконец, квантовые многомерные суперплоскости для введенных  $R$ -матриц имеют вид (см., например, [30,31]):

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} - q) x_1 x_2 = 0 &\Leftrightarrow x^i x^j = (-)^{(i)(j)} q x^j x^i \quad (i < j), \\ (x^i)^2 = 0, \text{ если } (i) = 1, \\ (\mathbf{R} + q^{-1}) x_1 x_2 = 0 &\Leftrightarrow q x^i x^j = -(-)^{(i)(j)} x^j x^i \quad (i < j), \\ (x^i)^2 = 0, \text{ если } (i) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Вторая гиперплоскость может интерпретироваться как внешняя алгебра дифференциалов  $dx^i$  от координат  $x^i$  для первой гиперплоскости.

Рассмотрим действие (3.3.1) квантовой супергруппы на квантовое суперпространство (3.6.3). Из условия ковариантности суперкомодулей (3.6.3) легко вывести градуированный аналог  $RTT$ -соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} T_1(-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} = T_1(-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} \mathbf{R} \Leftrightarrow \\ R_{12} T_1(-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} = (-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} T_1 R_{12}, \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

которые являются определяющими соотношениями для генераторов  $T_j^i$  алгебры  $\text{Fun}(GL_q(NM))$ . Матрица  $\|T_j^i\|$  может быть представлена в блочном виде:

$$T_j^i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3.6.5)$$

где элементы  $N \times N$ -матрицы  $A$  и  $M \times M$ -матрицы  $D$  образуют, соответственно, алгебры  $\text{Fun}(GL_q(N))$  и  $\text{Fun}(GL_q(M))$ . Отсюда следует, что некоммутативные матрицы  $D$  и  $A - BD^{-1}C$  обратимы, а следовательно обратима и матрица  $\|T_j^i\|$ , что вытекает из разложения Гаусса:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & BD^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D^{-1}C & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.6)$$

Таким образом, алгебра  $\text{Fun}(GL_q(N|M))$  с определяющими соотношениями (3.6.4) является АХ со структурными отображениями (3.1.15), где в определении  $\Delta$  тензорное произведение понимается как градуированное тензорное произведение.

Сравним теперь соотношения (3.6.4) с градуированным УЯБ (3.6.2). Из этого сравнения нетрудно увидеть, что конечномерные матричные представления для генераторов  $T_j^i$  квантовой алгебры  $\text{Fun}(GL_q(N|M))$  (супераналоги представлений (3.1.18)) могут быть выбраны в виде

$$T_1 = (-)^{(1)(3)} R_{13}(-)^{(1)(3)} \equiv R^{(+)}, \quad T_1 = (R^{-1})_{31} \equiv R^{(-)}. \quad (3.6.7)$$

Отсюда очевидным образом следуют определения квантовых супералгебр, дуальных алгебрам  $\text{Fun}(GL_q(N|M))$  (ср. с формулами (3.1.19)):

$$\langle L_2^+, T_1 \rangle = (-)^{(1)(2)} R_{12}(-)^{(1)(2)}, \quad \langle L_2^-, T_1 \rangle = R_{21}^{-1}. \quad (3.6.8)$$

Отметим, что для  $GL_q(N|M)$  можно определить квантовый суперслед (см. [31]) и квантовый супердетерминант [33]. Алгебра  $\text{Fun}(SL_q(N|M))$  выделяется соотношением  $\text{sdet}_q(T) = 1$ .

Квантовая супергруппа  $GL_q(N|M)$  подробно изучалась с несколько иных позиций в работе [33]. Простейший пример квантовой супергруппы  $GL_q(1|1)$  исследовался во многих работах (см., например, [31,34]).  $R$ -матрицы (3.4.3) могут быть использованы для построения суперсимметричных бакстеризованных решений УЯБ (3.5.5), полученных впервые в [35]. Янгианские пределы этих решений применялись для формулировки интегрируемых суперсимметричных магнетиков [36]. Универсальные  $R$ -матрицы для линейных квантовых супергрупп были построены в [37].

**3.7. Квантовые группы  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(2n)$  (B, C, D-серии).** В работе [10] изучались квантовые группы с определяющими соотношениями (3.1.1), являющиеся квантовыми деформациями групп Ли  $SO(N)$ , где  $N = 2n + 1$  ( $B_n$ -серия) и  $Sp(N)$ ,  $SO(N)$ , где  $N = 2n$  ( $C_n$ - и  $D_n$ -серии). Было показано, что

$R$ -матрицы для групп  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(N)$  (их явный вид [10] приведен ниже в п.3.8) удовлетворяют кубическому характеристическому уравнению (3.1.27)

$$(\mathbf{R} - q\mathbf{1})(\mathbf{R} + q^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{R} - \varepsilon q^{\varepsilon - N}\mathbf{1}) = 0, \quad (3.7.1)$$

где случай  $\varepsilon = +1$  соответствует ортогональным группам  $SO_q(N)$  ( $B$ -,  $D$ -серии), а случай  $\varepsilon = -1$  соответствует симплектическим группам  $Sp_q(2n)$  ( $C$ -серия). Проекторы (3.1.28), соответствующие характеристическому уравнению (3.7.1), могут быть записаны следующим образом [10]:

$$\mathbf{P}^{\pm} = \frac{(\mathbf{R} \pm q^{\mp 1}\mathbf{1})(\mathbf{R} - \nu\mathbf{1})}{(q + q^{-1})(q^{\pm 1} \mp \nu)} \equiv \frac{1}{q + q^{-1}} (\pm \mathbf{R} + q^{\mp 1}\mathbf{1} + \mu_{\pm}\mathbf{K}),$$

$$\mathbf{P}^0 = \frac{(\mathbf{R} - q\mathbf{1})(\mathbf{R} + q^{-1}\mathbf{1})}{(\nu - q)(q^{-1} + \nu)} \equiv \mu^{-1}\mathbf{K}. \quad (3.7.2)$$

Здесь  $\nu = \varepsilon q^{\varepsilon - N}$ ,

$$\mu = \frac{(q - \nu)(q^{-1} + \nu)}{\lambda \nu} = \frac{\lambda + \nu^{-1} - \nu}{\lambda} = (1 + \varepsilon[N - \varepsilon]_q),$$

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{\lambda}{(1 \mp q^{\pm 1}\nu^{-1})} = \mp \frac{\nu \pm q^{\mp 1}}{\mu}.$$

Приведем также соотношения, связывающие введенные параметры  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\mu_{\pm}$ :

$$q\mu_+ - q^{-1}\mu_- = \nu(\mu_+ + \mu_-), \quad \mu_+ + \mu_- = -\frac{q + q^{-1}}{\mu},$$

которые весьма удобны при различных вычислениях, использующих проекторы (3.7.2). Для удобства мы ввели в (3.7.2) перенормированный проектор  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{K}^2 = \mu\mathbf{K}$ ), проецирующий  $\mathbf{R}$  на «синглетное» собственное значение  $\nu$ :

$$\mathbf{KR} = \mathbf{RK} = \nu\mathbf{K}. \quad (3.7.3)$$

Заметим, что для  $\mathbf{K}$  мы имеем равенство (ср. с формулой (3.3.7))

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}^{-1} - \lambda + \lambda\mathbf{K} = 0, \quad (3.7.4)$$

которое есть не что иное, как переписанное характеристическое уравнение (3.7.1). Заметим также, что проекторы  $\mathbf{P}^{\pm}$  (3.7.2) можно представить в удобном виде

$$\mathbf{P}^{\pm} = \frac{1}{q + q^{-1}} (\pm \tilde{\mathbf{R}} + q^{\mp 1}\mathbf{1}) - \frac{1}{2\mu} (1 \pm \varepsilon)\mathbf{K}, \quad (3.7.5)$$

где матрица

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - \frac{1}{2} [\mu_-(1 + \epsilon) + \mu_+(\epsilon - 1)] \mathbf{K}$$

удовлетворяет условию Гекке (3.3.7).

В квазиклассическом пределе характеристическое уравнение (3.7.4) переписывается следующим образом:

$$\frac{1}{2} (r_{12} + r_{21}) = P_{12} - \epsilon \mathbf{K}_{12}^{(0)}, \quad (3.7.6)$$

т.е., как и в случае  $GL_q(N)$  (3.3.8), квазиклассический предел (3.7.6) характеристического уравнения фиксирует ад-инвариантную часть квазиклассической  $r$ -матрицы. Здесь мы использовали разложение матрицы  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(0)} + \hbar \mathbf{K}^{(1)} + O(\hbar^2)$ , первый член которого равен

$$(\mathbf{K}^{(0)})_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = (C_0)^{i_1 i_2} (C_0^{-1})_{j_1 j_2} \Rightarrow \mathbf{K}_{12}^{(0)} = |C_0\rangle_{12} \langle C_0^{-1}|_{12},$$

где матрицы  $(C_0)^{ij} : (C_0)^2 = \epsilon I, (C_0)^t = \epsilon C_0$  являются метрической (симметричной) и симплектической (антисимметричной) матрицами, соответственно, для  $SO(N)$  и  $Sp(2n)$  групп. Квазиклассическое разложение для проекторов (3.7.2), (3.7.5) имеет вид

$$\mathbf{P}_{cl}^{\pm} = \frac{1}{2} ((1 \pm P) \pm \hbar P \tilde{r} - (1 \pm \epsilon) \mathbf{P}_{cl}^0),$$

$$\mathbf{P}_{cl}^0 = \frac{\epsilon}{N} (\mathbf{K}^{(0)} + \hbar \mathbf{K}^{(1)}), \quad (3.7.7)$$

где  $P = P_{12}$ , а квазиклассическая матрица  $\tilde{r}$ , удовлетворяющая модифицированному классическому УЯБ, определяется в (3.2.8) и равна

$$\tilde{r} = r_{12} - P_{12} + \epsilon \mathbf{K}_{12}^{(0)} = -r_{21} + P_{12} - \epsilon \mathbf{K}_{12}^{(0)}.$$

Ранги квантовых проекторов (3.7.2) равны (для  $q$ , не равного корням из единицы) рангам проекторов (3.7.7), легко вычисляемым в классическом пределе  $\hbar = 0$ . Соответственно мы имеем [10]:

1) для групп  $SO_q(N)$

$$\text{rang} (P^{(+)}) = \frac{N(N+1)}{2} - 1,$$

$$\text{rang} = (P^{(-)}) = \frac{N(N-1)}{2}, \quad \text{rang} (P^{(0)}) = 1; \quad (3.7.8)$$

2) для групп  $Sp_q(2n)$

$$\text{rang} (P^{(+)}) = \frac{N(N+1)}{2},$$

$$\text{rang} = (P^{(-)}) = \frac{N(N-1)}{2} - 1, \quad \text{rang} (P^{(0)}) = 1. \quad (3.7.9)$$

Число образующих для алгебр  $\text{Fun}(SO_q(N))$  и  $\text{Fun}(Sp_q(2n))$  должно совпадать с числом образующих в недеформированном случае, таким образом, на генераторы  $T_j^i$  (3.1.1) в квантовом случае накладываются дополнительные условия

$$TCT^tC^{-1} = CT^tC^{-1}T = II \Rightarrow \quad (3.7.10)$$

$$T_1 T_2 |C\rangle_{12} = |C\rangle_{12}, \quad \langle C^{-1}|_{12} T_1 T_2 = \langle C^{-1}|_{12}, \quad (3.7.11)$$

являющиеся прямым обобщением классических условий на элементы групп  $SO(N)$  и  $Sp(2n)$ . Матрицы  $C^{ij}$ ,  $C_{kl}^{-1}$ , которые понимаются в (3.7.11) как объекты в  $\text{Vect}(N) \otimes \text{Vect}(N)$  ( $1, 2$  — номера пространств), являются  $q$ -аналогами метрической и симплектической матриц  $C_0$  для  $SO(N)$  и  $Sp(N)$  соответственно. Явный вид этих матриц, который приведен в [10] (см. также п.3.8), для нас пока не существует, отметим, однако, равенство

$$C^{-1} = \varepsilon C. \quad (3.7.12)$$

Подставляя матричные представления (3.1.18) для  $T_j^i$  в соотношения (3.7.10), мы получаем следующие условия на  $R$ -матрицы:

$$R_{12} = C_1(R_{12}^t)^{-1}C_1^{-1} = C_2(R_{12}^{-1})^t C_2^{-1}, \quad (3.7.13)$$

где, как обычно,  $C_1 = C \otimes I$  и  $C_2 = I \otimes C$ . Следствиями (3.7.13) являются дополнительные условия на образующие дуальной алгебры (3.1.20):

$$L_2^\pm L_1^\pm |C\rangle_{12} = |C\rangle_{12}, \quad \langle C^{-1}|_{12} L_2^\pm L_1^\pm = \langle C^{-1}|_{12},$$

а также равенство

$$R_{12}^{t_1 t_2} = C_1^{-1} C_2^{-1} R_{12} C_1 C_2, \quad (3.7.14)$$

которое понадобится нам ниже. Квазиклассические аналоги условий (3.7.13) и (3.7.14) имеют вид

$$r_{12} = -(C_0)_1 r_{12}^t (C_0)_1^{-1} = -(C_0)_2 r_{12}^t (C_0)_2^{-1} = (C_0)_1 (C_0)_2 r_{12}^{t_1 t_2} (C_0)_1^{-1} (C_0)_2^{-1}.$$

Из равенств (3.7.10) и (3.7.12) следует, что антипод  $S(T) = CT^tC^{-1}$  для  $\text{AX Fun}(SO_q(N))$  и  $\text{Fun}(Sp_q(N))$  удовлетворяет соотношению

$$S^2(T) = (CC^t) T (CC^t)^{-1}, \quad (3.7.15)$$

которое аналогично (3.1.7). Таким образом, матрица  $D$ , определяющая квантовый след для квантовых групп  $B$ -,  $C$ -,  $D$ -серий, может быть выбрана в виде:

$$D = CC^t \Leftrightarrow D_j^i = C^{ik} C^{jk}. \quad (3.7.16)$$

Заметим теперь, что матрица  $|C\rangle_{12}\langle C^{-1}|_{12} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$  проецирует любой вектор  $|X\rangle_{12}$  на вектор  $|C\rangle_{12}$ , т.е. ранг проектора  $|C\rangle\langle C^{-1}|$  равен 1. Кроме того, из (3.7.11) мы имеем

$$|C\rangle\langle C|TT' = TT'|C\rangle\langle C|.$$

Следовательно,  $|C\rangle\langle C^{-1}| \sim P^0$ , и, как было установлено в [10],

$$|C\rangle\langle C^{-1}| \equiv K. \tag{3.7.17}$$

Используя это соотношение, равенства (3.7.10), (3.7.11) можно представить в другой эквивалентной форме:

$$TT'K = KTT' = K. \tag{3.7.18}$$

Теперь мы приведем ряд важных соотношений для матриц  $R$  и  $K$ , многие из которых в той или иной форме содержатся в [10]. Прежде всего заметим, что согласно (3.1.4) мы имеем

$$KR'R = R'RK' \Leftrightarrow RR'K = K'RR'. \tag{3.7.19}$$

Далее из уравнений (3.7.13) и (3.7.17) (или подставляя матричные представления (3.1.18) в (3.7.18)) мы получаем

$$R^{\pm 1}R^{\pm 1}K = PP'K = K'PP', \quad KR'^{\pm 1}R^{\pm 1} = KP'P = P'PK', \tag{3.7.20}$$

где  $P = P_{12}$  и  $P' = P_{23}$ . Следствием этих соотношений являются равенства

$$R^{\pm 1}KR^{\pm 1} = R^{\mp 1}K'R^{\mp 1} \Leftrightarrow RR'K = K'R^{-1}R^{-1}, \\ R'RK' = KR'^{-1}R^{-1}. \tag{3.7.21}$$

В частности, учитывая характеристическое уравнение (3.7.4), мы получим тождество

$$RK'R = R^{-1}KR'^{-1} = \\ = R'KR' + \lambda(RK' - KR' - R'K + K'R) + \lambda^2(K - K'), \tag{3.7.22}$$

которое будет использовано в п.3.9. Равенство (3.7.17) приводит к тождествам

$$KK' = KP'P = P'PK', \quad K'K = PP'K = K'PP', \tag{3.7.23}$$

откуда мы сразу же получаем

$$KK'K = K, \quad K'KK' = K'. \tag{3.7.24}$$

Сравним теперь соотношения (3.7.20) и (3.7.23). Результатом этого сравнения являются равенства

$$R^{\pm 1}R^{\pm 1}K' = KK' = KR'^{\pm 1}R^{\pm 1}, \quad R^{\pm 1}R^{\pm 1}K = K'K = K'R^{\pm 1}R^{\pm 1}. \tag{3.7.25}$$



Подействуем теперь на первую цепочку равенства в (3.7.25) справа матрицей  $\mathbf{K}$  (или слева  $\mathbf{K}'$ ) и учтем (3.7.3), (3.7.24). Тогда имеем

$$\mathbf{K}'\mathbf{R}^{\pm 1}\mathbf{K}' = v^{\mp 1}\mathbf{K}', \quad \mathbf{K}\mathbf{R}^{\pm 1}\mathbf{K} = v^{\mp 1}\mathbf{K}. \quad (3.7.26)$$

Как мы увидим в п. 3.9, соотношений (3.7.19)+(3.7.26) будет достаточно для построения  $SO_q(N)$ - и  $Sp_q(2n)$ -симметричных бакстеризованных  $\mathbf{R}(x)$ -матриц. Соотношения (3.7.19), (3.7.21), (3.7.24) + (3.7.26) имеют естественное графическое представление, если мы воспользуемся диаграммой техникой

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad I_1 I_2 = \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} \quad \mathbf{K} = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad (3.7.26')$$

Выведем теперь ряд важных формул для квантового следа (3.1.13), соответствующего квантовым группам  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(N)$ . Аналогичные формулы для  $q$ -следа (3.1.15) выводятся абсолютно таким же образом. Из определений матрицы  $\mathbf{K}$  (3.7.17) и матрицы  $D$  (3.7.16) получаем

$$\text{Tr}_{q_2}(\mathbf{K}) = \varepsilon I_{(1)}. \quad (3.7.27)$$

Воспользуемся соотношениями (3.7.14) и определением квантового следа (3.1.13) с матрицей  $D$  (3.7.16); тогда для произвольной квантовой матрицы  $E_j^i$  мы получаем формулы ( $E \equiv E_1$ ):

$$\mathbf{R}^n \mathbf{E} \mathbf{K} = \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(\mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{R}^n) \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{R}^n = \varepsilon \mathbf{K} \text{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^n \mathbf{E} \mathbf{K}), \quad \forall n. \quad (3.7.28)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{K} = \varepsilon \text{Tr}_q(E) \mathbf{K}. \quad (3.7.29)$$

Вычисляя  $\text{Tr}_{q_2}$  от (3.7.28), мы выводим равенство

$$\text{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^n \mathbf{E} \mathbf{K}) = \text{Tr}_{q_2}(\mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{R}^n), \quad \forall n. \quad (3.7.30)$$

Далее из первого тождества (3.7.26), усредняя его с помощью  $\text{Tr}_{q_2}$ , легко получить для алгебр  $\text{Fun}(SO_q(N))$  и  $\text{Fun}(Sp_q(N))$  аналоги формул (3.1.16), которые выглядят следующим образом:

$$\text{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^{\pm}) \equiv \text{Tr}_2(CC' \mathbf{R}^{\pm}) = q^{\pm(N-\varepsilon)} I_{(1)} = \varepsilon v^{\mp 1} I_{(1)}. \quad (3.7.31)$$

Используя это соотношение и равенство (3.7.4), можно вычислить

$$\text{Tr}_q(J) = \varepsilon + [N - \varepsilon]_q = \varepsilon \mu. \quad (3.7.32)$$

Произведем теперь выделение неприводимых представлений для присоединенных левых комодулей (3.1.11). Для произвольной  $N \times N$  квантовой матрицы  $E_j^i$  имеем

$$E = \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(EK) = \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(P^0EK + P^+EK + P^-EK) \equiv E^{(1)} + E^{(+)} + E^{(-)},$$

$$E = \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(KE) = \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(KEP^0 + KEP^+ + KEP^-) \equiv$$

$$\equiv E^{(1)} + E^{(+)} + E^{(-)}. \quad (3.7.33)$$

Очевидно, что тензоры  $E^{(i)}$  ( $i = \pm, 1$ ) инвариантны относительно присоединенного кодействия (3.1.11) и  $\text{Tr}_{q_2}(P^{(j)}E^{(i)}K) = 0$  (если  $i \neq j$ ) в силу (3.7.28). Таким образом, (3.7.33) есть искомое разложение присоединенного комодуля  $E$  на неприводимые компоненты. Ясно, что компонента  $E^{(1)}$  пропорциональна единичной матрице  $(E^{(1)})_j^i = E^{(1)} \cdot \delta_j^i$ , таким образом, применяя  $\text{Tr}_{q_1}$  к (3.7.33), мы получаем

$$\text{Tr}_q(E) = E^{(1)} \text{Tr}_q(I) = \varepsilon \mu E^{(1)}, \quad (3.7.34)$$

при этом мы воспользовались свойством (3.3.16), которое выполняется и для случая квантовых групп  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(2n)$ .

В конце этого подраздела заметим, что так же, как и в случае линейных квантовых групп, мы можем определить фермионные и бозонные квантовые гиперплоскости, ковариантные относительно кодействий групп  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(N)$ . Учитывая ранги проекторов (3.7.8), (3.7.9), мы можем сформулировать определения гиперплоскостей для  $SO_q(N)$  ( $\varepsilon = 1$ ) и для  $Sp_q(N)$  ( $\varepsilon = -1$ ) в виде

$$(P^- + (\varepsilon - 1) K) xx' = 0 \quad (3.7.35)$$

— бозонная гиперплоскость (число соотношений  $N(N - 1)/2$ ) и

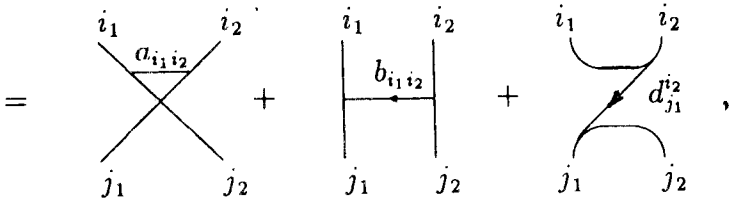
$$(P^+ + (\varepsilon + 1) K) xx' = 0 \quad (3.7.36)$$

— фермионная гиперплоскость (число соотношений  $N(N + 1)/2$ ). Для всех этих алгебр элементы  $Kxx'$  являются центральными, и, очевидно, для  $Sp_q(N)$ -бозонов и  $SO_q(N)$ -фермонов мы имеем  $Kxx' = 0$ . Отметим, что условия (3.7.10), (3.7.11) можно понимать как условия инвариантности квадратичных форм  $x_{(1)} C^{-1} x_{(2)}$ ,  $y_{(1)} C y_{(2)}$  относительно левых и правых преобразований гиперплоскостей  $x_{(k)}$ ,  $y_{(k)}$ :

$$x_{(k)}^i \rightarrow T_j^i \otimes x_{(k)}^j, \quad y_{(k)_i} \rightarrow y_{(k)_j} \otimes T_i^j.$$

**3.8. Многопараметрический случай  $SO_{q, a_{ij}}(N)$  и  $Sp_{q, a_{ij}}(N)$ -групп и квантовые супергруппы  $Osp_q(N | 2m)$ .** В этом разделе мы покажем, что можно определить многопараметрические деформации групп  $SO(N)$  и  $Sp(2n)$ , а также квантовые супергруппы  $Osp_q(N | 2m)$ , если рассмотреть следующий анзац для  $R$ -матрицы [27]:

$$\mathbf{R} = \hat{R}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} a_{i_1 i_2} + \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} b_{i_1 i_2} \Theta_{i_2 i_1} + \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2'} \delta_{j_1' j_2'}^{i_2} \Theta_{i_2}^{i_1} = \quad (3.8.1)$$



где  $\Theta_j^i = \Theta_{ij}$ ,  $j' = K + 1 - j$ ,  $K = N$  для групп  $SO(N)$ ,  $Sp(N)$  и  $K = N + 2m$  для групп  $Osp(N | 2m)$ . Выражение (3.8.1) является естественным обобщением выражения (3.4.3) для многопараметрической  $R$ -матрицы, соответствующей линейным квантовым группам. А именно третье слагаемое в (3.8.1) сконструировано из  $SO$ -инвариантного тензора  $\delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2'}$ , учитывающего наличие инвариантных метрик для рассматриваемых групп. Функции  $\Theta$  введены в формулу (3.8.1) для того, чтобы матрица  $R_{12} = P_{12} \mathbf{R}$  имела блочный нижнетреугольный вид. Это необходимо для корректного определения операторов  $L^{(\pm)}$  с помощью формул (3.1.19).

Подставим  $R$ -матрицу (3.8.1) в УЯБ (3.1.3). Очевидно, что первые два члена из (3.8.1) дадут в УЯБ вклады, аналогичные вкладам в УЯБ для многопараметрического случая линейных квантовых групп (см. п.3.4). Поэтому ясно, что для параметров  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  мы воспроизведем условия (3.4.4), которые в удобной нормировке  $c = 1$ ,  $b = q - q^{-1}$  имеют вид

$$b_{ij} = b = \lambda, \quad a_{ii} = a_i^0 = \pm q^{\pm 1} (\forall i, j), \quad a_{ij} a_{ji} = 1 \text{ (для } i \neq j, i \neq j'). \quad (3.8.2)$$

Заметим, что последнее условие в (3.8.2) несколько ослаблено по сравнению с (3.4.4) (из-за наличия ограничения  $i \neq j'$ ). Это связано с тем, что вклады в УЯБ, пропорциональные  $a_{ii'}$ , начинают сокращаться с вкладками

от третьего слагаемого из (3.8.1). Соответствующее условие на  $a_{jj'}$ , необходимое для выполнения УЯБ, может быть записано следующим образом:

$$a_{jj'} = a_{j'j} = \kappa_j (a_j^0 - b) \quad (j \neq j') \Leftrightarrow a_j^0 a_{jj'} = a_{j'}^0 a_{j'j} = \kappa_{j'} \quad (j \neq j'), \quad (3.8.3)$$

где для констант  $\kappa_i$  мы имеем  $\kappa_i = \pm 1$ . С учетом равенств (3.8.2) соотношения (3.8.3) эквивалентны двум возможностям ( $j \neq j'$ ):

$$1) a_j^0 = q \rightarrow \frac{a_{jj'}}{\kappa_j} = q^{-1}, \quad 2) a_j^0 = -q^{-1} \rightarrow \frac{a_{jj'}}{\kappa_j} = -q. \quad (3.8.4)$$

Ниже мы увидим, что если мы ограничимся рассмотрением только первой возможности (или только второй), то получим  $R$ -матрицы для квантовых групп  $SO_q(N)$  и  $Sp_q(2n)$ . Если же мы рассмотрим смешанный случай, когда выполняются обе возможности (для разных  $j$ ), то мы вправе ожидать (по аналогии с линейными квантовыми группами, см. п.3.6), что соответствующая  $R$ -матрица будет связана с супергруппами  $Osp_q(N|2m)$ . Случай  $j = j'$ , очевидно, реализуется только для групп серии  $B$  ( $SO_q(2n+1)$ ) и для супергрупп  $Osp_q(2n+1|2m)$ , и из УЯБ (3.1.3) следует, что

$$a_{jj'} \Big|_{j=j'} = \frac{\kappa+1}{2} = 1. \quad (3.8.5)$$

Для групп  $SO_q(2n)$  и  $Sp_q(2n)$  параметр  $a_{jj'}$  ( $j = j'$ ) просто отсутствует. Дальнейший учет вкладов в УЯБ от третьего слагаемого из (3.8.1) приводит к уравнениям

$$a_{ij} a_{i'j'} = \kappa_j, \quad a_{ji} a_{j'i'} = \kappa_{j'}, \quad \kappa_i = (\kappa_i')^{-1} = \pm 1, \quad (3.8.6)$$

$$\lambda d_k^j \kappa_i + d_i^j d_k^i = 0 \quad (3.8.7)$$

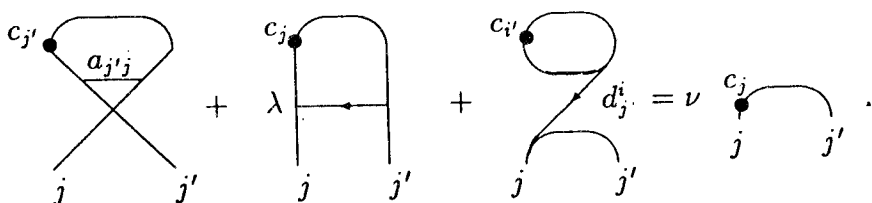
(по повторяющимся индексам суммирования нет). Общее решение уравнения (3.8.7) имеет вид

$$d_j^i = -\lambda \kappa_i \frac{c_j}{c_i}, \quad (3.8.8)$$

где пока  $c_k$  — произвольные параметры. Оставшиеся члены в УЯБ, не сокращающиеся при выполнении условий (3.8.2)—(3.8.8), дают рекуррентные соотношения на коэффициенты  $c_i$ :

$$c_j \cdot a_{j'j} + \lambda c_j \Theta_{j'j} - \lambda c_j \sum_{i>j} \kappa_i \frac{c_{i'}}{c_i} = \nu c_j. \quad (3.8.9)$$

Данные соотношения графически изображаются в виде:



Отметим, что соотношения (3.8.9) автоматически приводят к характеристическому уравнению (3.7.4) и эквивалентны равенствам (3.7.3), если мы определим метрические (симплектические) матрицы  $C$  (см. (3.7.17)) в виде

$$C^{ij} = \varepsilon \delta^{ij'} \frac{1}{c_j}, \quad (C^{-1})_{ij} = \varepsilon \delta_{ij'} c_i. \quad (3.8.10)$$

Здесь параметр  $\varepsilon = \pm 1$  (см. п.3.7) введен для согласования определения матриц  $C$  с определением в [10]. Отметим также, что постоянная  $\nu$  фиксируется соотношениями (3.8.9) однозначно.

Займемся теперь решением уравнений (3.8.9), которые перепишем в виде

$$\gamma_j a_{j'j} + \lambda \Theta_{j'j} - \lambda \sum_{i=j+1}^K \kappa_i \gamma_i = \nu, \quad (3.8.11)$$

где

$$\gamma_j = \frac{1}{\gamma_{j'}} = \frac{c_{j'}}{c_j}. \quad (3.8.12)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только случая  $\kappa_i = +1$ , т.к. случай  $\kappa_i = -1$  дает те же  $R$ -матрицы. Уравнение (3.8.11) легко решается подстановкой

$$X_j = q^{2j} \sum_{i>j} \gamma_i,$$

после чего мы находим параметры  $\gamma_j = q^{-2j}(q^{2j} X_{j-1} - X_j)$  и фиксируем  $\nu$ , учитывая свойство (3.8.12).

А) Для групп  $SO_q(N)$  ( $\varepsilon = +1$ ) и  $Sp_q(N)$  ( $\varepsilon = -1$ ) мы используем возможность 1 из (3.8.4) (возможность 2 дает аналогичный результат с точностью до замены  $q \rightarrow -q^{-1}$ ). Соответствующее решение (3.8.11) имеет вид

$$\gamma_j \equiv \frac{c_{j'}}{c_j} = \nu q^{2(N-j)+1} (j > j'), \quad \nu = \varepsilon q^{\varepsilon - N}. \quad (3.8.13)$$

Б) Для групп  $Osp(N | 2m)$  мы выбираем градуировку согласно правилам:  $(j) = 0$  для  $m + 1 \leq j \leq m + N$  и  $(j) = 1$  для  $1 \leq j \leq m$ ,  $m + N + 1 \leq j \leq N + 2m$ . Таким образом, при  $(j) = 0$  реализуется возможность 1, а при  $(j) = 1$  реализуется возможность 2, указанные в (3.8.4). Соответственно мы получаем

$$\gamma_j = (-1)^{(j)\nu} q^{(-1)^{(j)}2(N-j) + 1 - (j)4m}, \quad \nu = q^{1 + 2m - N}. \quad (3.8.14)$$

Очевидно, что для групп  $SO_q(2n + 1)$  и  $Osp_q(2n + 1 | 2m)$  мы имеем  $\gamma_j = \gamma_{j'}$  при  $j = j'$ . Заметим, что, полагая в (3.8.14)  $m = 0$  или  $N = 0$ ,  $q \rightarrow -q^{-1}$ , мы воспроизводим (3.8.13).

Для того, чтобы определить из условий (3.8.13) параметры  $c_j$  и фиксировать матрицы  $C$  (3.8.10), мы потребуем выполнения соотношения (3.7.12). Подстановка (3.8.10) в (3.7.12) дает равенство  $c_j c_{j'} = \epsilon$ , которое вместе с (3.8.13) позволяет выбрать  $c_j$  в виде [10]:

$$c_j = -q^{j - \frac{1}{2}(N + \epsilon + 1)} (j > j') \Rightarrow c_j = \epsilon_j q^{-\rho_j}, \quad (3.8.15)$$

где  $\epsilon_i = +1 \forall i$  (группы  $SO_q(N)$ ),  $\epsilon_i = +1 (1 \leq i \leq n)$ ,  $\epsilon_i = -1 (n + 1 \leq i \leq 2n)$  (группы  $Sp_q(2n)$ ) и

$$(\rho_1, \dots, \rho_N) = \begin{cases} \left( n - \frac{1}{2}, n - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -n + \frac{1}{2} \right) B : (SO_q(2n + 1)), \\ (n, n - 1, \dots, 1, -1, \dots, -n) C : (Sp_q(2n)), \\ (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, -n + 1) D : (SO_q(2n)). \end{cases}$$

Аналогом соотношения (3.7.12) для групп  $Osp_q(N | M)$  является равенство

$$C^{ij} = (-1)^{(i)} (C^{-1})_{ij} \Rightarrow (-1)^{(i)} c_i c_{i'} = 1,$$

и с учетом (3.8.14) мы имеем

$$c_j = -q^{(-1)^{(j)}(j - m - \frac{N}{2}) - 1 + (j)(N + 1)} (j > j'),$$

где  $(j) = 0, 1$ .

В заключение приведем окончательный вид для  $R$ -матрицы (3.8.1), соответствующей многопараметрической деформации групп  $SO(N)$  и  $Sp(2n)$  [27]:

$$R_{12} = R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \times \\ \times \left( q \delta_{i_1 \neq i_2'}^{i_1 i_2} + q^{-1} \delta_{i_1 \neq i_2}^{i_1 i_2} + \Theta_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} a_{i_2 i_1} \Big|_{i_1 \neq i_2'} + \Theta_{i_2 i_1}^{i_1 i_2} a_{i_1 i_2} \Big|_{i_1 \neq i_2'} + \delta_{i_1 i_1'} \delta_{i_2 i_2'} \right) + \\ + \lambda \delta_{j_2 j_1}^{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \Theta_{i_1 i_2} - \lambda \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \delta_{j_2 j_1}^{i_1 i_2} \Theta_{j_1 j_2} \epsilon_{i_1} \epsilon_{j_1} q^{\rho_{i_1} - \rho_{j_1}}. \quad (3.8.16)$$

Здесь мы учли соотношения (3.8.2), (3.8.4), (3.8.5), (3.8.8), (3.8.15) и положили  $k_i = +1$ . Необходимо также учесть условия (3.8.6), которые показывают, что независимыми параметрами являются  $q$  и  $a_{ij}$  при  $i < j \leq j'$  (число этих параметров равно:  $n(n-1)/2 + 1$  и  $n(n+1)/2 + 1$  соответственно для групп серий  $C, D$  и  $B$ ). Заметим, что последнее слагаемое в круглых скобках в выражении (3.8.16) присутствует лишь для группы серии  $B$ . Если мы положим  $a_{ij} = 1$ , то  $R$ -матрицы (3.8.16) совпадут с однопараметрическими  $R$ -матрицами, приведенными в [10].

Построенные в данном подпункте  $R$ -матрицы для квантовых супергрупп можно получить исходя из результатов работы [35], где получены бакстеризованные тригонометрические решения УЯБ, связанные с классическими супергруппами  $Osp(N|2m)$ . Рациональные решения, некоторые частные случаи и другие вопросы, относящиеся к теме квантовых супергрупп  $Osp_q(N|2m)$ , обсуждались также в работах [36,38].

### 3.9. $SO_q(N)$ - и $Sp_q(N)$ -инвариантные бакстеризованные $R$ -матрицы.

Рассуждая так же, как в п.3.5, мы приходим к заключению, что  $SO_q(N)$ - и  $Sp_q(N)$ -инвариантные бакстеризованные матрицы  $\mathbf{R}(x)$  необходимо искать (в силу кубичности характеристического уравнения (3.7.1)) в виде линейной комбинации трех базисных матриц  $\mathbf{1}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^2$ . Выражая  $\mathbf{R}^2$  через  $\mathbf{K}$ , мы можем представить  $R(x)$  в виде

$$\mathbf{R}(x) = c(x) (\mathbf{1} + a(x) \mathbf{R} + b(x) \mathbf{K}), \quad (3.9.1)$$

где  $a(x), b(x), c(x)$  — некоторые функции, зависящие от спектрального параметра  $x$ . Функции  $a(x), b(x)$  мы определим из УЯБ (3.5.2), для чего рассмотрим выражение

$$X(a_i, \bar{a}_i, b_j, \bar{b}_j) = (\mathbf{1} + a_1 \mathbf{R} + b_1 \mathbf{K}) (\mathbf{1} + a_2 \mathbf{R}' + b_2 \mathbf{K}') (\mathbf{1} + a_3 \mathbf{R} + b_3 \mathbf{K}) - \\ - (\mathbf{1} + \bar{a}_3 \mathbf{R}' + \bar{b}_3 \mathbf{K}') (\mathbf{1} + \bar{a}_2 \mathbf{R} + \bar{b}_2 \mathbf{K}) (\mathbf{1} + \bar{a}_1 \mathbf{R}' + \bar{b}_1 \mathbf{K}'). \quad (3.9.2)$$

Здесь  $\mathbf{1} = I^{\otimes 3}$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{12}$ ,  $\mathbf{K}' = \mathbf{K}_{23}$ . Воспользовавшись равенствами (3.7.19) — (3.7.26) мы получаем для величины  $X(a, \bar{a}, b, \bar{b})$  (3.9.2) следующее выражение:

$$X(a, \bar{a}, b, \bar{b}) = (a_1 a_3 - \bar{a}_1 \bar{a}_3) + (\kappa + \lambda^2 \eta) \mathbf{K} - (\bar{\kappa} + \lambda^2 \eta) \mathbf{K}' + \\ + (a_1 + a_3 + \lambda a_1 a_3 - \bar{a}_2) \mathbf{R} - (\bar{a}_1 + \bar{a}_3 + \lambda \bar{a}_1 \bar{a}_3 - a_2) \mathbf{R}' + \\ + (\beta - \bar{\beta}) \mathbf{K} \mathbf{K}' + (\gamma - \bar{\gamma}) \mathbf{K}' \mathbf{K} + (a_1 a_2 - \bar{a}_1 \bar{a}_2) \mathbf{R} \mathbf{R}' + (a_2 a_3 - \bar{a}_2 \bar{a}_3) \mathbf{R}' \mathbf{R} + \\ + (\rho - \lambda \eta) \mathbf{K} \mathbf{R}' - (\bar{\rho} - \lambda \eta) \mathbf{R} \mathbf{K}' + (\sigma - \lambda \eta) \mathbf{R}' \mathbf{K} - (\bar{\sigma} - \lambda \eta) \mathbf{K}' \mathbf{R} + \\ + (a_1 a_2 a_3 - \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3) \mathbf{R} \mathbf{R}' \mathbf{R} + (\eta - \bar{\eta}) \mathbf{R}' \mathbf{K} \mathbf{R}'. \quad (3.9.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa &= b_3 - \bar{b}_2 + a_1(\nu b_3 - \lambda \nu a_3 - \lambda b_2 b_3) + b_1(1 + \nu a_3 - \lambda a_3 b_2) + \\ &\quad + b_1 b_3(\mu + \nu^{-1} a_2 + b_2), \\ \beta &= b_1 b_2 + a_2 a_3 b_1 + \lambda a_3 b_1 b_2, \quad \gamma = b_2 b_3 + a_1 a_2 b_3 + \lambda a_1 b_2 b_3, \\ \rho &= a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 - \overline{a_1 b_2}, \quad \sigma = a_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - \overline{a_3 b_2}, \\ \eta &= a_1 a_3 b_2, \end{aligned} \tag{3.9.4}$$

и мы полагаем  $\overline{\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})} = \kappa(\bar{a}, a, \bar{b}, b)$  и так далее.

Рассмотрим уравнение  $X(a, \bar{a}, b, \bar{b}) = 0$ , где будем считать, что  $\bar{a}_i = a_i$ ,  $\bar{b}_i = b_i$  и положим

$$a_1 = a(x), \quad a_2 = a(xy), \quad a_3 = a(y), \quad b_1 = b(x), \quad b_2 = b(xy), \quad b_3 = b(y).$$

Тогда уравнение  $X = 0$  сведется к УЯБ (3.5.2), а на переменные  $a_i$  и  $b_i$  возникают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + \lambda a_1 a_3 &= a_2, \\ b_3 - b_2 - \lambda \nu a_1 a_3 + \nu a_1 b_3 - \lambda a_1 b_2 b_3 + b_1(1 + \nu a_3 - \lambda a_3 b_2 + \\ &\quad + \mu b_3 + \nu^{-1} a_2 b_3 + b_2 b_3) + \lambda^2 a_1 a_3 b_2 = 0, \\ a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 &= a_1 b_2 + \lambda a_1 a_3 b_2, \\ a_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 &= a_3 b_2 + \lambda a_1 a_3 b_2. \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

Приведенные четыре соотношения эквивалентны трем функциональным уравнениям:

$$a(x) + a(y) + \lambda a(x) a(y) = a(xy), \tag{3.9.6}$$

$$\begin{aligned} b(y) - b(xy) + a(x) [\nu b(y) - \lambda \nu a(y) - \lambda b(xy) b(y) + \lambda^2 a(y) b(xy)] + \\ + b(x) [1 + \nu a(y) - \lambda a(y) b(xy) + \mu b(y) + \\ + \nu^{-1} a(xy) b(y) + b(xy) b(y)] = 0, \end{aligned} \tag{3.9.7}$$

$$a(xy) b(y) + a(x) b(xy) b(y) = b(xy) (a(y) + \lambda a(x) a(y)), \tag{3.9.8}$$

так как третье и четвертое соотношения в (3.9.5) дают одно и то же уравнение (3.9.8). Уравнение (3.9.6), как и следовало ожидать, совпадает с уравнением (3.5.3), полученным в случае  $GL_q(N)$ , и его общее решение приведено в (3.5.4). С помощью (3.9.6) можно преобразовать правую часть уравнения (3.9.8) так, что (3.9.8) сводится к равенству



$$\frac{a(x)}{a(xy)} = \frac{b(xy) - b(y)}{b(xy)(b(y) + 1)} \equiv 1 - \frac{b(y)(1 + b(y))^{-1}}{b(xy)(1 + b(xy))^{-1}}. \quad (3.9.9)$$

Заметим теперь, что уравнение (3.9.6) можно переписать в виде

$$\frac{a(x)}{a(xy)} = 1 - \frac{a(y)(\lambda a(y) + 1)^{-1}}{a(xy)(\lambda a(xy) + 1)^{-1}}. \quad (3.9.10)$$

Сравнивая (3.9.9) и (3.9.10), мы приходим к утверждению

$$\frac{a(y)(b(y) + 1)}{(\lambda a(y) + 1)b(y)} = \text{const} \equiv \frac{\alpha + 1}{\lambda}, \quad (3.9.11)$$

где  $\alpha$  — произвольный параметр. Специфический выбор константной величины в правой части (3.9.11) сделан из соображений дальнейших удобств. Подставив решение (3.5.4) в (3.9.11), мы получаем следующее общее выражение для  $b(y)$ :

$$b(y) = \frac{y^\xi - 1}{\alpha y^\xi + 1}. \quad (3.9.12)$$

Замечательным фактом является то, что уравнение (3.9.7) выполняется тождественно на функциях (3.5.4) и (3.9.12), если константа  $\alpha$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$\alpha^2 - \frac{\lambda}{v} \alpha - \frac{1}{v^2} = 0, \quad (3.9.13)$$

два решения которого легко находятся:

$$\alpha_{\pm} = \pm \frac{q^{\pm 1}}{v} = \pm \varepsilon q^{N - \varepsilon \pm 1}. \quad (3.9.14)$$

Таким образом, решения УЯБ (3.5.2) представимы в виде

$$\mathbf{R}(x) = c(x) \left( \mathbf{1} + \frac{1}{\lambda} (x^\xi - 1) \mathbf{R} + \frac{x^\xi - 1}{\alpha x^\xi + 1} \mathbf{K} \right), \quad (3.9.15)$$

и мы имеем две возможности  $\alpha = \alpha_{\pm}$  (3.9.14), которые являются неэквивалентными (как для  $SO_q(N)$ -, так и для  $Sp_q(N)$ -случая), так как никакими функциональными преобразованиями спектрального параметра полученные решения нельзя свести одно к другому. Выберем для удобства в (3.9.15)  $c(x) = \lambda x$  и  $\xi = -2$ , тогда для  $R$ -матриц (3.9.15) можно предложить четыре эквивалентные формы записи:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x) &= x^{-1} \mathbf{R} - x \mathbf{R}^{-1} + \lambda \frac{\alpha_{\pm} + 1}{\alpha_{\pm} x^{-1} + x} \mathbf{K} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{\pm} x^{-1} + x} (-\mathbf{R}^{-1} x^2 + (\mathbf{R} - \alpha_{\pm} \mathbf{R}^{-1} + \lambda(\alpha_{\pm} + 1) \mathbf{K}) + \alpha_{\pm} \mathbf{R} x^{-2}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x - x^{-1}}{x + \alpha_{\pm} x^{-1}} \left( -x\mathbf{R}^{-1} - \alpha_{\pm} x^{-1}\mathbf{R} + \frac{\lambda(\alpha_{\pm} + 1)}{x - x^{-1}} \right) = \\
 &= (x^{-1}q - xq^{-1}) \mathbf{P}^+ + (xq - (xq)^{-1}) \mathbf{P}^- + \\
 &\quad + \frac{(\alpha_{\pm} + x^{-2})(v\alpha_{\pm} + (\lambda - v\alpha_{\pm})x^2)}{x + \alpha_{\pm} x^{-1}} \mathbf{P}^0. \tag{3.9.16}
 \end{aligned}$$

Последняя формула определяет спектральное разложение  $\mathbf{R}(x)$ , из которого, например, можно легко получить

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(1) &= \lambda \mathbf{1}, \quad \mathbf{R}(i) = \pm i(q + q^{-1}) (1 - 2\mathbf{P}^{\pm}) = \pm i(q + q^{-1}) \sigma^{\pm}, \\
 \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x^{-1}) &= (\lambda^2 - (x - x^{-1})^2) \mathbf{1}. \tag{3.9.17}
 \end{aligned}$$

Соотношения (3.9.17) согласуются с УЯБ (3.5.2). Второе соотношение из (3.9.17) дает связь  $\mathbf{R}(i)$  с операторами, введенными в (3.1.30) (знаки  $\pm$  соответствуют выбору параметра  $\alpha = \alpha_{\pm}$ ).

Бакстеризованные  $\mathbf{R}$ -матрицы (3.9.15), (3.9.16) должны определять алгебры с определяющими соотношениями (3.5.6). Однако реализация операторов  $L(x)$  в терминах генераторов  $L^{(\pm)}$  квантовых алгебр  $U_q(so(N))$  и  $U_q(sp(N))$ , (аналогичная (3.5.7)), автору, к сожалению, не известна. Данная реализация была бы чрезвычайно полезной для многих приложений.

В заключение приведем выражения для  $R$ -матриц янгианов  $Y(so(N))$  и  $Y(sp(N))$ . Эти  $R$ -матрицы получаются из (3.9.15) после подстановки

$$\xi = -2, \quad x = \exp(-\lambda\theta/2),$$

подходящего выбора нормировочной функции  $c(x)$  и предельного перехода  $h \rightarrow 0$  ( $q = \exp(h) \rightarrow 1$ ). Далее легко увидеть, что случаи  $\alpha = \alpha_+$ ,  $\varepsilon = 1$  ( $SO_q(N)$ ) и  $\alpha = \alpha_-$ ,  $\varepsilon = -1$  ( $Sp_q(2n)$ ) сводятся к  $R$ -матрице Янга (3.5.11). Нетривиальные  $SO(N)$  и  $Sp(N)$  симметричные янгианские  $R$ -матрицы для  $Y(so(N))$  и  $Y(sp(N))$  соответствуют выбору в (3.9.15):  $c(x) = 2 - \varepsilon(N + 2\theta)$ ,

$$\alpha = \alpha_-, \quad \varepsilon = 1 (SO_q(N)); \quad \alpha = \alpha_+, \quad \varepsilon = -1 (Sp_q(N)), \tag{3.9.18}$$

и имеют вид

$$\mathbf{R}(\theta) = (2 - \varepsilon(N + 2\theta)) \mathbf{1} + \theta(2 - \varepsilon(N + 2\theta)) P_{12} + \varepsilon 2\theta K_{12}^{(0)}. \tag{3.9.19}$$

Далее все формулы для янгианов  $Y(so(N))$  и  $Y(sp(N))$  совпадают с формулами (3.5.10), (3.5.12) и (3.5.13).

Янгианная  $R$ -матрица (3.9.19) для случая группы  $SO(N)$  была найдена в [3], а для  $Sp(2n)$  — в [39]. Эти  $R$ -матрицы использовались в [28] для построения и исследования точно решаемых  $SO(N)$ - и  $Sp(2n)$ -симметричных маг-

нетиков. Бакстеризованные тригонометрические  $R$ -матрицы (3.9.15), соответствующие значениям параметров (3.9.18), были впервые найдены В.В.Бажановым в 1984 г. и опубликованы в [40]. Эти же  $R$ -матрицы независимо были построены в [41].

**3.10. Эллиптические решения УЯБ.** Рассмотрим  $Z_N \otimes Z_N$  симметричные решения УЯБ (3.5.9) [42]. Элементы  $R_{J_1 J_2}^{i i}(\theta)$  соответствующей  $R$ -матрицы будут выражаться через эллиптические функции от спектрального параметра  $\theta$ .

Построим это решение явно, следуя методике работы [42]. Рассмотрим две матрицы  $g$  и  $h$  такие, что  $g^N = h^N = 1$ :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10.1)$$

где  $\omega = \exp(2\pi i/N)$  и  $hg = \omega gh$ . Матрицы  $g$  и  $h$  являются  $Z_N$  градуированными генераторами алгебры  $\text{Mat}(N)$ , градуированный базис для которой может быть выбран в виде

$$I_\alpha = I_{\alpha_1 \alpha_2} = g^{\alpha_1} h^{\alpha_2}, \quad \alpha_{1,2} = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.10.2)$$

С другой стороны, матрицы (3.10.2) реализуют проективное представление группы  $Z_N \otimes Z_N : I_\alpha I_\beta = \omega^{\alpha_2 \beta_1} I_{\alpha+\beta}$ . Теперь любая матрица  $R_{12}(\theta) = R_{J_1 J_2}^{i i}(\theta)$  может быть записана в виде

$$R_{12}(\theta) = W_{\alpha, \beta}(\theta) I_\alpha \otimes I_\beta.$$

Рассмотрим  $Z_N \otimes Z_N$  инвариантное подмножество таких матриц:

$$R_{12}(\theta) = W_\alpha(\theta) I_\alpha \otimes I_\alpha^{-1}, \quad (3.10.3)$$

где  $I_\alpha^{-1} = h^{-\alpha_2} g^{-\alpha_1} = \omega^{\alpha_1 \alpha_2} I_{-\alpha}$ . Инвариантность матриц (3.10.3) выражается соотношениями

$$R_{12}(\theta) = I_\gamma^{\otimes 2} R_{12}(\theta) (I_\gamma^{\otimes 2})^{-1}, \quad (3.10.4)$$

которые с очевидностью следуют из тождества

$$I_\gamma I_\alpha I_\gamma^{-1} = \omega^{\langle \alpha, \gamma \rangle} I_\alpha, \quad \langle \alpha, \gamma \rangle = \alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1.$$

В работе [42] было замечено, что соотношения

$$\begin{aligned}
 R_{12}(\theta + 1) &= g_1^{-1} R_{12}(\theta) g_1 = g_2 R_{12}(\theta) g_2^{-1}, \\
 R_{12}(\theta + \tau) &= \exp(-i\pi\tau) \exp(-2\pi i\theta) h_1^{-1} R_{12}(\theta) h_1 = \\
 &= \exp(-i\pi\tau) \exp(-2\pi i\theta) h_2 R_{12}(\theta) h_2^{-1}, \\
 R_{12}(0) &= I_\alpha \otimes I_\alpha^{-1} \equiv P_{12}, \tag{3.10.5}
 \end{aligned}$$

где  $\tau$  — некоторый комплексный параметр (период), не противоречит УЯБ (3.5.9) и могут рассматриваться как дополнительные условия к этим уравнениям. Более того, для  $Z_N \otimes Z_N$  инвариантной  $R$ -матрицы (3.10.3) условия (3.10.5) определяют решение УЯБ однозначно. Действительно, подстановка (3.10.3) в (3.10.5) приводит к уравнениям:

$$W_\alpha(\theta + 1) = \omega^{\alpha_1} W_\alpha(\theta),$$

$$W_\alpha(\theta + \tau) = \exp(-i\pi\tau) \exp(-2\pi i\theta) \omega^{-\alpha_2} W_\alpha(\theta), \quad W_\alpha(0) = 1, \tag{3.10.6}$$

решение которых может быть найдено с помощью разложения в ряд Фурье и имеет вид

$$W_\alpha(\theta) = \frac{\Theta_\alpha(\theta + \eta)}{\Theta_\alpha(\eta)}, \tag{3.10.7}$$

где

$$\Theta_\alpha(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[ i\pi\tau \left( m + \frac{\alpha_2}{N} \right)^2 + 2\pi i \left( m + \frac{\alpha_2}{N} \right) \left( u + \frac{\alpha_1}{N} \right) \right]. \tag{3.10.8}$$

Параметр  $\eta$  в (3.10.7) является произвольным. Для  $N = 2$  решение (3.10.7) совпадает с решением, полученным Бакстером [2] в связи с исследованием так называемой восьмивершинной решеточной модели.

Непосредственная подстановка выражения (3.10.3) в УЯБ (3.5.9) показывает, что функции  $W_\alpha(\theta)$  должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_\gamma W_\gamma(\theta - \theta') W_{\alpha - \gamma}(\theta) W_{\beta + \gamma}(\theta') (\omega^{\langle \gamma, \beta \rangle} - \omega^{\langle \alpha - \gamma, \beta \rangle}) = 0. \tag{3.10.9}$$

Интересно отметить, что, по-видимому, до сих пор не существует прямого доказательства того, что тождество (3.10.9) выполняется при подстановке функций (3.10.7), (3.10.8). Все известные автору доказательства [43] используют, в той или иной мере, обходные пути.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре изложены основы теории квантовых групп. Мы обсудили также, каким образом можно получить тригонометрические и рациональ-

ные (янгланые) решения УЯБ, исходя из теории квантовых групп Ли. К сожалению, в предыдущих разделах у нас не было возможности подробно остановиться на обсуждении многочисленных приложений теории квантовых групп и УЯБ как в теоретической физике, так и в математике. В заключении мы ограничимся лишь кратким перечислением таких приложений, представляющих, по мнению автора, определенный интерес.

Прежде чем перейти к этому перечислению, напомним, что в физике конденсированных сред двумерные точно решаемые модели применяются для описания различных слоистых структур, контактных поверхностей в электронике, поверхностей сверхпроводящих жидкостей типа He II и т.д. Двумерные интегрируемые теории поля применяются для описания динамических явлений в одномерных пространственных системах (типа световодов, нервных волокон, и т.д.). Кроме того, такие теории поля (а также интегрируемые системы на одномерных цепочках) могут возникать и при редукции многомерных теорий поля (см., например, [44]).

1. Мы уже упоминали, что квантовый метод обратной задачи [1] (понятное для широкого круга читателей введение в квантовый метод обратной задачи можно найти в [45]) предназначен для конструктивной процедуры решения квантовых двумерных интегрируемых систем. Кроме того, квантовый метод обратной задачи позволяет строить квантовые интегрируемые системы на одномерных цепочках (см., например, [28, 36, 46]). Отправным пунктом является соотношение (3.5.10) для  $L$ -операторов, которое можно переписать в виде

$$R_{ij}(\theta - \theta') L_{jk}(\theta) L_{ik}(\theta') = L_{ik}(\theta') L_{jk}(\theta) R_{ij}(\theta - \theta'). \quad (4.1)$$

Здесь  $L_{ik}(\theta)$  являются  $(N \times N)$ -матрицами во вспомогательном пространстве  $V_i$  с матричными коэффициентами — операторами в пространстве состояний  $k$ -го узла цепочки, состоящей из  $M$  узлов:

$$L_{ik}(\theta) = I^{\otimes (k-1)} \otimes L_i(\theta) \otimes I^{\otimes (M-k)} \rightarrow [L_{ik}, L_{i'k'}] = 0 \quad (k \neq k'). \quad (4.2)$$

В формуле (4.2) символ  $\otimes$  обозначает прямое произведение операторных пространств. Ясно, что из УЯБ (3.5.9) всегда следуют представления для  $L$ -операторов в виде  $R$ -матриц:

$$L_{ik}(\theta) = (R_{ik}(\theta))^{-1}, \quad L_{ik}(\theta) = R_{ki}(\theta). \quad (4.3)$$

В данном случае  $L_{ik}(\theta)$  нетривиально действуют в пространстве  $V_i \otimes V_k$ . Для того чтобы построить интегрируемую систему, введем в рассмотрение матрицу монодромии:

$$T_i(\theta) = D_i^{(M)} L_{iM}(\theta) D_i^{(M-1)} L_{iM-1} \dots D_i^{(1)} L_{i1}(\theta). \quad (4.4)$$

Если матрицы  $D^{(k)}$  удовлетворяют соотношениям

$$R_{ji}(\theta) D_i^{(k)} D_j^{(k)} = D_j^{(k)} D_i^{(k)} R_{ji}(\theta),$$

$$[D_i^{(k)}, D_j^{(r)}] = [D_i^{(k)}, L_{jr}] = 0,$$

то из (4.1) следует, что

$$R_{ji}(\theta - \theta') T_i(\theta) T_j(\theta') = T_j(\theta') T_i(\theta) R_{ji}(\theta - \theta'). \quad (4.5)$$

След матрицы монодромии (4.4) по вспомогательному пространству  $i$  образует трансфер-матрицу  $t(\theta) = \text{Tr}_{(i)}(T_i(\theta))$ , которая дает коммутирующее семейство операторов:  $[t(\theta), t(\theta')] = 0$ , что немедленно следует из (4.5). Из этого семейства выбирается некоторый локальный оператор  $H$ , который интерпретируется как гамильтониан системы. Локальность гамильтониана является естественным физическим требованием и означает, что  $H$  описывает взаимодействие только ближайших узлов цепочки. Остальные операторы из коммутирующего набора  $t(\theta)$  дают бесконечный набор интегралов движения, что и указывает на интегрируемость построенной системы. Во многих известных случаях локальные гамильтонианы совпадают с логарифмическими производными трансфер-матриц:

$$H = \frac{d}{d\theta} \ln (t(\theta)) \Big|_{\theta=0}$$

Например, если мы выберем в качестве  $L$ -операторов (4.3) янгианые  $R$ -матрицы (3.9.19), то получим  $SO(N)$  ( $\epsilon = +1$ ) и  $Sp(N)$  ( $N = 2n, \epsilon = -1$ ) — инвариантные модели магнетиков с гамильтонианами [28]:

$$H = \sum_{l=1}^M \left( P_{l,l+1} - \frac{2}{N-2\epsilon} K_{l,l+1} \right) + M, \quad O_{M,M+1} = O_{M,1},$$

где  $K_{l,l+1} = C_{l,l+1}^{i,l+1} C_{j,j+1}^{i,l+1}$ , а  $P_{l,l+1} = \delta_{j,l+1}^i \delta_{i,l+1}^{j+1}$  — матрицы перестановки.

Эти модели являются обобщениями XXX-модели магнетиков Гайзенберга.

## 2. Уравнение Янга — Бакстера (3.5.9):

$$S_{23}(\theta - \theta') S_{13}(\theta) S_{12}(\theta') = S_{12}(\theta') S_{13}(\theta) S_{23}(\theta - \theta') \quad (4.6)$$

вместе с дополнительными соотношениями унитарности и кроссинг-симметрии:

$$S_{12}(\theta) S_{21}(-\theta) = I_{12}, \quad S_{12}(\theta) = (S_{21}(i\pi - \theta))^t, \quad (4.7)$$

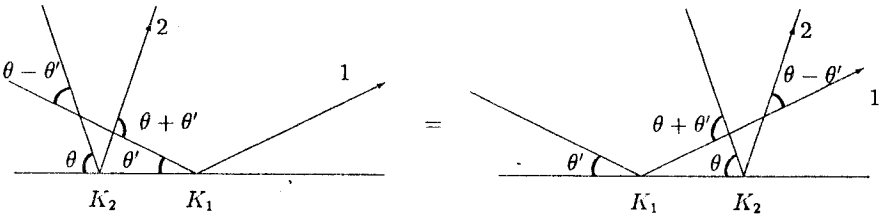
определяют однозначно факторизованные  $S$ -матрицы (с минимальным набором полюсов), описывающие рассеяние частично-подобных возбуждений в  $(1+1)$ -мерных интегрируемых релятивистских моделях [3]. Матри-

ца  $S_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(\theta)$  интерпретируется как  $S$ -матрица рассеяния двух частиц с изотопическими спинами  $i_1, i_2$  в две частицы со спинами  $j_1, j_2$  (с сохранением первоначальных импульсов), а спектральный параметр  $\theta$  есть не что иное, как разность быстроев этих частиц. Многочастичные  $S$ -матрицы распадаются на произведения двухчастичных (факторизация). В этом смысле УЯБ (4.6) есть условие однозначности определения многочастичных  $S$ -матриц.

Уравнение отражения [47,48], зависящее от спектральных параметров:

$$\begin{aligned} S_{12}(\theta - \theta') K_2(\theta) S_{21}(\theta + \theta') K_1(\theta') &= \\ &= K_1(\theta') S_{12}(\theta + \theta') K_2(\theta') S_{21}(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (4.8)$$

вместе с соотношениями (4.6), (4.7) определяет факторизованное рассеяние частиц (солитонов) на полупрямой [47,48]. Операторная матрица  $K_1(\theta) = K_{j_1}^{i_1}(\theta)$  в этом случае описывает акт отражения частицы с быстрой  $\theta$  в конечной точке полупрямой. Графически соотношение (4.8) представляется в виде



Сделаем теперь в (4.8) предельный переход  $\theta, \theta' \rightarrow \pm \infty$  так, что  $\theta - \theta' \rightarrow \pm \infty$ , и при этом положим

$$\begin{aligned} K(\theta)|_{\theta \rightarrow \infty} &= L, & S_{12}(\theta)|_{\theta \rightarrow \infty} &= R_{21}, \\ K(\theta)|_{\theta \rightarrow -\infty} &= L^{-1}, & S_{12}(\theta)|_{\theta \rightarrow -\infty} &= (R_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда (4.8) перейдет в (3.1.23), и это является причиной того, что все алгебры с определяющими соотношениями типа (3.1.23) называются алгебрами уравнения отражения [48].

Отметим, что всякое решение УЯБ (4.6) с условиями (4.7) определяет класс эквивалентности релятивистских интегрируемых систем с данной факторизованной  $S$ -матрицей. Таким образом, всякая классификация решений УЯБ в какой-то степени является классификацией интегрируемых систем с указанными выше свойствами.

3. УЯБ, записанное в форме (3.1.3), показывает, что матрицы  $R_k$  (3.3.23), удовлетворяющие условиям локальности

$$[\mathbf{R}_k, \mathbf{R}_{k'}] = 0, \quad |k - k'| > 1,$$

реализуют представления алгебры кос  $B_{N+1}$  (см., например [10,49]). Произвольную косу (с  $N + 1$  нитями) можно построить путем перемножения матриц  $\mathbf{R}_k$  и их обратных. Графически косу можно изобразить, пользуясь диаграммным представлением  $R$ -матриц (3.7.26'). После этого данную косу можно замкнуть в узел с помощью  $(N + 1)$ -го кантового следа  $\text{Tr}_q$  и  $\overline{\text{Tr}}_q$ . Полученное выражение будет, очевидно, инвариантом соответствующего узла.

Рассматривая наряду с  $R$ -матрицами (3.3.23)  $R$ -матрицы, действующие в двойственных пространствах (см. [18]), можно обобщить приведенную выше конструкцию и построить инварианты заузленных ленточных связок [18].

4. Упомянем о применении УЯБ в многопетлевых вычислениях в квантовой теории поля. Известен вариант УЯБ (см. [2,50,51]), который также представляется в виде уравнения треугольников (3.5.9'), но индексы приписываются не «ребрам», а «граням»:

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2}, \quad (4.8')$$

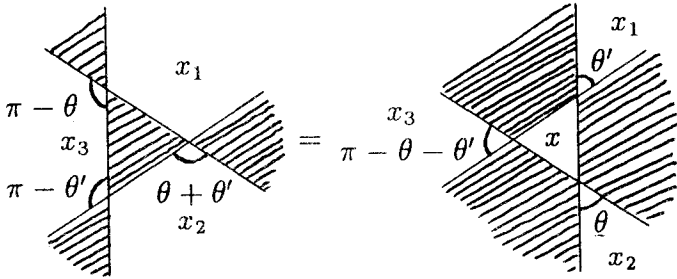
где  $R_{kl}^{ij}(\theta) = \sum_{\kappa} \begin{matrix} i \\ \theta \\ \kappa \end{matrix} \begin{matrix} \kappa \\ j \end{matrix} = R_{ij}^{kl}(\theta)$  и суммирование ведется по индексу  $l$ .

Соотношение (4.8') так же, как и (3.5.9), дает условия интегрируемости двумерных решеточных статистических систем с весами, определяемыми  $R$ -матрицами  $R_{kl}^{ij}(\theta)$ . Заметим теперь, что УЯБ (4.8') имеет решение в виде  $R_{kl}^{ij}(\theta) = G_k^i(\theta) G_l^j(\pi - \theta)$ , где матрицы  $G_x^x = G_x^{x'}$  удовлетворяют звездно-треугольному соотношению (см., например, [2,50]):

$$\begin{aligned} f(\theta, \theta') G_{x_2}^{x_1}(\theta + \theta') G_{x_3}^{x_2}(\pi - \theta') G_{x_1}^{x_3}(\pi - \theta) = \\ = \sum_x G_x^{x_1}(\theta') G_x^{x_2}(\theta) G_x^{x_3}(\pi - \theta - \theta'), \end{aligned} \quad (4.9)$$



где  $f(.,.)$  — произвольная функция. Соотношения (4.9) при  $f = 1$  графически представляются в виде



Рассмотрим теперь безмассовый пропагатор Фейнмана:

$$G_D(x - x' | \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(x - x')^{2\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha)}{((x - x')_\mu (x - x')^\mu)^\alpha}, \quad (4.10)$$

где  $\alpha = D/2 - 1 + \beta$ ,  $D = 4 - 2\epsilon$  — размерность пространства-времени,  $x_\mu$  — его координаты, а  $\epsilon$  и  $\beta$  — параметры размерной и аналитической регуляризации соответственно. Пропагатор (4.10) удовлетворяет соотношению

$$G_D\left(x_1 - x_2 \mid \frac{D}{2} - \alpha_3\right) G_D\left(x_2 - x_3 \mid \frac{D}{2} - \alpha_1\right) G_D\left(x_3 - x_1 \mid \frac{D}{2} - \alpha_2\right) \stackrel{\sum \alpha_i = D}{=} \\ = \int \frac{d^D x}{\pi^{D/2}} \prod_{i=1}^3 G_D(x - x_i \mid \alpha_i), \quad (4.11)$$

которое легко получается, если в правой части (4.11) выбрать  $x_3 = 0$  и сделать одновременное преобразование инверсии переменных интегрирования:  $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$  и координат  $x_{1,2}^\mu$ . Соотношения (4.9) и (4.11) эквивалентны, если мы положим

$$G_{x'}^x(\theta) = G_D\left(x - x' \mid \frac{D}{2} - \frac{D\theta}{2\pi}\right), \quad f(\theta, \theta') = 1. \quad (4.12)$$

Таким образом, аналитически и размерно регуляризованный безмассовый пропагатор (4.10) удовлетворяет бесконечномерному звездно-треугольному соотношению (4.9) и, соответственно, исходя из (4.10), (4.12), можно строить решения УЯБ (4.8'). Данное замечание сделано в работе [50], где были вычислены вакуумные диаграммы с бесконечным числом вершин, соответствующие планарной квадратной решетке (теория  $\phi^4$ ,  $D = 4$ ), пла-

нарной треугольной решетке (теория  $\phi^6$ ,  $D = 3$ ) и шестиугольной решетке «пчелиные соты» (теория  $\phi^3$ ,  $D = 6$ ). Звездно-треугольное соотношение (4.11) (известное также как соотношение уникальности) применялось, кроме того, для аналитического вычисления диаграмм, дающих вклады в 5-петлевую  $\beta$ -функцию теории  $\phi^4_{D=4}$ , безмассовых лестничных диаграмм, а также для исследования групп симметрий размерно- и аналитически-регуляризованных безмассовых диаграмм Фейнмана (см., соответственно, [52]). Подчеркнем, что чрезвычайно интересной представляется задача о массивной деформации функции пропагатора (4.10) и соответствующей деформации звездно-треугольного соотношения (4.11).

5. Отметим, что мы совершенно не затронули многочисленные приложения квантовых групп Ли с параметрами деформации  $q$ , удовлетворяющими условиями  $q^N = 1$ , т.е. когда параметры  $q$  равны корням из единицы. Эти приложения (см., например, [53]) связаны со спецификой теории представлений таких квантовых групп, которые, вообще говоря, уже нельзя рассматривать как деформацию классических групп Ли.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить Л.Д.Фаддеева и А.Т.Филиппова за внимание и всестороннюю поддержку. Автор также благодарен Р.М.Кашаеву, О.В.Огиевскому, П.П.Кулишу, Н.Ю.Решетихину, В.Н.Плечко и особенно А.А.Владимирову, Г.Э.Аругюнову, Ж.Поповичу и П.Н.Пятову за стимулирующие обсуждения и плодотворное сотрудничество. Работа над данным обзором частично поддержана РФФИ (грант 95-02-05679а) и Международным научным фондом (грант RFF 300).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Складчин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — ТМФ, 1979, т.40, 2, с.194; Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — Успехи мат. наук, 1979, т.34, 5, с.13; Фаддеев Л.Д. — «Проблемы квантовой теории поля» (Труды V Международного совещания по нелокальным и нелинейным теориям поля, Алушта, 1979), ОИЯИ, Дубна, 1979, с.249.
2. Baxter R.J. — Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Acad. Press, London, New York, 1982.
3. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov A.I.B. — Ann. Phys., 1979, vol.120, p.253. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov A.I.B. — Nucl. Phys., 1978, vol.B133, p.525.
4. Замолодчиков А.Б. — ЖЭТФ, 1980, т.79, с.641; Zamolodchikov A.B. — Comm. Math. Phys., 1981, vol.79, p.489.
5. Pasquier V., Saleur H. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.523; Kulish P.P. — Preprint YITP/K-959, 1991; Karowski M., Zapletal A. — Nucl. Phys., 1994, vol.B419, p.567.

6. **Connes A.** — Geometrie non Commutative. Interditions, Paris, 1990; **Connes A., Lott J.** — Nucl. Phys., 1990, vol. 18B, p.29.
7. **Isaev A.P., Popowicz Z.** — Phys. Lett., 1992, vol.B281, p.271.
8. **Podles P., Woronowicz S.L.** — Comm. Math. Phys., 1990, vol.130, p.381.  
**Carow-Watamura U., Schlieker M., Scholl M., Watamura S.** — Z. Phys. C, 1990, vol.48, p.159;
- Mir-Kasimov R.M.** — Brussel Univ. Preprint, 1991; Montreal Univ. Preprint CRM-2186, 1994;
- Ogievetsky O., W.B.Schmidke, Wess J., Zumino B.** — Comm. Math. Phys., 1992, vol.150, p.495;
- Kulish P.P.** — Algeb. i Anal, 1994, vol.6, 2, p.195;
- Majid S.** — J. Math. Phys., 1993, vol.34, p.2045;
- Lukierski J., Nowicki A., Ruegg H., Tolstoy V.N.** — Phys. Lett., 1991, vol.B264, p.331.
9. **Schmidke W., Wess J., Zumino B.** — Z. Phys., 1991, vol.C52, p.471;  
**De Azcarraga J.A., Kulish P.P., Rodenas F.** — Lett. Math. Phys., 1994, vol.32, p.173.
10. **Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.** — Алгебра и анализ, 1989, т.1, 1, с.178.
11. **Sweedler M.E.** — Hopf Algebras, Benjamin, 1969.
12. **Abe E.** — Hopf Algebras, Cambridge University Press, 1977.
13. **Drinfeld V.G.** — In.: Proc. Inter. Congress of Mathematics. Berkley, 1986, vol.1, p.798.
14. **Majid Sh.** — Int. J. Mod. Phys., 1990, vol.A5, 1, p.1.
15. **Vladimirov A.A.** — Z. Phys., 1993, vol.C58, p.659.
16. **Reshetikhin N.** — Lett. Math. Phys., 1990, vol.20, p.331.
17. **Дринфельд В.Г.** — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып.6, с.114;  
**Дринфельд В.Г.** — Алгебра и анализ, 1990, т.2, вып.4, с.149.
18. **Решетихин Н.Ю.** — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып.2, с.169.
19. **Склянин Е.К.** — Функциональный анализ, 1982, т.16, 4, с.27; 1983, т.17, 4, с.34.
20. **Manin Yu.I.** — Montreal University Preprint CRM-1561, 1989.
21. **Manin Yu.I.** — Comm. Math. Phys., 1989, vol.122, p.163.
22. **Faddeev L.D., Pyatov P.N.** — «The Differential Calculus on Quantum Linear Groups», hep-th/9402070, 1994 (в сборнике, посвященном памяти Ф.А.Березина (в печати)).
23. **Алексеев А.Ю., Фаддеев Л.Д.** — Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, 1992, т.200, с.3.
24. **Demidov D.D., Manin Yu.I., Mukhin E.E., Zhdanovich D.V.** — Progr. Theor. Phys., Suppl., 1990, vol.102, p.203
25. **Sudbery A.** — J. Phys., 1990, vol.A23, p.L697;  
**Fairlie D.B., Zachos C.K.** — Phys. Lett., 1991, vol.B256, p.43.
26. **Schirrmacher A.** — Z. Phys., 1991, vol.C50, p.321.
27. **Schirrmacher A.** — J. Phys., 1991, vol.A50, p.L1249.
28. **Решетихин Н.Ю.** — ТМФ, 1985, т.63, 3, с.347.
29. **Chaichian M., Kulish P.** — Phys. Lett., 1990, vol.B234, p.72;  
**Damaskinsky E.V., Kulish P.P., Sokolov M.A.** — Preprint ESI-95-217, q-alg 9505001.

30. Chaichian M., Kulish P., Lukierski J. — Phys. Lett., 1991, vol.B262, p.43.
31. Isaev A.P., Malik R.P. — Phys. Lett., 1992, vol.B280, p.219.
32. Кулиш П.П., Склянин Е.К. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1980, т.95, с.129.
33. Lubashenko V., Sudbery A. — Preprint York, 1993.
34. Schwenk J., Schmidke W.B., Vokos S.P. — Z. Phys., 1990, vol.C46, p.643;  
Schmidke W.B., Vokos S.P., Zumino B. — Z. Phys., 1990, vol.C48, p.249;  
Кулиш П.П. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1990, т.180, с.89;  
Dabrowski L., Wang L.Y. — Phys. Lett., 1991, vol.B266, p.51.
35. Bazhanov V., Shadrnikov A. — Teor. Mat. Phys., 1987, vol.73, p.402.
36. Кулиш П.П. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1985, т.145, с.140.
37. Khoroshkin S.M., Tolstoy V.N. — Comm. Math. Phys., 1989, vol.18, p.143.
38. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu. — Lett. Math. Phys., 1989, vol.18, p.143.
39. Berg V., Karowski M., Kurak V., Weisz P. — Nucl. Phys., 1978, vol.B134, p.125.
40. Bazhanov V.V. — Comm. Math. Phys., 1987, vol.113, p.471; Phys. Lett., 1985, vol.B159, p.321.
41. Jimbo M. — Comm. Math. Phys., 1986, vol.102, p.537.
42. Belavin A.A. — Nucl. Phys., 1981, vol.B180[FS2], p.189.
43. Чередник И.В. — ЯФ, 1982, т.36, с.549; Tracy C.A. — Physica, 1985, vol.16D, p.203; Bovier A. — J. Math. Phys., 1983, vol.24, p.631;  
Felder G., Pasquier V. — Lett. Math. Phys., 1994, vol.32, p.167.
44. Rubakov V.A. — Nucl. Phys., 1982, vol.B203, p.311;  
Lipatov L.N. — Nucl. Phys., 1991, vol.B365, p.614;  
Faddeev L.D., Korchemsky G.P. — Phys. Lett., 1995, vol.B342, p.311;
45. Владимиров А.А. — Введение в квантовые интегрируемые системы. Метод - матрицы. Лекции для молодых ученых, вып.32. ОИЯИ, P17-85-742, Дубна, 1985.
46. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu. — J. Math. Phys., 1983, vol.A16, p.L591.
47. Чередник И.В. — ТМФ, 1984, т.61, с.35.
48. Kulish P.P., Sklyanin E.K. — J. Phys., 1992, vol.A25, p.5963;  
Kulish P.P., Sasaki R. — Prog. Theor. Phys., 1993, vol.89, p.741.
49. Reshetikhin N.Yu. — LOMI Preprint E-4,17-87, 1987;  
Turaev V.G. — LOMI Preprint E-3-87, 1987;  
Reshetikhin N.Yu., Turaev V.G. — Comm. Math. Phys., 1990, vol.127, p.1.
50. Zamolodchikov A.B. — Phys. Lett., 1980, vol.B97, p.63.
51. Бажанов В.В., Строганов Ю.Г. — ТМФ, 1982, т.52, с.105.
52. Kazakov D.I. — Phys. Lett., 1983, vol.B133, p.406;  
Belokurov V.V., Ussyukina N.I. — J. Phys., 1983, vol.A16, p.2811;  
Горишний С.Г., Исаев А.П. — ТМФ, 1985, т.62, с.345.
53. Witten E. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.285;  
Alvarez-Gaume L., Gomez C., Sierra G. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.347;  
Bazhanov V.V., Kashaev R.M., Mangazeev V.V., Stroganov Yu. — Comm. Math. Phys., 1991, vol.138, p.393;  
Date E., Jimbo M., Miki K., Miwa T. — Comm. Math. Phys., 1991, vol.138, p.393;  
Furlan P., Ganchev A., Petkova V.B. — Nucl. Phys., 1990, vol.343, p.205.