

АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

М.В.Чижов

Центр космических исследований и технологий,
Физический факультет, Софийский университет
1126 София, Болгария
E-mail: mih@phys.uni-sofia.bg

Обсуждается существование двух различных сортов частиц со спином единица, описываемых двумя неэквивалентными представлениями группы Лоренца: вектор-потенциалом и антисимметричным тензорным полем второго ранга. Обзор посвящен изучению свойств антисимметричных тензорных полей, определению их места в теории и феноменологическим следствиям. Представлены уравнения движения для безмассовых частиц произвольного спина, из которых следует существование новых частиц высших спинов.

The existence of two different sorts of particles with spin one is discussed. They are described by two nonequivalent representations of the Lorentz group: the vector potential and the antisymmetric tensor field of the second rank. The present review is devoted to studying the properties of the antisymmetric tensor fields, their role in theory, and phenomenological consequences. The equations of motion are presented for massless particles of an arbitrary spin. It follows from the equations that new particles with higher spins should exist.

ВВЕДЕНИЕ

Ключевым понятием всей фундаментальной физики является понятие поля. Введение новых полей в теорию с неизбежностью приводит к новым физическим следствиям, и это не должно противоречить существующим экспериментальным данным. В обзоре мы рассмотрим свойства фундаментального антисимметричного тензорного поля второго ранга. Вне массовой поверхности оно переносит взаимодействие со спином единица и является дополнительным фотону. Логическая непротиворечивость такой теории и анализ последних экспериментальных данных приводят к выводу о возможности существования в природе таких частиц.

Огромное разнообразие элементарных частиц может быть описано в рамках квантовой теории поля ограниченным набором полей. Скалярное, спинорное, векторное и симметричное тензорное поля достаточны для описания всех известных в природе четырех видов взаимодействий и материальных частиц, участвующих в них. Это достигается благодаря тому, что параметры соответствующих полей изменяются в очень широких преде-

лах. Например, частицы могут быть безмассовыми и иметь бесконечный радиус взаимодействия, или, напротив, очень массивными — с массой порядка 100 ГэВ — и приводить к почти точечному взаимодействию на расстояниях 10^{-16} см. Основой построения всех четырех видов взаимодействия: сильного, электромагнитного, слабого и гравитационного являются калибровочные теории [1]. Частицы, осуществляющие эти взаимодействия, называются калибровочными бозонами.

Калибровочная симметрия требует отсутствия затравочного массового члена в лагранжиане для калибровочных бозонов. Поэтому трудности в квантовой теории поля возникают тогда, когда мы пытаемся «руками» сделать калибровочные частицы массивными. Это приводит к перенормируемой теории. Чтобы сохранить перенормируемость теории и в то же время придать массы калибровочным бозонам, в настоящее время используют так называемый механизм Хиггса [2]. Для этого необходимо добавить в теорию скалярные поля, которые, впрочем, еще не открыты, с ненулевым вакуумным средним $\langle \phi \rangle_0 = v \neq 0$. Их взаимодействие с калибровочными бозонами приводит к динамическому приобретению массы последними. Ввиду того, что ненулевое вакуумное среднее скалярных полей может также являться источником масс и для материальных частиц, принято считать, что при построении теории все частицы берутся безмассовыми. Это хорошо еще и потому, что только частицы с одинаковыми массами могут быть членами одного мультиплетта. Поэтому в данном случае не возникает никаких трудностей при построении объединенных теорий. Все необходимые массы возникают в результате спонтанного нарушения симметрии, когда скалярные поля приобретают ненулевые вакуумные средние. Скалярные поля дают массы всем частицам, которые с ними взаимодействуют.

Кроме массы, другим инвариантом группы Пуанкаре является спин, а для безмассовых частиц — спиральность. Известные в настоящее время фундаментальные частицы имеют спин $1/2$, 1 и 2 . Вейлевский спинор ψ_α и ему сопряженный $\psi_\alpha^* \equiv \bar{\psi}_\alpha$ являются фундаментальными спинорными представлениями группы Лоренца $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ соответственно. Эти спиноры первого ранга описывают частицы со спином $1/2$. Спинорные пунктирные $\dot{\alpha}$ и непунктирные α индексы принимают значения 1 и 2 . Вейлевские спиноры с различными типами индексов связаны P -преобразованием пространственного отражения и по отдельности не являются по отношению к нему инвариантными. Дираковские спиноры строятся как прямая сумма вейлевского спинора и ему сопряженного и преобразуются по приводимому представлению $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. Поэтому они инвариантны к преобразованию четности. Ввиду того, что P -инвариантность в природе нарушена, естествен-

но с самого начала выбрать в качестве фундаментальных частиц материи вейлевские спиноры, а не спиноры Дирака.

Спиноры высшего ранга можно построить, используя фундаментальные вейлевские спиноры [3]. Произвольная комбинация вейлевских спиноров является приводимой, так как спинорная алгебра содержит инвариантные антисимметричные спиноры $\epsilon^{\alpha\beta}$ и $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ с непунктирными и пунктирными индексами. Неприводимый спинор высшего ранга может быть образован из симметричной комбинации вейлевских спиноров с непунктирными индексами и из симметричной комбинации сопряженных вейлевских спиноров с пунктирными индексами умножением. Всевозможные неприводимые комбинации n -непунктирных и m -пунктирных фундаментальных вейлевских спиноров преобразуются по представлениям группы Лоренца $(n/2, m/2)$ и описывают частицы со спином $j = (n + m)/2$.

В случае целого спина наиболее хорошо изученным и используемым является действительное представление $(j/2, j/2)$. С помощью матриц Паули $(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma_0, \sigma)_{\alpha\dot{\beta}}$, где σ_0 — единичная матрица, можно перейти от спинорных индексов к лоренцевым. Здесь и в дальнейшем мы будем использовать буквы греческого алфавита для спинорных индексов, а латинские буквы — для лоренцевых. Симметричный по лоренцевым индексам $\phi_{m_1 \dots m_j}$ бесследовый тензор $g^{m_1 m_2} \phi_{m_1 m_2 \dots m_j} = 0$ описывает бозе-частицы со спином j [4]. Действительно, легко проверить, что размерность представления $(j/2, j/2)$ равна $(j + 1)^2$ и совпадает с числом компонент симметричного бесследового тензора: $\phi_{m_1 \dots m_j} : C_{j+3}^j - C_{j+1}^{j-2} = (j + 1)^2$, что равно числу степеней свободы вне массовой поверхности. Однако, чтобы получить физическое число компонент для частицы со спином $j : 2j + 1$, необходимо наложить j^2 дополнительных связей типа условий Лоренца: $\partial_{m_1} \phi^{m_1 \dots m_j} = 0$. В безмассовом случае, кроме того, калибровочные преобразования выделяют физические компоненты с максимальными значениями спиральности $\lambda = \pm j$. Аналогичная процедура построения полей с высшими спинами используется и для ферми-частиц, которые описываются представлениями $(j/2 + 1/4, j/2 - 1/4)$ и $(j/2 - 1/4, j/2 + 1/4)$ или эквивалентными им симметричными по лоренцевым индексам бесследовыми спин-тензорами $\psi_{m_1 \dots m_{j-1/2}}^\alpha$ и $\psi_{m_1 \dots m_{j-1/2}}^{\dot{\alpha}}$.

Такое описание подразумевает, что для безмассовой частицы со спином j физическими являются компоненты с максимальным значением спиральности $\lambda = \pm j$. Действительно, все известные частицы описываются только этими представлениями. Реальный фотон поперечен, что отвечает макси-

мальному значению спиральности $\lambda = \pm 1$, а гравитон имеет физические компоненты со спиральностью $\lambda = \pm 2$. Естественно здесь задать вопрос о возможности существования частиц со спином j , но с физическими компонентами, отвечающими другим, немаксимальным значениям спиральности $\lambda = \pm(j - 1), \pm(j - 2), \dots$, т.е. частиц, как бы дополнительных существующим, скажем, фотону и гравитону — их партнеров. Такие частицы могут быть описаны другими представлениями группы Лоренца, неэквивалентными бесследовым симметричным тензорам $\phi_{m_1 \dots m_j}$ (спин-тензорам $\psi_{m_1 \dots m_{j-1/2}}^\alpha$).

В данном обзоре мы сосредоточим наше внимание на представлениях спина единица (1,0) и (0,1), которые отвечают симметричным по спинорным индексам спинорам ранга 2: $\psi_{\alpha\beta}$ и $\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ соответственно. Чтобы перейти от спинорных индексов к лоренцевым, можно использовать разложение произведения матриц Паули на симметричную и антисимметричную части:

$$\begin{aligned}
 (\sigma^m \hat{\sigma}^n C)_{\alpha\beta} &= g^{mn} C_{\alpha\beta} - \frac{i}{2} \varepsilon^{mnab} (\sigma_a \hat{\sigma}_b C)_{\alpha\beta}, \\
 (C \hat{\sigma}^m \sigma^n)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= g^{mn} C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \frac{i}{2} \varepsilon^{mnab} (C \hat{\sigma}_a \sigma_b)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $(\hat{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\beta} = (C^{-1} \sigma_m^T C)^{\dot{\alpha}\beta}$, а $C_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta}$ — матрица зарядового сопряжения, ε^{nmab} — полностью антисимметричный тензор, причем $\varepsilon^{0123} = +1$. Из (1) видно, что трем комплексным компонентам симметричного спинора $\psi_{\alpha\beta}$ можно поставить в соответствие три комплексные компоненты антисимметричного самоантidualного тензора $T_{mn}^- = (T_{mn} - \tilde{T}_{mn})/\sqrt{2}$ [5]:

$$\begin{aligned}
 \psi_{11} &= (iT_{02}^- - T_{01}^-)/\sqrt{2}, \\
 \psi_{22} &= (iT_{02}^- + T_{01}^-)/\sqrt{2}, \\
 \psi_{12} &= \psi_{21} = T_{03}^-/\sqrt{2},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $\tilde{T}_{mn} = i/2 \varepsilon_{mnab} T^{ab}$ — тензор, дуальный действительному антисимметричному тензору T^{ab} . Комплексно-сопряженные компоненты симметричного спинора $\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ соответствуют компонентам антисимметричного самоантidualного тензора $T_{mn}^+ = (T_{mn} + \tilde{T}_{mn})/\sqrt{2} = (T_{mn}^-)^*$. Впервые антисимметричное тензорное поле, как фундаментальное поле, а не как тензор напряженности Максвелла, было введено Кеммером [6]. Дальнейшее изучение свойств этого поля и его взаимодействий с другими полями было продолжено в работе Огиевского и Полубаринова [7]. В их работе антисимметричное тензорное поле второго ранга A_{mn} было введено как калибровочное поле с калибровочными преобразованиями $A_{mn} \rightarrow A_{mn} + \partial_m \lambda_n - \partial_n \lambda_m$. Авторы ввели для этого

поля очень подходящее название «нотиф», так как его свойства оказались дополнительными фотону. Калибровочные антисимметричные тензорные поля будут рассмотрены во втором разделе.

Особый интерес к калибровочным антисимметричным тензорным полям возник после работ [8], где было показано, что такие поля естественным образом возникают в дуальных моделях теорий струны. В настоящее время они являются неотъемлемой частью расширенных моделей супергравитации [9] и обеспечивают сокращение аномалий в этих теориях [10]. Усилия, предпринятые по квантованию калибровочных антисимметричных тензорных полей, привели к открытию новой конструкции: «духи для духов» или пирамиды духов [11]. К сожалению, расширенные модели супергравитации достаточно далеки от феноменологии, и их изучение представляет чисто теоретический интерес. Поэтому калибровочные антисимметричные тензорные поля не нашли на сей день еще физических приложений.

Кроме калибровочной симметрии, в физике элементарных частиц существует еще одна важная симметрия — конформная [12]. В четырехмерном пространстве-времени свободное максвелловское действие для электромагнитного поля оказывается одновременно калибровочно- и конформноинвариантным. Однако это свойство не сохраняется для действия калибровочного антисимметричного тензорного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{gauge}} &= \frac{1}{2 \cdot 3!} \int d^4x F_{mnk} F^{mnk} = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{4} (\partial_k A_{mn}) \partial^k A^{mn} - \frac{1}{2} (\partial_m A^{mk}) \partial^n A_{nk} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $F_{mnk} = \partial_m A_{nk} + \partial_k A_{mn} + \partial_n A_{km}$ — калибровочно-инвариантный полностью антисимметричный тензор напряженности третьего ранга. Конформноинвариантное действие для антисимметричного тензорного поля T_{mn}

$$\mathcal{A}_{\text{conformal}} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} (\partial_k T_{mn}) \partial^k T^{mn} - (\partial_m T^{mk}) \partial^n T_{nk} \right] \quad (4)$$

отличается от (3) и приводит к другим уравнениям движения. Эти поля мы будем называть материальными антисимметричными тензорными полями. Их рассмотрению посвящен третий раздел.

Функции Грина для материальных антисимметричных тензорных полей можно однозначно построить в рамках конформной теории поля [13]. Они также естественным образом возникают в расширенных моделях конформной супергравитации [14—16] и приводят к сокращениям аксиальных и конформных аномалий [17]. Модели, построенные с использованием таких полей, являются перенормируемыми и проявляют интересные свойства [18]. Например, константа связи калибровочного псевдовекторного поля с ма-

териальным антисимметричным тензорным полем даже в абелевом случае обладает асимптотически-свободным поведением.

В отличие от калибровочных антисимметричных тензорных полей, материальные антисимметричные тензорные поля могут взаимодействовать с известными частицами материи спина 1/2 посредством обычной юкавской связи $i\bar{\psi}\sigma^{mn}\psi T_{mn}$, обходя проблему внутренней самосогласованности. Если бы антисимметричные тензорные частицы были безмассовыми, это привело бы к новому взаимодействию с бесконечным радиусом. Чтобы такое взаимодействие не противоречило экспериментальным данным, необходимо предположить неестественную малость юкавской константы t . Однако существует и другое, более естественное решение этой проблемы, когда материальные антисимметричные тензорные поля приобретают массу динамическим образом в результате спонтанного нарушения симметрии.

Массивное антисимметричное тензорное поле приводит к почти точечному эффективному тензорному взаимодействию, которое может интерферировать со стандартным слабым V—A-взаимодействием. Уже в настоящее время существуют экспериментальные данные в пользу такой возможности [19,20]. Однако лишь дальнейшие прецизионные эксперименты, в частности, по измерению энергетического электронного спектра в распаде мюона и непосредственное рождение тензорных частиц на будущих ускорителях, смогут окончательно дать ответ на этот вопрос.

2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Изучение различных представлений группы Лоренца, и в частности, представлений, связанных с антисимметричными тензорными полями, имеет долгую историю в теории поля [6]. Однако отсутствие экспериментальных данных в пользу существования таких частиц не привлекает еще достаточного внимания к этому вопросу. Основные монографии по квантовой теории поля [21] не рассматривают поля, преобразующиеся по нестандартным представлениям группы Лоренца. Нашей задачей будет изучение самых простых нестандартных представлений группы Лоренца, которые возникают уже при описании частиц со спином единица. Ввиду того, что частицы со спином единица могут преобразовываться как симметричный спинор второго ранга $\chi_{\alpha\beta}$ и ему сопряженный $\chi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ или как смешанный спинор ψ_{β}^{α} , можно говорить о двух типах частиц со спином единица. Известно, что смешанный спинор ψ_{β}^{α} соответствует 4-вектору и в безмассовом пределе описывает фотон. Тогда какую частицу описывает симметричный спинор второго ран-

га $\chi_{\alpha\beta}$ и ему сопряженный $\chi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$? Чтобы ответить на данный вопрос, необходимо записать уравнения движения для этих полей. При построении уравнений движения мы постараемся следовать исторической последовательности.

2.1. Массивные частицы со спином единица. Впервые уравнения движения для спинорных полей высшего ранга были получены Дираком [22]. Если в теории существует массовый параметр m_0 , то можно записать систему уравнений первого порядка, связывающую различные спиноры:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}\chi_{\beta\lambda} &= m_0\psi_{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\ \hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}\psi_{\lambda}^{\dot{\alpha}} &= m_0\chi_{\beta\lambda} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} = p^n(\hat{\sigma}_n)^{\dot{\alpha}\beta}$. Кеммер переписал эти уравнения в более привычных тензорных обозначениях, перейдя от спинорных индексов к лоренцевым [6]. Он нашел, что эти уравнения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \partial_a f^{ab} &= m_0 A^b, \\ \partial_a A_b - \partial_b A_a &= m_0 f_{ab}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь антисимметричный тензор второго ранга f_{ab} соответствует симметричному спинору $\chi_{\alpha\beta}$, а вектор A_a отвечает смешанному спинору $\psi_{\beta}^{\dot{\alpha}}$. Если вектор A_a интерпретировать как вектор-потенциал частицы со спином единица, а второе уравнение в (6) — как определение напряженности поля $F_{ab} = m_0 f_{ab}$ для этой частицы, то эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_a F^{ab} &= m_0^2 A^b, \\ F_{ab} &= \partial_a A_b - \partial_b A_a. \end{aligned} \quad (7)$$

Они являются ничем другим, как уравнениями Прока [23]. В силу антисимметрии напряженности F_{ab} из первого уравнения (7) автоматически следует условие Лоренца $\partial_a A^a = 0$. Это условие убирает лишнюю скалярную степень свободы. Поэтому уравнения (7) описывают векторную частицу со спином единица и с массой m_0 . Хорошо известно, что если перейти к пределу $m_0 \rightarrow 0$, то эти уравнения вместе с условием Лоренца будут описывать безмассовый фотон.

Кеммер дал и другую интерпретацию уравнениям (6). Он предположил, что частица со спином единица может описываться антисимметричным тен-

зор-потенциалом $A_{ab} = i/2\epsilon_{abmn}f^{mn}$, а роль напряженности поля для этой частицы тогда будет играть вектор A^a или, точнее, ему дуальный полностью антисимметричный тензор третьего ранга $f_{abc} = i\epsilon_{abcd}A^d$. Уравнения движения, дуальные (6), имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_a A_{bc} + \partial_b A_{ca} + \partial_c A_{ab} &= m_0 f_{abc}, \\ \partial_a f^{abc} &= m_0 A^{bc}.\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнения (6) и (8) для свободных массивных частиц эквивалентны, так как существует дуальное преобразование, их связывающее. Однако эта эквивалентность теряется, когда включено взаимодействие [24].

Если переопределить напряженность для антисимметричного тензорного поля A_{ab} как $F_{abc} = m_0 f_{abc}$, уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned}F_{abc} &= \partial_a A_{bc} + \partial_b A_{ca} + \partial_c A_{ab}, \\ \partial_a F^{abc} &= m_0^2 A^{bc}.\end{aligned}\quad (9)$$

В силу антисимметрии напряженности F_{abc} , из второго уравнения (9) следует условие типа Лоренца

$$\partial_a A^{ab} = 0.\quad (10)$$

В силу же антисимметрии A^{ab} , из четырех условий (10) только три являются независимыми. Эти условия позволяют из 6 степеней свободы антисимметричного тензорного поля A^{ab} убрать 3. Поэтому уравнения (9) также описывают частицу со спином единица и с массой m_0 .

В силу дуальности уравнений (6) и (8), они представляют два эквивалентных способа описания свободных массивных частиц со спином единица. Покажем, что для антисимметричного тензорного поля существует еще одно уравнение, эквивалентное предыдущим, также описывающее массивную частицу со спином единица.

Лучше всего это показать, используя формализм проекционных операторов [25]. Свободное действие квадратично по полям, поэтому самый общий вид кинетического члена для антисимметричного тензорного поля есть $A_{ab} \square O^{abcd} A_{cd}$, где оператор O^{abcd} может быть разложен по полному набору проекционных операторов спина единица:

$$\begin{aligned}P_{abcd}^- &= \frac{1}{2} [g_{ac}\pi_{bd} - g_{ad}\pi_{bc} - g_{bc}\pi_{ad} + g_{bd}\pi_{ac}] \\ P_{abcd}^+ &= \mathbf{1}_{abcd} - P_{abcd}^-.\end{aligned}\quad (11)$$

Единичный оператор в (11) имеет вид $\mathbf{1}_{abcd} = 1/2[g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}]$, а $\pi_{ab} = \partial_a \square^{-1} \partial_b$. Это еще один способ показать, что антисимметричное тензорное поле описывается представлением $(1,0) \oplus (0,1)$. Операторы P^\pm удовлетворяют трем свойствам:

а) ортонормированности: $P_{abef}^\lambda P_{efcd}^{\lambda'} = \delta^{\lambda\lambda'} P_{abcd}^\lambda$;

б) разложимости единицы: $\mathbf{1}_{abcd} = \sum_\lambda P_{abcd}^\lambda$;

в) полноты: $O_{abcd} = \sum_\lambda \omega_\lambda P_{abcd}^\lambda$.

Используя проекционные операторы, запишем уравнение $\square P_{abcd}^+ A^{cd} = m_0^2 A_{ab}$, которое в точности совпадает с уравнением для антисимметричного тензорного поля, следующим из (9). Если на его обе части подействовать оператором P^- , то в силу свойства ортогональности (а), мы придем к условию связи $P_{abcd}^- A^{cd} = 0$, которое эквивалентно (10). На языке проекционных операторов это означает «вырезание» состояния со спином единица из антисимметричного тензорного поля. Для оставшихся физических степеней свободы, которые отвечают частице со спином единица, в силу свойства (б) мы получим уравнение Клейна — Гордона: $(\square - m_0^2) P_{abcd}^+ A^{cd} = 0$.

Если теперь построить аналогичные уравнения с оператором P^- , мы придем к еще одному уравнению для антисимметричного тензорного поля $\square P_{abcd}^- A^{cd} = m_0^2 A_{ab}$ или

$$\partial_a \partial^c A_{cb} - \partial_b \partial^c A_{ca} = m_0^2 A_{ab}. \quad (12)$$

Это уравнение используется в киральной теории для альтернативного описания ρ -мезона антисимметричным тензорным полем [26]. Если использовать подстановку $\partial^a A_{ab} = m_0 A_{ab}$, можно сразу увидеть эквивалентность (12) уравнениям Прока (7). Свойство полноты (в) гарантирует нам, что не существует других уравнений для массивных антисимметричных тензорных полей.

2.2. Безмассовые частицы со спином единица. Нас будет интересовать случай безмассовых антисимметричных тензорных частиц. Поэтому перейдем в (9) к пределу $m_0 \rightarrow 0$. Именно этот случай рассмотрели Огиевецкий и Полубаринов [7]. Они показали, что даже свободные уравнения (7) и (9) в безмассовом пределе описывают различные частицы и неэквивалентны. Чтобы увидеть это, запишем в безмассовом случае уравнение движения для вектор-потенциала A_m , следующее из (7) (уравнение Максвелла):

$$\square A_m - \partial_m \partial_n A^n = 0, \quad (13)$$

и уравнение движения для тензор-потенциала A_{mn} , следующее из (9) (уравнение для нотофа):

$$\square A_{mn} - \partial_m \partial_k A^{kn} + \partial_n \partial_k A^{km} = 0. \quad (14)$$

Заметим, что последнее уравнение (14) может быть получено из принципа наименьшего действия для (3). Уравнения (13) и (14) инвариантны относительно калибровочных преобразований $\delta A_m = \partial_m \lambda$ вектор-потенциала и

$$\delta A_{mn} = \partial_m \lambda_n - \partial_n \lambda_m \quad (15)$$

тензор-потенциала соответственно, где $\lambda(x)$ и $\lambda_m(x)$ — произвольные функции.

Покажем, что свободный нотоф обладает только одним состоянием с продольной поляризацией, а физический фотон имеет два состояния с поперечной поляризацией. Из дополнительных условий

$$\partial_m A^m = 0, \quad \partial_m A^{mn} = 0 \quad (16)$$

следует, что все компоненты вектор-потенциала A_m и тензор-потенциала A_{mn} удовлетворяют уравнениям Даламбера

$$\square A_m = 0, \quad \square A_{mn} = 0. \quad (17)$$

Поэтому они могут быть разложены в импульсном пространстве по плоским волнам с положительной и отрицательной частотами

$$A_m(x) = \int d^3p A_m(\mathbf{p}) e^{ipx} + \text{h.c.}, \quad A_{mn}(x) = \int d^3p A_{mn}(\mathbf{p}) e^{ipx} + \text{h.c.},$$

где $p_0 = |\mathbf{p}|$. Для подсчета числа состояний разложим $A_m(\mathbf{p})$ и $A_{mn}(\mathbf{p})$ по полному базису $e_m^{(1)}$, $e_m^{(2)}$, $p_m = (p_0, -\mathbf{p})$ и $\bar{p}_m = (p_0, \mathbf{p})$ со свойствами

$$(e^{(i)} e^{(j)}) = -\delta_{ij}, \quad (e^{(i)} p) = (e^{(i)} \bar{p}) = 0, \quad p^2 = \bar{p}^2 = 0, \quad (18)$$

где вектор \bar{p}_m получен из p_m обращением направления движения частицы.

Разложения можно записать в виде

$$A_m(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e_m^{(i)} + \beta p_m + \gamma \bar{p}_m,$$

$$A_{mn}(\mathbf{p}) = \delta(e_m^{(1)} e_n^{(2)} - e_n^{(1)} e_m^{(2)}) + \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i (e_m^{(i)} p_n - e_n^{(i)} p_m) +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \eta_i (e_m^{(i)} \bar{p}_n - e_n^{(i)} \bar{p}_m) + \xi (p_m \bar{p}_n - p_n \bar{p}_m).$$

Дополнительные условия (16) исключают все члены, содержащие \bar{p}_m (то есть $\gamma = \eta_i = \xi - 0$), а калибровочная инвариантность делает несущественными компоненты, содержащие p_m . Введем единичные векторы правой и левой круговой поляризации $e_m^\pm = (e_m^{(1)} \pm ie_m^{(2)})/\sqrt{2}$, отвечающие проекциям спина на направление движения (спиральностям) $\lambda = \pm 1$. Теперь легко можно показать, что свободный фотон действительно обладает одним состоянием поляризации с нулевой спиральностью

$$A_{mn}(\mathbf{p}) = i\delta [e_m^+(\mathbf{p}) e_n^-(\mathbf{p}) - e_n^+(\mathbf{p}) e_m^-(\mathbf{p})], \quad (19)$$

а свободный фотон имеет две компоненты со спиральностями $\lambda = \pm 1$:

$$A_m(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \alpha_\lambda^* e_m^\lambda(\mathbf{p}), \quad (20)$$

где $\alpha_\pm = (\alpha_1 \pm i\alpha_2)/\sqrt{2}$. Таким образом, действие (3) представляет собой калибровочную теорию бесспиновой частицы.

2.3. Неабелево антисимметричное тензорное поле. С помощью метода дуальных преобразований [27] мы сейчас еще одним способом продемонстрируем, что теория свободного калибровочного антисимметричного тензорного поля на классическом уровне эквивалентна теории однокомпонентного скалярного поля. Для этого перепишем действие (3), используя формализм производных первого порядка

$$\mathcal{A}_{\text{gauge}} = \int d^4x \left[\frac{1}{6} A_m \varepsilon^{mnpq} F_{npq} + \frac{1}{2} A_m A^m \right], \quad (21)$$

с помощью введения вспомогательного поля A_m . Уравнения движения для этого поля имеют вид

$$A^m = -\frac{1}{6} \varepsilon^{mnpq} F_{npq} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{mnpq} \partial_n A_{pq}. \quad (22)$$

Если это решение подставить в (21), то мы опять придем к действию (3) для калибровочного антисимметричного тензорного поля A_{mn} . С точностью до интеграла от полной производной действие (21) можно переписать в виде

$$\mathcal{A}_{\text{gauge}} = \int d^4x \left[\frac{1}{64} A_{mn} \varepsilon^{mnpq} F_{pq} + \frac{1}{2} A_m A^m \right], \quad (23)$$

где $F_{pq} = \partial_p A_q - \partial_q A_p$ — антисимметричный тензор напряженности для вспомогательного поля A_m . Варьируя теперь (23) по калибровочному

антисимметричному тензорному полю A_{mn} , мы приходим к следующим уравнениям движения:

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m = 0, \tag{24}$$

что, по существу, является условием связи на вспомогательное поле A_m . Решение уравнения (24) есть градиент от произвольного скалярного поля: $A_m = \partial_m \phi$. Подставляя это решение в (23), мы приходим к обычному действию для скалярного поля

$$A_{\text{scalar}} = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_m \phi) \partial^m \phi,$$

которое описывает частицу с одной степенью свободы и спиральностью ноль.

Действие для калибровочного антисимметричного тензорного поля A_{mn} , записанное в виде (23), допускает прямое обобщение на неабелев случай [28]:

$$A_G = \int d^4x \left[\frac{1}{4} A_{mn}^a \epsilon^{mnpq} F_{pq}^a + \frac{1}{2} (A_m^a)^2 \right], \tag{25}$$

где $F_{pq}^a = \partial_p A_q^a - \partial_q A_p^a + f_{bc}^a A_p^b A_q^c$, а индексы a, b и c параметризуют присоединенное представление некоторой компактной группы Ли G со структурными константами f_{bc}^a . Это действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\delta A_{mn}^a = \nabla_m \xi_n^a - \nabla_n \xi_m^a, \quad \delta A_m^a = 0, \tag{26}$$

где $\nabla_m \xi_n^a = \partial_m \xi_n^a + f_{bc}^a A_m^b \xi_n^c$ — ковариантная производная.

Чтобы перейти к действию второго порядка по производным для калибровочного антисимметричного тензорного поля A_{mn}^a , нам нужно исключить вспомогательное поле A_m^a из (25) с помощью уравнений движения

$$A_m^a = -\frac{1}{2} K_{mn}^{-1 a b} \epsilon^{npqr} \partial_p A_{qr}^b, \tag{27}$$

где $K_{mn}^{-1 a b}$ — матрица, обратная $K^{mna b}$:

$$K^{mna b} = g^{mn} \delta_b^a + \frac{1}{2} \epsilon^{mnpq} f_{bc}^a A_{pq}^c,$$

$$K^{mla c} K_{ln}^{-1 c b} = \delta_n^m \delta_b^a. \tag{28}$$

Полученное таким образом действие является неполиномиальным. С другой стороны, вариация (25) по калибровочному антисимметричному тензорному полю A_{mn}^a приводит к условию на вспомогательное поле A_m^a :

$$F_{mn}^a = \partial_m A_n^a - \partial_n A_m^a + f_{bc}^a A_m^b A_n^c = 0. \quad (29)$$

Его решение, как хорошо известно, можно выразить через матрицы g , действующие в присоединенном представлении группы Ли G :

$$A_m = g^{-1} \partial_m g, \quad (30)$$

где матрицы A_m принадлежат алгебре Ли этой группы: $A_m = i A_m^a T_a / 2$. Здесь T_a — линейно независимые матрицы в присоединенном представлении алгебры Ли, нормированные условием $\text{Sp } T_a T_b = 2\delta_{ab}$. Подставляя решение (30) в (25), мы приходим к действию для δ -модели:

$$A_\sigma = \int d^4x \text{Sp} (\partial_m g^{-1}) \partial^m g.$$

Таким образом, мы показали, что теория неабелева калибровочного антисимметричного тензорного поля на классическом уровне эквивалентна σ -модели.

2.4. Квантование антисимметричного тензорного поля. Прежде чем перейти к квантованию калибровочного антисимметричного тензорного поля, построим гамильтониан для действия (25) и выясним смысл введенных вспомогательных полей. Для этого исключим переменную A_0^a с помощью уравнений движения

$$A_0^a = \nabla_i B_i^a$$

и перепишем действие (25) в явно гамильтоновой форме:

$$A_G = \int d^4x \left(A_i^a \partial_0 B_i^a - \frac{1}{2} (A_i^a)^2 - \frac{1}{2} (\nabla_i B_i^a)^2 + A_{0i}^a T_i^a \right), \quad (31)$$

где $B_i^a = -1/2 \epsilon_{ijk} A_{jk}^a$, $T_i^a = 1/2 \epsilon_{ijk} F_{jk}^a$; $i, j, k = 1, 2, 3$. Отсюда видно, что A_i^a и B_i^a — канонические переменные, $H = 1/2 (A_i^a)^2 + 1/2 (\nabla_i B_i^a)^2$ — гамильтониан, A_{0i}^a — множители Лагранжа, и T_i^a — связи на канонические переменные.

Хотя классическая теория калибровочного антисимметричного тензорного поля эквивалентна теории скалярного поля, квантование калибровочных антисимметричных тензорных полей не является простой задачей. Дело в том, что действия (23) и (25) описывают системы с функционально зависимыми связями первого рода. Ввиду тождества Бианки

$$\nabla_i T_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \nabla_i F_{jk}^a \equiv 0,$$

из трех связей T_i^a только две независимы. С помощью этих связей мы можем исключить две из трех компонент канонически сопряженного импульса A_i^a , оставляя лишь одну независимую. Калибровочная инвариантность (26), в свою очередь, позволяет нам также избавиться от двух из трех компонент антисимметричного тензорного поля $A_{ij}^a = -\varepsilon_{ijk} B_k^a$.

Таким образом, при каноническом квантовании, как и следовало ожидать, мы остаемся лишь с одной парой независимых канонических переменных.

Каноническое квантование свободного (абелева) калибровочного антисимметричного тензорного поля было проведено в работе [29]. Попытки ковариантного квантования такого поля [11] привели к открытию нового явления: «духи для духов». Функциональная зависимость связей приводит к необходимости модифицировать процедуру квантования, развитую для полей Янга — Миллса [30]. Ввиду того, что действие для духов Фаддеева — Попова само оказывается калибровочно-инвариантным, необходимо еще раз к нему применить ковариантную процедуру квантования с введением дополнительных духовых полей. Калибровка $\nabla^{m A}_{mn}^a = 0$ требует введения антикоммутирующих векторных духовых полей \bar{C}_m^a и C_m^a с БРСТ-преобразованиями $\delta C_n^a = (\nabla^m A_{mn}^a) \Lambda$, где Λ — антикоммутирующая грассманова переменная, не зависящая от пространственно-временной точки. Откуда сразу видно, что на духовые векторные поля накладываются связи $\nabla^m C_m^a = 0$. Подробный анализ показывает: чтобы решить эту проблему, необходимо ввести еще два коммутирующих скалярных духовых поля $\bar{\phi}^a$ и ϕ^a , и «третий дух» Нильсена — Каллош [31].

Основным требованием при квантовании калибровочных полей является унитарность S -матрицы [32]. На примерах теорий для поля Янга — Миллса и поля тяготения Фейнман показал, что для восстановления унитарности необходимо введение фиктивных частиц с аномальной статистикой — суть духовых полей. Введенные выше духовые поля удовлетворяют формальному условию унитарности, позволяя в петлях распространяться лишь одной физической степени свободы. Действительно, антисимметричное тензорное поле второго ранга имеет 6 степеней свободы вне массовой поверхности, векторные духовые поля аномальной статистики имеют по 4 степени свободы каждое, и 3 степени свободы скалярных духовых полей составляют одну физическую степень свободы: $6 - 2 \times 4 + 3 = 1$. Один из методов квантования систем с зависимыми связями был предложен в работе [33], в которой было проведено каноническое квантование неабелева калибровочного

антисимметричного тензорного поля в унитарной калибровке и осуществлен корректный переход к ковариантным калибровкам. Таким образом, в работе [33] была получена явно унитарная S -матрица.

Другим методом квантования является метод квантования Бекки — Рюэ — Стора — Тютина (БРСТ) [34]. Свободное калибровочное антисимметричное тензорное поле было проквантовано этим методом в работах [35]. Общий метод гамильтонова БРСТ-квантования систем с зависимыми связями первого рода был развит Баталиным и Фрадковым [36]. Однако доказательство унитарности S -матрицы в физическом подпространстве является сложной задачей, не решенной в общем случае. Например, метод лагранжева БРСТ-квантования неабелева калибровочного антисимметричного тензорного поля, предложенный в работе [37], приводит к неунитарной S -матрице в физическом подпространстве. В работах [38] метод гамильтонова БРСТ-квантования был применен к теории взаимодействующего (неабелева) калибровочного антисимметричного тензорного поля и показана эквивалентность эффективных лагранжианов, полученных этим методом и методом работы [33]. Причем, как мы уже отметили, последний приводит к унитарной S -матрице.

2.5. Антисимметричные тензорные поля в теориях гравитации. Наиболее известный пример, где мы встречаемся с антисимметричными тензорными полями, — это квантовая гравитация. Локализация группы Лоренца приводит к необходимости вводить духовые антисимметричные тензорные поля C^{ab} [39].

Впервые взаимодействие калибровочных антисимметричных тензорных частиц с гравитационным полем было рассмотрено в [40]. В этой работе изучались свойства перенормируемости такой модели и эквивалентность на квантовом уровне теории калибровочных антисимметричных тензорных полей, взаимодействующих с гравитационным полем, теории взаимодействующего с гравитацией скалярного поля. Она явилась продолжением ранних работ по изучению свойств перенормируемости эйнштейновской гравитации, взаимодействующей со скалярными полями [41], фотонами [42], полями Янга — Миллса [43], спинорами без кручения [44], спинорами с кручением [45] и квантовой электродинамикой [46]. Используя метод фонового поля, авторы на уровне однопетлевых вычислений получили для внешнего гравитационного поля, взаимодействующего с калибровочным антисимметричным тензорным полем, те же контрчлены, что и в случае скалярного поля. Существенным моментом в этих вычислениях был учет всех введенных выше духовых полей во внутренних петлях. Однако для квантового гравитационного поля эквивалентность была показана лишь с использованием уравнений движения.

Еще более интересным свойством моделей теории поля, содержащих поля в нестандартных представлениях группы Лоренца, является их различный вклад в аномалии [47]. Так, например, полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга [48], которое не имеет ни одной степени свободы на массовой поверхности, дает ненулевой вклад в аномалию тензора энергии-импульса [47—49]. Аномальный вклад в след эффективного тензора энергии-импульса в теориях гравитации в однопетлевом приближении пропорционален на массовой поверхности $\epsilon^{mnab} R_{abcd} \epsilon^{cdpq} R_{mnpq}$ [50]. Интеграл от этой величины, взятый по всему пространству, дает топологический инвариант — эйлерову характеристику χ :

$$\chi \equiv \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} (R_{mnab} R^{mnab} - 4R_{mn} R^{mn} + R^2).$$

Этот интеграл отличен от нуля в пространствах с нетривиальной топологией. Численный коэффициент A этой аномалии был вычислен для полей, преобразующихся по стандартным представлениям группы Лоренца, после фиксации калибровки и вычитания вклада духов [51]. Была получена простая формула для вычисления вклада в этот коэффициент частицы со спином, преобразующейся по представлению группы Лоренца $(m/2, n/2)$ [52]:

$$360A = (-1)^{2s} [8 - 150s^2 + 90s^2 + 30t^2 (1 - t^2 + 6s^2)], \quad (32)$$

где $s = (m + n)/2$ — спин поля, а $t = (m - n)/2$. Для скалярной частицы $A = 1/90$. Заметим, что любая частица со спином от нуля до двух дает ненулевой вклад в A .

Чтобы добиться сокращения этой аномалии, необходимо выбрать такой мультиплет полей, который бы давал суммарный нулевой вклад в A . Например, можно выбрать мультиплет полей расширенных теорий супергравитации с произвольным N . Однако стандартный полевой набор в этих теориях приводит к аномалии, за исключением случая $N = 3$. Действительно, вычислим этот коэффициент для максимально расширенной теории супергравитации с $N = 8$. Ее стандартный полевой состав есть 1 гравитон, 8 гравитино, 28 векторных частиц, 56 спиноров и 70 скаляров. Непосредственное использование (32) дает $A = [848 + 8 \times (-233) + 28 \times (-52) + 7 \times 56 + 4 \times 70]/360 = -5$. Решение этой проблемы возникло совсем неожиданно. Креммер, Джулиа и Шерк, используя элегантный прием размерной редукции из большего числа измерений в меньшее [53], смогли построить $N = 8$ супергравитацию в 4 измерениях [54].

В работе [53] было показано, что безмассовые состояния открытой струны Неве — Шварца — Рамона [55] дают супермультиплет Янга — Миллса в пространстве 10 измерений, а безмассовые состояния закрытой струны приводят к мультиплету супергравитации с $N = 1$ в $d = 10$. Но Наам

[56] показал, что в $d = 10$ может существовать и $N = 2$ супергравитация, а максимальным числом измерений, где возможно существование теории со спином 2, является $d = 11$. Креммер, Джулия и Шерк нашли потерянные безмассовые состояния закрытой струны и построили супергравитацию с $N = 1$ в $d = 11$. Ее суперполевым состав очень прост: тетрада V_M^A , майорановский спинор со спином $3/2$ Ψ_M и калибровочное полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга A_{MNP} , где индексы, обозначенные заглавными буквами, принимают значения от 0 до 10. Редукция в четыре измерения для тетрады и майорановского спинора не приводит к появлению нестандартных полей. Редукция же калибровочного полностью антисимметричного тензорного поля третьего ранга дает, кроме известных полей, 7 калибровочных антисимметричных тензорных полей второго ранга A_{mna} (здесь $a = 1, \dots, 7$ — индексы компактифицированного пространства), которые по числу физических компонент эквивалентны 7 скалярам ϕ_α , а также одно полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга A_{mnp} , которое является вспомогательным и не имеет физических степеней свободы.

Построенная таким образом максимально расширенная супергравитация с $N = 8$ содержит вместо 70 скаляров только 63 истинно скалярные частицы, остальные 7 физических степеней свободы заменяются физическими степенями свободы 7 калибровочных антисимметричных тензорных полей второго ранга. Этот набор с необходимостью включает также и новое полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга. В работе [47] были вычислены вклады в аномалию тензора энергии-импульса для калибровочных антисимметричных полей второго ранга $A = 1 + 1/90$ и для полностью антисимметричного тензорного поля третьего ранга $A = -2$. Теперь, если пересчитать вклад в аномалию тензора энергии-импульса от нового супермультиплета, мы получим тождественный ноль.

Это свойство нестандартных полей было использовано также, чтобы построить аномально-свободные суперполевые модели гравитации с $N \geq 3$. В работе [57] было показано, что такие теории супергравитации могут быть построены из трех базисных мультиплетов с $N = 3$, один из которых содержит калибровочное антисимметричное тензорное поле.

Наибольший резонанс получила работа Грина и Шварца [58], где авторы продемонстрировали сокращение аномалий в суперсимметричной теории Янга — Миллса в $d = 10$, взаимодействующей с $N = 1$, $d = 10$ супергравитацией для выделенных калибровочных групп $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$. Ключевая роль в этих сокращениях принадлежит калибровочным антисимметричным тензорным полям. Эта работа показала возможность

построения непротиворечивой квантовой теории суперструн, базирующейся на этих выделенных калибровочных группах.

В последнее время большое внимание привлекают вопросы, связанные с использованием низкоэнергетического эффективного действия струны в космологии. Это действие для закрытой струны содержит три дальнедействующих поля: дилатон ϕ , калибровочное антисимметричное поле A_{mn} и гравитон, которые являются безмассовыми возбуждениями струны. Космологические решения с дилатоном и нетривиальным тензором напряженности для калибровочного антисимметричного тензорного поля были получены Цейтлиным [59]. В работе [60] было дано общее аналитическое решение для эволюции в ранней, но не настолько, зре струны, где только безмассовые бозонные поля доминируют в ее динамике. Авторы показали, что присутствие калибровочного антисимметричного тензорного поля очень сильно влияет на эволюцию дилатона в четырех измерениях и может также приводить к анизотропному расширению в моделях с большим числом измерений. Предпочтительным здесь оказывается расширение только трехмерного пространства.

Если говорить о низкоэнергетической феноменологии калибровочного антисимметричного тензорного поля, то необходимо указать механизм, с помощью которого это поле становится массивным. Действительно, такой механизм был найден в калибровочных суперсимметричных теориях гравитации с ненулевым топологическим массовым параметром h [61]. В таких теориях калибровочное антисимметричное тензорное поле A_{mn} из гравитационного супермультиплетта всегда входит в комбинации $A_{mn} + hF_{mn}$ с тензором напряженности F_{mn} для калибровочного векторного поля A_m из векторного супермультиплетта. В результате калибровочных преобразований (15) для антисимметричного тензорного поля с $\lambda_m = -h^{-1}A_m$ оно поглощает векторное поле и становится массивным. Такой механизм приобретения массы во многом аналогичен механизму Хиггса. Подобное явление было обнаружено и в других обобщенных моделях калибровочных супергравитаций с ненулевым массовым параметром m [62].

3. МАТЕРИАЛЬНЫЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Здесь мы будем рассматривать антисимметричное тензорное поле не как калибровочное поле с преобразованиями (15), а как поле материи. Мы также откажемся от условия связи (10). Это позволит нам ввести самодействие для абелева антисимметричного тензорного поля и взаимодействие с

антисимметричным тензорным током J_{mn} , свободным от условия $\partial^m J_{mn} = 0$. Отказавшись от калибровочной симметрии, мы сможем записать конформно-инвариантное действие (4) для антисимметричного тензорного поля. Функции Грина для таких полей однозначно определены в рамках конформно-инвариантной теории поля [13]. Впервые такие поля использовались как вспомогательные в $N = 2$ конформной супергравитации [14,15] для замыкания суперконформных преобразований для мультиплетта полей вне массовой поверхности. Материальные антисимметричные тензорные поля могут быть введены в стандартную модель электрослабых взаимодействий как физические поля аналогично хиггсовскому дублету. Последние эксперименты по полупетонным трехчастичным распадам мезонов [19,20] подтверждают эту возможность.

3.1. Безмассовые частицы произвольного спина. Простейшими спинорными представлениями группы Лоренца являются непунктирный ψ_α и сопряженный ему пунктирный $\psi_{\dot{\alpha}}$ фундаментальные вейлевские спиноры. Матрицы Паули $(\hat{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\beta}$ связывают спинорные и лоренцевы индексы. Простейшее действие для свободной безмассовой спинорной частицы со спином можно найти в виде инвариантной билинейной комбинации фундаментальных спиноров и 4-импульса p_m :

$$A_{1/2} = \int d^4p \psi_{\dot{\alpha}} \hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}, \quad (33)$$

где $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} = p^m (\hat{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\beta}$. Для стандартного представления матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

уравнения движения принимают вид [63]:

$$\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} \psi_{\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} p_+ & q_- \\ q_+ & p_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (34)$$

Здесь мы ввели продольные $p_{\pm} = p_0 \pm p_3$ и поперечные $q_{\pm} = p_1 \pm ip_2$ компоненты импульса по отношению к третьей оси, проекция спина на которую имеет определенные значения $\pm 1/2$. Оператор \hat{p} имеет два собственных значения $\lambda_+ = p_0 - |\mathbf{p}|$ и $\lambda_- = p_0 + |\mathbf{p}|$, отвечающих решениям с положительной $p_0 = |\mathbf{p}|$ и отрицательной $p_0 = -|\mathbf{p}|$ частотами соответственно.

Эти две ветви решений описывают безмассовую частицу с левовинтовой спиральностью и античастицу с правовинтовой спиральностью. Такие частицы существуют в природе и называются нейтрино. Уравнение движения для сопряженного спинора имеет вид

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}} \equiv (C^{-1})^{\alpha\dot{\beta}} p_{\beta\dot{\alpha}} C^{\dot{\alpha}\beta}\psi_{\dot{\beta}} = 0.$$

Матрицы зарядового сопряжения $C^{\alpha\dot{\beta}}$ и $C^{\dot{\alpha}\beta}$ служат для поднятия спинорных индексов у оператора $p_{\alpha\dot{\beta}} = p_m (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}$.

Чтобы обобщить полученные выше уравнения на случай высших спинов, рассмотрим произвольные представления группы Лоренца $(m/2, n/2)$ и $(n/2, m/2)$. Спинор $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n}$ и ему сопряженный $\psi_{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m \beta_1 \dots \beta_n}$, симметричные по обоим типам индексов, описывают частицу и античастицу со спином $j = (m+n)/2$. По аналогии с предыдущим мы можем построить простейшее инвариантное действие, если каждому непунктирному (пунктирному) индексу первого спинора с помощью оператора $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}$ ($p^{\alpha\dot{\beta}}$) поставим в соответствие пунктирный (непунктирный) индекс сопряженного ему спинора:

$$A_j^{(m/2, n/2)} = \int d^4 p \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n} \hat{p}^{\dot{\alpha}_1 \alpha_1} \dots \hat{p}^{\dot{\alpha}_m \alpha_m} p^{\beta_1 \dot{\beta}_1} \dots p^{\beta_n \dot{\beta}_n} \psi_{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m \beta_1 \dots \beta_n} \quad (35)$$

Частица со спином j имеет $2j+1 = m+n+1$ компонент. Однако спинор $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n}$ имеет $(m+1) \times (n+1)$ независимых компонент. Только в случае, когда он содержит индексы лишь одного типа (m или n равно нулю), число его компонент совпадает с числом степеней свободы частицы со спином j . Поэтому в этом случае дополнительное условие связи, типа условия Лоренца, на компоненты спинора не необходимо. Используя именно это наиболее экономное описание частиц со спином j , Вайнберг, исходя лишь из самых общих принципов квантовой теории поля — лоренц-инвариантности и причинности, нашел функции Грина для $2j+1$ компонентных функций [64]. Если от наших спинорных обозначений перейти к $2j+1$ компонентным функциям, кинетический член в (35) в точности воспроизведет операторную структуру функций Грина, полученных Вайнбергом.

В том случае, когда спинор содержит индексы обоих типов, необходимо наложить дополнительное условие поперечности

$$p^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n} = 0, \quad (36)$$

которое приведет к нужному редуцированию степеней свободы: $(m+1) \times (n+1) - m \times n = m+n+1$. Варьируя (35), получим уравнения движения для спинора $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n}$:

$$\hat{p}^{\dot{\alpha}_1 \alpha_1} \dots \hat{p}^{\dot{\alpha}_m \alpha_m} p^{\beta_1 \dot{\beta}_1} \dots p^{\beta_n \dot{\beta}_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n} = 0. \quad (37)$$

Для частиц со спином больше единицы уравнения движения содержат производные выше второго порядка, и мы сталкиваемся с проблемой унитарности, которая в настоящее время еще не решена. Поэтому мы ограничимся рассмотрением единичного спина и изучим уравнения движения, которые возникают в этом случае.

3.2. Безмассовые частицы единичного спина. Рассмотрим сначала обычное представление $(1/2, 1/2)$ для частицы со спином единица. Перепишем действие

$$\mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} = \int d^4p \Psi_{\alpha\dot{\beta}} \hat{p}^{\alpha\alpha} p^{\beta\dot{\beta}} \Psi_{\alpha\dot{\beta}}, \quad (38)$$

следующее из (35), в более привычном для нас виде, вводя вектор-потенциал A_m : $\Psi_{\alpha\dot{\beta}} = 1/2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} A_m$. Суммирование по спинорным индексам приводит к следу от четырех σ -матриц: $\text{Sp} \hat{p} \sigma_n \hat{p} \sigma_m = 4p_m p_n - 2g_{mn} p^2$. Поэтому (38) принимает вид

$$\mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} = -\frac{1}{2} \int d^4p A_m^*(p) p^2 \bar{g}^{mn}(p) A_n(p), \quad (39)$$

где $\bar{g}_{mn}(p) = g_{mn} - 2p_m p_n / p^2$. Заметим, что оператор $\bar{g}_{mn}(p) = P_{mn}^1 - P_{mn}^0$ представим в виде разности двух проекционных операторов спина единица $P_{mn}^1 = g_{mn} - p_m p_n / p^2$ и спина ноль $P_{mn}^0 = p_m p_n / p^2$. Таким образом, вклад в действие (39) дают все компоненты вектор-потенциала A_m .

С помощью преобразования Фурье

$$A_m(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x A_m(x) e^{-ipx}$$

запишем действие (39) в x -пространстве в виде

$$\mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} + \frac{1}{2} (\partial_m A^m)^2 \right]. \quad (40)$$

Здесь F_{mn} — калибровочно-инвариантный тензор напряженности поля A_m . Мы видим, что действие (40) не является калибровочно-инвариантным и соответствует действию для электромагнитного поля в определенной калибровке. Если наложить условие Лоренца $\partial_m A^m = 0$, то мы придем к обычному описанию безмассовой поперечной частицы — фотона.

Давайте теперь на время забудем об этом условии и построим для действия (40) гамильтониан без использования каких бы то ни было связей. Нам будут необходимы решения уравнений движения, следующие из (39) или (40). Для этого удобно работать в p -пространстве, поэтому будем использовать действие (39). Введем систему отсчета, связанную с вектором \mathbf{p} , и пред-

ставим $A_m(p)$ в виде суммы поперечных, продольной и временной составляющих:

$$A_m(p) = e_m^1 a_1(k) + e_m^2 a_2(k) + e_m^3 a_3(k) + e_m^0 a_0(k). \quad (41)$$

Здесь e^1 и e^2 — единичные пространственные векторы поляризации, ортогональные друг другу и орту e^3 вектора импульса:

$$\begin{aligned} (e^i \cdot e^j) &= \delta_{ij}, \quad [e^i \times e^j] = \varepsilon_{ijk} e^k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \\ e^3 &= \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad e^1(-\mathbf{p}) = -e^2(\mathbf{p}), \quad e_0^i = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

а e^0 — единичный временной вектор: $e_m^0 = \delta_{m0}$. Тогда действие (39) примет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} &= \frac{1}{2} \int d^4 p \{ a_1^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_1(p) + a_2^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_2(p) + \\ &+ a_0^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) a_0(p) + a_3^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) a_3(p) - \\ &- 2p_0 |\mathbf{p}| [a_0^*(p) a_3(p) + a_3^*(p) a_0(p)] \}. \end{aligned}$$

Это действие можно диагонализировать, если ввести следующие линейные комбинации временной и продольной компонент: $a_{\pm} = [a_0(p) \pm a_3(p)]/\sqrt{2}$. В этих обозначениях имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} &= \frac{1}{2} \int d^4 p \{ a_1^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_1(p) + a_2^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_2(p) + \\ &+ a_+^*(p)(p_0 - |\mathbf{p}|)^2 a_+(p) + a_-^*(p)(p_0 + |\mathbf{p}|)^2 a_-(p) \}. \end{aligned} \quad (43)$$

Сейчас мы легко можем записать уравнения движения, варьируя действие (43):

$$\begin{aligned} (p_0 - |\mathbf{p}|)(p_0 + |\mathbf{p}|) a_1(p) &= 0, \quad (p_0 + |\mathbf{p}|)(p_0 - |\mathbf{p}|) a_2(p) = 0, \\ (p_0 - |\mathbf{p}|)^2 a_+(p) &= 0, \quad (p_0 + |\mathbf{p}|)^2 a_-(p) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Решения уравнений (44) для поперечных компонент, с учетом действительности поля $A_m(x)$,

$$\begin{aligned} a_1(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) a_1(\mathbf{p}) - \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) a_2^*(-\mathbf{p}), \\ a_2(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) a_2(\mathbf{p}) - \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) a_1^*(-\mathbf{p}) \end{aligned}$$

содержат как положительно-частотные $a_{1,2}^*(-\mathbf{p})$, так и отрицательно-частотные $a_{1,2}(\mathbf{p})$ части. А решения для введенных линейных комбинаций временной и продольной компонент найдем в виде

$$a_+(p_0, \mathbf{p}) = \delta(p_0 - |\mathbf{p}|)a_s(\mathbf{p}) + \delta'(p_0 - |\mathbf{p}|)a'_s(\mathbf{p}),$$

$$a_-(p_0, \mathbf{p}) = \delta(p_0 + |\mathbf{p}|)a_s^*(-\mathbf{p}) - \delta'(p_0 + |\mathbf{p}|)a'_s(-\mathbf{p}).$$

Эти решения содержат, во-первых, лишь одночастотные части для каждой из компонент a_{\pm} и, во-вторых, производные от δ -функций, которые приводят к линейно растущим по времени решениям. Если мы ограничим свое рассмотрение классом функций, убывающих на бесконечности, то мы должны потребовать отсутствия таких решений, т.е.

$$a'_s(\mathbf{p}) = 0. \quad (45)$$

Это условие в точности совпадает с условием Лоренца. В этом случае мы получаем решения для $A_{\pm}(x)$ в виде одночастотных плоских волн.

Теперь мы можем записать выражение для гамильтониана и подставить в него полученные решения. Непосредственные вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_0 \mathbf{A})^2 + (\partial_i \mathbf{A})^2 + (\partial_0 A_0)^2 - (\partial_i A_0)^2 + 2(\partial_i A_i)^2] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^3p p^2 [a_1^*(\mathbf{p})a_1(\mathbf{p}) + a_2^*(\mathbf{p})a_2(\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (46)$$

Отсюда видно, что, во-первых, гамильтониан положительно определен, и, во-вторых, только поперечные компоненты дают вклад в энергию. Продольные и временные компоненты являются как бы нефизическими в этой калибровке. Если вычислить другие динамические инварианты, такие как полный импульс и спин системы, то мы опять обнаружим сокращение нефизических степеней свободы. Конечно, мы не открыли здесь ничего нового, кроме как еще раз подтвердили поперечность фотона. Однако этот пример нам поможет при анализе физических степеней свободы для материального антисимметричного тензорного поля, к чему мы сейчас и переходим.

Действие для полей, преобразующихся по представлениям группы Лоренца (1,0) и (0,1), следующее из (35), имеет вид

$$A_1^{(1,0)} = \int d^4p \Psi_{\alpha\beta} \hat{p}^{\alpha\alpha} \hat{p}^{\beta\beta} \Psi_{\alpha\beta}. \quad (47)$$

Как и в случае электромагнитного поля, перейдем от спинорных к лоренцевым индексам. Симметричный спинор $\Psi_{\alpha\beta}$ в (47) может быть выражен через антисимметричное тензорное поле второго ранга T_{mn} :

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{i}{8} \varepsilon^{abmn} (\sigma_a \hat{\sigma}_b C)_{\alpha\beta} T_{mn} \quad (48)$$

(см. уравнения (2)). Выполняя суммирование по спинорным индексам и вычисляя след от шести σ -матриц, мы приходим к действию для материального антисимметричного тензорного поля:

$$A_1^{(1,0)} = \frac{1}{4} \int d^4 p T_{ab}^*(p) p^2 \Pi^{abmn}(p) T_{mn}(p), \quad (49)$$

где

$$\Pi_{abmn}(p) = \frac{1}{2} [g^{am}(p) \bar{g}^{bn}(p) - \bar{g}^{an}(p) g^{bm}(p)]. \quad (50)$$

Как и в случае электромагнитного поля, мы можем представить оператор кинетического члена $\Pi(p) = P^+(p) - P^-(p)$ в виде разности проекционных операторов единичного спина (11). Из этого представления видно, что вклад в действие для материального антисимметричного тензорного поля дают все шесть его компонент — вектор и псевдовектор.

Действие для материального антисимметричного тензорного поля в x -пространстве (4) оказывается конформно-инвариантным. Поэтому так же, как и в случае калибровочной симметрии, здесь важен факт изначальной безмассовости этого поля. Покажем, что физическими компонентами материального антисимметричного тензорного поля являются продольные компоненты вектора $A_i = T_{0i}$ и псевдовектора $B_i = 1/2 \epsilon_{ijk} T_{jk}$ [65]. Для этого вычислим полный гамильтониан системы с учетом уравнений движения.

Разложим вектор $\mathbf{A}(p) = e^i a_i(p)$ и псевдовектор $\mathbf{B}(p) = e^i b_i(p)$ по полной системе ортонормированных векторов e^i (42). Тогда действие (49) можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_1^{(1,0)} = \int d^4 p \{ & \sum_{\lambda=1}^2 [a_\lambda^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) a_\lambda(p) + b_\lambda^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) b_\lambda(p)] + \\ & + 2p_0 |\mathbf{p}| [a_1^*(p) b_2(p) + b_2^*(p) a_1(p) - a_2^*(p) b_1(p) - b_1^*(p) a_2(p)] + \\ & + a_3^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_3(p) + b_3^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) b_3(p) \}. \end{aligned} \quad (51)$$

Линейная подстановка

$$\begin{aligned} a_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(p) + d_2(p)], & a_2(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_2(p) + d_1(p)], & a_3(p) &= c_3(p), \\ b_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_1(p) - c_2(p)], & b_2(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_2(p) - c_1(p)], & b_3(p) &= d_3(p) \end{aligned}$$

диагонализует действие (51):

$$\begin{aligned} A_1^{(1,0)} = \int d^4 p [& c_1^*(p)(p_0 - |\mathbf{p}|)^2 c_1(p) + c_2^*(p)(p_0 + |\mathbf{p}|)^2 c_2(p) + \\ & + c_3^*(p)(p_0 - |\mathbf{p}|)(p_0 + |\mathbf{p}|) c_3(p) + (c \rightarrow d)]. \end{aligned} \quad (52)$$

Принцип минимальности действия приводит к следующим уравнениям движения для c -компонент:

$$\begin{aligned} (p_0 - |\mathbf{p}|)^2 c_1(p_0, \mathbf{p}) = 0, \quad (p_0 + |\mathbf{p}|)^2 c_2(p_0, \mathbf{p}) = 0, \\ (p_0 - |\mathbf{p}|)(p_0 + |\mathbf{p}|) c_3(p_0, \mathbf{p}) = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Точно такие же уравнения движения справедливы и для d -компонент. Решения уравнений (53), с учетом действительности поля T_{mn} , можно найти в виде

$$\begin{aligned} c_1(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) c_T(\mathbf{p}) + \delta'(p_0 - |\mathbf{p}|) c'_T(\mathbf{p}), \\ c_2(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) c_T^*(-\mathbf{p}) + \delta'(p_0 + |\mathbf{p}|) c_T'^*(-\mathbf{p}), \\ c_3(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) c_L(\mathbf{p}) - \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) c_L^*(-\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (54)$$

Заметим здесь, что только продольные компоненты содержат положительно-частотную и отрицательно-частотную части, поперечные компоненты c_1 и d_1 обладают лишь решениями с положительной частотой $p_0 = |\mathbf{p}|$, а c_2 и d_2 — с отрицательной частотой $p_0 = -|\mathbf{p}|$. Кроме того, решения для поперечных компонент содержат производные от δ -функций, что приводит к линейно растущим по времени решениям. Поэтому, если мы хотим ограничиться решениями только в виде плоских волн, необходимо потребовать, чтобы компоненты c'_T и d'_T равнялись нулю:

$$c'_T(\mathbf{p}) = 0; \quad d'_T(\mathbf{p}) = 0. \quad (55)$$

Подставляя решения (54) в гамильтониан

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int d^3x [\partial_0 \mathbf{A}]^2 - (\partial_i \mathbf{A})^2 + 2(\partial_i A_i)^2 + (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^3p \mathbf{p}^2 [a_3^*(\mathbf{p}) a_3(\mathbf{p}) + b_3^*(\mathbf{p}) b_3(\mathbf{p})], \end{aligned} \quad (56)$$

мы найдем, что он положительно определен и содержит вклад только продольных компонент векторного и псевдовекторного полей. Аналогично можно показать, что вклад поперечных компонент также сокращается при вычислении других динамических инвариантов, и полный спин равен нулю. Таким образом, материальное антисимметричное тензорное поле описывает скалярную и псевдоскалярную степени свободы.

Материальное антисимметричное тензорное поле описывает на одну степень свободы больше, чем калибровочное антисимметричное тензорное поле. Это следует из того, что условие (10) исключает две поперечные и одну продольную компоненты векторного поля A_i , в то время как условия (55) исключают лишь две поперечные компоненты. Чтобы записать (55) в

ковариантном виде, мы должны ввести одно вспомогательное скалярное поле φ и обобщить условие (10):

$$\partial^n T_{mn} = \partial_n \varphi. \quad (57)$$

Ввиду произвольности поля φ , условие (57) приводит к двум независимым условиям (55). Поэтому при ковариантном квантовании материального антисимметричного тензорного поля необходимо введение вспомогательного скалярного поля и связи (57). Обратим внимание также на то, что условия (55) убирают лишь две из четырех поперечных компонент вектора и псевдовектора; оставшиеся две компоненты удачно сокращаются при вычислении динамических инвариантов. Это находится в полной аналогии со случаем электромагнитного поля, когда одно условие Лоренца, или условие (45), приводит к исключению из динамических инвариантов вклада также еще одной скалярной степени свободы.

Материальное антисимметричное тензорное поле, как и электромагнитное поле, обладает нефизическими степенями свободы, которые на массовой поверхности никак себя не проявляют. Однако из опыта работы с калибровочными полями мы знаем, что нефизические степени свободы могут давать вклад в замкнутые петли, приводя к нарушению унитарности [32]. Даже в случае абелева электромагнитного поля, взаимодействующего с гравитацией, необходимо введение духовых полей [66], которые бы компенсировали этот вклад. Поэтому и в нашем случае, видимо, необходимо введение соответствующих духовых полей, т.к. вклад в действие дают все компоненты антисимметричного тензорного поля. Аналогично калибровочному антисимметричному тензорному полю здесь также возникает пирамида компенсирующих духовых полей. Наивный подсчет степеней свободы для необходимого выполнения условия унитарности ведет к следующему набору духовых полей: паре антикоммутирующих векторных полей C_m, \bar{C}_m и двум парам коммутирующих скалярных полей D, \bar{D} и E, \bar{E} [65]. Однако последовательное квантование взаимодействующего материального антисимметричного тензорного поля пока отсутствует. Основная трудность заключается в отсутствии (или незнании) принципа симметрии, типа калибровочной инвариантности, который бы позволил нам провести последовательное квантование [67]. Тем не менее это не мешает нам вычислять процессы в низших порядках теории возмущений: на древесном уровне и с однопетлевыми квантовыми поправками с внешними и незамкнутыми линиями, соответствующими материальным антисимметричным тензорным полям.

3.3. Взаимодействия антисимметричного тензорного поля. Между компонентами антисимметричного тензорного поля второго ранга T_{mn} и симметричными спинорами второго ранга $\Psi_{\alpha\beta}, \Psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ существует взаимно

однозначное соответствие (2), (48). Запишем простейшее лоренц-инвариантное эрмитово затравочное взаимодействие этого поля с фундаментальными вейлевскими спинорами, используя спинорные обозначения:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = t [\psi_{\alpha} \psi^{\alpha\beta} \psi_{\beta} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \psi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}]. \quad (58)$$

В силу требования эрмитовости, взаимодействие (58) содержит вейлевские спиноры ψ_{α} и сопряженные им $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$. Определим биспинор Дирака Ψ и γ -матрицы в спиральном представлении как

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ iC^{\dot{\alpha}\beta} \bar{\psi}_{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}, \quad \gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \hat{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{mn} = \frac{i}{2} [\gamma^m, \gamma^n]. \quad (59)$$

Используя эти определения и связь (2), (48), перепишем (58) в более привычном виде:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{t}{4\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_R \sigma^{mn} T_{mn}^- \Psi_L + \bar{\Psi}_L \sigma^{mn} T_{mn}^+ \Psi_R) = \frac{t}{4} \bar{\Psi} \sigma^{mn} \Psi T_{mn}. \quad (60)$$

При получении последнего равенства, мы воспользовались тождеством

$$\frac{i}{2} \varepsilon^{mnab} \sigma_{ab} = \gamma^5 \sigma^{mn}. \quad (61)$$

Теперь мы можем легко подсчитать однопетлевую квантовую поправку (рис.1,а) к действию материального антисимметричного тензорного поля (4), (49), считая дираковские частицы безмассовыми. Расходящаяся часть поляризованного оператора

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{mnab}(p) &= i \left(\frac{t}{4} \right)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Sp} [\sigma_{mn} (\not{p} - \not{l})^{-1} \sigma_{ab} \not{l}^{-1}] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{12\varepsilon} \left(\frac{t}{4\pi} \right)^2 \Pi_{mnab}(p) \end{aligned} \quad (62)$$

определяет перенормировку классического действия (4), (49) и в точности воспроизводит структуру его кинетического члена (50), что является признаком перенормируемости. Свойство квантовых поправок воспроизводить структуру классического действия было положено в основу динамической теории составных частиц [68]. Таким образом, это является еще одним способом получения классического свободного действия для антисимметричного тензорного поля.

Затравочное взаимодействие (58), (60) на квантовом уровне порождает также самодействие материального антисимметричного тензорного поля (рис.2,б):

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{48\varepsilon} \frac{t^4}{16\pi^2} \left[\frac{1}{4} (T_{mn} T^{mn})^2 - T_{mn} T^{na} T_{ab} T^{bm} \right]. \quad (63)$$

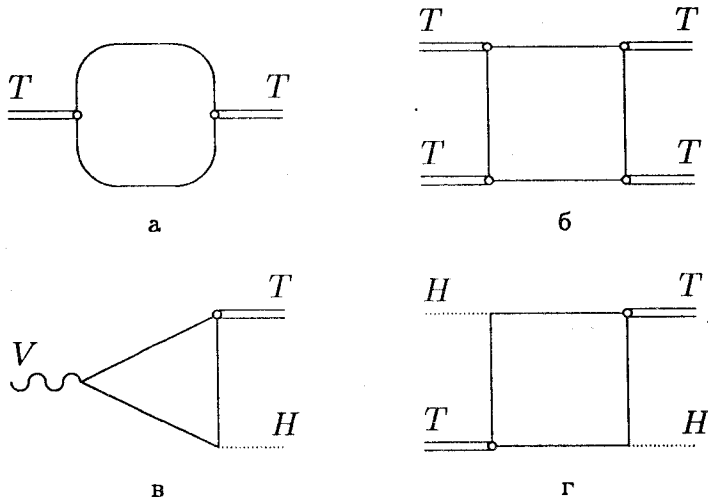


Рис.1

Это самодействие проявляет исключительно важное свойство симметрии к дуальным преобразованиям:

$$\begin{aligned} T_{mn} &\rightarrow T_{mn} \cos(h\lambda) + i\tilde{T}_{mn} \sin(h\lambda); \\ \tilde{T}_{mn} &\rightarrow iT_{mn} \sin(h\lambda) + \tilde{T}_{mn} \cos(h\lambda). \end{aligned} \quad (64)$$

И наоборот, требование симметрии по отношению к преобразованиям (64) однозначно приводит к самодействию (63). Свободное действие (4) также оказывается инвариантным по отношению к глобальным преобразованиям (64), когда параметр λ не зависит от точки пространства-времени. Это легко можно увидеть, переписав действие (4) через самодуальный T_{mn}^+ и самоантидуальный T_{mn}^- тензоры:

$$\mathcal{A}_{\text{conformal}} = - \int d^4x (\partial^m T_{mk}^+) \partial^n T_{nk}^-, \quad (65)$$

для которых преобразования (64) приобретают мультипликативный вид

$$T_{mn}^\pm \rightarrow \exp(\pm i h \lambda) T_{mn}^\pm. \quad (66)$$

Локализация преобразований (66) приводит к необходимости введения калибровочного псевдоскалярного поля A_m и замены обычных производных $\partial^n T_{mn}^\pm$ ковариантными производными $D^m T_{mn}^\pm = (\partial^m + i h A^m) T_{mn}^\pm$, которые

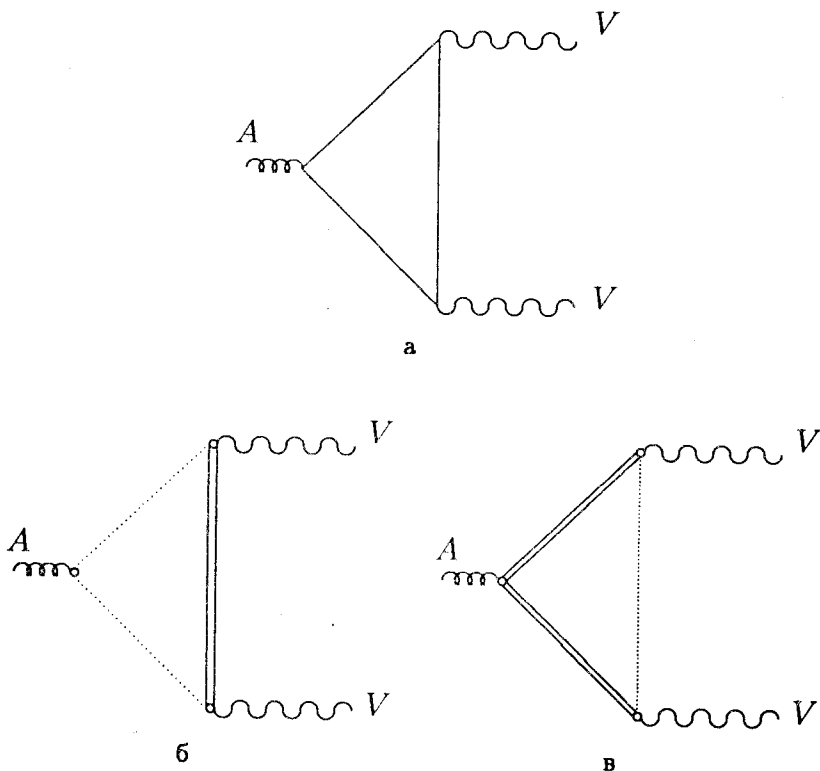


Рис.2

обеспечивают инвариантность (65) по отношению к преобразованиям (66) с произвольными функциями $\lambda(x)$. Калибровочное поле A_m преобразуется как обычно: $A_m \rightarrow A_m + \partial_m \lambda$. Инвариантность затравочного взаимодействия (60) по отношению к преобразованиям (64) требует следующего закона преобразования для дираковского спинора $\Psi \rightarrow \exp(-i/2\hbar\lambda)\Psi$ и соответствующих ковариантных производных в кинетическом члене: $D_m \Psi = (\partial_m + i/2\hbar A_m)\Psi$. Обратим внимание, что аксиальный заряд дираковского спинора вдвое меньше, чем антисимметричного тензорного поля. Подробный анализ перенормируемости введенных выше взаимодействий на однопетлевом уровне был выполнен в работе [18].

Для физических приложений к перечисленным выше полям необходимо добавить, по крайней мере, одно векторное поле V_m (фотон) и скаляр-

ное хиггсовское поле H^\pm . Векторное поле, как обычно, вводится через ковариантную производную $(\partial_m - ieV_m)\Psi$. Одновременное введение векторных и псевдовекторных полей, как хорошо известно, приводит к аксиальным аномалиям Адлера — Белла — Джекива [69], которые могут разрушить перенормируемость модели. Аксиальные аномалии были открыты при вычислении треугольной фермионной петли с двумя векторными и с одной аксиальной вершинами (рис.2,а). Наличие таких квантовых поправок не позволяет одновременно обеспечить сохранение векторного $\partial_m V^m = 0$ и аксиального токов:

$$\partial_m A^m = \frac{\hbar}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \epsilon^{mnab} F_{mn} F_{ab} \neq 0.$$

Здесь $F_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m$ — напряженность векторного поля.

Простейший путь борьбы с такими аномалиями состоит во введении дополнительных фермионов с противоположными аксиальными зарядами, чтобы скомпенсировать вклады от таких диаграмм. На этом бы история и закончилась, если бы не было антисимметричных тензорных полей. За счет их нового взаимодействия (рис.1,б)

$$\mathcal{L}_3 = g[H^+ T_{mn}^- + H^- T_{mn}^+] F^{mn} \quad (67)$$

со скалярными полями и напряженностью векторного поля они приводят к новому типу аномальных диаграмм (рис.2,б,в). Опуская детали вычислений, приведем конечный ненулевой результат для дивергенции псевдовекторного поля:

$$\partial_m A^m = \hbar \frac{e^2}{(4\pi)^2} \epsilon^{mnab} F_{mn} F_{ab} - \frac{\hbar}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \epsilon^{mnab} F_{mn} F_{ab}. \quad (68)$$

Первый член в правой части (68) соответствует вкладам от диаграмм на рис.2,б, в которых скалярное поле непосредственно взаимодействует с псевдоскалярным полем, а второй член — от диаграмм на рис.2,в, где антисимметричное тензорное поле образует аксиальную вершину.

Здесь необходимо подчеркнуть следующее: если формальной причиной аномалии в случае фермионной петли (рис.2,а) явилась ее линейная расходимость, то в нашем случае диаграммы на рис.2,б и 2,в сходятся. Этот факт подтверждает мнение, что возникновение аномалий и нарушение классических законов сохранения не связано с регуляризационной процедурой, а классические и квантовые свойства симметрии, вообще говоря, различны [70].

Обратим внимание на то, что антисимметричные тензорные поля также являются источником аномалий, и, в принципе, при некотором специальном подборе группы внутренней симметрии и мультиплетов частиц возмож-

но взаимное сокращение вкладов от диаграмм на рис.2. Однако мы будем действовать значительно проще: потребуем удвоения числа хиггсовских частиц и антисимметричных тензорных полей, чтобы скомпенсировать аномальные вклады в диаграммах на рис.2,б и 2,в. Этим принципом мы воспользуемся при введении в стандартную модель электрослабых взаимодействий материальных антисимметричных тензорных полей.

И, наконец, обсудим один из самых важных вопросов феноменологии: как сделать частицы массивными. Заметим, что непосредственный способ придать массу материальному антисимметричному тензорному полю, записав массовый член в виде $M^2 T_{mn} T^{mn} = M^2 (\mathbf{B}^2 - \mathbf{A}^1)$, не проходит. Ввиду того, что положительная определенность гамильтониана (56) нарушается знаконеопределенностью этого массового члена, появляются тахионные решения, и первоначальная непротиворечивая формулировка теории для безмассового материального антисимметричного тензорного поля полностью теряет свои хорошие свойства. Поэтому, чтобы сохранить свойства симметрии, мы должны сделать материальное антисимметричное тензорное поле массивным динамическим образом, используя механизм спонтанного нарушения симметрии. В отличие от обычного механизма Хиггса, здесь нам, кроме скалярного поля H^\pm с ненулевым вакуумным средним $\langle H^\pm \rangle_0 = M/(2g)$, понадобится также безмассовое векторное поле V_m . Взаимодействие (67) приводит к поляризованному оператору $\mathcal{P}(p^2) = -(\langle H \rangle_0)^2/p^2 + O(g^0)$ (рис.3,а), с необходимым полюсом $1/p^2$ [71], который эффективно обеспечит массовый член в знаменателе пропагатора материального антисимметричного тензорного поля: $p^2[1 + 4g^2\mathcal{P}(p^2)] = (p^2 - M^2) + O(g^2)$.

Однако учет лишь диаграммы на рис.3,а приведет к нарушению структуры оператора $\Pi(p^2)$ в кинетическом члене для материального антисимметричного тензорного поля. Чтобы сохранить конформно-инвариантный вид операторной структуры $\Pi(p^2)$, необходимо добавить возникающее из радиационных поправок (рис.1,з) взаимодействие

$$\mathcal{L}_4 = -\lambda[(H^+ T_{mn}^-)^2 + (H^- T_{mn}^+)^2] \quad (69)$$

с фиксированной константой $\lambda = g^2/2$. Тогда эффективный пропагатор для материального антисимметричного тензорного поля приобретает вид

$$\langle T(T_{mn} T_{ab}) \rangle_0 = \frac{2i\Pi_{mnab}(p)}{p^2 - M^2}. \quad (70)$$

Конечно, такое соотношение между константами взаимодействия (67) и (69) невозможно обеспечить без привлечения некоторого принципа сим-

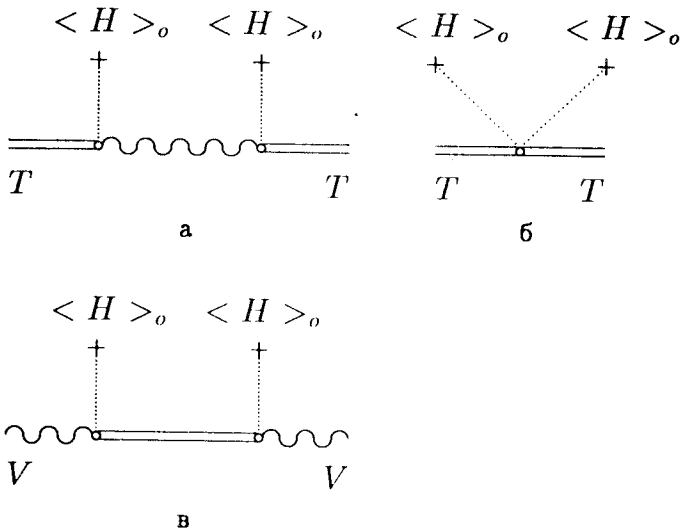


Рис.3

метрии. Действительно, точно такая же связь между константами возникает в расширенных теориях конформной супергравитации, взаимодействующей с суперконформной расширенной теорией Янга — Миллса [72]. Надо отметить, что калибровочное векторное поле в этом случае также становится массивным [15] за счет обмена антисимметричными тензорными частицами (рис.3,в). Теперь мы готовы перейти к расширению стандартной модели электрослабых взаимодействий материальными антисимметричными тензорными полями.

3.4. Расширенная модель электрослабых взаимодействий. Введение материальных антисимметричных тензорных полей в стандартную модель электрослабых взаимодействий представляет как теоретический, так и чисто практический интерес. До настоящего времени не построено ни одной феноменологической модели с таким типом необычной материи. Интерпретация некоторых последних экспериментальных данных [19,20] также требует введения новых тензорных взаимодействий [73]. Подробный анализ, проведенный в работе [74], позволяет снять противоречия и согласовать все предыдущие экспериментальные данные [75] по полулептонному радиационному распаду пиона $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \gamma$.

Мы предполагаем, как обычно, локальную $SU_L(2) \times U_Y(1)$ симметрию слабых взаимодействий [76], с калибровочными полями A_m и B_m . Фермионный сектор материальных полей содержит несколько поколений двухкомпонентных вейлевских спиноров: левые лептонные дублеты $L_i = (v'_L e'_L)_i$ и правые лептонные синглеты $(e'_R)_i$; левые кварковые дублеты $Q_i = (u'_L d'_L)_i$ и правые кварковые синглеты $(u'_R)_i$, $(d'_R)_i$. Здесь i — индекс поколения, цветовые индексы у кварковых полей мы опускаем. Штрих у поля означает, что оно является калибровочным собственным состоянием.

Рассмотрим теперь бозонный сектор материальных полей. Стандартная модель электрослабых взаимодействий содержит один дублет скалярных хиггсовских полей. Расширим этот сектор материальными антисимметричными тензорными полями. Эти поля, так же, как и скалярные хиггсовские поля, взаимодействуют с левыми и правыми фермионами (60). Чтобы такое юкавское взаимодействие было $SU(2) \times U(1)$ инвариантно, материальное антисимметричное тензорное поле должно быть дублетом. Требование отсутствия аномалий в расширенной модели электрослабых взаимодействий заставляет нас удвоить число полей и ввести два дублета хиггсовских скалярных полей $H_1 = (H_1^0 H_1^-)$, $H_2 = (H_2^+ H_2^0)$ и два дублета антисимметричных тензорных полей $U_{mn} = (U_{mn}^0 U_{mn}^-)$, $T_{mn} = (T_{mn}^+ T_{mn}^0)$ с противоположными гиперзарядами: $Y(H_1) = Y(U) = -1$, $Y(H_2) = Y(T) = +1$. Их минимальные взаимодействия с калибровочными полями вводятся через ковариантную производную $D_m = \partial_m - ig'/2T \cdot A_m - ig'/2Y B_m$, где g и g' — константы взаимодействия, а T и Y — генераторы групп $SU(2)$ и $U(1)$ соответственно.

Расширение хиггсовского сектора стандартной модели электрослабых взаимодействий еще одним дублетом хиггсовских частиц не приводит к нарушению соотношения $\rho = m_W^2 / (m_Z^2 \cos^2 \theta_W) = 1$ на древесном уровне, что, как хорошо известно, соответствует экспериментальным данным $\rho_0 = (1,0004 \pm 0,0022 \pm 0,0020)$ [77]. Однако существует еще одна трудность, связанная с расширением хиггсовского сектора. Если допустить произвольные взаимодействия хиггсовских частиц с фермионами, то при нарушении симметрии возможно появление нейтральных токов с изменением ароматов. Элегантное решение этой проблемы было дано Глэшоу и Вайнбергом [78]. Переходы с изменением ароматов в нейтральных токах на древесном уровне будут отсутствовать, если нейтральные компоненты одного хиггсовского дублета взаимодействуют только с верхними типами кварков с зарядами $2/3$, а нейтральные компоненты другого хиггсовского дублета — с нижними типами кварков с зарядами $-1/3$ и заряженными лептонами. Естественно, это влечет за собой наличие дополнительной симметрии, такой, например,

как суперсимметрия. Самый общий вид такого $SU(2) \times U(1)$ инвариантного юкавского взаимодействия есть

$$\mathcal{L}_H = h_{ij}^u \bar{Q}_i(u'_{Rj}) \cdot H_1 + [h_{ij}^d \bar{Q}_i(d'_{Rj}) + h_{ij}^e \bar{L}_i(e'_{Rj})] H_2 + \text{h.c.}, \quad (71)$$

где h^u , h^d и h^e , вообще говоря, произвольные недиагональные матрицы.

Аналогичное взаимодействие со спинорными полями мы можем записать и для антисимметричных тензорных полей:

$$\mathcal{L}_T = t_{ij}^u \bar{Q}_i \sigma^{mn}(u'_{Rj}) \cdot U_{mn} + [t_{ij}^d \bar{Q}_i \sigma^{mn}(d'_{Rj}) + t_{ij}^e \bar{L}_i \sigma^{mn}(e'_{Rj})] T_{mn} + \text{h.c.} \quad (72)$$

Отсутствие принципа симметрии приводит к большому числу произвольных параметров. Это является слабым местом в стандартной модели. Давайте максимально упростим модель, потребовав универсальности тензорного взаимодействия:

$$t_{ij}^u = t_{ij}^d = t_{ij}^e = \frac{t}{\sqrt{2}} \delta_{ij}. \quad (73)$$

После спонтанного нарушения симметрии нейтральные компоненты хиггсовских полей приобретают ненулевые вакуумные средние: $\langle H_1^0 \rangle_0 = v_1$ и $\langle H_2^0 \rangle_0 = v_2$. В суперсимметричных обобщениях стандартной модели электрослабых взаимодействий с двумя дублетами хиггсовских частиц вводится параметр β , который характеризует отношение их вакуумных средних: $\text{tg } \beta = v_1/v_2$. Подстановка

$$\begin{aligned} (u'_L)_i &= [S_u]_{ij}(u_L)_j, & (u'_R)_i &= [T_u]_{ij}(u_R)_j, \\ (d'_L)_i &= [S_d]_{ij}(d_L)_j, & (d'_R)_i &= [T_d]_{ij}(d_R)_j, \\ (e'_L)_i &= [S_e]_{ij}(e_L)_j, & (e'_R)_i &= [T_e]_{ij}(e_R)_j \end{aligned}$$

диагонализует массовые матрицы кварков и заряженных лептонов. Такие преобразования в нашем простейшем случае (73) могут породить в (72) нейтральные токи с изменением ароматов, если не потребовать равенства унитарных матриц $S_{u,d,e} = T_{u,d,e}$ для левых и правых кварков. Из этого немедленно следует, что матрицы юкавских констант связи $h^{u,d,e}$ должны быть эрмитовыми, чтобы они могли быть диагонализированы. То есть требование равенства юкавских констант связи (73) для антисимметричных тензорных полей и отсутствие нейтральных токов с изменением ароматов влечет за собой более высокую симметрию юкавских констант связи хиггсовских частиц. Действительно, такая возможность в последнее время интенсивно обсуждается в связи с поиском симметрий для юкавских констант связи [79].

Вводя матрицу Кабиббо — Кобаяши — Маскавы $V_{ij} = [S_u^\dagger S_d]_{ij}$, можно рассматривать смешивание для верхних типов или для нижних типов кварков в заряженных токах. Мы будем считать нейтрино безмассовыми. Поэтому, используя вырожденность нейтринных состояний, можно отфакторизоваться от матрицы смешивания $[S_\nu^\dagger S_e]_{ij}$ в лептонном секторе.

Взаимодействия типа (67):

$$\mathcal{L}_3 = (g'_1 \bar{H}_1 T^{mn} + g'_2 \bar{H}_2 U^{mn}) F_{mn} + (g_1 \bar{H}_1 \tau T^{mn} + g_2 \bar{H}_2 \tau U^{mn}) \mathbf{G}_{mn} + \text{h.c.}, \quad (74)$$

где $\bar{H} = H^T i \tau_2$ — транспонированные дублеты, а $F_{mn} = \partial_m B_n - \partial_n B_m$ и $\mathbf{G}_{mn} = \partial_m \mathbf{A}_n - \partial_n \mathbf{A}_m + g \mathbf{A}_m \times \mathbf{A}_n$ — тензоры напряженности калибровочных полей, при нарушении симметрии дают массы тензорным частицам и калибровочным полям. Чтобы после нарушения симметрии фотон оставался безмассовым, необходимо потребовать выполнения равенств $g'_1/g_1 = -g'_2/g_2 = \text{tg } \theta_W$, где θ_W — угол Вайнберга. Обратим внимание на то, что взаимодействия (74) приводят к смешиванию тензорных полей T_{mn} и U_{mn} .

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы перейти к обсуждению феноменологических следствий. Еще раз отметим, что наша модель, по сравнению со стандартной моделью электрослабых взаимодействий, содержит дополнительный дублет хиггсовских частиц и два дублета материальных антисимметричных тензорных частиц. Их минимальные взаимодействия с калибровочными полями вводятся однозначно через ковариантные производные. Мы выписали также их основные взаимодействия с фермионами и неминимальное взаимодействие с калибровочными полями, которые при спонтанном нарушении симметрии должны приводить к физическому спектру масс. Основным критерием при этом было требование отсутствия нейтральных токов с изменением ароматов. Разумеется, существует еще много других взаимодействий, на которых мы не будем здесь останавливаться, так как нашей задачей будет анализ низкоэнергетических процессов.

3.5. Феноменологические следствия. Взаимодействия антисимметричных тензорных полей с фермионами (72) порождают новые эффективные взаимодействия типа «ток × ток», дополнительно к известным взаимодействиям, возникающим в результате обмена электрослабыми калибровочными бозонами. Эти взаимодействия также содержат заряженные и нейтральные токи. Чтобы избежать противоречия с экспериментальными данными, мы должны предположить относительную слабость этих взаимодействий по отношению к стандартным электрослабым взаимодействиям. Новые тензорные взаимодействия оказываются как бы экранированными. Заряженные слабые токи были открыты задолго до обнаружения

нейтральных слабых токов, которые, в случае взаимодействий заряженных частиц, экранировались электромагнитными взаимодействиями. Поэтому первые экспериментальные подтверждения существования новых тензорных взаимодействий надо искать на фоне слабых взаимодействий заряженных токов.

В дальнейшем мы рассмотрим взаимодействия, обусловленные только заряженными антисимметричными тензорными полями T_{mn}^{\pm} и U_{mn}^{\pm} . Самая общая структура пропагаторов для этих частиц после нарушения симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(q) &= \begin{pmatrix} \langle T(T^{-}T^{+}) \rangle_0 & \langle T(T^{-}U^{+}) \rangle_0 \\ \langle T(U^{-}T^{+}) \rangle_0 & \langle T(U^{-}U^{+}) \rangle_0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{4i}{\Delta_q} \begin{pmatrix} (q^2 - m^2) \Pi^{-}(q) & \mu^2 \mathbf{1}^{-} \\ \mu^2 \mathbf{1}^{+} & (q^2 - M^2) \Pi^{+}(q) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (75)$$

где $\Delta_q = (q^2 - m^2)(q^2 - M^2) - \mu^4$, а μ , m и M — произвольные массовые параметры, причем $M/m = \text{tg } \beta$, так как диагональные массовые члены для T_{mn} и U_{mn} обусловлены вакуумными средними v_1 и v_2 соответственно.

Из вида взаимодействия (72) и тождества (61) следует, что поля T^{+} и U^{-} являются самодуальными, а T^{-} и U^{+} — самоантидуальными, поэтому пропагатор (75) содержит самодуальные и самоантидуальные $\mathbf{1}_{mnab}^{\pm} = 1/2(\mathbf{1}_{mnab} \pm i2\epsilon_{mnab})$, $\Pi_{mnab}^{\pm} = \mathbf{1}_{mnkl}^{\pm} \Pi_{klab}$ операторы.

Основное отличие тензорных взаимодействий от стандартного варианта V—A связано с изменением спиральности участвующих в процессе фермионов. Ввиду того, что стандартные слабые взаимодействия сохраняют спиральность, распад псевдоскалярного π -мезона сильно подавлен [80]. Поэтому самое первое условие на параметры нового тензорного взаимодействия мы можем получить из экспериментальных ограничений, следующих из этих распадов [81]. Пренебрегая импульсом передачи $q^2 \ll \mu^2, m^2, M^2$, запишем эффективный лагранжиан для полулептонных тензорных взаимодействий:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{t^2}{\Delta_0} \bar{u}_i \sigma^{nl} [m^2(1 + \gamma^5) + \mu^2(1 - \gamma^5)] V_{ij} d_j \frac{4q_m q^n}{q^2} (\bar{e}_R \sigma_{nl} \nu_L) + \text{h.c.} \quad (76)$$

Первый член в кварковом токе обусловлен обменом T_{mn} -частицами, а второй член возникает из-за смешивания T_{mn} - и U_{mn} -полей. При получении окончательного вида взаимодействия (76), мы использовали полезные тождества:

$$\frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma^{mn} \otimes \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma_{mn} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma^{ml} \otimes \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma_{nl} \frac{4q_m q^n}{q^2},$$

$$\frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma^{mn} \otimes \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5) \sigma_{mn} = 0. \quad (77)$$

Само по себе тензорное взаимодействие (76), по кинематическим соображениям, не дает вклада в полулептонный двухчастичный распад π -мезона π_{e_2} . Однако в работе [82] было показано, что за счет электромагнитных радиационных поправок к тензорному взаимодействию (76) псевдотензорный член $\bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d$ приводит к генерации взаимодействия лептонного с псевдоскалярным кварковым током, к которому очень чувствителен распад пиона [83]. Отсюда следует сильное ограничение на константу тензорного взаимодействия и практически исключает возможность его проявления в современном эксперименте. Это, естественно, закрывает возможность объяснения последних экспериментальных данных [19,20] наличием нового тензорного взаимодействия. Наша модель [84] позволяет обойти эту трудность, если предположить равенство двух массовых параметров $\mu^2 = m^2$, возникших при спонтанном нарушении симметрии. Тогда псевдотензорный кварковый член $\bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d$ исчезает из (76), а тензорный член $\bar{u} \sigma_{mn} d$ не дает вклада в распад псевдоскалярного пиона из-за сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях.

Рассмотрим теперь массовую матрицу для антисимметричных тензорных полей

$$\mathcal{M}^2 = \frac{M^2}{\text{tg}^2 \beta} \begin{pmatrix} \text{tg}^2 \beta \Pi^+ & 1^+ \\ 1^- & \Pi^- \end{pmatrix}, \quad (78)$$

которая параметризуется только двумя параметрами: размерным массовым параметром M и отношением вакуумных средних $\text{tg} \beta$ нейтральных компонент двух хиггсовских дублетов.

Переход к новым полям

$$T'_{mn} = T_{mn} \cos \varphi + \Pi_{mnab} U^{ab} \sin \varphi,$$

$$U'_{mn} = -\Pi_{mnab} T^{ab} \sin \varphi + U_{mn} \cos \varphi \quad (79)$$

приводит к диагональной массовой матрице $\mathcal{M}^2 = M^2 \text{diag} (\lambda_T \Pi^+, \lambda_U \Pi^-)$ с собственными значениями

$$\lambda_T = \frac{1}{2} [1 + \text{tg}^2 \beta + \sqrt{(1 - \text{tg}^2 \beta)^2 + 4}] / \text{tg}^2 \beta,$$

$$\lambda_U = [1 + \text{tg}^2 \beta - \sqrt{(1 - \text{tg}^2 \beta)^2 + 4}] / \text{tg}^2 \beta,$$

когда $\text{tg } \varphi = \frac{1}{2} \left[1 - \text{tg}^2 \beta + \sqrt{(1 - \text{tg}^2 \beta)^2 + 4} \right]$. Неотрицательность собственных значений матрицы квадратов масс приводит к условию $0 \leq \text{ctg}^2 \beta \leq 1$. Вид кривых для собственных значений λ_T и λ_U в этом интервале изменения параметра смешивания представлен на рис.4.

Замечательным свойством этих кривых является наличие максимума для массы тензорного U'_{mn} -поля. Поэтому энергия взаимодействия спинорных частиц посредством обмена U'_{mn} -полями в статическом пределе имеет минимум при $\text{ctg}^2 \beta_0 = 0,4$. Ввиду того, что взаимодействие «ток \times ток» всегда генерируется парой тензорных U_{mn} - и T_{mn} -частиц и масса T_{mn} -частиц монотонно растет с увеличением параметра смешивания $\text{ctg}^2 \beta$, минимум энергии

$$U \sim \frac{1}{\lambda_U} + \frac{1}{\lambda_T}$$

достигается при немного большем значении параметра смешивания $\text{ctg}^2 \beta = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$. Другими словами, мы, совсем неожиданно, фиксировали величину отношения вакуумных средних

$$\text{tg } \beta = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1,55 \tag{80}$$

нейтральных компонент двух дублетов хиггсовских частиц.

Значение $\text{tg } \beta$ находится в прекрасном согласии с недавними результатами анализа возможных значений параметров минимальной суперсимметричной модели с объединением констант связи и масс [85], с учетом того, что масса t -кварка лежит в интервале $m_t = (174 \pm 16)$ ГэВ [86]. Интересно также заметить, что такое значение $\text{tg } \beta$ соответствует углу смешивания φ полей U_{mn} и T_{mn} : $\sin^2 \varphi = (1 - 1/\sqrt{3})/2 \approx 0,211$, который удивительно

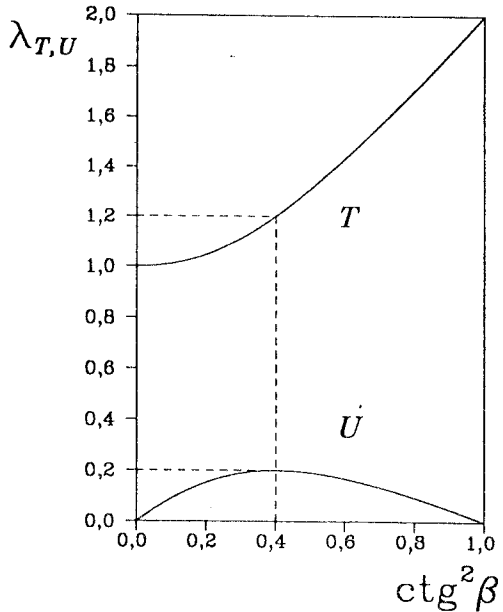


Рис.4

близок углу Вайнберга θ_W . Находясь в рамках стандартной модели, нельзя понять такое совпадение численных значений углов смешивания в калибровочном и материальном секторах. Вероятно, этот факт найдет свое объяснение в объединенной суперсимметричной модели с материальными антисимметричными тензорными частицами.

Для феноменологических приложений в области низких энергий выпишем все эффективные взаимодействия лептонов и кварков, обусловленные обменом антисимметричными тензорными частицами. Например, в случае распада мюона на электрон и (анти)нейтрино, кроме обычного V-A-взаимодействия, необходимо учесть также тензорное взаимодействие:

$$\mathcal{L}_{\mu e} = -\sqrt{2}G_F f_T \bar{\nu}_{\mu L} \sigma_{ml} \mu_R - \frac{4q^m q_n}{q^2} \bar{e}_R \sigma^{nl} \nu_{eL} + \text{h.c.}, \quad (81)$$

где q_m — 4-импульс передачи между мюонной и электронной парами, а положительная безразмерная константа

$$f_T = \frac{\sqrt{2}}{G_F} \frac{t^2}{(1 - \text{ctg}^2 \beta) M^2} > 0$$

определяет относительную силу новых тензорных взаимодействий по отношению к обычным слабым взаимодействиям. Дополнительное взаимодействие для полулептонных распадов имеет вид

$$\mathcal{L}_{qe} = -\sqrt{2}G_F f_T \bar{u} \sigma_{ml} d^\theta \frac{4q^m q_n}{q^2} \bar{e}_R \sigma^{nl} \nu_L + \text{h.c.}, \quad (82)$$

где $d_i^\theta = V_{ij} d_j$ — смешанные состояния для нижних типов кварков. Более богатая структура тензорного взаимодействия возникает в чисто кварк-кварковом секторе:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ud} = & -\sqrt{2}G_F f_T [\bar{u}_L \sigma_{ml} d_R^\theta \bar{d}_R^\theta \sigma^{nl} u_L + \bar{u}_L \sigma_{ml} d_R^\theta \bar{d}_L^\theta \sigma^{nl} u_R + \\ & + \bar{u}_R \sigma_{ml} d_L^\theta \bar{d}_R^\theta \sigma^{nl} u_L + \text{tg}^2 \beta \bar{u}_R \sigma_{ml} d_L^\theta \bar{d}_L^\theta \sigma^{nl} u_R] \frac{4q^m q_n}{q^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Все эффективные тензорные взаимодействия содержат лишь одну неизвестную константу взаимодействия f_T . Естественно попытаться фиксировать ее значение из эксперимента по полулептонному радиационному распаду пиона [19], результаты которого нельзя интерпретировать, оставаясь в рамках стандартной модели электрослабых взаимодействий [87] и ее суперсимметричных расширений [88]. Стандартный матричный элемент для этого распада можно представить в виде [80]:

$$M = M_{IB} + M_{SD}, \quad (84)$$

где

$$M_{IB} = -i \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} F_\pi m_e \varepsilon_m \bar{e} \left[\left(\frac{k}{kq} - \frac{p}{pq} \right)^m - \frac{i\sigma^{mn} q_n}{2kq} \right] (1 - \gamma^5) \nu \quad (85)$$

— квантовые электродинамические поправки (тормозное излучение) к распаду пиона $\pi \rightarrow e\nu$, а

$$M_{SD} = -\frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2} M_\pi} \varepsilon^m \bar{e} [F_V e_{m nab} p^a q^b - iF_A (pq \cdot g_{mn} - p_m q_n)] \gamma^n (1 - \gamma^5) \nu \quad (86)$$

— структурно-зависимые амплитуды, параметризованные двумя формфакторами F_V и F_A ; ε^m — вектор поляризации фотона; p , k и q — 4-импульсы пиона, электрона и фотона соответственно.

Для того чтобы найти матричный элемент M_T тензорного взаимодействия (82) для данного распада, необходимо вычислить матричный элемент $\langle \pi | \bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d | \gamma \rangle$ для кваркового тензорного тока. Используя гипотезу частичного сохранения аксиального тока и правила сумм квантовой хромодинамики, его можно представить в виде [88]:

$$\langle \pi | \bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d | \gamma \rangle = \frac{e}{3} \chi \frac{\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle}{F_\pi} (q_m \varepsilon_n - q_n \varepsilon_m),$$

где $F_\pi = 131$ МэВ — константа распада пиона, а $\chi = (-5,7 \pm 0,6)$ ГэВ⁻² — магнитная восприимчивость [89] кваркового конденсата $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle = -(0,24 \text{ ГэВ})^3$. Тогда матричный элемент дополнительного тензорного взаимодействия имеет вид

$$M_T = \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} F_T \left[\varepsilon^m q^n + \frac{(\varepsilon p) q^m - (p q) \varepsilon^m}{(p - q)^2} (p - q)^n \right] \times \\ \times \bar{e} \sigma_{mn} (1 - \gamma^5) \nu, \quad (87)$$

где

$$F_T = \frac{4}{3} \chi \frac{\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle}{F_\pi} f_T. \quad (88)$$

Первый член в (87) совпадает с тензорным матричным элементом, предложенным в [73]. В нашем случае появляется также характерный нелокальный матричный элемент, обусловленный обменом материальными антисимметричными тензорными частицами T_{mn}^\pm . Надо отметить, что представ-

ленные в (87) два члена исчерпывают все возможные калибровочно-инвариантные структуры.

Основной вклад в амплитуду распада пиона, в пренебрежении массой электрона, дают квадраты матричных элементов M_{IB} и M_{SD} , а также интерференция между матричными элементами тензорного взаимодействия M_T и тормозного излучения M_{IB} :

$$\frac{d^2\Gamma}{dx d\lambda} = \frac{\alpha}{2\pi} \Gamma_{\pi \rightarrow e\nu} \{ IB(x, \lambda) + a_{SD}^2 [(F_V + F_A)^2 SD^+(x, \lambda) + (F_V - F_A)^2 SD^-(x, \lambda)] - a_{SD} F_T I(x, \lambda) \}, \quad (89)$$

где $a_{SD} = M_{\pi}^2 / 2F_{\pi} m_e$,

$$IB(x, \lambda) = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{(1 - x)^2 + 1}{x}, \quad SD^+(x, \lambda) = \lambda^2 (1 - x) x^3,$$

$$SD^-(x, \lambda) = (1 - \lambda)^2 (1 - x) x^3, \quad I(x, \lambda) = (1 - \lambda) x^2.$$

В системе покоя пиона переменные x и λ определяются как $x = 2E_{\gamma} / M_{\pi}$,

$$\lambda = 2E_e / M_{\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Эксперимент по полулептонному радиационному распаду пиона [19] проведен в широкой кинематической области: $0,3 < x < 1,0$, $0,2 < \lambda < 1,0$. Измеренная полная вероятность распада $B^{\text{exp}} = (1,61 \pm 0,23) \cdot 10^{-7}$ оказалась меньше теоретически ожидаемой: $B^{\text{th}} = (2,41 \pm 0,07) \cdot 10^{-7}$. Подробный анализ экспериментальных данных для дифференциального сечения (89) без учета последнего члена дает отрицательный коэффициент перед $SD^-(x, \lambda)$ членом. Ввиду того, что вид функций $I(x, \lambda)$ и $SD^-(x, \lambda)$ примерно одинаков, этот результат может быть объяснен деструктивной интерференцией между тензорным взаимодействием и тормозным излучением. Отметим, что наша модель предсказывает и знак интерференции. Если выбрать $F_T = (1,57 \pm 0,45) \cdot 10^{-2}$, то дифференциальное сечение (89) будет адекватно описывать экспериментальные данные. Из (88) мы получаем численное значение константы эффективного тензорного взаимодействия

$$f_T = (1,96 \pm 0,56) \cdot 10^{-2}. \quad (90)$$

Наличие тензорного матричного элемента было также экспериментально обнаружено и в полулептонном трехчастичном распаде каона $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ [20]. В работе [84] в рамках релятивистской кварковой модели был проведен анализ полулептонного радиационного распада пиона

$\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \gamma$ и полулептонного трехчастичного распада каона $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$. Показано, что результаты этих экспериментов одновременно могут быть описаны одной константой f_T эффективного тензорного взаимодействия (82).

Естественно, что новое тензорное взаимодействие будет давать вклад и в ядерный β -распад. Тщательный анализ экспериментальных данных [73,90] показывает, что тензорное взаимодействие с константой $f_T \sim 10^{-2}$ не противоречит существующим экспериментам. В этой связи интересна постановка новых экспериментов. Например, в лаборатории DAΦNE [91] почти половина распадов ϕ -мезонов, рожденных в аннигиляции e^+e^- , будет идти в K^+K^- -мезоны. Это является хорошей возможностью исследования полулептонных трехчастичных распадов каонов.

Учет нового тензорного кварк-кваркового взаимодействия (83) в чисто нелептонных процессах затрудняется вследствие присутствия непертурбативных квантово-хромодинамических эффектов. Однако успех стандартной модели в объяснении разности масс $K_L - K_S$ [92] является вызовом любому ее расширению. Хотя неопределенность в теоретических оценках разности масс $K_L - K_S$ довольно большая (до 50%) [93], эта разность остается основным источником получения ограничений на параметры новых взаимодействий. В работе [94] было показано, что вклад в разность масс $K_L - K_S$ от нового тензорного взаимодействия (83) с константой f_T (90) и параметром $\tan \beta$ (80) имеет правильный знак и составляет половину ее экспериментальной величины. Интересным, на наш взгляд, и пока не исследованным вопросом остается анализ правила $\Delta T = 1/2$ в свете новых тензорных кварк-кварковых взаимодействий (83).

Наиболее прямым методом поиска проявления тензорных взаимодействий может явиться анализ энергетического спектра электронов в распаде мюона [95]. Надо отметить, что этот распад был обойден вниманием как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. Свободный от трудностей, связанных с учетом сильных взаимодействий, он может быть рассчитан с любой точностью. Однако до сих пор электромагнитные радиационные поправки к этому распаду остаются вычисленными лишь в одной петле [96], а основной параметр распада — ρ -параметр Мишеля [97] — не измерялся с 1969 г. [98]. Кроме того, ситуация даже с однопетлевыми электромагнитными поправками остается до конца не ясной [99].

Распад мюона является основным процессом слабых взаимодействий. Константа Ферми G_F определяется из теоретической формулы [100] для времени жизни мюона, полученной в рамках стандартной модели, и используется как основной параметр при анализе радиационных поправок

электрослабых взаимодействий. Однако ее точность зависит от точности измерения основных параметров распада мюона (о чем очень часто забывают) и в настоящий момент неоправданно завышена [101].

Новые тензорные взаимодействия (81) приводят к новым параметрам в распаде мюона, которые раньше не учитывались при теоретическом анализе и экспериментальной обработке данных. Обычно предполагалось, что эффективное четырехфермионное взаимодействие лептонов не зависит от импульсов. Однако, так как оно возникает в результате обмена промежуточным бозоном с 4-импульсом q_m , то ничто не мешает ему зависеть от импульса передачи. Именно такой тип взаимодействий и порождают антисимметричные тензорные частицы.

Наиболее общий вид гамильтониана распада мюона параметризуется [12], вообще говоря, комплексными константами $f_i^{\varepsilon\chi}$:

$$\mathcal{H} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{i=S,V,T \\ \varepsilon,\chi=R,L}} \{f_i^{\varepsilon\chi} [\bar{e}_\varepsilon \Gamma^i \nu_n^e] [\bar{\nu}_m \Gamma^i \mu_\chi] + \text{h.c.}\}, \quad (91)$$

где скалярное, векторное и тензорное взаимодействия определены как

$$\Gamma^S \otimes \Gamma^S \equiv \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}; \quad \Gamma^V \otimes \Gamma^V \equiv \gamma_m \otimes \gamma^n; \\ \Gamma^T \otimes \Gamma^T \equiv \frac{1}{2} \sigma^{ml} \otimes \sigma_{nl} \frac{4q_m q^n}{q^2}. \quad (92)$$

Если использовать старое определение $\Gamma^T \otimes \Gamma^T \equiv 1/2 \sigma^{mn} \otimes \sigma_{mn}$, то в силу тождеств (77) нормировка констант f_T^{RL} и f_T^{LR} не изменится, а две константы f_T^{RR} и f_T^{LL} можно положить тождественно равными нулю. В этом смысле новое определение (92) является обобщением старого и вводит новые параметры.

Тензорное взаимодействие (81) соответствует вполне определенному выбору констант: $f_T^{RL} = f_T^{LR} = f_T^{LL} = 0$, $f_T^{RR} = f_T$. Мы также предположим, что кроме стандартного V-A-взаимодействия $f_V^{LL} = 1$, других взаимодействий нет, и соответствующие константы равны нулю. Тогда энергетический спектр электронов при распаде поляризованного мюона имеет вид

$$\frac{d^2\Gamma}{dx d\cos\theta} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left\{ 3 - 2x + rf_T \frac{1}{x} + f_T^2(15 - 14x) + \frac{\alpha}{2\pi} f(x) + \right. \\ \left. + \cos\theta \left[1 - 2x + rf_T \frac{2-x}{x} + f_T^2(13x - 14) + \frac{\alpha}{2\pi} g(x) \right] \right\} x^2, \quad (93)$$

где оставлены члены первого порядка малости по $r = 12m_e/m_\mu \approx 5,8 \cdot 10^{-2}$, θ — угол между импульсом вылетающего электрона и спином мюона, $x = 2E_e/m_\mu$, а $f(x)$ и $g(x)$ — известные функции однопетлевых электромагнитных поправок [96].

Новые члены в энергетическом спектре электронов эффективно приведут к отклонению измеренных старых параметров распада мюона от их стандартных значений. Параметр Мишеля ρ определяется из изотропного энергетического спектра электронов и известен с наиболее высокой экспериментальной точностью $\rho = (0,7518 \pm 0,0026)$ [98]; по сравнению с другими параметрами, однако, малость тензорной константы f_T еще не позволяет выделить вклад в него новых структур. Поэтому необходимы новые, более прецизионные эксперименты, которые бы включали обработку экспериментальных данных с учетом новых параметров.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был сделан обзор литературы, посвященной введению и использованию антисимметричных тензорных полей второго ранга в квантовой теории поля. Мы не ставили перед собой цель дать полный список публикаций на эту тему. Нашей задачей было проследить историю вопроса введения таких полей, сохраняя при этом последовательность изложения. На базе сделанных обобщений представлены новые результаты, дополняющие и углубляющие связи между различными подходами. Ключевые, на наш взгляд, вопросы рассмотрены с такой подробностью, что для полного их понимания не требуется обращения к оригинальной литературе. Напротив, отдельные факты, дополняющие и обобщающие тот или иной вопрос, даны в виде ссылок, чтобы при необходимости можно было обратиться за подробностями к оригинальной литературе или обзорам.

Триумф стандартной модели электрослабых взаимодействий затмил на время интерес к изучению и введению в теорию новых полей, преобразующихся по нестандартным представлениям группы Лоренца. Феноменологические модели элементарных частиц, включая и их суперсимметричные расширения, используют лишь поля, подчиняющиеся стандартным уравнениям движения. Однако вне этого рассмотрения остается большой класс не изученных полей. Настоятельная необходимость введения таких полей возникает, например, при построении расширенных теорий супергравитации и теорий струн. Антисимметричное тензорное поле второго ранга естественно возникает в таких теориях.

Поля, преобразующиеся по нестандартным представлениям группы Лоренца, описывают частицы с немаксимальными значениями спиральности. Поэтому они могут выполнять роль частиц с меньшими значениями спина. Например, антисимметричное тензорное поле может заменить скалярную частицу. На массовой поверхности они имеют одинаковое число скалярных степеней свободы и эквивалентны. Однако вне массовой поверхности в игру вступают дополнительные степени свободы антисимметричного тензорного поля, приводя к более богатому взаимодействию. Являясь скаляром на массовой поверхности, оно при взаимодействии переносит спин единица и проявляет себя как векторная частица.

Представления группы Лоренца для единичного спина (1,0), (0,1) и (1/2, 1/2) описывают на массовой поверхности скалярную и векторную частицы. Вне массовой поверхности первая частица, кроме скалярных сил, приводит к векторному взаимодействию, в точности так же, как фотон вне массовой поверхности приводит к скалярным силам — закону Кулона. Покажем это, используя аргументы Фейнмана [32]. Закон Кулона возникает из лоренц-инвариантного взаимодействия токов:

$$\frac{J_m^\dagger J^m}{q^2} = \frac{J_0^\dagger J_0}{q^2} - \frac{\mathbf{J}_T^\dagger \mathbf{J}_T}{q^2},$$

если воспользоваться условием поперечности тока $q_m J^m = 0$ и исключить продольную составляющую $J_L = q_0 J^0 / |\mathbf{q}|$. Точно так же взаимодействие антисимметричных тензорных токов $J_{mn} (J_{0i} = A_i, J_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k)$ с условием $q_m J^{mn} = 0$ ($A_L = 0, \mathbf{B}_T = q_0 \mathbf{A}_T / |\mathbf{q}|$):

$$\frac{1}{2} \frac{J_{mn}^\dagger J^{mn}}{q^2} = \frac{\mathbf{A}_T^\dagger \mathbf{A}_T}{q^2} + \frac{B_L^\dagger B_L}{q^2}$$

приводит к закону $1/r$ для поперечных составляющих векторного тока.

Перейдем теперь к рассмотрению высших спинов. Обычно уравнения движения для волновых функций искались в виде дифференциальных уравнений первого порядка. Это объясняется желанием записать волновые уравнения подобно уравнениям Шредингера в надежде избавиться от отрицательных решений. Например, частица со спином 3/2 может быть описана как в формализме Рариты — Швингера [102], так и в формализме Баргмана — Вигнера [103] дифференциальными уравнениями первого порядка. Волновые функции для спина 3/2 в формализме Рариты — Швингера преобразуются по представлениям (1, 1/2) и (1/2, 1), а в формализме Баргмана — Вигнера — по представлениям (3/2, 0) и (0, 3/2). В случае свободных массивных частиц эти описания эквивалентны.

Однако, даже используя дифференциальные уравнения первого порядка, не удастся избавиться от отрицательных решений, которые, как мы знаем, описывают античастицы. Поэтому ограничение дифференциальными уравнениями первого порядка необязательно. В нашем случае частицы со спином 3/2 удовлетворяют дифференциальным уравнениям третьего порядка (см.(37)). Уравнения для волновых функций, преобразующихся по представлениям группы Лоренца (1, 1/2), (1/2, 1) и (3/2, 0), (0, 3/2), неэквивалентны и описывают различные частицы. Уравнения третьей степени для волновых функций, преобразующихся по представлениям (1, 1/2), (1/2, 1), используются в конформной супергравитации [17] для описания гравитино со спиральностью 3/2 и эквивалентны нашим.

Рассмотрим уравнения движения для волновой функции $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$, преобразующейся по представлению группы Лоренца (3/2, 0). Четыре компоненты $\Psi_1 = \Psi_{111}$, $\Psi_2 = \sqrt{3}\Psi_{\{112\}}$, $\Psi_3 = \sqrt{3}\Psi_{\{122\}}$ и $\Psi_4 = \Psi_{222}$ удовлетворяют матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} p_+^3 & \sqrt{3}p_+^2q_- & \sqrt{3}p_+q_-^2 & q_-^3 \\ \sqrt{3}p_+^2q_+ & p_+(p_+p_- + 2q_+q_-) & q_-(2p_+p_- + q_+q_-) & \sqrt{3}p_-q_-^2 \\ \sqrt{3}p_+q_+^2 & q_+(2p_+p_- + q_+q_-) & p_-(p_+p_- + 2q_+q_-) & \sqrt{3}p_-^2q_- \\ q_+^3 & \sqrt{3}p_-q_+^2 & \sqrt{3}p_-^2q_+ & p_-^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (94)$$

где символ $\{\alpha\beta\gamma\}$ обозначает полную симметризацию индексов с множителем 1/3! Когда вектор импульса \mathbf{p} направлен по третьей оси ($q_{\pm} = 0$), матрица становится диагональной, и анализ (94) упрощается. Волновые функции Ψ_1 и Ψ_4 соответствуют максимальным значениям спиральности $\pm 3/2$ и удовлетворяют уравнениям движения с частотой одного знака. Такие компоненты аналогичны продольным и временным компонентам электромагнитного поля или поперечным компонентам векторных полей, преобразующихся по представлениям (1,0) и (0,1), и нефизичны. Физическими здесь являются компоненты Ψ_2 и Ψ_3 со спиральностью $\pm 1/2$, которые удовлетворяют уравнениям Вейля, но с дополнительным множителем p^2 .

Если от спинорных индексов перейти к лоренцевым индексам, то данная частица будет описываться спинором $\Lambda_{\alpha}^{[mn]}$ с двумя лоренцевыми индексами, со свойством антисимметрии и самоантidualности по ним: $\mathbf{1}_{mna}^{+} \Lambda_{\alpha}^{[ab]} = 0$. Спинор $\Lambda_a^{[mn]}$ имеет шесть компонент. Условие $(\sigma_m \hat{\sigma}_n)_{\alpha}^{\beta} \Lambda_{\beta}^{[mn]} = 0$ убирает две лишние компоненты, которые появились при переходе к лоренцевым индексам, и приводит к четырем компонентам

спиного поля, введенного выше. Такое новое поле может быть использовано в расширенных $N \geq 3$ конформных теориях супергравитации вместо спинора Λ_α , аналогично использованию антисимметричных тензорных полей вместо скаляров.

Представления группы Лоренца спина 2, наряду с (1,1), содержат также $(3/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$ и $(2,0)$, $(0,2)$. Волновые функции, преобразующиеся по этим представлениям, в нашем случае удовлетворяют дифференциальным уравнениям четвертого порядка. Волновая функция, преобразующаяся по самому первому представлению, в конформных суперсимметричных теориях гравитации описывает гравитон со спиральностью ± 2 . Можно показать, что из восьми компонент

$$\begin{array}{llll} \Psi_1 = \Psi_{111\dot{2}} & & \Psi_8 = \Psi_{222\dot{i}} & \\ \Psi_2 = \Psi_{111i} & \Psi_3 = \sqrt{3}\Psi_{\{112\}\dot{2}} & \Psi_6 = \sqrt{3}\Psi_{\{122\}i} & \Psi_7 = \Psi_{222\dot{2}} \\ & \Psi_4 = \sqrt{3}\Psi_{\{112\}i} & \Psi_5 = \sqrt{3}\Psi_{\{122\}\dot{2}} & \end{array}$$

волновой функции, преобразующейся по представлению $(3/2, 1/2)$, на массовой поверхности физическими являются только две компоненты Ψ_3 и Ψ_6 , соответствующие двум поперечным степеням свободы векторной частицы со спиральностью ± 1 , так как только эти компоненты удовлетворяют уравнениям: $(p^2)^2 \Psi = 0$. В обозначениях с лоренцевыми индексами такая частица описывается действительным тензором третьего ранга, антисимметричным по одной паре индексов: $V_{a[mn]}$. Условия $g^{am}V_{a[mn]} = 0$ и $\epsilon^{abmn}V_{a[mn]} = 0$ убирают лишние компоненты поля $V_{a[mn]}$, которые неизбежно появляются при таком описании.

Еще одно поле спина 2, которое может быть введено таким образом, это пятикомпонентная волновая функция: $\Psi_1 = \Psi_{111\dot{1}}$, $\Psi_2 = 2\Psi_{\{1112\}\dot{1}}$, $\Psi_3 = \sqrt{6}\Psi_{\{1122\}\dot{1}}$, $\Psi_4 = 2\Psi_{\{1222\}\dot{1}}$ и $\Psi_5 = \Psi_{2222\dot{1}}$, преобразующаяся по представлению $(2,0)$. На массовой поверхности физической является только одна компонента Ψ_3 со спиральностью ноль. Таким образом, это поле в свободном случае эквивалентно скалярному полю ϕ , которое появляется в конформной $N = 4$ супергравитации и удовлетворяет уравнению $(p^2)^2 \phi = 0$.

Вне массовой поверхности это поле имеет еще четыре степени свободы и переносит спин 2. Его волновую функцию с лоренцевскими индексами можно представить в виде действительного тензора четвертого ранга $\Phi_{[ab][mn]}$, антисимметричного по двум парам индексов и симметричного по этим парам. Это поле имеет точно такие же свойства симметрии, как тензор Римана R_{abmn} . Чтобы редуцировать число степеней свободы до 10: 5 — для

частицы со спином 2 $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и 5 — для ее античастицы $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, необходимо наложить дополнительные условия $g^{am} \Phi_{[ab][mn]} = 0$ и $\epsilon^{abmn} \Phi_{[ab][mn]} = 0$.

Таким образом, антисимметричные тензорные поля естественно возникают при анализе спинорных представлений группы Лоренца спина $j \geq 1$. Вне массовой поверхности число компонент их волновой функции совпадает с размерностью пространства данного спина. На массовой поверхности происходит редукция степеней свободы, и их безмассовые возбуждения эквивалентны частицам меньшего спина. Эта эквивалентность теряется при включении взаимодействия. Обмен антисимметричными тензорными полями приводит к более богатому взаимодействию элементарных частиц. Их необычные свойства заслуживают внимательного дальнейшего изучения.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. М.Д.Матееву за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения, а также проф. В.Г.Кадышевскому за предложение написать эту работу, что способствовало более глубокому пониманию затронутой в обзоре темы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коноплева Н.П., Попов В.Н. — Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1980.
2. Higgs P.W. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.12, p.132; Phys. Rev., 1966, vol.145, p.1156;
Englert F., Brout R. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.13, p.321;
Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.E. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.13, p.585.
3. Карган Э. — Теория спиноров. М.: ИЛ, 1947.
4. Швингер Ю. — Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1973.
5. Van der Waerden B. — Nachr. Ges. Wiss. Gött., 1929, p.100;
Laporte O., Uhlenbeck G.E. — Phys. Rev., 1931, vol.37, p.1380.
6. Kemmer N. — Proc. Roy. Soc. A, 1938, vol.166, p.127.
7. Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. — ЯФ, 1966, т.4, с.216.
8. Kalb U., Ramon P. — Phys. Rev. D, 1974, vol.9, p.2273;
Cremmer E., Scherk J. — Nucl. Phys. B, 1974, vol.72, p.117.
9. Supergravities in Diverse Dimensions (eds. Salam A., Sezgin E.), North-Holland and World Scientific, 1989.
10. Введение в супергравитацию (под ред. Феррары С., Тейлора Дж.), М.: Мир, 1985.
11. Namazie M.A., Storey D. — Nucl. Phys. B, 1979, vol.157, p.170;
Townsend P.K. — Phys. Lett. B, 1979, vol.88, p.97;
Siegel W. — Phys. Lett. B, 1980, vol.93, p.170.
12. Wess J. — Nuovo Cim., 1960, vol.18, p.1086;

- Fulton T., Rohrlich F., Witten L. — Rev. Mod. Phys., 1962, vol.34, p.442.
13. Todorov I.T., Mintchev M.C., Petkova V.B. — Conformal Invariance in Quantum Field Theory. ETS, Pisa, 1978, p.89.
14. Fradkin E.S., Vasiliev M.A. — Nuovo Cim. Lett., 1979, vol.25, p.79; Phys. Lett. B, 1979, vol.85, p.47.
15. De Wit B., van Holten J.W. — Nucl. Phys. B, 1979, vol.155, p.530.
16. Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B. — Nucl. Phys. B, 1981, vol.182, p.183.
17. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. — Phys. Rep., 1985, vol.119, p.233.
18. Avdeev L.V., Chizhov M.V. — Phys. Lett. B, 1994, vol.321, p.212.
19. Болотов В.Н. и др. — ЯФ, 1990, т.51, с.717; Bolotov V.N. et al. — Phys. Lett. B, 1990, vol.243, p.308.
20. Akimenko S.A. et al. — Phys. Lett. B, 1991, vol.259, p.225; Stainer H. et al. — Phys. Lett. B, 1971, vol.36, p.521.
21. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976; Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. — Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978; Ишиксон К., Зюбер Ж.Б. — Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984.
22. Dirac P.A.M. — Proc. Roy. Soc. A, 1936, vol.155, p.447.
23. Proca A.J. — Phys. Radium, 1936, vol.7, p.347.
24. Kemmer N. — Helv. Phys. Acta, 1960, vol.33, p.829.
25. Van Nieuwenhuizen P. — Nucl. Phys. B, 1973, vol.60, p.478.
26. Gasser J., Leutwyler H. — Ann. Phys. (NY), 1984, vol.158, p.142; Ecker G. et al. — Nucl. Phys. B, 1989, vol.321, p.311; Kalafatis D. — Phys. Lett. B, 1993, vol.313, p.115.
27. Cremmer E., Julia B. — Nucl. Phys. B, 1979, vol.159, p.141.
28. Freedman D.Z. — Caltech Report No. 68-624, 1977; Freedman D.Z., Townsend P.K. — Nucl. Phys. B, 1981, vol.177, p.282.
29. Kaul R.K. — Phys. Rev. D, 1978, vol.18, p.1127.
30. Попов В.Н., Фаддеев Л.Д. — Препринт ИТФ 67-36, Киев, 1967; Faddeev L.D., Popov V.N. — Phys. Lett. B, 1967, vol.25, p.30.
31. Nielsen N.K. — Nucl. Phys. B, 1978, vol.140, p.499; Kallosh R.E. — Nucl. Phys. B, 1978, vol.141, p.141.
32. Feynmann R.P. — Acta Phys. Polon., 1963, vol.24, p.697.
33. Славнов А.А., Фролов С.А. — ТМФ, 1988, т.75, с.201.
34. Vecchi C., Rouet A., Stora R. — Phys. Lett. B, 1974, vol.52, p.344; Тюгин И.В. — Препринт ФИАН 39, 1975.
35. Kimura T. — Progr. Theor. Phys., 1981, vol.65, p.388; Marchetti P.A., Tonin M. — Nuovo Cim. A, 1981, vol.63, p.459.
36. Batalin I.A., Fradkin E.S. — Phys. Lett. B, 1983, vol.122, p.157.
37. Baulieu L., Thierry-Mieg J. — Nucl. Phys. B, 1983, vol.228, p.259.
38. Фролов С.А. — ТМФ, 1988, т.76, с.314; Frolov S.A., Slavnov A.A. — Phys. Lett. B, 1989, vol.218, p.461.
39. Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P. — Nucl. Phys. B, 1977, vol.120, p.301.
40. Sezgin E., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev. D, 1980, vol.22, p.301.
41. 't Hooft G., Veltman M. — Ann. Inst. Henri Poincaré, 1974, vol.1, p.69.
42. Deser S., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev. D, 1974, vol.10, p.401.
43. Deser S., Tsao H.-S., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev. D, 1974, vol.10, p.3337.

44. **Deser S. van Nieuwenhuizen P.** — *Phys. Rev. D*, 1974, vol.10, p.411.
45. **Van Nieuwenhuizen P.** — In: *Relativity, Fields, Strings and Gravity*. Caracas, 1977.
46. **Grisaru M.T., van Nieuwenhuizen P., Wu C.C.** — *Phys. Rev. D*, 1975, vol.12, p.1813.
47. **Duff M.J., van Nieuwenhuizen P.** — *Phys. Lett. B*, 1980, vol.94, p.179.
48. **Aurilia A., Christodoulou D., Legovini F.** — *Phys. Lett. B*, 1978, vol.73, p.429.
49. **Aurilia A., Nicolai H., Townsend P.K.** — *Nucl. Phys. B*, 1980, vol.176, p.509.
50. **Duff M.J.** — *Nucl. Phys. B*, 1977, vol.125, p.334.
51. **Christensen S.M., Duff M.J.** — *Phys. Lett. B*, 1978, vol.76, p.571.
52. **Christensen S.M., Duff M.J.** — *Nucl. Phys. B*, 1979, vol.154, p.301.
53. **Giozzi F., Scherk J., Olive D.** — *Nucl. Phys. B*, 1977, vol.122, p.253.
54. **Cremer E., Julia B., Scherk J.** — *Phys. Lett. B*, 1978, vol.76, p.409.
55. **Neveu A., Schwarz J.H.** — *Nucl. Phys. B*, 1971, vol.31, p.86; **Ramond P.** — *Phys. Rev. D*, 1971, vol.3, p.2415.
56. **Nahm W.** — *Nucl. Phys. B*, 1978, vol.135, p.149.
57. **Nicolai H., Townsend P.K.** — *Phys. Lett. B*, 1981, vol.98, p.257.
58. **Green M.B., Schwarz J.H.** — *Phys. Lett. B*, 1984, vol.149, p.117.
59. **Tseytlin A.A.** — *Int. J. Mod. Phys. D*, 1992, vol.1, p.223.
60. **Copeland E.J., Lahiri A., Wands D.** — *Phys. Rev. D*, 1994, vol.50, p.4868.
61. **Giani F., Pernici M., van Nieuwenhuizen P.** — *Phys. Rev. D*, 1984, vol.30, p.1680.
62. **Romans L.J.** — *Nucl. Phys. B*, 1986, vol.276, p.71; **Romans L.J.** — *Phys. Lett. B*, 1986, vol.169, p.374.
63. **Weyl H.** — *Z. Phys.*, 1929, vol.56, p.330.
64. **Weinberg S.** — *Phys. Rev.*, 1964, vol.133, p.B1318; *Phys. Rev.*, 1964, vol.134, p.B882.
65. **Avdeev L.V., Chizhov M.V.** — Preprint JINR E2-94-263 (hep-th/9407067), Dubna, 1994.
66. **Sterman G., Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.** — *Phys. Rev. D*, 1978, vol.17, p.1501.
67. **Henneaux M., Teitelboim C.** — *Quantization of Gauge Systems*, Princeton, NJ, 1992.
68. **Чижов М.В.** — Автореферат канд. диссертации. ОИЯИ P2-82-112, Дубна, 1982; **Chizov A.V., Chizhov M.V.** — *Phys. Lett. B*, 1983, vol.125, p.190; **Чижов М.В.** — Препринт ОИЯИ, P2-84-172, Дубна, 1984.
69. **Adler S.L.** — *Phys. Rev.*, 1969, vol.177, p.2426; **Bell J.S., Jackiw R.** — *Nuovo Cim. A*, 1969, vol.60, p.47.
70. **Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.** — *Phys. Lett. B*, 1975, vol.55, p.224; **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.** — *Phys. Lett. B*, 1977, vol.69, p.309.
71. **Schwinger J.** — *Phys. Rev.*, 1962, vol.125, p.397.
72. **De Wit B., van Holten J.W., Van Proeyen A.** — *Nucl. Phys. B*, 1981, vol.184, p.77; **de Wit B., Lauwers P.G., Philippe R., Van Proeyen A.** — *Phys. Lett. B*, 1984, vol.135, p.295.
73. **Poblaguev A.A.** — *Phys. Lett. B*, 1990, vol.238, p.108.
74. **Poblaguev A.A.** — *Phys. Lett. B*, 1992, vol.286, p.169.
75. **Depommier P. et al.** — *Phys. Lett.*, 1963, vol.7, p.285; **Stetz A. et al.** — *Nucl. Phys. B*, 1978, vol.138, p.285; **Bay A. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1986, vol.174, p.445;

- Piilonen L.E. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.57, p.1402; **Egly S. et al.** — Phys. Lett. B, 1986, vol.175, p.97; Phys. Lett. B, 1989, vol.222, p.533.
76. **Glashow S.L.** — Nucl. Phys., 1961, vol.22, p.579.
77. **Langacker P., Erler J.** — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, p.1304.
78. **Glashow S.L., Weinberg S.** — Phys. Rev. D, 1977, vol.15, p.1958.
79. **Ramond P., Roberts R.G., Ross G.G.** — Nucl. Phys. B, 1993, vol.406, p.19; **Harrison P.F., Scott W.G.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.333, p.471; **Fritzsch H., Holtmannspötter D.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.338, p.290.
80. **Bryman D.A., Depommier P., Leroy C.** — Phys. Rep., 1982, vol.88, p.151.
81. **Marciano W.J., Sirlin A.** — Phys. Rev. Lett., 1993, vol.71, p.3629.
82. **Voloshin M.B.** — Phys. Lett. B, 1992, vol.283, p.120.
83. **Campbell B.A., Peterson K.A.** — Phys. Lett. B, 1987, vol.192, p.401; **Shankar O.** — Nucl. Phys. B, 1982, vol.204, p.375.
84. **Chizhov M.V.** — Mod. Phys. Lett. A, 1993, vol.8, p.2753.
85. **Kolda C. et al.** — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, p.3498; **de Boer W., Ehret R., Kazakov D.I.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.334, p.220.
86. **Abe F. et al. (CDF collaboration)** — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, p.2966.
87. **Никитин И.Н.** — Препринт ИФВЭ, 90-176, Протвино, 1990; **Комаченко Ю.Я.** — ЯФ, 1992, т.55, с.2487; **Комаченко Ю.Я., Rogalyov R.N.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.334, p.132.
88. **Belyaev V.M., Kogan Ia. I.** — Phys. Lett. B, 1992, vol.280, p.238.
89. **Июффе Б.Л., Смилга А.В.** — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.37, с.250; **Ioffe B.L., Smilga A.V.** — Nucl. Phys. B, 1984, vol.232, p.109; **Беляев В.М., Коган Я.И.** — ЯФ, 1984, т.40, с.1035.
90. **Quinn P.A. et al.** — Phys. Rev. D, 1993, vol.47, p.1247; **Herczeg P.** — Phys. Rev. D, 1994, vol.49, p.247.
91. **The DAΦNE Physics Handbook** (eds. Maiani L., Panzeri G., Paver N.), INFN, Frascati, 1992.
92. **Gaillard M.K., Lee B.W.** — Phys. Rev. D, 1974, vol.10, p.897.
93. **Shiftman M.A.** — Int. J. Mod. Phys. A, 1988, vol.3, p.2769; **Bijnens J., Gerard J.-M., Klein G.** — Phys. Lett. B, 1991, vol.257, p.191; **Herrlich S., Nierste U.** — Nucl. Phys. B, 1994, vol.419, p.292.
94. **Chizhov M.V.** — Preprint JINR, E2-94-253 (hep-ph/9407237), Dubna, 1994.
95. **Chizhov M.V.** — Mod. Phys. Lett. A, 1994, vol.9, p.2979.
96. **Kinoshita T., Sirlin A.** — Phys. Rev., 1959, vol.113, p.1652.
97. **Michel L.** — Proc. Phys. Soc. A, 1950, vol.63, p.514.
98. **Derenzo S.E.** — Phys. Rev., 1969, vol.181, p.1854.
99. **Arbuzov A.B., Kuraev E.A., Merenkov N.P., Makhaldiani N.V.** — Comm. JINR, E4-93-196, Dubna, 1993.
100. **Marciano W.J., Sirlin A.** — Phys. Rev. Lett., 1988, vol.61, p.1815.
101. **Fetscher W., Gerber H.-J.** — In: Precision Tests of the Standard Electroweak Model (ed. Langacker P.), World Scientific, Singapore, 1993.
102. **Rarita W., Schwinger J.** — Phys. Rev., 1941, vol.60, p.61.
103. **Bargmann V., Wigner E.P.** — Proc. Nat. Acad. Sci., 1948, vol.34, p.211.