

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются последние результаты, полученные различными авторами в области использования метода приближенного континуального интегрирования при решении широкого круга задач физики и математики, в том числе задач квантовой механики, квантовой теории поля, исследования дифференциальных операторов, и решении различных дифференциальных уравнений математической физики. Дается строгое определение континуального интеграла в полном сепарабельном метрическом пространстве. Приводится обзор работ, содержащих исследование континуального предела решеточных моделей, а также результаты использования континуальных интегралов в изучении непертурбативных явлений в квантовой теории поля, топологической структуры вакуума в квантовых калибровочных теориях, вопросов туннелирования, в описании многочастичных квантовых систем, теории струн и квантовой гравитации. Представлены полученные авторами результаты в области континуального интегрирования в рамках нового подхода к интегралам по траекториям на основе функционального анализа и теории меры, относящиеся к теоретическому изучению континуальных интегралов, созданию нового метода их приближенного вычисления и использованию его для исследования ряда квантовых систем.

We discuss the latest results of different authors related to employment of the numerical functional integration method in solution of the wide range of problems of physics and mathematics, including the problems of quantum mechanics, quantum field theory, study of differential operators and solution of various differential equations of mathematical physics. The rigorous definition of functional integral in complete separable metric space is given. The review of papers containing the analysis of continuum limit of lattice models is presented, as well as the survey of results of application of functional integrals to investigation of nonperturbative phenomena in quantum field theory, problems of tunnelling, study of many-particle quantum systems, string theory and quantum gravitation. The results in the field of functional integration obtained in the framework of the new approach to path integrals on the basis of functional analysis and measure theory and related to theoretical study of functional integrals, elaboration of new method for their numerical evaluation and its application to analysis of some quantum systems are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Метод континуального интегрирования представляет собой мощный аппарат для исследования широкого круга проблем в различных областях физики и математики [1]. Впервые использованное в квантовой механике Р.Фейнманом [2], континуальное интегрирование является в настоящее время основой современной конструктивной квантовой теории поля [3], основным методом численного исследования непертурбативных явлений в квантовой калибровочной теории [4—6]. Континуальные интегралы находят широкое применение в квантовой механике, теории поля [7—13], квантовой электродинамике [14—16], статистической физике [9], [17—19], физике ядра [20], физике твердого тела [19], квантовой статистике [21], теории сверхпроводимости [22], ферромагнетизма [23,24], теории гравитации [25], квантовой оптики, в статистической радиотехнике, радиационной физике частиц высоких энергий и во многих других областях [26]. Использованию континуальных интегралов регулярно посвящаются крупные международные конференции, такие как «Path Integration: Achievements and Goals», Trieste, Italy, 1987; Colloquium on Functional Integration Theory and Applications, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1979; Adriatico Research Conference on Path Integration and Its Applications, Trieste, Italy, 1991; International Conference on Path Integrals in Physics, Bangkok, Thailand, 1993; серия регулярно проводимых конференций под общим названием «Path Integrals from meV to MeV» (Albany, New York, 1983; Bielefeld, 1985; Bangkok, 1989; Tutzing, Munich, 1992).

Широкое применение континуальных интегралов стимулировало развитие их теории и методов приближенного вычисления. Поскольку «мера Фейнмана» не удовлетворяет условию счетной аддитивности, т.е. не является мерой в математически строгом смысле, возникло множество различных подходов к фейнмановским интегралам, обосновывавших их конструкцию и предлагавших соответствующие способы их приближенного вычисления. Среди основных подходов можно выделить подходы Нельсона, Ито, де Вит-Моррет, Альбеверии и Хэг-Крона, Трумена (более подробно об этих и других подходах см. работы [27—30], а также цитированную там литературу). Вопросы истории развития теории, методологии использования интегралов по траекториям рассмотрены в [31]. Большинство результатов относится к лагранжевым интегралам по траекториям в конфигурационном пространстве, однако большое внимание уделяется также гамильтоновым интегралам в фазовом пространстве (например, [32—34]). В работе [35] и развивающей ее результаты работе [36] в частном случае интегралов по траекториям на фазовом пространстве, для которых имеет место ВКБ-приближение, получено обобщение теоремы Дьюстерамаата — Хекмана, устанавливающей условия точности метода ВКБ. Как отмечается

в [36], тот факт, что интеграл по траектории при определенных условиях может быть ВКБ-точным, представляет интерес в двух аспектах: возможность расширения числа известных примеров квантовых систем, где фейнмановский интеграл берется точно, и возможность более глубокого проникновения в геометрическую структуру квантовых систем. Однако, как отмечается в [35] и [36], результаты этих работ имеют ограниченную область применения и требуют выполнения ряда условий, что не всегда осуществляется на практике. Как отмечается в [36], проведенный в этой работе анализ справедлив лишь в случае фазовых пространств, являющихся двумерными симплектическими множествами, причем обобщение его на случай больших размерностей не представляется возможным.

В ряде работ проводится исследование интегралов по траекториям в искривленном конфигурационном пространстве (см. [7,37]). В работе [37] рассмотрена динамика квантовой системы на сфере и получено представление для функции Грина (матричного элемента оператора эволюции) в виде интеграла по траекториям, для чего использовалось полуклассическое приближение.

В работах [35—37] речь идет об интегралах по мере, задаваемой не на функциональном пространстве, а в виде предела N -кратных римановых интегралов при $N \rightarrow \infty$, и не удовлетворяющей условию счетной аддитивности, что, как уже упоминалось, затрудняет математическое обоснование таких интегралов. В последние годы появились работы, интересующие подобные конструкции как квазимеры или псевдомеры (см. [38]). В работах [35—37] какие-либо численные расчеты не приводятся.

Начало математически строгому изучению континуальных интегралов по счетно-аддитивным мерам было положено в работах Н. Винера [39], который ввел в пространстве непрерывных на отрезке функций меру континуального интегрирования, носящую теперь его имя. Следует отметить, что сам термин континуальный (или функциональный) интеграл следует применять именно к интегралам по определенной мере в заданном пространстве, хотя в русском языке он часто используется как синоним понятия интеграла по траекториям, при определенных условиях являющегося физической интерпретацией континуального интеграла в частном случае квантовой физики. За последние годы в мире были получены значительные результаты в области теории и использования континуальных интегралов. Долгое время наиболее изученными являлись винеровские интегралы (см., например, [40]), связанные с фейнмановскими интегралами операцией перехода к мнимому времени, т.е. к евклидовой формулировке теории, однако в последнее время большое внимание уделяется их обобщению [41], а также исследованию континуальных интегралов по другим мерам в соответствующих пространствах (например, [26,42—48]). Значительные успехи были достигнуты также в области методов приближенного вычисления континуальных интегралов

без предварительной дискретизации пространства и времени и не требующих упрощающих предположений типа приближения среднего поля, квазиклассического приближения и т.д. (см., например, [38,49—52]). Различными авторами ведется также работа по составлению таблиц точно берущихся континуальных интегралов по счетно-аддитивным мерам, а также фейнмановских интегралов по траекториям [53], [54]. Современное состояние математической теории континуального интегрирования представлено в работах [43,38,55].

Использованию континуальных интегралов для численного решения различных задач посвящается в последние годы большое количество работ. Приведем в качестве примера некоторые из них: вычисление пропагатора заряженной частицы в магнитном поле [56]; вычисление специальных функций [57]; численное исследование фазы гелия, поглощенной графитом [58]; вычисление спектра эффективного гамильтониана в $SU(3)$ [59]; решение обратной задачи для трехмерного уравнения Шредингера [60]; численное исследование взаимодействия заряженной частицы с монополю Калуза — Кляйна [61]; исследование фазовых переходов [62—64], турбулентного потока жидкости [65]; вычисление второго вириального коэффициента анионного газа [66]. Более подробно проблемы использования континуальных интегралов будут рассмотрены ниже. Основное внимание мы уделяем континуальным интегралам евклидовой квантовой физики. При этом мы рассматриваем главным образом вычисление континуальных интегралов по счетно-аддитивным мерам в сепарабельных метрических пространствах; вычисление интегралов по траекториям, не удовлетворяющих этому условию, может составить предмет отдельного обсуждения. В данной работе приводятся также результаты в области приближенного континуального интегрирования, полученные ее авторами за последние несколько лет.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КONTИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Дадим определение континуального интеграла на основе последних достижений в области теории меры и теории интегрирования в функциональных пространствах (см., например, [43,38]). Пусть задано некоторое пространство X с выделенной на нем σ -алгеброй G подмножеств этого пространства вместе с мерой μ , заданной на G .

Функционал $F[x]$, определенный на $x \in X$ и принимающий действительные значения, называется измеримым на X , если для всякого борелевского множества B действительной прямой соответствующее множество $\{x \in X : F[x] \in B\}$ принадлежит σ -алгебре G .

Простым функционалом называется измеримый функционал, принимающий не более чем счетное число различных значений. Такой функционал представим в виде

$$F[x] = \sum_j a_j \chi_{A_j}[x],$$

где a_j — различные числа; A_j — непересекающиеся множества из G , а $\chi_{A_j}[x]$ — характеристические функции множеств A_j :

$$\chi_{A_j}[x] = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in A_j, \\ 0 & \text{при } x \notin A_j. \end{cases}$$

Интеграл от простого функционала $F[x]$ по пространству X , обозначаемый $\int_X F[x] d\mu$, определяется равенством

$$\int_X F[x] d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k), \quad \text{где } A_k = \{x \in X : F[x] = a_k\} \in G,$$

если ряд справа сходится абсолютно. Простой функционал $F[x]$ в этом случае называется интегрируемым по мере μ на пространстве X .

Пусть $F[x]$ — произвольный, измеримый на X функционал. Обозначим $F^+[x] = \max\{F[x], 0\}$; $F^-[x] = -\min\{F[x], 0\}$. Очевидно, что $F[x] = F^+[x] - F^-[x]$, при этом $F^+[x]$ и $F^-[x]$ — неотрицательные и измеримые на X функционалы.

Интегралом от измеримого неотрицательного функционала $F[x]$ по пространству X называется величина

$$\int_X F[x] d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X F_n[x] d\mu,$$

где $\{F_n[x]\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная монотонно неубывающая последовательность неотрицательных простых функционалов, сходящаяся к $F[x]$, и предел в правой части равенства не зависит от выбора последовательности.

Пусть $F[x]$ — произвольный измеримый функционал. Если один из интегралов

$$\int_X F^+[x] d\mu, \quad \int_X F^-[x] d\mu \quad (1)$$

конечен, то интеграл от функционала $F[x]$ определяется равенством

$$\int_X F[x] d\mu = \int_X F^+[x] d\mu - \int_X F^-[x] d\mu. \quad (2)$$

Если оба интеграла (1) конечны, то интеграл (2) также конечен, и функционал $F[x]$ называется интегрируемым по мере μ на пространстве X .

Мы будем рассматривать пространства X , являющиеся полными сепарабельными метрическими пространствами, наиболее часто встречающиеся в приложениях. В частности, примером таких пространств является $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке функций.

Если имеет место $\mu(X) = 1$, то мера μ называется вероятностной мерой на пространстве X .

Пусть X' — сопряженное к X пространство линейных непрерывных функционалов на X . Для всякого $\varphi \in X'$ и любого $x \in X$ будем обозначать значение функционала на элементе x как $\langle \varphi, x \rangle$.

Цилиндрическим множеством в пространстве X называется множество вида

$$Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}(A_n) = \{x \in X : [\langle \varphi_1, x \rangle, \langle \varphi_2, x \rangle, \dots, \langle \varphi_n, x \rangle] \in A_n\}, \quad (3)$$

где $\varphi_1 \dots \varphi_n$ — любые линейно независимые элементы пространства X' , A_n — произвольное борелевское множество в n -мерном евклидовом пространстве R^n ($n = 1, 2, \dots$). Множество A_n называется основанием цилиндрического множества $Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$.

Пусть $K(\varphi, \psi)$ — билинейный, а $M(\varphi)$ — линейный функционалы, заданные на сопряженном пространстве X' , $\varphi, \psi \in X'$. Вероятностную меру μ , заданную на σ -алгебре G , порожденной всеми цилиндрическими множествами пространства X , называют гауссовой, если ее значение на любом цилиндрическом множестве $Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} & \mu(Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}(A_n)) = \\ & = (2\pi)^{-n/2} (\det K)^{-1/2} \int_{A_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (K^{-1}[u - M(\varphi)], [u - M(\varphi)]) \right\} du, \end{aligned} \quad (4)$$

где K^{-1} — матрица, обратная к матрице $K = \|K(\varphi_i, \varphi_j)\|$,

$$M(\varphi) = \{M(\varphi_1), M(\varphi_2), \dots, M(\varphi_n)\}; \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n);$$

$$(K^{-1}[u - M(\varphi)], [u - M(\varphi)]) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij}^{-1} [u_i - M(\varphi_i)][u_j - M(\varphi_j)],$$

K_{ij}^{-1} — элементы матрицы K^{-1} и $du = du_1 du_2 \dots du_n$.

Гауссова мера, определяемая в соответствии с (4), представляет собой счетно-аддитивную вероятностную меру на борелевской σ -алгебре пространства X . Континуальный интеграл при этом является интегралом Лебега в X по мере μ . Функционал $K(\varphi, \psi)$ называется корреляционным функционалом, а $M(\varphi)$ — средним значением меры μ .

Данное определение меры отличается от общеизвестной меры в n -мерном евклидовом пространстве R^n , поскольку ввести меру обычным способом в бесконечномерном случае ($n \rightarrow \infty$) уже невозможно, т.к. объем n -мерного параллелепипеда будет стремиться к бесконечности. Как будет показано ниже, через континуальные интегралы по гауссовой мере могут быть выражены решения различных дифференциальных и интегральных уравнений, а также наблюдаемые значения операторов в квантовой физике.

Во многих вопросах теории меры важную роль играет определенный на X' функционал

$$\chi(\varphi) = \int_X \exp \{i \langle \varphi, x \rangle\} d\mu(x),$$

называемый характеристическим функционалом. Как показано в [50], в случае гауссовой меры

$$\int_X \exp \{i \langle \varphi, x \rangle\} d\mu(x) = \exp \left\{ iM(\varphi) - \frac{1}{2} K(\varphi, \varphi) \right\}, \quad \varphi \in X',$$

где

$$K(\varphi, \psi) = \int_X [\langle \varphi, x \rangle - M(\varphi)][\langle \psi, x \rangle - M(\psi)] d\mu(x), \quad \varphi, \psi \in X',$$

$$M(\varphi) = \int_X \langle \varphi, x \rangle d\mu(x).$$

Гауссова мера однозначно определяется своим характеристическим функционалом $\chi(\varphi)$ или функционалами $K(\varphi, \psi)$ и $M(\varphi)$ [50].

Понятие гауссовой меры включает в себя широкий класс мер, наиболее часто используемых в приложениях, в том числе условную меру Винера на пространстве непрерывных функций $x(t) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих $x(0) = x(1) = 0$. В данном случае $M(\varphi) = 0$. Поскольку в пространстве $C_0 \equiv \{C[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$, имеет место

$$\langle \varphi, x \rangle = \int_0^1 x(t) d\varphi(t)$$

для функций $\varphi(t)$ с ограниченной вариацией, то в данном случае

$$K(\varphi, \psi) = \int_{C_0} \langle \varphi, x \rangle \langle \psi, x \rangle d\mu(x) = \int_0^1 \int_0^1 K(t, s) d\varphi(t) d\psi(s),$$

где интегральное ядро

$$K(t, s) = \int_{C_0} x(t) x(s) d\mu(x)$$

называется корреляционной функцией меры. Условная мера Винера $d_W x$ характеризуется следующей корреляционной функцией:

$$K(t, s) = \min \{t, s\} - ts, \quad t, s \in [0, 1].$$

Более наглядное определение винеровской меры на основе теории броуновского движения содержится, например, в работе И.М.Гельфанда и А.М.Яглома [67].

2. СВЯЗЬ КONTИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С РЕШЕНИЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Связь между дифференциальными уравнениями в частных производных и континуальными интегралами была обнаружена Р.Фейнманом [2] при создании нового подхода к квантовой механике. Математически строгое доказательство представления решения уравнения теплопроводности (уравнения Шредингера с мнимым временем) содержится в работах М.Каца [68]. В соответствии с формулой Фейнмана — Каца (см. также [67]), функция Грина Z уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, x_0, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(x, x_0, t) - V(x)Z(x, x_0, t)$$

$$Z(x, x_0, 0) = \delta(x - x_0), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0$$

$$Z(x, x_0, t) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $V(x)$ — заданная функция, представляется в виде интеграла по условной мере Винера

$$Z(x, x_0, t) = \int_C \exp \left\{ - \int_0^1 V[\omega(\tau)] d\tau \right\} d_W \omega \quad (6)$$

по пространству $C[0, t]$ непрерывных функций $\omega(\tau)$, удовлетворяющих условиям $\omega(0) = x_0$, $\omega(t) = x$.

С помощью функции Грина $Z(x, x_0, t)$ могут быть найдены решения $Z(x, t)$ задачи (5) при различных начальных условиях $Z(x, 0) = Z_0(x)$ в виде

$$Z(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_0(x_0) Z(x, x_0, t) dx_0.$$

В работе [67] связь континуальных интегралов с решениями дифференциальных уравнений была исследована применительно к задачам квантовой физики. Там же была поставлена задача обобщения этой связи на более широкий класс дифференциальных уравнений, в том числе параболических более высокого порядка. Такое обобщение для абстрактных эволюционных уравнений, включающих различные уравнения и системы параболического, гиперболического и шредингеровского типов, получено в работах Ю.Л.Далецкого [69—71].

Представление решения дифференциального уравнения в виде континуального интеграла позволяет свести исходную задачу к квадратурам в функциональном пространстве, что во многих случаях оказывается удобным как для теоретического исследования, так и для численного решения. Континуально-интегральный подход дает дополнительные возможности исследования решения, возможность решения задачи в неограниченной области без замены граничных условий на бесконечности условиями на границе некоторой фиксированной области и др. [72]. К решениям дифференциальных уравнений в данном случае могут быть применены методы, используемые в теории интеграла Лебега (в частности, замена переменных в интеграле, построение квадратурных формул в функциональных пространствах и т.д.) [73]. В работе [67] метод континуального интегрирования применялся, в частности, для исследования асимптотики собственных функций и собственных значений эллиптического дифференциального оператора, классического предела и квазиклассического приближения квантовой механики, вычисления статистической суммы квантовой статистики, оценки наименьшего собственного значения уравнения Шредингера и др.

Представление решений некоторых дифференциальных уравнений в виде континуальных интегралов в фазовом пространстве исследовалось в работах [74,75].

Интеграл по обобщенной мере Винера в пространстве C_2 непрерывных функций двух переменных $\omega = \omega(t, s)$, заданных на квадрате $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ и удовлетворяющих условиям $\omega(t, 0) = \omega(0, s)$, дает возможность выразить решение задач Коши, Гурса некоторых уравнений гипер-

болического типа, а в случае пространства $C_2^p = C_2 \times C_2 \dots \times C_2$ и систем дифференциальных уравнений гиперболического типа [41]. Так, например, решение задачи

$$\frac{\partial^2 u_k(t, s)}{\partial t \partial s} = \sum_{l=1}^p a_{kl}(t, s) u_l(t, s) + b_k(t, s),$$

$$u_k(t, 0) = u_k(0, s) = 0, \quad k = 1, \dots, p; \quad t, s \in Q$$

в случае, если $a_{kl}(t, s)$ и $b_k(t, s)$ — непрерывные функции на квадрате Q , представимо в виде следующего континуального интеграла [41]:

$$\begin{aligned} u_k(t, s) = & \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^p \int_Q a_{kk}(\tau, \sigma) d\tau d\sigma - \sum_{k=1}^p \int_Q b_k^2(\tau, \sigma) d\tau d\sigma \right\} \times \\ & \times \int_{C_2^p} x_k(t, s) \exp \left\{ 2 \sum_{k=1}^p \int_Q b_k(\tau, \sigma) d_{\tau, \sigma} [x_k(\tau, \sigma) - \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^p \int_0^\tau \int_0^\sigma a_{kl}(\tau_1, \sigma_1) x_l(\tau_1, \sigma_1) d\tau_1 d\sigma_1] + 2 \sum_{k,l=1}^p \int_Q a_{kl}(\tau, \sigma) x_l(\tau, \sigma) dx_k(\tau, \sigma) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^p \int_Q \left[\sum_{l=1}^p a_{kl}(\tau, \sigma) x_l(\tau, \sigma) \right]^2 d\tau d\sigma \right\} d_W x. \end{aligned}$$

Решение задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = & a \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \\ & + \int_R \left[u(t, x+y) - u(t, x) - \frac{y^2}{1+y^2} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right] \pi(dy) + c(x)u(t, x), \end{aligned}$$

$$u(0, x) = f(x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

где $c(x)$, $f(x)$ — заданные функции, мера π удовлетворяет условиям

$$\pi\{0\} = 0, \quad \int_R \frac{y^2}{1+y^2} \pi(dy) < \infty,$$

при некоторых ограничениях на c и f представляется в виде [76,77]:

$$u(t, x) = \int_D \exp \left\{ \int_0^1 c(\xi_\tau + x) dt \right\} f(\xi_\tau + x) d\mu(\xi), \quad (7)$$

где μ — мера, заданная на σ -алгебре борелевских множеств пространства D функций на $[0, t]$ без разрывов второго рода и соответствующая случайному однородному процессу с независимыми приращениями ξ_τ , $0 \leq \tau \leq t < \infty$, удовлетворяющему условию $\xi_0 = 0$ и принимающему значения в R . Характеристический функционал $\chi(l)$ меры μ имеет вид [50]:

$$\chi(l) = \exp \left\{ i l(m) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sigma_k \int_0^1 t^k \rho(u) du \right\},$$

где

$$m(t) = t \left(a + \int_R \frac{y^2}{1 + y^2} \pi(dy) \right),$$

$$\sigma_2 = b + \int_R y^2 \pi(dy),$$

$$\sigma_k = \int_R y^k \pi(dy), \quad k = 3, 4, \dots$$

$$\rho_t(u) = I_{[u, t]}(t).$$

В соответствии с (7), используя различные виды случайных процессов (процесс броуновского движения или винеровский, пуассоновский процесс, процесс Лапласа, телеграфный и т.д.), можно получить решения различных дифференциальных уравнений в виде континуальных интегралов в соответствующих пространствах X [50]. В частности, если ξ_t — винеровский процесс ($m(t) = ta$; $\sigma_2 = b$; $\sigma_k = 0, k > 2$; $\pi(dy) = 0$), $a = 0, b = 1$, то интеграл (7) дает решение задачи Коши для уравнения (5).

С помощью континуальных интегралов могут быть представлены решения различных интегральных уравнений. Так, например, решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(t, s) = x(t, s) + \int_Q K(t, s, t_1, s_1) x(t_1, s_1) dt_1 ds_1, \quad (8)$$

где

$$y(t, s) \in C_2; \quad \frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s} \in L_2(Q),$$

а ядро $K(t, s, t_1, s_1)$ удовлетворяет определенным условиям, может быть записано в виде [41]:

$$\begin{aligned} x(t, s) = & \exp \left\{ - \int_Q \left[\frac{\partial^2 y(t, s)}{\partial t \partial s} \right]^2 dt ds \right\} \times \\ & \times \int_{C_2} z(t, s) \exp \left\{ 2 \int_Q \frac{\partial^2 y(t, s)}{\partial t \partial s} d_{t,s} [z(t, s) + \right. \\ & \left. + \int_Q K(t, s, t_1, s_1) z(t_1, s_1) dt_1 ds_1] - \right. \\ & \left. - \int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \int_Q K(t, s, t_1, s_1) z(t_1, s_1) dt_1 ds_1 \right]^2 dt ds - \right. \\ & \left. - 2 \int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \int_Q K(t, s, t_1, s_1) z(t_1, s_1) dt_1 ds_1 \right] dz(t, s) \right\} d_W z. \end{aligned}$$

Аналогичным образом могут быть представлены решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода, а также систем интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода [41]. Нахождение решений систем дифференциальных уравнений в частных производных и систем интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода в виде континуальных интегралов исследовалось также в работах [78, 79].

Континуальное интегрирование — удобный метод исследования дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В частности, через континуальный интеграл, порожденный процессом $x_t = (-1)^{\xi_t}$, где ξ_t — пуассоновский процесс, может быть выражено решение задачи Коши для абстрактного телеграфного уравнения:

$$\begin{aligned} u_{TT} + \alpha u_T &= A^2 u \quad (\alpha > 0) \\ u(0) &= f, \quad u_T(0) = g, \end{aligned} \tag{9}$$

где u_T , u_{TT} — сильные производные функции $u(T)$, принимающей значения в банаховом пространстве Y ; f, g — элементы области определения

линейного оператора A^2 , действующего в Y . Если A порождает сильно-непрерывную группу ограниченных линейных операторов в Y , то решение задачи (9) представимо в виде [80] (см. также [50]):

$$u(T) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 \int_X [w_1((-1)^j \int_0^T x_t dt) + (-1)^j w_2((-1)^j \int_0^T x_t dt)] d\mu(x),$$

где X — пространство непрерывных справа ступенчатых функций, принимающих значения ± 1 , начинающихся в единице и имеющих любое конечное число точек разрыва; w_1 и w_2 — единственные решения задач Коши для абстрактного волнового уравнения

$$w_{i_T} = A^2 w_i, \quad i = 1, 2;$$

$$w_1(0) = f; \quad w_{2_T}(0) = g; \quad w_{1_T}(0) = w_2(0) = 0.$$

В случае, когда A^2 — оператор Лапласа, решения w_1 и w_2 хорошо известны.

С помощью континуальных интегралов по пространству ветвящихся траекторий могут быть представлены решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений [81,43].

Использованию континуальных интегралов при решении различных дифференциальных уравнений математической физики посвящается много работ, в том числе исследование решений параболических уравнений [82], Шредингера [30], дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков [83,84], волнового уравнения [85], уравнения Фоккера — Планка [86], уравнения Дирака [87,88], нелинейного уравнения Ланжевена [89], телеграфного уравнения [90] и т.д.

3. КONTИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Одной из основных областей использования континуальных интегралов является квантовая физика [67,91]. Подход к квантовой физике на основе континуальных интегралов по гауссовой мере, исследование меры Винера как частного случая гауссовых мер изложены в [92] (новое издание книги). В последние годы были получены значительные результаты в области построения меры континуального интегрирования в квантовой физике (см., например, [93—100]). В том числе получена евклидова мера для электромагнитного поля [97], определена мера в лагранжевых калибровочных теориях [98], построена гауссова мера на расширенной грассмановой алгеб-

ре для континуальных интегралов по фермионным полям [100]. Исследование континуальных интегралов евклидовой квантовой физики и основы разработанного авторами настоящего обзора метода их приближенного вычисления приводится в [101].

В квантовой механике метод интегрирования в функциональных пространствах разработан в наибольшей степени [102,67,10,11]. Использование приближенного континуального интегрирования для различных расчетов в квантовой механике рассмотрено, например, в [103,104]. Основой для нахождения различных физических характеристик является вычисление функции Грина для уравнения Шредингера в виде континуального интеграла [105]. В [106] предложен метод вычисления функции Грина на основе представления ее в виде фейнмановского интеграла (в мнимом времени), дающий значительные преимущества в численных расчетах. Нами развит этот метод на основе приближенного вычисления интегралов по условной мере Винера [73]. Об использовании континуальных интегралов при исследовании энергетических спектров, рассеяния частиц и других проблем см. в работах [107—116]. Разработанный авторами настоящего обзора метод приближенного вычисления континуальных интегралов применительно к задачам квантовой механики изложен в [117,118].

Использование континуальных интегралов при расчетах в квантовой электродинамике содержится, например, в [119—121]; применение их в релятивистской теории представлено в [122—127]. Континуальные интегралы используются в квантовой оптике [128,26], квантовой теории магнетизма [129], они играют важную роль при исследовании конформных аномалий в калибровочной теории [130—137]. Метод континуального интегрирования широко используется для аналитических и численных исследований в теории струн, мембран [138—149], полярона [150—152]. В последние годы много работ посвящается исследованию меры континуального интегрирования и использованию континуальных интегралов в квантовой теории гравитации [153—166], квантовой космологии [167—172]. Многие авторы занимаются теоретическим исследованием континуальных интегралов в различных областях квантовой физики [173—190], а также разработкой методов для их приближенного вычисления [189—201].

Одним из способов определения континуальных интегралов в квантовой теории путем сведения их к обычным (римановым) интегралам высокой кратности является введение пространственно-временной решетки [202]. На этом пути был получен ряд важных численных результатов (см. [203—207]). При проведении расчетов на решетке возникает проблема исследования существования и единственности континуального предела [208—213], зависимости результатов от шага решетки, возникновение эффектов конечного размера и решеточных артефактов [214—216], проблемы с топологией на решетке (неоднозначность определения топологического заряда и др.)

[217—220]. Проблема континуального предела является объектом исследования многих авторов [221—228]. Ряд авторов занимается исследованием непосредственно в континуальном пределе (см. [95,229—231]), развитием непрерывной квантовой калибровочной теории [6], методов непертурбативной регуляризации на континуальном уровне [231—235], методов вычисления континуальных интегралов без введения решетки [236,198]. Разрабатываемые нами методы приближенного интегрирования в функциональных пространствах также не требуют предварительной дискретизации пространства и времени типа решеточной [237].

В евклидовой квантовой механике, в соответствии с формулой Фейнмана — Каца, матричный элемент оператора эволюции $\exp\{-\beta H\}$

$$Z(x_i, x_f, \beta) = \langle x_f | e^{-\beta H} | x_i \rangle, \tag{10}$$

где H — гамильтониан системы $H = \frac{1}{2} \dot{p}^2 + V$, записывается в виде континуального интеграла по условной мере Винера

$$Z(x_i, x_f, \beta) = \int_C \exp \left\{ - \int_0^\beta V(x(t)) dt \right\} d_W x, \tag{11}$$

где интегрирование производится по всем функциям $x(t) \in C[0, \beta]$, удовлетворяющим условию $x(0) = x_i$; $x(\beta) = x_f$. Величина (10) представляет собой плотность вероятности нахождения частицы в точке с координатой x_f в момент времени $t = \beta$ при условии, что в момент $t = 0$ она имела координату x_i . В отличие от записи в виде интеграла по траекториям, в выражении (11) в показателе экспоненты стоит не функционал действия S , а лишь часть его, соответствующая потенциальной энергии. Кинетический член $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ под знаком интеграла отсутствует, т.к. он включен в меру интегрирования (см., например, [67]). Функция Грина Z с периодическими граничными условиями $x_i = x_f = x$ является основой для нахождения различных физических характеристик квантовой системы. После соответствующей замены переменных [238] континуальный интеграл $Z(x, x, \beta)$ может быть записан в виде стандартного интеграла по условной мере Винера в пространстве $C_0 \equiv \{C[0, 1]; x(0) = x(1) = 0\}$:

$$Z(x, x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{C_0} \exp \left\{ -\beta \int_0^1 V(\sqrt{\beta} x(t) + x) dt \right\} d_W x. \tag{12}$$

Выражения для свободной энергии $f(\beta)$, энергии основного состояния E_0 , пропагатора $G(\tau)$, волновой функции $\Psi_0(x)$, разности энергий основного и

первого возбужденного состояния ΔE в виде континуальных интегралов по условной мере Винера записываются следующим образом [238]:

$$\begin{aligned}
 f(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta), \\
 E_0 &= \langle 0 | H | 0 \rangle = \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\beta)} (2\pi\beta)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{C_0} \exp \left\{ -\beta \int_0^1 V(\sqrt{\beta} x(t) + x) dt \right\} \times \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} x V'(x) + V(x) \right] d_W x dx; \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\tau) &= \langle 0 | x(0)x(\tau) | 0 \rangle = \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\beta)} (2\pi\beta)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{C_0} \exp \left\{ -\beta \int_0^1 V(\sqrt{\beta} x(t) + x) dt \right\} \times \\
 &\quad \times [\sqrt{\beta} x(\tau/t) + x] d_W x dx, \\
 \Delta E &= E_1 - E_0 = -\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} \ln G(\tau), \\
 |\psi_0(x)|^2 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\exp \{E_0\beta\} Z(x, x, \beta)). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$Z(\beta) = \text{Tr} \exp \{-\beta H\} = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, x, \beta) dx,$$

$\beta = \frac{1}{kT}$, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Аналогичные выражения для наблюдаемых величин в виде континуальных интегралов имеют место в случае евклидовой квантовой теории поля (см. [92]). Так, например, в двумерной евклидовой теории поля с полиномиальными взаимодействиями бозонных полей $P(\varphi)_2$ [239] гауссова мера μ определяется на пространстве Шварца обобщенных функций умеренного роста $S'(R^2)$. Перенормировки в $P(\varphi)_2$ -модели ограничиваются вычитанием, связанным с упорядочением Вика. Более подробно контину-

альные интегралы $P(\varphi)_2$ -модели и их приближенное вычисление будут рассмотрены ниже.

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КONTИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ГАУССОВЫМ МЕРАМ

Первые результаты по приближенному вычислению континуальных интегралов по гауссовым мерам связаны с работами Р.Камерона [240], который получил аналог формулы Симпсона для винеровских интегралов по пространству непрерывных функций, а также с работами И.М.Гельфанда и Н.Н.Ченцова [241]. В.С.Владимиров [242] построил квадратурные формулы третьего порядка точности для интегралов по мере Винера, а также формулы, точные для определенного типа функционалов 4 степени. Идеи построения приближенных формул заданного порядка точности для континуальных интегралов по мере Винера и условной мере Винера развиты в работах [243—246]. Приближенное вычисление континуальных интегралов по произвольным гауссовым мерам исследовалось Л.А.Яновичем (см. [49] и цит. литературу). Им, в частности, были построены для континуальных интегралов приближенные формулы интерполяционного типа, квадратурные формулы для интегралов от функционалов специального типа (например, зависящих от нормы аргумента и т.д.), приближенные формулы заданной степени точности, формулы, основанные на аппроксимации аргумента в функционале и ряд других формул. Были получены также приближенные формулы для интегралов по мерам, соответствующим различным однородным случайным процессам с независимыми приращениями (винеровский, пуассоновский, Лапласа, телеграфного типа и т.д.), приближенные формулы для интегралов по гауссовым мерам, основанные на интерполяции характеристического функционала меры и некоторые другие формулы [50]. Одним из наиболее общих подходов к приближенному вычислению континуальных интегралов является построение приближенных формул, являющихся точными на классе функциональных многочленов заданной степени, идея которого восходит к работам Р.Камерона. В рамках этого подхода нами были построены приближенные формулы произвольного заданного порядка точности для континуальных интегралов по произвольной гауссовой мере [247].

Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство, плотное почти всюду в полном сепарабельном метрическом пространстве X и порожденное гауссовой мерой μ , и пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в \mathcal{H} . Для приближенного вычисления континуального интеграла по мере μ от произвольного

интегрируемого на X вещественного функционала $F[x]$ нами получена приближенная формула, задаваемая следующей теоремой [247].

Теорема 1. Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (e_k, x) e_k, \quad U_n(u) = \sum_{k=1}^n u_k e_k,$$

$$\theta_m(v) = \sum_{k=1}^m c_{m,k} \rho(v_k), \quad v \in R^m, \quad u \in R^n,$$

$[c_{m,k}]^2$, $k=1, \dots, m$ — корни многочлена $Q_m(r) = \sum_{k=0}^m (-1)^k r^{m-k} / k!$; $r \in R$ и

функция $\rho(r): R \rightarrow X$ удовлетворяет условиям:

$$\rho(r) = -\rho(-r),$$

$$\int_R \langle \xi, \rho(r) \rangle \langle \eta, \rho(r) \rangle d\nu(r) = K(\xi, \eta),$$

$$\prod_{i=1}^j \langle \xi_i, \rho(r) \rangle \in L(R, \nu), \quad 1 \leq j \leq 2m+1, \quad \eta, \xi, \xi_i \in X',$$

$K(\xi, \eta)$ — корреляционный функционал меры μ .

Тогда приближенная формула

$$\begin{aligned} \int_X F[x] d\mu(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} \int_{R^m} F[\theta_m(v) - \theta_{m,n}(v) + \\ &+ U_n(u)] d\nu^{(m)}(v) du + \mathcal{R}_{m,n}(F) \end{aligned} \quad (15)$$

точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m+1$.

Здесь $\mathcal{R}_{m,n}(F)$ — остаточный член формулы, $\theta_{m,n}(v) = S_n(\theta_m(v))$ и мера $\nu^{(m)}(v)$ в R^m является декартовым произведением симметричных вероятностных мер ν на R . В случае $m=1$ формула (15) совпадает с результатом, полученным в [49].

Функциональным многочленом степени m называется функционал вида

$$P_m[x] = \sum_{k=0}^m p_k[x],$$

где $p_k[x]$ — непрерывная на X однородная форма k -го порядка.

Приближенная формула (15) заменяет нахождение континуального интеграла вычислением $n + m$ -кратного риманова интеграла. Как показывают практические расчеты (см. ниже), в ряде случаев для достижения хорошей точности (порядка 0,1% и выше) оказалось достаточным выбрать малые значения n и m , в том числе даже равными единице.

Рассмотрим сходимость приближений, получаемых согласно (15) к точному значению интеграла при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что для почти всех $v \in R^m$ относительно меры ν при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\theta_{m,n}(v) \rightarrow \theta_m(v). \tag{16}$$

В случае пространства $C[a, b]$ выполнение (16) очевидно.

Теорема 2 [247]. Пусть $F[x]$ — непрерывный на X функционал, удовлетворяющий условию

$$|F[x]| \leq g(A(x, x)),$$

где $A(x, x)$ — неотрицательный квадратичный функционал вида

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(x, e_k)^2, \tag{17}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty, \quad \gamma_k \geq 0,$$

$g(u)$ — неубывающая функция и

$$\int \int_{R^m \times X} g[A(\theta_m(v), \theta_m(v)) + A(x, x)] d\mu(x) d\nu(v) < \infty.$$

Тогда $\mathcal{R}_{m,n}(F) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценка остаточного члена приближенной формулы (15) задается следующей теоремой [247].

Теорема 3. Пусть интегрируемый по мере μ функционал $F[x]$ допускает представление

$$F[x + x_0] = P_{2m+1}[x] + r_{2m+1}(x, x_0), \tag{18}$$

где P_{2m+1} — функциональный многочлен степени $\leq 2m + 1$, а остаток r_{2m+1} оценивается выражением

$$|r_{2m+1}(x, x_0)| \leq (A(x, x))^{m+1} [L_1 \exp \{L_2 A(x + x_0, x + x_0)\} + L_3 \exp \{L_2 A(x_0, x_0)\}]. \tag{19}$$

Здесь $A(x, x)$ определяется согласно (17), x_0 — фиксированный элемент из X , $L_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$);

$$1 - 2L_2 \gamma_k \geq \alpha > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k a_k < \infty,$$

где a_k определяется соотношениями

$$(e_k, \theta_m(v))^2 \leq a_k \text{ для всех } v \in R^m.$$

Тогда для остатка приближенной формулы (15) имеет место оценка

$$|\mathcal{R}_{m,n}(F)| \leq G_m \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k \right)^{m+1} + H_m \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k a_k \right)^{m+1},$$

где G_m и H_m — положительные константы, зависящие от m [247].

В случае $m = 1$ теорема 3 совпадает с результатом, полученным в [49].

В качестве примера рассмотрим скорость сходимости к точному результату приближений, получаемых согласно (15) в случае интеграла по мере Винера в пространстве $C = \{[0, 1], x(0) = 0\}$. Мера Винера характеризуется нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$K(t, s) = \min \{t, s\}, \quad t, s \in [0, 1].$$

В данном случае $e_k(t) = \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, где λ_k и φ_k — собственные значения и собственные функции ядра $K(t, s)$:

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2} \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi t, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2}.$$

В случае меры Винера приближенная формула (15) приобретает вид

$$\int_G F[x] d_W x = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\theta_m(v, t) - \theta_{m,n}(v, t) + U_n(u, t)] dv du + \mathcal{R}_{m,n}(F), \quad (20)$$

где

$$\theta_m(v, t) = \sum_{i=1}^m c_{m,i} \rho(v, t), \quad \rho(v, t) = \begin{cases} \text{sign}(v), & 0 \leq |v| < t \leq 1 \\ 0, & 0 \leq t < |v| \leq 1, \end{cases}$$

$$\theta_{m,n}(v, t) = 4 \sum_{k=1}^n \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi t \frac{1}{(2k-1)\pi} \sum_{i=1}^m c_{m,i} \text{sign}(v_i) \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi v_i,$$

$$U_n(u, t) = 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^n \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi t \frac{u_k}{(2k-1)\pi}.$$

В качестве $A(x, x)$ можно взять $\int_0^1 x^2(t) dt$. Нетрудно видеть, что в этом

случае условия (17) выполняются. На основании теоремы 3 мы получаем, что порядок сходимости приближенной формулы (20) при $n \rightarrow \infty$ в случае, когда функционал $F[x]$ удовлетворяет условиям (18), (19) с выбранным $A(x, x)$, равен $O(n^{-(m+1)})$.

Рассмотрим в качестве примера приближенное вычисление интеграла по мере Винера от функционала

$$F[x] = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt\right\}.$$

Точное значение континуального интеграла в данном случае известно [67]:

$$I = \int_C \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt\right\} d_W x = \frac{1}{\sqrt{\cos 1}} \approx 1,3604468816\dots$$

Приближенные значения, получаемые согласно (20), обозначим $I_n^{(m)}$, где

$$I_n^{(1)} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}} \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{2} w_n(v)\right\} dv,$$

$$I_n^{(2)} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}} 2 \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{4} w_n(v_1)\right\} \times$$

$$\times \int_0^{v_1} \exp\left\{\frac{1}{4} w_n(v_2)\right\} \cos\left[\frac{1}{4}(w_n(v_1) - w_n(v_2))\right] \times$$

$$\times \text{ch}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - v_1 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos\left(j - \frac{1}{2}\right) \pi v_1 \cos\left(j - \frac{1}{2}\right) \pi v_2\right)\right\} dv_1 dv_2.$$

Здесь

$$w_n(v) = 1 - v - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos^2 \left(j - \frac{1}{2} \right) \pi v.$$

Приближенные значения $I_n^{(1)}$ и $I_n^{(2)}$, полученные на ЭВМ, приведены в табл.1.

Таблица 1. Значения винеровского интеграла, вычисленные с помощью составной приближенной формулы

n	$I_n^{(1)}$	$I_n^{(2)}$
1	1,35980945	1,360432541
2	1,36034801	1,360446160
3	1,36041602	1,360446774
4	1,36043360	1,360446855
5	1,36044001	1,360446873
10	1,36044601	1,360446880

Отметим, что для нахождения континуального интеграла по формулам (15), (20) необходимо вычислять $(n+m)$ -кратный интеграл. Как следует из табл.1, при одной и той же кратности интегралов приближенная формула (20) при $m=2$ обеспечивает более точный результат, чем при $m=1$.

5. УСЛОВНАЯ МЕРА ВИНЕРА

В случае условной меры Винера $d_W x$ в пространстве $C_0 = \{C[0, 1]; x(0) = x(1) = 0\}$ приближенная формула (15) имеет вид

$$\int_{C_0} F[x] d_W x = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} 2^{-m} \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{m} F[\tilde{\theta}_m(v, \cdot)] -$$

$$- \tilde{\theta}_{m,n}(v, \cdot) + \tilde{U}_n(u, \cdot)] dv du + \mathcal{R}_{m,n}(F), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_m(v, t) &= \sum_{k=1}^m c_{m,k} \tilde{p}(v_k, t), \quad \tilde{p}(v, t) = \begin{cases} -t \operatorname{sign}(v), & t \leq |v| \\ (1-t) \operatorname{sign}(v), & t > |v| \end{cases} \\ \tilde{\theta}_{m,n}(v, t) &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t) \sum_{j=1}^m c_{m,j} \operatorname{sign}(v_j) \cos(k\pi v_j), \\ \tilde{U}_n(u, t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}}{k\pi} u_k \sin(k\pi t). \end{aligned}$$

Аналогично (20) скорость сходимости приближений, получаемых согласно (21), имеет порядок $\mathcal{R}_{m,n}(F) = O(n^{-(m+1)})$.

Во многих случаях оказывается удобным выделить часть подынтегрального функционала в качестве весового и использовать приближенные формулы с весом. В работе [248] нами было построено семейство приближенных формул для континуальных интегралов по условной мере Винера

$$\int_{C_0} P[x] F[x] d_W x$$

с весом

$$P[x] = \exp \left\{ \int_0^1 [p(t)x^2(t) + q(t)x(t)] dt \right\}, \quad p(t), q(t) \in C[0, 1]. \quad (22)$$

Теорема 4 [248]. Пусть $B(s)$ — решение дифференциального уравнения

$$(1-s)B'(s) - (1-s)^2 B^2(s) - 3B(s) - 2p(s) = 0, \quad s \in [0, 1] \quad (23)$$

с начальным условием

$$B(1) = -\frac{2}{3} p(1).$$

Пусть

$$W(t) = \exp \left\{ \int_0^t (1-s)B(s) ds \right\}, \quad (24)$$

$$a(t) = \int_0^t L(s) ds - \frac{1-t}{W(t)} \int_0^t B(s)W(s) \left[\int_0^s L(u) du \right] ds,$$

$$L(t) = \int_0^t [B(s)W(s)H(s) - q(s)] ds + c,$$

$$H(t) = \int_t^1 q(s) \frac{1-s}{W(s)} ds,$$

где константа c определяется из условия $\int_0^1 L(s) ds = 0$.

Тогда приближенная формула

$$\int_{C_0} P[x] F[x] d_W x = [W(1)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 L^2(t) dt \right\} \times \\ \times 2^{-m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\Psi_m(v, \cdot) + a(\cdot)] dv_1 \dots dv_m + \mathcal{R}_m(F), \quad (25)$$

где

$$\Psi_m(v, \cdot) = \sum_{k=1}^m c_{m,k} \Psi(v_k, \cdot), \\ \Psi(r, \cdot) = f(r, \cdot) - \sigma(r, \cdot); \quad \sigma(r, t) = \begin{cases} \text{sign}(r), & t \leq |r| \\ 0, & t > |r| \end{cases} \\ f(r, t) = \text{sign}(r) \frac{1-t}{W(t)} \left[1 + \int_0^{\min\{|r|, t\}} B(s)W(s) ds \right],$$

точная для любого функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

Доказательство теоремы 4 основывается на свойствах найденного и исследованного нами линейного преобразования $x(t) \rightarrow y(t)$ [249], задаваемого соотношением $y = x + Ax$, где

$$Ax(t) = (1-t) \int_0^t B(s)x(s) ds, \quad B(s) \in C[0, 1].$$

Данное преобразование взаимно однозначно отображает пространство C_0 само на себя. Обратное преобразование имеет вид [249]:

$$x(t) = \hat{A}y(t) = y(t) - \frac{1-t}{W(t)} \int_0^t B(s)W(s)x(s) ds,$$

где $W(t)$ удовлетворяет (24).

В частном случае $p(t) \equiv p = \text{const}$, $q(t) \equiv q = \text{const}$, часто встречающемся в приложениях, уравнение Риккати (23) решается в явном виде

$$B(s) = \frac{1}{1-s} \left[\sqrt{2p} \text{ctg}(\sqrt{2p}(1-s)) - \frac{1}{1-s} \right]$$

и приближенная формула (25) приобретает вид

$$\int_{C_0} \exp \left\{ \int_0^1 [px^2(t) + qx(t)] dt \right\} F[x] d_W x =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2p}}{\sin \sqrt{2p}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{q^2}{(2p)^{3/2}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{p}{2}} \right] \right\} \times$$

$$\times 2^{-m} \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{m} F[\Psi_m(v, \cdot) + a(\cdot)] dv_1 \dots dv_m + \mathcal{R}_m(F), \quad (26)$$

где

$$a(t) = q \left(p \cos \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^{-1} \sin \left(\sqrt{\frac{p}{2}} t \right) \sin \left(\sqrt{\frac{p}{2}} (1-t) \right).$$

Оценка остаточного члена приближенной формулы (26) в зависимости от m устанавливается следующей теоремой [248].

Теорема 5. Пусть интегрируемый с весом $P[x]$ по условной мере Винера функционал $F[x]$ допускает представление

$$F[x] = P_{2m+1}[x] + r_{2m+1}[x], \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

где $P_{2m+1}[x]$ — функциональный многочлен степени $\leq 2m+1$, а остаток $r_{2m+1}[x]$ оценивается выражением

$$|r_{2m+1}[x]| \leq c_1(m) \exp \left\{ c_2(m) \int_0^1 x^2(t) dt \right\},$$

$$c_1(m), c_2(m) \geq 0;$$

$$0 \leq c_3(m) < \frac{\pi^2}{2}, \quad c_3(m) = p + c_2(m).$$

Тогда

$$|\mathcal{R}_m(F)| \leq c_1(m) \left[\left(\frac{\sqrt{2c_3(m)}}{\sin \sqrt{2c_3(m)}} \right)^{1/2} \times \right.$$

$$\times \exp \left\{ \frac{q^2}{(2c_3(m))^{3/2}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{1}{2} c_3(m)} - \sqrt{\frac{1}{2} c_3(m)} \right] \right\} +$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2p}}{\sin \sqrt{2p}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{q^2}{(2p)^{3/2}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{p}{2}} \right] + \frac{1}{6} c_2(m)b(m) \right\} \right],$$

Таблица 2. Значения континуального интеграла, полученные с помощью приближенной формулы с весом

$p \backslash q$	0	1	2	3	4
0	1	0,9997	0,9948	0,9756	0,9311
1	0,9900	0,9985	1,0131	1,0071	0,9531
2	0,9550	0,9842	1,0416	1,0568	0,9687
-1	0,9931	0,9896	0,9777	0,9539	0,9138
-2	0,9768	0,9724	0,9589	0,9350	0,8990

где

$$b(m) = (d_1 \sqrt{m} + d_2)^2,$$

d_1 и d_2 — некоторые константы, не зависящие от m [248].

Следствие. Достаточным условием стремления к нулю остаточного члена формулы (26) $\mathcal{R}_m(F)$ при $m \rightarrow \infty$ является такое стремление к нулю остатка $r_{2m+1}[x]$, при котором

$$c_2(m) \equiv c_2 = \text{const},$$

$$c_1(m) \exp \left\{ \frac{1}{6} c_2 (d_1 \sqrt{m} + d_2)^2 \right\} \rightarrow 0.$$

Рассмотрим в качестве иллюстрации приближенное вычисление интеграла

$$I = \int_{c_0}^1 P[x] \exp \left\{ - \int_0^1 [px^2(t) + qx(t)] dt \right\} d_W x, \quad (27)$$

где $P[x]$ определяется согласно (22) при $p(t) \equiv p$, $q(t) \equiv q$. Очевидно, что точный ответ $I = 1$. Результаты $I^{(1)}$ приближенного вычисления интеграла (27) с помощью формулы (26) при $m = 1$ для некоторых значений параметров p и q приведены в табл.2 и 3. В табл.3 приведены значения реальной погрешности $\varepsilon^{(1)} = I - I^{(1)}$ и теоретической оценки погрешности $R^{(1)} = \mathcal{R}_1(F)$, полученной на основании теоремы 5, для случая $p = 0$. Из таблиц видно, что хорошая точность приближений, получаемых по «элементарной» формуле (26) при $m = 1$, достигается лишь при малых p и q , т.е. когда подынтегральный функционал не слишком уклоняется от функционального многочлена степени $\leq 2m + 1 = 3$. Более точные результаты для широкого круга функционалов могут быть получены с использо-

Таблица 3. Погрешность вычисления континуального интеграла

q	$I^{(1)}$	$\epsilon^{(1)}$	$R^{(1)}$
0	1	0	0
0,1	0,9999938	$0,62 \cdot 10^{-5}$	$2,39 \cdot 10^{-5}$
0,2	0,9999972	$0,28 \cdot 10^{-5}$	$4,30 \cdot 10^{-4}$
0,3	0,9999962	$0,38 \cdot 10^{-5}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$
0,4	0,9999891	$0,11 \cdot 10^{-4}$	$9,01 \cdot 10^{-3}$
0,5	0,9999777	$0,22 \cdot 10^{-4}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$

ванием «составных» (т.е. содержащих дополнительное интегрирование по R^n) приближенных формул типа (21). Комбинируя методы построения приближенных формул, развитые нами в [247] и [248], мы получаем новые формулы с весом, обладающие достоинствами составных приближенных формул [250].

Теорема 6. При выполнении условий теорем 1 и 4 приближенная формула

$$\begin{aligned}
 \int_{C_0} P[x] F[x] d_W x &= 2\pi^{-n/2} [W(1)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 L^2(t) dt \right\} \times \\
 &\times 2^{-m} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{m} \Phi[\tilde{\theta}_m(v, \cdot)] - \tilde{\theta}_{m,n}(v, \cdot) + \\
 &+ \tilde{U}_n(u, \cdot)] dv du + \mathcal{R}_{m,n}(F), \tag{28}
 \end{aligned}$$

где $P[x]$ удовлетворяет (22), $\tilde{\theta}_m$, $\tilde{\theta}_{m,n}$ и \tilde{U}_n соответствуют (21), $\Phi[x] = F[\hat{A}x(\cdot) + a(\cdot)]$, точно для любого функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

При определенных условиях нами доказана сходимость приближений, получаемых согласно (28), к точному значению интеграла при $n \rightarrow \infty$ [250] и найдена оценка остаточного члена в зависимости от m и n , из которой следует, в частности, что $\mathcal{R}_{m,n} = O(n^{-(m+1)})$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [250]).

Рассмотрим использование составных и элементарных формул на примере вычисления континуального интеграла (27) с точным значением $I = 1$. Результаты [250] вычисления этого интеграла с помощью элементарной формулы (26) с $m = 1$ и с $m = 2$, а также с помощью составной формулы (28) с $m = n = 1$ показаны на рис.1 и 2. Из графиков видно, что составная формула с весом дает более точные приближения, чем элементарная, при

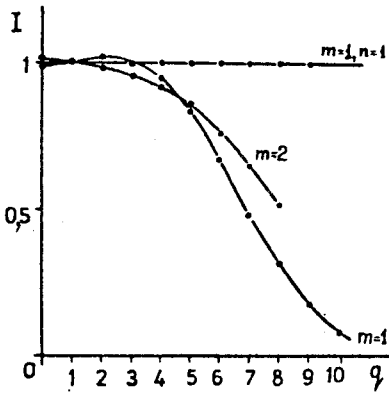


Рис. 1. Результаты вычисления континуального интеграла для $p = 1$

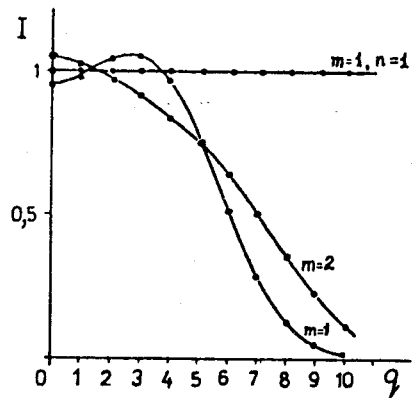


Рис. 2. Результаты вычисления континуального интеграла для $p = 2$

одинаковой кратности содержащихся в них римановых интегралов, и что с помощью составной формулы могут быть получены хорошие результаты даже если подынтегральный функционал значительно уклоняется от функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

6. МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Рассмотрим применение приближенных формул для континуальных интегралов и их эффективность на некоторых квантово-механических моделях. Вначале рассмотрим простой, но весьма поучительный пример гармонического осциллятора с потенциалом $V(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$. Хорошо известно, что квантово-механическая система с таким потенциалом обладает дискретным энергетическим спектром $E_n = n + \frac{1}{2}$. При исследовании ее методом континуального интегрирования функция Грина Z запишется в виде следующего интеграла по условной мере Винера:

$$Z(x, x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left\{-\frac{\beta}{2}x^2\right\} \int_{C_0} \exp\left\{-\frac{\beta}{2} \int_0^1 [\beta x^2(t) + 2x\sqrt{\beta}x(t)] dt\right\} d_W x. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что с помощью формулы с весом (26) для интеграла (29) может быть получен точный ответ. Подставляя в (26) $p = \frac{1}{2}\beta^2$; $q = x\beta^{3/2}$, $F[x] \equiv 1$, мы имеем

$$Z(x, x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \operatorname{sh} \beta}} \exp \left\{ -\operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right) x^2 \right\}. \quad (30)$$

В отличие от традиционной формулировки квантовой механики, континуально-интегральный подход позволяет в данном случае аналитически исследовать систему при любой конечной температуре $T = \frac{1}{k\beta}$ и наглядно продемонстрировать стремление ее характеристик к термодинамическому пределу $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$). Так, например, для энергии основного состояния E_0 в соответствии с (13) мы получаем

$$E_0^{(\beta)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 Z(x, x, \beta) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} Z(x, x, \beta) dx}.$$

Подставляя сюда (30), получаем

$$E_0^{(\beta)} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta}{2} \right). \quad (31)$$

Очевидно, что при $\beta \rightarrow \infty$ величина $E_0^{(\beta)}$ стремится к известному из квантовой механики значению

$$E_0^{(\beta)} \rightarrow E_0 = \frac{1}{2}.$$

Аналогично для разности энергий соседних квантовых уровней ΔE и волновой функции основного состояния $\Psi_0(x)$ при конечной температуре мы имеем [238]:

$$\begin{aligned} \Delta E^{(\beta)} &= \operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right), \\ |\Psi_0^{(\beta)}(x)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \operatorname{sh} \beta}} \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right\} \exp \left\{ -\operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right) x^2 \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, что при $\beta \rightarrow \infty$

$$\Delta E^{(\beta)} \rightarrow \Delta E = 1,$$

$$|\Psi_0^{(\beta)}(x)|^2 \rightarrow |\Psi_0(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Характер стремления к термодинамическому пределу виден из табл.4 и 5, в которых приведены значения величин $E_0^{(\beta)}$, $\Delta E^{(\beta)}$ и $|\Psi_0^{(\beta)}(x)|^2$ при различных β .

Таблица 4. Энергия основного состояния гармонического осциллятора

β	$E_0^{(\beta)}$	n	$E_0^{(\beta, n)}$	Счетное время, с
5	0,50678	1	0,5077	1,8
6	0,50248	2	0,5073	3,1
7	0,50091	3	0,5010	5,5
8	0,50034	5	0,5002	9,7

Таблица 5. Разность энергий соседних квантовых уровней и волновая функция основного состояния гармонического осциллятора

β	$\Delta E^{(\beta)}$	$ \Psi_0^{(\beta)}(x) ^2$
5	0,9866	$1,0345 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9866 x^2)$
6	0,9951	$1,0150 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9951 x^2)$
7	0,9982	$1,0064 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9982 x^2)$
8	0,9993	$1,0027 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9993 x^2)$

В табл.4 приведены также результаты приближенного вычисления величины $E_0^{(\beta)}$ с помощью составной приближенной формулы (21) при $m=1$ и различных n , т.е. путем вычисления $(n+2)$ -кратного интеграла, и указано счетное время нахождения $E_0^{(\beta, n)}$ на ЭВМ CDC-6500 при вычислении римановых интегралов с помощью квадратур Гаусса с относительной погрешностью до 10^{-4} .

На рис.3 в логарифмическом масштабе крестиками показаны результаты вычисления пропагатора $G(\tau) = \langle 0 | x(0)x(\tau) | 0 \rangle$ с помощью составной приближенной формулы (21) при $m=1$, $n=2$, $\beta=6$. Счетное время находилось в пределах 10 с на точку τ . Заметим, что точное значение $G^{(\beta)}(\tau)$ при произвольном β , полученное из (13) и (30),

$$G^{(\beta)}(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta}{2} \right) \left(\operatorname{ch} \tau - \operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right) \operatorname{sh} \tau \right),$$

откуда

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} G^{(\beta)}(\tau) = G(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau}. \quad (33)$$

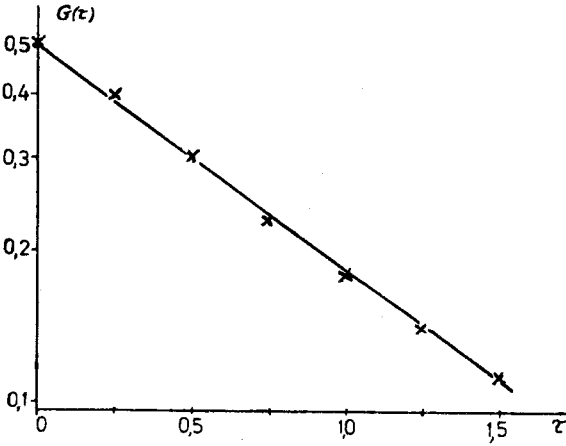


Рис. 3. Пропагатор гармонического осциллятора

Величина $G(\tau)$ в термодинамическом пределе (33) показана на рис.3 сплошной линией. На основании вычисленных значений $G^{(\beta, n)}(\tau)$ (рис.3, крестики) мы получили [238] методом наименьших квадратов

$$\Delta E^{(\beta, n)} = -\frac{d}{d\tau} \ln G^{(\beta, n)}(\tau) = 1,0198.$$

Для сравнения приведем результаты аналогичных расчетов, полученные другими авторами. В работе [103] значение E_0 вычислялось путем аппроксимации континуального интеграла на решетке с числом узлов $N=51$ и шагом решетки $a=0,5$. При точном нахождении N -кратного интеграла результат составил

$$E_0^{(N)} = 0,447; \quad \Delta E^{(N)} = 0,9875,$$

а при вычислении его путем моделирования $N_E=100$ решеточных конфигураций в [103] было получено

$$E_0^{(N, N_E)} = 0,45; \quad \Delta E^{(N, N_E)} = 0,99.$$

В работе [236] путем аппроксимации траекторий в континуальном интеграле при нахождении $(N=4)$ -кратного интеграла с помощью $N_R=100$ моделирований по 10^4 траекторий (без введения решетки) было получено

$$E_0^{(N, N_R)} = 0,4932 \pm 0,145; \quad \Delta E_0^{(N, N_R)} = 0,8801 \pm 0,202,$$

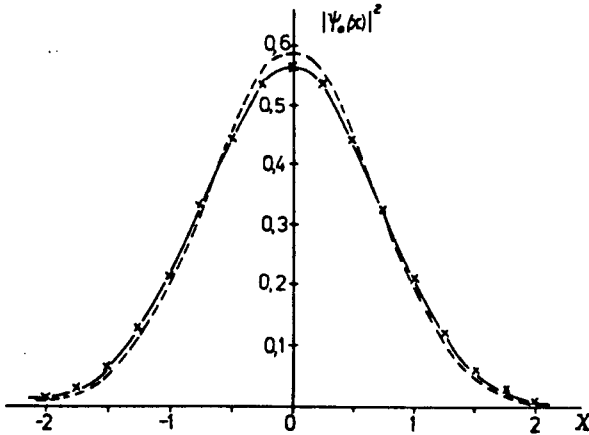


Рис. 4. Волновая функция основного состояния гармонического осциллятора

что потребовало 19×100 с счетного времени на ЭВМ Vax 780. При $N = 10$, $N_R = 100$ результат работы [236] составил

$$E_0^{(N, N_R)} = 0,4979 \pm 0,051; \quad \Delta E_0^{(N, N_R)} = 0,9331 \pm 0,129,$$

счетное время 67×100 с.

На рис.4 сплошной линией показано теоретическое значение квадрата волновой функции основного состояния в термодинамическом пределе, пунктирной линией — наилучший результат работы [103], полученный на решетке с $N = 100$ узлов и шагом $a = 1$ при точном нахождении N -кратного интеграла, т.е.

$$|\Psi_0^{(N)}(x)|^2 = 0,59 \exp(-1,1x^2) = 1,05 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-1,1x^2),$$

а крестиками — вычисленные нами значения, полученные с помощью составной приближенной формулы (21) при $m = 1$, $n = 2$, $\beta = 6$. Численное интегрирование осуществлялось с помощью гауссовых квадратур с относительной погрешностью до 10^{-5} . Счетное время на ЭВМ CDC-6500 составляло порядка 0,2 с на точку x .

Приведем также результаты расчетов для ангармонического осциллятора с потенциалом $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + gx^4$. В данном случае континуальный интеграл $Z(x, x, \beta)$ точно не берется. Для его вычисления мы использовали

Таблица 6. Энергия основного состояния и пропагатор ангармонического осциллятора

g	E_0^* [251]	$G^{(N)}(0)$ [236]		β	Формула с весом (26)	
		$N = 4$	$N = 20$		$E_0^{(\beta, 1)}$	$G^{(\beta, 1)}(0)$
0,1	0,559146	$4,33 \pm 0,16$	$0,409 \pm 0,06$	3	0,552	0,406
0,2	0,602405	—	—	2,5	0,592	0,364
0,5	0,696176	$0,296 \pm 0,07$	$0,293 \pm 0,04$	2	0,685	0,293
1,0	0,803771	$0,269 \pm 0,08$	$0,267 \pm 0,08$	1,5	0,774	0,257

Таблица 7. Энергия основного и первого возбужденного состояний ангармонического осциллятора

g	ΔE^* [251]	$G^*(0)$ [236]	$\Delta E^{(N)}$ [236] $N = 20$	β	Составная формула (21)		
					$E_0^{(\beta, 1)}$	$\Delta E^{(\beta, 1)}$	$G^{(\beta, 1)}(0)$
0,1	1,2104	0,4125	$1,03 \pm 0,29$	4,5	0,570	1,14	0,419
0,2	1,3481	—	—	4	0,616	1,32	0,377
0,5	1,6282	0,3058	$1,50 \pm 0,67$	3	0,707	1,55	0,313
1,0	1,9341	0,2571	$1,56 \pm 0,81$	2,5	0,832	1,88	0,263

приближенную формулу с весом (26) и составную приближенную формулу (21). Результаты расчетов [118] приведены в табл.6 и 7. Общее время вычисления $E_0^{(\beta, 1)}$ и $G^{(\beta, 1)}(0)$ составило порядка 0,5 мин на точку g для формулы (21) и порядка 10 мин на точку g для формулы (26). «Точные» результаты [251,236] обозначены через E_0^* , $G^*(0)$, ΔE^* . Результаты расчетов, полученные в работе [236] путем 10 моделирований по 3000 траекторий обозначены $G^{(N)}(0)$ и $\Delta E^{(N)}$. Приведенное в [236] счетное время составляет 10×25 с на точку g для $N=4$ и 10×17 мин на точку g для $N=20$. Через $\Delta E^{(\beta, 1)}$ обозначена логарифмическая производная величины $G^{(\beta, 1)}(\tau)$, полученная нами на основании значений $G^{(\beta, 1)}(\tau)$, вычисленных с помощью (21) при $n = m = 1$ [238].

Результаты расчетов показывают, что путем вычисления континуальных интегралов с помощью приближенных формул с минимальными значениями параметров m и n могут быть найдены значения рассмотренных величин с

такой же (а в ряде случаев и с более высокой) точностью, что и в работах [103] и [236], но при существенно меньшей кратности вычисляемых римановых интегралов, и, как следствие, существенно меньших временах счета на ЭВМ. Это позволяет использовать для вычисления интегралов детерминированные методы (в отличие от метода Монте-Карло, используемого обычно при расчетах на решетке и дающего лишь вероятностную оценку результатов) и приводит к значительной экономии счетного времени и памяти ЭВМ.

7. ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ДВУГОРБОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Рассмотрим основное состояние квантово-механической системы, описываемой гамильтонианом $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ с потенциалом

$$V(x) = \lambda(x^2 - f^2)^2, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (34)$$

имеющим минимумы в $\pm f$. Система с двугорбым (двухъямным) потенциалом представляет интерес, поскольку она является удобной моделью для исследования вопросов туннелирования и инстантонных эффектов. Изучению подобных систем посвящается ряд работ (см., например, [252—257]). Свойства данной системы используются при исследовании ферроэлектриков, полупроводников и т.д. [258—259]. Благодаря наличию туннелирования, волновая функция основного состояния является четной суперпозицией волновых функций каждой из ям. Основным эффектом, вызываемым инстантонами, является в данном случае расщепление энергетических уровней (двукратно вырожденных в предположении отсутствия туннелирования). В приближении разреженного инстантонного газа энергия основного состояния квантовой системы с потенциалом (34) равна [260]:

$$E_0 = \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} \frac{\omega}{2} \exp\left\{-\frac{\omega^3}{12\lambda}\right\},$$

где $\omega = 8\lambda f^2$. В этом приближении разность энергий основного и первого возбужденного состояний равна плотности инстантонов

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{dn}{d\tau_0},$$

где

$$\frac{dn}{d\tau_0} = \omega \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} \exp\left\{-\frac{\omega^3}{12\lambda}\right\}.$$

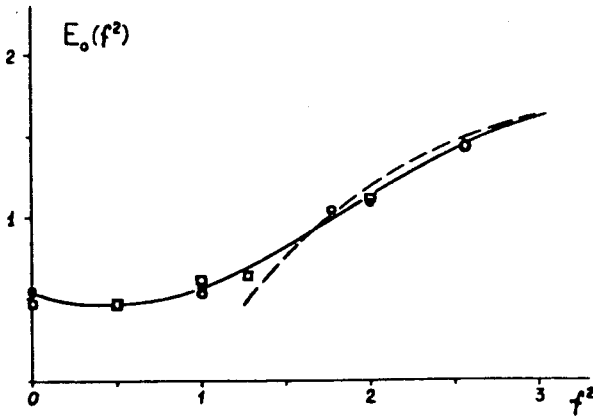


Рис. 5. Энергия основного состояния системы с двугорбым потенциалом

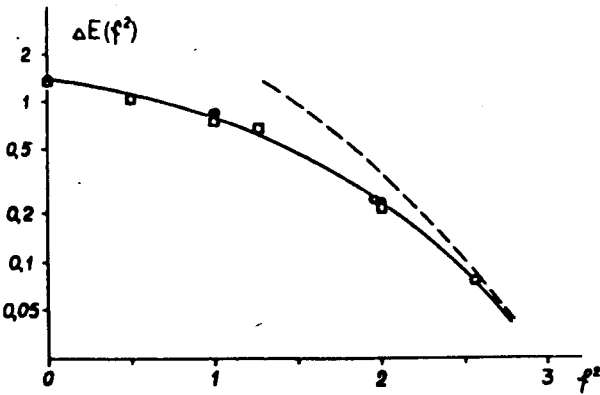


Рис. 6. Разность энергий основного и первого возбужденного состояний системы с двугорбым потенциалом

Метод континуальных интегралов в евклидовой метрике (мнимое время) является удобным аппаратом исследования туннельных эффектов [260—262]. Результаты наших вычислений E_0 и ΔE для системы (34) с $\lambda = \frac{1}{2}$ с помощью составной приближенной формулы (21) при $n = m = 1$ [263] показаны сплошными кружками на рис.5 и 6. Счетное время для каждого значения f^2 составило порядка 10 с на ЭВМ CDC-6500. Светлыми круж-

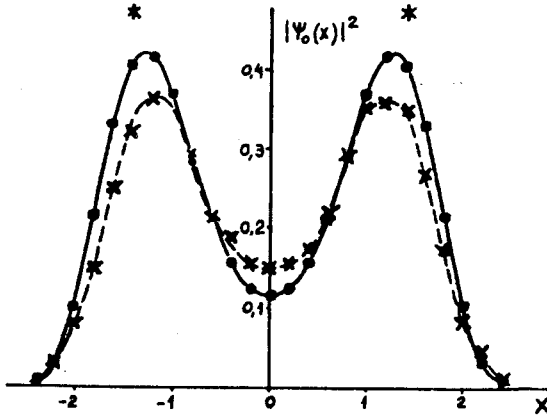


Рис. 7. Волновая функция основного состояния системы с двугорбым потенциалом

ками представлены результаты [104] расчетов на решетке методом Монте-Карло. Квадратиками показаны результаты, полученные в [103] на решетке с числом узлов $N=303$ и шагом $a=0,25$ при вычислении N -кратного интеграла путем усреднения по 10 монте-карловским итерациям. Сплошная линия изображает «точный» результат [264], пунктирная линия — приближение разреженного инстантонного газа.

Квадрат модуля волновой функции основного состояния, вычисленный нами с помощью формулы (21) при $n=m=1$, $\beta=4,5$, $f^2=2$, приведен на рис.7 крестиками. Точки — результаты [103], полученные на решетке с $N=200$ и $a=0,25$ путем усреднения по 100 монте-карловским итерациям.

Звездочками показаны значения $|\Psi_0(\pm f)|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2f}{\pi}}$, получаемые в приближении разреженного инстантонного газа [260]. Сплошная и пунктирная линии соединяют точки для удобства восприятия.

Приведенные результаты демонстрируют эффективность разработанного нами метода приближенного вычисления континуальных интегралов.

8. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ. КВАНТОВЫЙ МАЯТНИК

Одной из важных областей применения континуальных интегралов является исследование топологической структуры вакуума в квантовой калибровочной теории. Значения топологической восприимчивости,

вычисляемые различными авторами с помощью метода Монте-Карло на решетке [265—275], существенно отличаются друг от друга и от феноменологических оценок [276—278]. Причина этого может заключаться [265] как в различии определений топологического заряда на решетке, так и в наличии специфической систематической погрешности, связанной с конечностью шага решеточной дискретизации [104]. Некоторые авторы исследуют топологический заряд непосредственно в континуальном пределе [279—280].

Рассмотрим нахождение топологического заряда и топологической восприимчивости без предварительной дискретизации пространства и времени на примере квантового маятника, т.е. системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \lambda \hat{p}^2 + V, \tag{35}$$

где

$$V(x) = \frac{\omega^2}{\lambda} (1 - \cos x), \tag{36}$$

ω — частота малых осцилляций, λ — константа связи. В случае, когда $V(x)$ является ограниченной периодической функцией (с периодом 2π) на $x \in (-\infty, \infty)$, анализ гамильтониана (35) сводится [281] к изучению оператора

$$H(\theta) = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)_\theta + V,$$

где $\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)_\theta$ есть оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ на $L^2[0, 2\pi]$ с граничными условиями вида

$$\psi(2\pi) = e^{i\theta} \psi(0); \quad \psi'(2\pi) = e^{i\theta} \psi'(0),$$

θ — фиксированный параметр, $|\theta| \leq \pi$. Согласно теореме Блоха (см., например, [282]), если $\psi(x)$ является собственной функцией гамильтониана (35) с периодическим $V(x)$, то

$$\psi(x + 2\pi) = e^{i\theta} \psi(x).$$

В этом случае для континуального интеграла Z будем иметь [263]:

$$Z(x, x + 2\pi N, \beta) = e^{i\theta N} Z(x, x, \beta). \tag{37}$$

Произведя преобразование, устраняющее фазовый множитель [283] $\psi(x) \rightarrow e^{-i(x/2\pi)\theta} \psi(x)$, получаем, что формула Фейнмана — Каца сохраняет свой вид после замены функционала действия новым (« θ -действие»):

$$S_\theta = S - i\theta Q,$$

где Q — топологический заряд. В данном случае величина топологического заряда равна [260]

$$Q(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \dot{x} dt = \left[\frac{x}{2\pi} \right] \quad (x(0) = x, \quad x(\beta) = x \bmod 2\pi),$$

где [...] обозначает целую часть числа.

Представив $Z(\beta)$ в виде

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, x, \beta) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} Z(x, x, \beta) dx + \sum_{n=-\infty}^0 \int_{2\pi(n-1)}^{2\pi n} Z(x, x, \beta) dx,$$

после замены переменных $x = \bar{x} + 2\pi n$ с учетом (37) получаем

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta n} \int_0^{2\pi} Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, \beta) d\bar{x} + \sum_{n=-\infty}^0 e^{i\theta n} \int_{-2\pi}^0 Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, \beta) d\bar{x},$$

где

$$Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, \beta) = e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} e^{-2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2} \int_{C_0} \exp \left\{ \frac{\omega^2 \beta}{\lambda} \int_0^1 \cos \left[\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} x(t) + 2\pi n t + x \right] dt \right\} d_W x.$$

Таким образом,

$$Z(\beta) = e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2} [e^{i\theta n} Z_n(\beta) + e^{-i\theta n} Z_{-n}(\beta)],$$

где

$$Z_n(\beta) = \int_0^\pi [I_n(x, \beta) + I_n(-x, \beta)] dx;$$

$$I_n(x, \beta) = \int_{C_0} \exp \left\{ \frac{\omega^2 \beta}{\lambda} \int_0^1 \cos \left[\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} x(t) + 2\pi n t + x \right] dt \right\} d_W x.$$

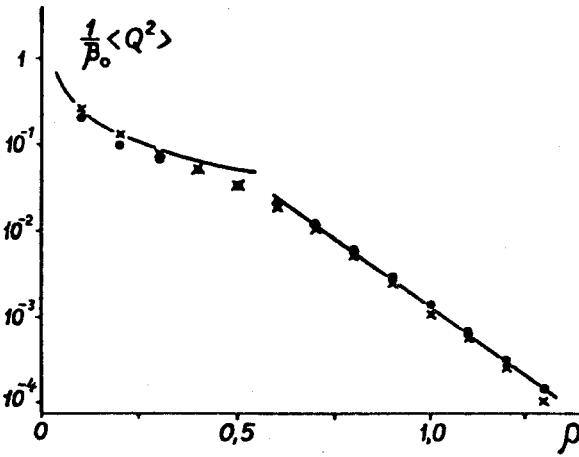


Рис. 8. Топологическая восприимчивость в модели квантового маятника

Используя свойство четности косинуса и свойство континуального интеграла

$$\int_{C_0} F[x(\cdot)] d_W x = \int_{C_0} F[-x(\cdot)] d_W x,$$

мы получаем, что $I_n(x, \beta) = I_{-n}(x, \beta)$, а следовательно, $Z_n(\beta) = Z_{-n}(\beta)$ и

$$Z(\beta) = \frac{2e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\theta n) \cdot \exp\left\{-2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2\right\} Z_n(\beta), \quad (38)$$

где $Z_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow \infty$ [263]. Результаты вычисления топологической восприимчивости $\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle$, где усредненный топологический заряд равен

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \frac{2e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\theta n) n^2 \exp\left\{-2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2\right\} Z_n(\beta), \quad (39)$$

в зависимости от параметра $\rho = \frac{\omega}{\lambda}$, $\beta_0 = \omega\beta$, полученные с помощью «элементарной» (не составной) приближенной формулы для континуального интеграла $Z_n(\beta)$ при $m = 1$, $\beta_0 = 7$, $\theta = 0$, $\lambda = 1$, показаны точками на рис.8

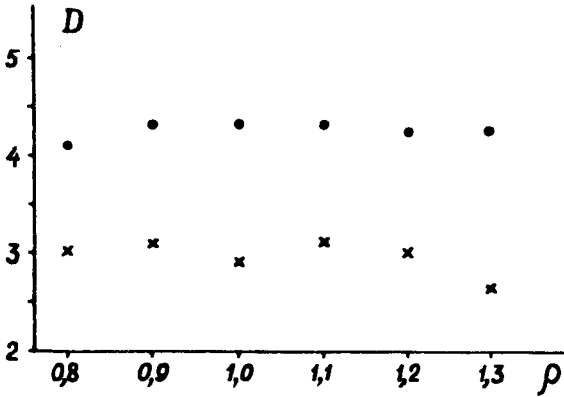


Рис. 9. Сравнение результатов вычисления топологической восприимчивости

в логарифмическом масштабе. Расчеты показали, что для достижения трех верных знаков достаточно четырех членов ряда в (38) и (39). Счетное время на ЭВМ CDC-6500 составило порядка 10 с на точку ρ . Крестиками на рис.8 показана зависимость от ρ величины

$$\frac{1}{\epsilon N} \langle Q^2 \rangle,$$

полученной в [284] методом Монте-Карло на решетке с $N=100$, $\epsilon = \omega a = 1$ (N — число узлов, a — шаг решетки). Сплошной линией при $\rho > 0,5$ изображены результаты, получаемые в приближении разреженного инстантонного газа (см. [284]):

$$\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\rho} e^{-8\rho} \left[1 - \frac{7}{64} \rho^{-1} - \dots \right]. \tag{40}$$

Кривая при $\rho < 0,5$ представляет собой высокотемпературное разложение в континуальном пределе ($\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, ϵN фиксировано):

$$\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \rho}.$$

Для более точного сравнения $\langle Q^2 \rangle$ с теоретическими предсказаниями рассмотрим величину

$$D = \frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle \rho^{-1/2} e^{8\rho}.$$

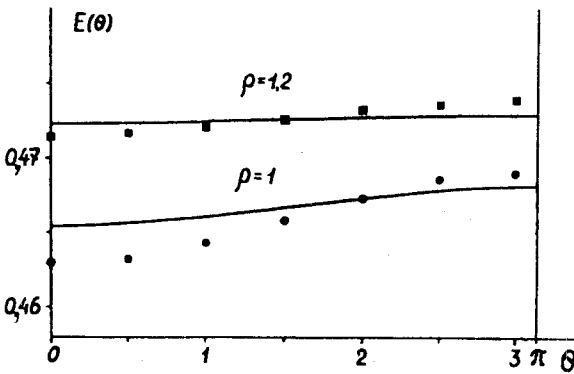


Рис. 10. Энергия θ -вакуума в модели квантового маятника

Очевидно, что в континуальном пределе (при этом $S = 8$) и при достаточно больших ρ (полуклассическая область) должно выполняться

$$D = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \simeq 4,51. \tag{41}$$

Результаты наших расчетов показаны точками на рис.9; они хорошо согласуются с (41). Крестиками показаны результаты работы [284], полученные при $\epsilon = 1$, $N = 100$, $S = 7,87$ (действие для инстантона на такой решетке). Отличие результатов [284] от теоретического предсказания не объясняется наличием фактора двухпетлевой поправки в (40). Таким образом, из их результатов, строго говоря, нельзя сделать вывод о справедливости приближения разреженного инстантонного газа. Для прояснения ситуации в работе [284] были проведены также расчеты при $\epsilon = 0,6$ (в точке $\rho = 0,7$) и при этом получено $D = 3,3$, то есть больше, чем при $\epsilon = 1$, но все равно меньше теоретической оценки. Дальнейшее уменьшение ϵ в работе [284] не производилось вследствие возникающих при этом трудностей, связанных с возрастанием размеров инстантонов и замедлением сходимости итераций. Очевидно, что в наших расчетах подобных проблем не возникает, поскольку расчеты ведутся без дискретизации пространства, $\epsilon = 0$.

Путем определения параметров методом наименьших квадратов из соотношения

$$\ln \left[\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle \right] = \ln D - S \rho + p \ln \rho$$

в работе [284] было получено $D = 2,98$; $p = 0,46$. Согласно полученным нами значениям, показанным точками на рис.9, мы имеем $D = 4,25$;

$p = 0,493$, что хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями (в континуальном пределе теоретический результат $p = 0,5$).

Вычислим теперь величину энергии вакуума. Вследствие инстантонных эффектов энергия основного состояния размывается в зону и характеризуется нарушающим CP -инвариантность углом θ . Значения $E(\theta)$, полученные нами в соответствии с

$$E(\theta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta), \quad \omega = 1, \quad \rho = \frac{1}{\lambda},$$

с помощью «элементарной» приближенной формулы при $m = 1$, показаны на рис.10 для $\rho = 1$ и $\rho = 1,2$ сплошными кружками и квадратиками соответственно. Из рис.10 видно, что результаты хорошо согласуются с теоретическими оценками, получаемыми в приближении разреженного инстантонного газа:

$$E(\theta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 4} \rho^{-1} - \frac{1}{32 \cdot 16} \rho^{-2} - \dots \right) - \cos \theta \frac{8}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/2} e^{-8\rho} \left[1 - \frac{7}{64} \rho^{-1} - \dots \right],$$

показанными на рисунке сплошными линиями.

9. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ КONTИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

При исследовании реальных физических процессов обычно приходится рассматривать системы с числом степеней свободы больше единицы. В континуально-интегральном подходе при этом оказывается необходимым вычислять кратные континуальные интегралы. Это может быть осуществлено, в частности, путем последовательного применения приближенных формул для однократных континуальных интегралов (например, уже рассмотренных нами формул, точных на классе функциональных многочленов). Однако более экономичными являются формулы, обладающие заданной суммарной степенью точности [285]. Рассмотрим построение приближенных формул третьей суммарной степени точности для m -кратных континуальных интегралов по гауссовым мерам:

$$\underbrace{\int \dots \int}_{\substack{X \quad X \\ m}} F[x_1, \dots, x_m] d\mu(x_1) \dots d\mu(x_m) \equiv \int_{X^m} F[\mathbf{x}] d\mu^{(m)}(\mathbf{x}), \quad (42)$$

рассматриваемых как интеграл Лебега, построенный на $X^m = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_m$ — декартовом произведении полных сепарабельных метрических пространств по декартову произведению гауссовых мер μ ,

задаваемых корреляционным функционалом $K(\xi, \eta)$ и средним значением $M(\xi)$; $\xi, \eta \in X'$.

Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , плотное почти всюду в X , порожденное гауссовой мерой μ , и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в \mathcal{H} . Пусть, как и ранее, $\rho(r)$ — нечетная относительно r функция, заданная на R со значением в X , для которой

$$\int_R \langle \xi, \rho(r) \rangle \langle \eta, \rho(r) \rangle d\nu(r) = K(\xi, \eta).$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 7 [285]. Пусть $F[x]$ — произвольный вещественный интегрируемый функционал. Пусть

$$S_{n_i}(x_i) = \sum_{j=1}^{n_i} (e_j, x_i) e_j; \quad U_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{n_i} u_j^{(i)} e_j; \quad N = \sum_{i=1}^m n_i.$$

Тогда приближенная формула (составная)

$$\int_{X^m} F[x] d\mu^{(m)}(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{R^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_R F(U_{n_i}(\mathbf{u}^{(1)}), \dots, \underbrace{\Sigma_i(\sqrt{m} \rho(v; \cdot) \mathbf{u}^{(i)})}_i, \dots, U_{n_i}(\mathbf{u}^{(m)})) d\mathbf{u} d\nu(v) + \mathcal{R}_N(F), \quad (43)$$

где $\nu(v)$ — симметричная вероятностная мера на R ,

$$\Sigma_i(x_i, \mathbf{u}^{(i)}) = x_i - S_{n_i}(x_i) + U_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}),$$

точно для функциональных многочленов третьей суммарной степени на X^m .

Функциональным многочленом k -й суммарной степени называется функционал вида

$$F[x_1, \dots, x_m] = \prod_{i=1}^m F_{k_i}(x_i),$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq k$; $F_{k_i}(x_i)$ — однородный функциональный многочлен степени k_i по переменной x_i .

В частном случае, когда X является пространством непрерывных функций $C_0 \equiv \{C[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$ с условной мерой Винера, характеризующейся нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t, s) = \min(t, s) - ts$, мера $dv = \frac{1}{2} dv$, $v \in [0, 1]$, мы получаем составную приближенную формулу для m -кратного континуального интеграла по условной мере Винера:

$$\int_{C^m} F[\mathbf{x}] d_W \mathbf{x} = (2\pi)^{-N/2} \int_{R^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) \right\} \times \\ \times \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_R F(\tilde{U}_{n_i}(\mathbf{u}^{(1)}), \dots, \underbrace{\sqrt{m} \tilde{\Sigma}_i(\rho(v, \cdot), \mathbf{u}^{(i)})}_{i}, \dots, \tilde{U}_{n_m}(\mathbf{u}^{(m)})) du dv + \mathcal{R}_N(F), \quad (44)$$

где

$$dv = \frac{1}{2} dv, \quad \rho(v, t) = \begin{cases} -t \operatorname{sign}(v), & t \leq |v| \\ (1-t) \operatorname{sign}(v), & t > |v| \end{cases},$$

$$\tilde{\Sigma}_i(\rho(v, t), \mathbf{u}^{(i)}) = \rho(v, t) - S_{n_i}(\rho(v, t)) + \tilde{U}_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}),$$

$$S_{n_i}(\rho(v, t)) = 2 \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{j \pi} \sin(j \pi t) \operatorname{sign}(v) \cos(j \pi t),$$

$$\tilde{U}_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{n_i} u_j^{(i)} \frac{1}{j \pi} \sin(j \pi t) \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m.$$

Достаточное условие сходимости приближений, получаемых согласно (43) и, соответственно, (44), к точному значению интеграла при стремлении n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) к бесконечности определяется следующей теоремой [285].

Теорема 8. Пусть для почти всех $v \in R$ относительно меры $\nu(v)$ имеет место сходимость

$$S_{n_i}(\rho(v)) \rightarrow \rho(v) \text{ при } n_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть $F[x]$ — непрерывный на X^m функционал, удовлетворяющий почти всюду на X^m условию

$$|F[x]| \leq g(A^1(x_1, x_2), \dots, A^m(x_m, x_m)),$$

где $A^k(x_k, x_k)$ — неотрицательный квадратичный функционал вида

$$A^k(x_k, x_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^k (x_k, e_i)^2, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^k < \infty, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

$q(x)$ — неубывающая по всем переменным положительная функция, такая, что

$$\int_{X^m R} g(A^1(x_1, x_1), \dots, \underbrace{A^k(\sqrt{m} \rho(v), \sqrt{m} \rho(v)) + A^k(x_k, x_k)}_k, \dots, A^m(x_m, x_m)) dv d\mu^{(m)}(x) < \infty.$$

Тогда

$$\mathcal{R}_N(F) \rightarrow 0 \text{ при } n_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Скорость сходимости приближений, получаемых согласно (43), к точному значению интеграла оценивается следующей теоремой [286].

Теорема 9. Пусть интегрируемый по мере $\mu^{(m)}(x)$ функционал представим в виде:

$$F[x + x_0] = P_3(x) + r(x, x_0),$$

где $P_3(x)$ — функциональный многочлен третьей суммарной степени, а

$$|r(x, x_0)| \leq \prod_{i=1}^m (A^i(x_i, x_i))^2 (c_1 \exp \{c_2 A^i(x_i + x_i^0, x_i + x_i^0)\} + c_3 \exp \{c_2 A^i(x_i^0, x_i^0)\}),$$

где $A^i(x_i, x_i)$ удовлетворяют (45), (46), x_0 — фиксированная точка из X^m , c_i — положительные константы, такие, что

Таблица 8. Значения двукратного континуального интеграла для $p = 0,5$

$$I^* = 12,03390688$$

$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	5	10
1	12,0332950				
2	12,0342440	12,0332116			
3	12,0395110	12,0356295	12,0339518		
5	12,0423562	12,0374153	12,0342150	12,0339122	
10	12,0447756	12,0390693	12,0347689	12,0340572	12,0339069

Таблица 9. Значения двукратного континуального интеграла для $p = -0,5$

$$I^* = 5,655919950$$

$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	5	10
1	5,65338831				
2	5,65472254	5,65515020			
3	5,65465495	5,65557558	5,65573296		
5	5,65487646	5,65554252	5,65583832	5,65587219	
10	5,65513682	5,65553213	5,65597514	5,65593299	5,65591293

$$\frac{1}{2} - c_2 \gamma_k^{(i)} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} a_k < \infty; \quad (e_k, \sqrt{m} \rho(v))^2 \leq a_k; \quad a_k, v \in R.$$

Тогда для остаточного члена приближенной формулы (43) справедлива оценка

$$\mathcal{R}_N(F) = O \left(\prod_{i=1}^m \left(\sum_{k=n_i+1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^m O \left(\left(\sum_{k=n_i+1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} a_k \right)^2 \right).$$

Рассмотрим в качестве примера приближенное вычисление двукратного континуального интеграла по условной мере Винера

Таблица 10. Зависимость от q значений двукратного континуального интеграла для $p = 0,5$

q	I^*	I	\hat{I}
0	$1,188395106 \cdot 10^0$	$1,188394988 \cdot 10^0$	$1,18469738 \cdot 10^0$
2	$1,721203344 \cdot 10^0$	$1,721293187 \cdot 10^0$	$1,65205903 \cdot 10^0$
4	$5,229331352 \cdot 10^0$	$5,229330998 \cdot 10^0$	$3,71647298 \cdot 10^0$
6	$3,332750443 \cdot 10^1$	$3,332750366 \cdot 10^1$	$1,04813216 \cdot 10^1$
8	$4,455557798 \cdot 10^2$	$4,455558015 \cdot 10^2$	$0,32888278 \cdot 10^2$
10	$1,249522331 \cdot 10^4$	$1,249522528 \cdot 10^4$	$0,01094908 \cdot 10^4$

Таблица 11. Зависимость от q значений двукратного континуального интеграла для $p = -0,5$

q	I^*	I	\hat{I}
0	$8,509181282 \cdot 10^{-1}$	$8,509180438 \cdot 10^{-1}$	$8,48798027 \cdot 10^{-1}$
2	$1,152142647 \cdot 10^0$	$1,152141525 \cdot 10^0$	$1,14025833 \cdot 10^0$
4	$2,859971347 \cdot 10^0$	$2,859970984 \cdot 10^0$	$2,40410599 \cdot 10^0$
6	$1,301529645 \cdot 10^1$	$1,301529441 \cdot 10^1$	$0,64445955 \cdot 10^1$
8	$1,085883915 \cdot 10^2$	$1,085883710 \cdot 10^2$	$0,19531843 \cdot 10^2$
10	$1,660923723 \cdot 10^3$	$1,660923370 \cdot 10^3$	$0,06347512 \cdot 10^3$

$$I = \int_{C_0^2} \exp \left\{ \int_0^1 (px^2(t) + qx(t) + py^2(t) + qy(t)) dt \right\} d_W x d_W y$$

с помощью формулы (44). Результаты вычисления [287] при $q = 5$ и различных p, n_1, n_2 приведены в табл.8 и 9. Через I^* обозначено точное значение, найденное нами в [248]. Зависимость значения I от p и q при $n_1 = n_2 = 20$ приведена в табл.10 и 11, где \hat{I} обозначен результат, полученный с использованием «элементарной» приближенной формулы для кратных континуальных интегралов, взятой из [49]. Счетные времена вычисления I и \hat{I} в каждой точке (p, q) составили порядка 1 с на ЭВМ CDC-6500. Из таблиц видно, что использование составных приближенных формул обеспечивает получение более точных приближений.

Аналогично однократным континуальным интегралам, нами была построена и исследована [285] приближенная формула третьей суммарной степени точности для кратных континуальных интегралов по условной мере Винера с весом

$$\int_{C_0^m} P[x] F[x] d_W^{(m)}x,$$

$$x = (x_1, \dots, x_m); \quad d_W^{(m)}x = d_W x_1 \dots d_W x_m;$$

$$P[x] = \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^1 (p_i(t)x_i^2(t) + q_i(t)x_i(t)) dt \right\},$$

$$p_i(t), q_i(t) \in C[0, 1] \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m.$$

В работе [286] с помощью приближенных формул для кратных континуальных интегралов нами были вычислены энергия основного состояния и волновая функция гармонического осциллятора в случае размерности пространства 2 и 3. Сравнение результатов с теоретическими значениями позволяет сделать вывод о высокой эффективности построенных приближенных формул.

10. МОДЕЛЬ КАЛОДЖЕРО. ЯДРО АТОМА ТРИТИЯ

Рассмотрим квантовую систему из n частиц в одном измерении, характеризующуюся гамильтонианом [288]:

$$H = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i < j}^n (x_i - x_j)^2 + g \sum_{i < j}^n (x_i - x_j)^{-2}, \quad (47)$$

соответствующим попарному взаимодействию частиц силами отталкивания центробежного потенциала и линейного притяжения. Эта модель служит объектом исследования многих авторов [289—293]. Для нее существует точное аналитическое решение [288], что позволяет использовать ее для исследования эффективности различных численных методов. Как отмечается в [291,294], метод континуального интегрирования является наиболее пригодным способом численного анализа квантовых систем с большим числом степеней свободы, т.е. решения многомерных задач высокой размерности, когда другие методы становятся малоэффективными.

Таблица 12. Энергия основного состояния в модели Калоджеро для трех частиц

ω	E_0	E_{mc} [291]	E^* [288]
0,10	1,346	—	1,3472
0,20	2,700	—	2,6944
0,25	3,366	$3,35 \pm 0,004$	3,3680
0,50	6,738	—	6,7361

Таблица 13. Энергия основного состояния в модели Калоджеро для различного числа частиц

n	E_0	E_{mc} [291]	E^* [288]
5	13,447	$13,37 \pm 0,04$	13,4397
7	32,249	$32,34 \pm 0,09$	32,2718
9	61,473	$61,31 \pm 0,10$	61,5183
11	102,865	$102,31 \pm 0,14$	102,6028

Мы вычисляли [295] функцию Грина Z для системы (47) в виде континуального интеграла по условной мере Винера с использованием приближенной формулы с весом. Полученные на основании этих расчетов значения энергии основного состояния E_0 в случае трех частиц ($n=3$) для $g=1,5$ и различных ω приведены в табл.12. Счетное время вычисления значения E_0 в каждой точке ω составило 11 с на ЭВМ CDC-6500.

Величины E_0 , вычисленные при $g=1,5$, $\omega=0,25$ для различного числа частиц n , показаны в табл.13. Для сравнения приведены результаты, полученные в [291] с помощью метода Монте-Карло (1000 точек дискретизации, 100 итераций), обозначенные E_{mc} . Точный результат обозначен E^* . Счетное время нахождения E_0 для 11 частиц по приближенной формуле с весом составило 3 мин на ЭВМ CDC-6500, вычисление E_{mc} потребовало 15 мин на одностипной ЭВМ [291]. Сравнение численных значений свидетельствует о том, что развиваемый нами детерминированный подход к континуальным интегралам дает более точные результаты за меньшие счетные времена по сравнению с методом Монте-Карло, где даже не везде было обеспечено совпадение результатов с точными значениями [291] в пределах указанной точности.

Численное исследование системы из трех взаимодействующих частиц является одной из фундаментальных задач в математической физике. Рассмотрим основное состояние тритона (ядра атома трития), т.е. системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} V(|r_{ij}|). \quad (48)$$

Здесь $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)})$, $i = 1, 2, 3$, обозначены координаты трех нуклонов с массами m_i и $r_{ij} = x_i - x_j$.

Достаточно распространенным методом численного исследования данной системы является вариационный метод, который применительно к рассматриваемой девятимерной задаче последовательно развивался во многих работах с начала 70-х годов (см., например, [296—300]). Результатом этих исследований являются верхние и нижние оценки для энергии связи, причем за достаточно большие счетные времена (порядка нескольких часов) удавалось достигнуть хорошей точности вычислений. В ряде работ для вычисления энергии связи применялся метод Монте-Карло [291,301—302]. В [291] получено значение энергии основного состояния с точностью порядка 0,1 МэВ при счетном времени в пределах одного часа на ЭВМ CDC-6500.

Рассмотрим модель тритона, использованную в [296] и последующих работах: три идентичные частицы с массой $m = m_p = 938,279$ МэВ взаимодействуют попарно посредством сферически-симметричного спин-независимого потенциала

$$V(r) = -51,5 \exp \left\{ -\frac{r^2}{b^2} \right\} \text{ МэВ}, \quad b = 1,6 \text{ фм}. \quad (49)$$

В работах, о которых упоминалось выше, для энергии основного состояния системы (48) с потенциалом (49) были получены следующие значения (отличающиеся друг от друга больше, чем на величину указанной погрешности):

$$E = (-9,77 \pm 0,06) \text{ МэВ [291]},$$

$$E = -9,42 \text{ МэВ [296]},$$

$$E = (-9,47 \pm 0,4) \text{ МэВ [301]},$$

$$(-9,99 \pm 0,05) < E < (-9,75 \pm 0,04) \text{ МэВ [297]},$$

$$E = -9,78 \text{ МэВ [297,299]}.$$

Мы вычислили [286] энергию основного состояния тритона с помощью приближенной формулы третьей суммарной степени точности для крат-

Таблица 14. Энергия основного состояния ядра атома трития

β	2,0	3,0	4,0	4,5	4,7	4,8	5,0
E_0 , МэВ	-33,4	-15,2	-10,5	-9,9	-9,8	-9,8	-9,7

ных континуальных интегралов. После перехода к безразмерным переменным гамильтониан системы перепишем в следующем виде [286]:

$$H_0 \equiv \frac{1}{R} H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} \frac{1}{R} V(|r_{ij}|),$$

где

$$R = \frac{(197,93)^2}{938,279} \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^2.$$

Матричный элемент записывается формулой

$$Z(x_1, \dots, x_9, \beta) = \\ = (2\pi\beta)^{-9/2} \int_{C_0^9} \exp \left\{ -\frac{\beta}{R} \int_0^1 \sum_{i < j} V(|\sqrt{\beta} u_i(t) + x_i) - (\sqrt{\beta} u_j(t) + x_j)|) dt \right\} d_W^{(9)} u,$$

$$x_1 = (x_1, x_2, x_3), \quad x_2 = (x_3, x_4, x_5), \quad x_3 = (x_7, x_8, x_9).$$

Значения энергии основного состояния E_0 (МэВ), вычисленные для различных значений β , представлены в табл.14. Вычисление кратных римановых интегралов осуществлялось с помощью метода Коробова с относительной погрешностью $\epsilon = 1\%$. Счетное время вычисления энергии E_0 для каждого значения β составило порядка 15 мин на ЭВМ CDC-6500. Из таблицы видно, что полученное нами уточненное значение энергии основного состояния $E_0 = -9,7$ МэВ согласуется с данными других авторов, при этом счетное время у нас оказалось меньшим по сравнению с временами, приведенными в других работах.

11. КONTИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В $P(\Phi)_2$ -КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Одной из областей квантовой теории поля, где вопросы меры континуального интегрирования разработаны наиболее глубоко, является двумерная евклидова теория поля с полиномиальными взаимодействиями бозонных

полей [239]. В рамках $P(\varphi)_2$ -модели могут быть исследованы, в частности, такие процессы, как фазовые переходы, критические явления, взаимодействие частиц, рассеяние и связанные состояния. Данная модель является предметом исследования многих авторов (см. [92]). В частности, в работе [303] в рамках этой модели методом континуального интегрирования исследована плотность энергии вакуума в бесконечном объеме.

Лагранжиан $P(\varphi)_2$ -модели записывается следующим образом [92]:

$$L(\varphi(x)) =: \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \lambda P(\varphi(x)) : \quad (50)$$

Здесь $x \in R^2$; $\varphi(x) \in S'(R^2)$ — пространство обобщенных функций умеренного роста; P — ограниченный снизу полином. Пространством основных функций является пространство Шварца быстро убывающих функций $S(R^2)$. Значение φ на основной функции $f \in S(R^2)$ определяется как

$$\varphi(f) \equiv \langle \varphi, f \rangle = \int_{R^2} \varphi(x) f(x) dx.$$

Упорядочение Вика (виково двоеточие) задается соотношением

$$: \varphi(x)^n : = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j n!}{(n-2j)! j! 2^j} k_{\kappa}^j(x) (\varphi_{\kappa}(x))^{n-2j},$$

где

$$\varphi_{\kappa}(x) = \int_{R^2} \varphi(y) \delta_{\kappa, x}(y) dy \text{ — импульсное обрезание поля } \varphi;$$

$$\delta_{\kappa, x}(y) = \kappa^2 h(\kappa(x-y)) \text{ — «размазанная» } \delta\text{-функция,}$$

$$h \in C_0^{\infty}(R^2), \quad h(y) \geq 0, \quad \int_{R^2} h(y) dy = 1,$$

$$k_{\kappa}(x) = \langle \delta_{\kappa, x}, K \delta_{\kappa, x} \rangle.$$

Здесь K — корреляционный функционал меры, $K(f, g) = \langle f, Kg \rangle$ (непрерывная невырожденная билинейная форма на произведении пространств $S(R^2) \times S(R^2)$):

$$K(f, g) = \int [\langle \varphi, f \rangle - M(f)][\langle \varphi, g \rangle - M(g)] d\mu(\varphi),$$

где $M(f) = \int \langle \varphi, f \rangle d\mu(\varphi)$ — среднее значение меры $d\mu(\varphi)$.

Континуальная мера в пространстве $S'(R^2)$ определяется следующим образом [92]. В ограниченной области $\Lambda \subset R^2$ вводится мера

$$\partial\mu_\Lambda = Z^{-1} e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{K_{\partial\Lambda}},$$

где

$$V(\Lambda) = \int_\Lambda :P(\varphi(x)) :_{K_\emptyset} dx; \quad Z = Z(\Lambda) = \int e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}.$$

Упорядочение Вика производится здесь по отношению к свободному корреляционному функционалу K_\emptyset [92]. $d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}$ представляет собой гауссову меру с корреляционным функционалом $K_{\partial\Lambda}$, удовлетворяющим условиям Дирихле на $\partial\Lambda$ — границе области Λ , и нулевым средним значением $M(f) = 0$. Как уже отмечалось, корреляционный функционал и среднее значение определяют гауссову меру единственным образом.

Важным результатом, полученным Дж.Глиммом и А.Джаффе, является доказательство существования меры в неограниченной области. Они показали, что при определенных условиях на P и при $f \in C_0^\infty$ последовательность характеристических функционалов мер в конечных объемах

$$S_\Lambda\{f\} = \int e^{i\varphi(f)} d\mu_\Lambda$$

имеет предел

$$S\{f\} = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} S_\Lambda\{f\},$$

причем предельный функционал $S\{f\}$ удовлетворяет евклидовым аксиомам аналитичности, регулярности, инвариантности относительно сдвигов, поворотов и отражений, что необходимо для построения квантового поля φ [92].

Таким образом, наблюдаемые значения операторов, определяемые как средние по вакуумному состоянию, могут быть найдены путем вычисления континуального интеграла

$$\langle 0 | F(\varphi) | 0 \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} \frac{\int_{S'(\Lambda)} \exp\{-\lambda \int_\Lambda :P(\varphi(x)) :_{K_\emptyset} dx\} F(\varphi) d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}}{\int_{S'(\Lambda)} \exp\{-\lambda \int_\Lambda :P(\varphi(x)) :_{K_\emptyset} dx\} d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}}. \quad (51)$$

Существенно, что при $d = 2$ перенормировки в $P(\varphi)_d$ -модели ограничиваются вычитанием, связанным с упорядочением Вика, т.е. в выражении (51) расходимости отсутствуют.

При построении приближенных формул для континуальных интегралов необходимо иметь явное выражение для корреляционного функционала меры. Записав $K(f, g)$ в виде

$$K(f, g) = \int_{R^2 \times R^2} \mathcal{K}(x, y) f(x) g(y) dx dy,$$

рассмотрим интегральное ядро $\mathcal{K}(x, y)$, $x, y \in R^2$:

$$\mathcal{K}(x, y) = \int_{S'(R^2)} \varphi(x) \varphi(y) d\varphi_K.$$

Для интегрального ядра корреляционного функционала $K_{\partial\Lambda}$ с граничными условиями Дирихле на границе произвольной области $\Lambda \subset R^2$ существует представление через континуальный интеграл по условной мере Винера [92]:

$$K_{\partial\Lambda}(x, y) = \int_0^\infty dt e^{-m^2 t} \int_{C_{x,y}^\Lambda[0, t]} \chi_{\partial\Lambda}(\omega) d_W \omega,$$

где интегрирование осуществляется по множеству $C_{x,y}^\Lambda[0, t]$ непрерывных функций $\omega(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, удовлетворяющих условиям $\omega(0) = x$, $\omega(t) = y$. Здесь $\chi_{\partial\Lambda}(\omega)$ — характеристическая функция множества траекторий, не имеющих точек пересечения с $\partial\Lambda$:

$$\chi_{\partial\Lambda}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists \tau_0 \in [0, t]: \omega(\tau_0) \in \partial\Lambda \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку нас будет интересовать предел $\Lambda \uparrow R^2$, без ограничения общности мы можем предположить, что точки $x, y \in \Lambda \setminus \partial\Lambda$; в случае $x \in \partial\Lambda$ и/или $y \in \partial\Lambda$, очевидно, что $\mathcal{K}(x, y) = 0$. Если обозначить

$$C_{x,y}^\Lambda[0, t] = \{\omega(\tau) \in C[0, t]: \omega(0) = x, \omega(t) = y, \omega(\tau) \in \Lambda \setminus \partial\Lambda \forall \tau \in [0, t]\},$$

то

$$K_{\partial\Lambda}(x, y) = \int_0^\infty dt e^{-m^2 t} \int_{C_{x,y}^\Lambda} d_W \omega = \int_0^\infty M(x, y, t) e^{-m^2 t} dt,$$

где $M(x, y, t) = \text{mes } C_{x,y}^\Lambda[0, t]$ — винеровский объем множества $C_{x,y}^\Lambda$.

Таким образом, для нахождения ядра $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ достаточно определить объем множества двумерных непрерывных на отрезке функций с

фиксированными значениями на концах отрезка и принимающих значения внутри заданной области Λ . Эта величина найдена нами в работе [304]. Следствием этого является выражение для $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ [304,305].

Теорема 10. Для произвольной связной ограниченной области $\Lambda \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Lambda$ интегральное ядро корреляционного функционала $P(\varphi)_2$ -гауссовой меры в пространстве обобщенных функций умеренного роста $S'(R^2)$ может быть представлено в виде:

$$K_{\partial\Lambda}(x, y) = \sum_n \frac{1}{E_n + m^2} \vartheta_n(x) \vartheta_n(y), \quad x, y \in \Lambda \setminus \partial\Lambda,$$

где E_n и ϑ_n — собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta \vartheta(x) = E \vartheta(x), & x \in \Lambda \setminus \partial\Lambda \\ \vartheta(x) = 0, & x \in \partial\Lambda. \end{cases}$$

Конкретное выражение для $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ зависит от формы области Λ . В частном случае, когда Λ является прямоугольником $\Lambda = \{[0, 2a] \times [0, 2b]\}$, $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ может быть записано в виде [304]:

$$\begin{aligned} K(x, y) = \frac{1}{ab} \sum_{k_1, k_2=1} \frac{1}{m^2 + \left(\frac{\pi k_1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi k_2}{2b}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi k_1}{2a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi k_2}{2b} x_2\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi k_1}{2a} y_1\right) \sin\left(\frac{\pi k_2}{2b} y_2\right), \end{aligned} \tag{52}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Собственными функциями ядра $K(x, y)$ являются

$$\beta_{k_1, k_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi k_1}{2a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi k_2}{2b} x_2\right),$$

соответствующие собственные значения

$$\lambda_{k_1, k_2} = \frac{1}{m^2 + \left(\frac{\pi k_1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi k_2}{2b}\right)^2}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать области Λ квадратной формы: $b = a$ и полагать $m = 1$.

Поскольку для любого $\varphi \in \mathcal{S}'(\Lambda)$ имеет место разложение

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, \varphi) e_k,$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в упоминавшемся нами гильбертовом пространстве \mathcal{H} , порожденном гауссовой мерой, сходящееся в топологии пространства $\mathcal{S}'(\Lambda)$ для почти всех $\varphi \in \mathcal{S}'(\Lambda)$, имеет место следующая доказанная нами теорема [306].

Теорема 11. Пусть $F[\varphi]$ — непрерывный почти всюду на $\mathcal{S}'(\Lambda)$ функционал, удовлетворяющий

$$|F[\varphi]| < \Phi[\varphi],$$

где $\Phi[\varphi]$ — неотрицательный интегрируемый функционал, такой, что

$$\Phi\left[\sum_{k=1}^n (e_k, \varphi) e_k\right] \text{ не убывает при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\int_{\mathcal{S}'(\Lambda)} F[\varphi] d\mu(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp\left\{-\sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{2}\right\} F\left[\sum_{k=1}^n u_k e_k\right] du. \quad (53)$$

Эта теорема позволяет вычислять континуальный интеграл в виде n -кратного риманова интеграла для широкого класса функционалов. Однако скорость сходимости получаемых по ней приближений при $n \rightarrow \infty$ невелика (порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$).

Рассмотрим построение приближенных формул, точных на классе функциональных многочленов заданной степени, дающих хорошие приближения, когда подинтегральный функционал F близок по норме к функциональному многочлену степени $\leq 2m + 1$.

Теорема 12 [49]. Пусть ν — симметричная вероятностная мера на R , K — заданный корреляционный функционал меры $d\mu(x)$ в полном сепарабельном пространстве X и пусть функция $\rho(\nu): R \rightarrow X$ удовлетворяет

$$\rho(\nu) = -\rho(-\nu),$$

$$\int_R \langle \xi, \rho(\nu) \rangle \langle \eta, \rho(\nu) \rangle d\nu(\nu) = K(\xi, \eta), \quad (54)$$

$$\prod_{i=1}^l \langle \xi_i, \rho(\nu) \rangle \in L(R, \nu) \text{ для } 1 \leq l \leq 2m + 1, \quad \xi, \eta, \xi_i \in X'.$$

Тогда приближенная формула

$$\int_X F[x] d\mu(x) \approx \int_{R^n} F[\theta_m(v)] d\nu^{(m)}(v) \quad (55)$$

точно для любого функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.
Здесь

$$\theta_m(v) = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \rho(v_k),$$

$[c_k^{(m)}]^2$ — корни многочлена $\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{m-k}}{k!}$ и мера $\nu^{(m)}$ в R^m является декартовым произведением мер ν на R .

Рассмотрим целочисленную сетку (n_1, n_2) на R^2 и определим меру ν на множестве $Q \in R^2$ следующим образом:

$$\nu(Q) = \sum_{(n_1, n_2) \in Q} \nu(n_1, n_2), \quad (56)$$

где

$$\nu(n_1, n_2) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi n_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{2a} \right)^2 \right]^2 Z},$$

$$Z = \sum_{(n_1, n_2) \in R^2} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi n_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{2a} \right)^2 \right]^2}.$$

Поскольку $\nu(R^2) = 1$, мера $\nu(x_1, x_2)$ является симметричной по обоим аргументам вероятностной мерой в R^2 . Интеграл по этой мере записывается следующим образом:

$$\int_{R^2} f(x_1, x_2) d\nu(x_1, x_2) = \frac{1}{Z} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi n_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{2a} \right)^2 \right]^2} f(n_1, n_2).$$

Мы выбираем функцию $\rho(v)$ в следующем виде:

$$\rho(v) \equiv \rho_v(x) = \frac{1}{2a} \sqrt{Z} \left[1 + \left(\frac{\pi v_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi v_2}{2a} \right)^2 \right]^2 \sin \left(v_1 \frac{\pi x_1}{2a} \right) \sin \left(v_2 \frac{\pi x_2}{2a} \right), \quad (57)$$

где $v = (v_1, v_2) \in R^2$; $x = (x_1, x_2) \in \Lambda$.

Функция ρ является нечетной функцией аргументов v_1 и v_2 . В [306] нами показано, что она удовлетворяет также остальным условиям в (54), т.е. что имеет место следующая теорема.

Теорема 13. *Приближенная формула*

$$\int_{S'(\Lambda)} F[\varphi] d\mu(\varphi) \approx \int_{R^{2m}} F[\theta_m(v)] dv^{(m)}(v), \quad (58)$$

где обозначения соответствуют предыдущей теореме, мера v определяется в (56), а функция $\rho(v)$ задается (57), точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

Формулу (58) будем называть «элементарной» в отличие от «составных» формул, построенных нами для интегралов по мере $d\mu_K(\varphi)$ в пространстве $S'(\Lambda)$ аналогично формулам для интегралов по абстрактной гауссовой мере μ в полных сепарабельных пространствах X .

Теорема 14 [306]. *Для любого интегрируемого по мере $d\mu(\varphi)$ вещественного функционала $F[\varphi]$ приближенная формула (составная)*

$$\int_{S'(\Lambda)} F[\varphi] d\mu(\varphi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u, u)\right\} \int_{R^{2m}} F[\rho_m(v) - \rho_m^n(v) + \Psi_n(u)] dv(v) du + \mathcal{R}_m^n(F) \quad (59)$$

точна для произвольного функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.
Здесь

$$\rho_m(v) = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \rho(v_k); \quad \rho_m^n(v) = S_n(\rho_m(v)), \quad v \in R^{2m}, \quad u \in R^n,$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (e_k, x) e_k, \quad \Psi_n(u) = \sum_{k=1}^n u_k e_k,$$

e_k — ортонормированный базис в \mathcal{H} , $(u, u) = \sum_{k=1}^n u_k^2$.

В [306] нами показано, что, аналогично интегралам по абстрактной гауссовой мере, для интегралов по мере $d\mu_K(\varphi)$ в пространстве $S'(\Lambda)$ имеют место теоремы о сходимости приближений в (59) и об оценке остаточного члена, из которой, в частности, следует, что $\mathcal{R}_m^n(F) = O(n^{-(m+1)})$ при $n \rightarrow \infty$.

Таблица 15. Значения континуального интеграла I_1 для различных размеров области Λ

a	$I_1^* \cdot 10^2$	$I_1^{\text{basis}(5)} \cdot 10^2$	$I_1^{\text{simple}(1)} \cdot 10^2$	$I_1^{\text{composite}(1,1)} \cdot 10^2$
1	4,07	3,90	1,98	4,13
2	4,13	3,73	3,83	4,21
3	4,13	1,58	4,76	5,66
4	4,13	0,37	5,28	6,61
5	4,13	0,08	5,61	6,50
10	4,13	0,01	6,30	6,85

Рассмотрим сравнение эффективности различных приближенных формул на численных примерах. Вычислим вначале следующий интеграл:

$$I_1 = \int_{S'(\Lambda)} \langle l, \varphi \rangle^4 d\mu_K(\varphi), \quad \text{где } l(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (60)$$

Данный интеграл является центральным моментом четвертого порядка гауссовой меры $d\mu_K$. Его точное значение известно [50]:

$$I_1^* = 3K^2(l, l).$$

Результаты приближенного вычисления интеграла (60) $I_1^{\text{basis}(5)}$ по формуле (53) с $n=5$, по «элементарной» формуле третьего порядка точности (формула (58) с $m=1$) $I_1^{\text{simple}(1)}$ и по «составной» приближенной формуле (59) с $n=m=1$ $I_1^{\text{composite}(1,1)}$ для различных размеров a области Λ приведены в табл.15. Из таблицы видно, что точность результатов ухудшается с ростом размера области Λ . Однако для каждого фиксированного a результаты, получаемые по формуле (53) $I_1^{\text{basis}(n)}$ и по составной формуле (58) $I_1^{\text{composite}(1,n)}$, сходятся к точному значению интеграла при $n \rightarrow \infty$, что иллюстрируется табл.16 и 17. Из таблиц видно, что составная приближенная формула обеспечивает более высокую скорость сходимости приближений. Элементарная приближенная формула (58) с $m=1$ не дает хороших приближений в данном случае, поскольку функционал (60) не близок к функциональному многочлену третьей степени. Заметим, однако, что при $m=2$ (пятая степень точности) эта формула дает уже точное значение рассмотренного интеграла при произвольном размере области Λ .

Таблица 16. Сходимость к точному значению приближений континуального интеграла I_1 для размера области $a = 1$

$$I_1^* = 4,068 \cdot 10^{-2}; \quad I_1^{\text{simple}(1)} = 1,98 \cdot 10^{-2}$$

n	$I_1^{\text{basis}(n)}$	$I_1^{\text{composite}(1, n)}$
1	$0,673 \cdot 10^{-2}$	$4,133 \cdot 10^{-2}$
2	$3,520 \cdot 10^{-2}$	$4,105 \cdot 10^{-2}$
3	$3,849 \cdot 10^{-2}$	$4,098 \cdot 10^{-2}$
4	$3,850 \cdot 10^{-2}$	$4,097 \cdot 10^{-2}$
5	$3,903 \cdot 10^{-2}$	$4,096 \cdot 10^{-2}$
10	$4,053 \cdot 10^{-2}$	$4,070 \cdot 10^{-2}$
15	$4,063 \cdot 10^{-2}$	$4,069 \cdot 10^{-2}$
20	$4,065 \cdot 10^{-2}$	$4,068 \cdot 10^{-2}$

Таблица 17. Сходимость к точному значению приближений континуального интеграла I_1 для размера области $a = 10$

$$I_1^* = 4,129 \cdot 10^{-2}; \quad I_1^{\text{simple}(1)} = 6,30 \cdot 10^{-2}$$

n	$I_1^{\text{basis}(n)}$	$I_1^{\text{composite}(1, n)}$
1	$4,07 \cdot 10^{-13}$	$7,29 \cdot 10^{-2}$
2	$2,19 \cdot 10^{-10}$	$6,30 \cdot 10^{-2}$
10	$5,56 \cdot 10^{-4}$	$6,04 \cdot 10^{-2}$
20	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$5,52 \cdot 10^{-2}$
30	$3,86 \cdot 10^{-2}$	$4,22 \cdot 10^{-2}$
40	$3,91 \cdot 10^{-2}$	$4,21 \cdot 10^{-2}$
50	$3,93 \cdot 10^{-2}$	$4,20 \cdot 10^{-2}$
60	$4,03 \cdot 10^{-2}$	$4,16 \cdot 10^{-2}$
70	$4,09 \cdot 10^{-2}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$
80	$4,10 \cdot 10^{-2}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$

Таблица 18. Приближенные значения континуального интеграла I_2

$$I_2^{\text{simple}(1)} = 0,74; \quad I_2^{\text{simple}(2)} = 0,622$$

n	$I_2^{\text{basis}(n)}$	$I_2^{\text{composite}(1, n)}$	$I_2^{\text{composite}(2, n)}$
1	1,023	0,888	1,357
2	1,055	1,029	1,124
3	1,058	1,046	1,088
4	1,058	1,052	1,082
5	1,059	1,059	1,073
6	1,060	1,060	1,066
15	1,060	1,060	1,061
50	1,060	1,060	1,060

Рассмотрим теперь вычисление интеграла

$$I_2 = \int_{S'(\Lambda)} \exp \{-\langle l, \varphi \rangle\} d\mu_K(\varphi)$$

с помощью формулы (53) $I_2^{\text{basis}(n)}$, элементарной формулы (58) третьей степени точности $I_2^{\text{simple}(1)}$ и пятой степени точности $I_2^{\text{simple}(2)}$, а также составной формулы (59) третьей и пятой степени точности $I_2^{\text{composite}(1, n)}$ и $I_2^{\text{composite}(2, n)}$. Результаты представлены в табл.18. Видно, что приближения сходятся при $n \rightarrow \infty$ к одному и тому же числу 1,060, которое в соответствии с теоремой о сходимости следует считать точным значением интеграла.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает анализ литературы последних лет и опыт участия в международных конференциях, посвященных континуальным интегралам, метод континуального интегрирования находит все более широкое применение в различных областях науки. При этом среди тенденций использования этого метода в квантовой физике важную роль играют следующие два направления. С одной стороны, происходит развитие методов, использу-

ющих решеточную регуляризационную схему, в том числе поиск новых модификаций функционала действия с улучшенными свойствами в континууме, совершенствование вычислительных алгоритмов на решетке, включая использование параллельных вычислений на ЭВМ. С другой стороны, последовательно развиваются методы, основанные на непертурбативной континуальной регуляризации и исследованиях непосредственно в континууме. Как отмечается во многих работах, этот подход привлекателен тем, что он позволяет изучать общие непертурбативные явления в квантовой теории поля. В вычислительном аспекте этот подход перспективен, поскольку в нем отсутствуют многие серьезные проблемы, которые не всегда решаются до конца при использовании решеточного подхода, в частности, проблема существования и единственности континуального предела, проблема неоднозначности результатов при различных дискретизациях, отсутствуют проблемы, связанные с возникновением метастабильности и замедлением сходимости итераций при стремлении к нулю шага решетки, отсутствуют т.н. решеточные артефакты, приводящие в ряде случаев расчеты на решетке к неверным результатам (например, появление ложных «решеточных» инстантонов). Некоторые авторы считают, что в решеточной квантовой хромодинамике размеры инстантонов примерно соответствуют шагу решетки, на которых ведутся расчеты в настоящее время (в том числе с помощью суперкомпьютеров и параллельных ЭВМ), и что этим, в частности, может объясняться сильное различие значений топологической восприимчивости, получаемых разными методами. Большое внимание уделяется в последнее время строгим определениям континуальных интегралов квантовой физики на основе понятия цилиндрических множеств, гауссовой меры и т.д. (см. [92]). Современное изложение основ квантовой теории поля также ведется на основе аппарата функционального интегрирования [307]. Развиваемый нами в рамках этого подхода метод приближенного вычисления континуальных интегралов дает возможность получения математически строго обоснованных физических результатов с заранее предсказываемой (на основании теорем) погрешностью вычислений. Он наиболее полезен в случаях, когда существует сильная чувствительность задачи к шагу дискретизации, например, при исследовании сингулярностей типа фазовых переходов второго и более высоких порядков, при возможности нарушения исходной топологии пространства с введением решетки, при исследовании систем высокой размерности (в том числе с многочастичным взаимодействием, поскольку в данном подходе не возникает проблемы обращения заполненных матриц высокого порядка) и т.д. Как показывает сравнение численных результатов, кратность обычных (римановых) интегралов, возникающих при использовании построенных нами приближенных формул на 1—2 порядка меньше, чем в методе Монте-Карло на решетке (в рассмотренных задачах квантовой механики 2—3 против 100—200), что обеспечивает существен-

ную экономию памяти ЭВМ и дает возможность использовать более предпочтительные детерминированные методы, дающие гарантированную, а не вероятностную оценку погрешности. Счетное время при этом также оказалось на порядок меньше, чем в методе Монте-Карло. В настоящее время нами ведутся работы по развитию метода и обобщению его на системы с отличным от нуля спином и модели квантовой теории поля с размерностью $d > 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schulman L.S. — Techniques and Applications of Path Integration. Wiley, New York, 1981; Khandekar D.C., Lawande S.V., Bhagwat K.V. — Path-Integral Methods and Their Applications. World Scientific, Singapore, 1993.
2. Feynman R. — Rev. Mod. Phys., 1948, vol.20, p.367.
3. Glimm J., Jaffe A. — Collected Papers, vol.2. Constructive Quantum Field Theory. Boston, Birkhauser, 1985.
4. Фаддеев Л.Д. — ТМФ, 1969, т.1, с.3.
5. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
6. Зайлер Э. — Калибровочные теории. М.: Мир, 1985.
7. Kleinert H. — Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics. Singapore: World Scientific, 1992.
8. Rivers R.J. — Path Integral Methods in Quantum Field Theory. Cambridge Univ. Press, 1987; Das A. — Field Theory: a Path Integral Approach. Singapore: World Scientific, 1993.
9. Попов В.Н. — Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
10. Блохинцев Д.И., Барбашов Б.М. — УФН, 1972, т.106, №4, с.593.
11. Попов В.Н. — ДАН СССР, 1988, т.301, №6, с.1366.
12. Inomata A., Kuratsuji H., Gerry C.C. — Path Integrals and Coherent States of SU(2) and SU(1,1). Singapore: World Scientific, 1992.
13. Захаров О.А., Сарданашвили Г.А. — Изв. вузов. Физика, 1990, т.33, №9, с.53.
14. Barut A.O., Duru I.H. — IC/88/4, Trieste, 1988.
15. Dutsch M. — Nuovo Cim. A., 1989, vol.102, №6, p.1469.
16. Халатников И.М. — ЖЭТФ, 1955, т.28, №5, с.633.
17. Brush S.G.. — Rev. Mod. Phys., 1961, vol.33, p.79.
18. Wiegel F.W. — Phys. Rep. (Phys. Lett. C) 1975, vol.16, p.57.
19. Papadopoulos G.J., Devreese J.T. (Eds.) — Path Integrals and Their Applications in Quantum, Statistical and Solid State Physics. Proc. NATO Adv. Study Ins., Antwerp, 1977.
20. Первушин В.Н. и др. — ЭЧАЯ, 1979, т.10, вып.5, с.1114.
21. Xianxi D. — ITP-SB 91-20, Stony Brook, 1991.
22. Свидзинский А.В. — ТМФ, 1971, т.9, №2, с.273.
23. Hatada K., Yosida K. — Progr. Theor. Phys., 1989, vol.82, No.4, p.702.
24. Kochetov E.A. — JINR, E17-94-264, Dubna, 1994.
25. Hawking S.W. — The Path-Integral Approach to Quantum Gravity. In: General Relativity, Hawking S. and Israel W. (Eds), Cambridge, London, 1979.

26. **Мазманишвили А.С.** — Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. Киев: Наукова думка, 1987.
27. **Albeverio S.A., Hoegh-Krohn R.H.** — *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals*. Lect. Notes in Math., 523, Springer, Berlin a.o., 1976.
28. **Экснер П.** — ЭЧАЯ, 1984, т.15, с.121.
29. **Ехнер Р.** — *Open Quantum Systems and Feynman Integrals*. Dordrecht: Reidel, 1985.
30. **Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.** — *Континуальные интегралы*. М.: Изд. МГУ, 1990.
31. **Разумовский О.С., Фирсов В.А.** — Вопросы истории естествознания и техники, 1986, №4, с.109.
32. **Березин Ф.А.** — УФН, 1980, т.132, вып.3, с.497.
33. **Прохоров Л.В.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.5, с.1094.
34. **Хренников А.Ю.** — Дифф. уравнения, 1992, т.28, №8, с.1434.
35. **Blau M., Keski-Vakkuri E., Niemi A.J.** — *Phys. Lett. B*, 1990, vol.246, 1/2, p.92.
36. **Szabo R.J., Semenoff G.W.** — *Nucl. Phys. B*, 1994, vol.421, No.2, p.391.
37. **Marinov M.S., Terentyev M.V.** — *Fortschr. Phys.*, 1979, vol.27, 11/12, p.511.
38. **Egorov A.D., Sobolevsky P.I., Yanovich L.A.** — *Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications*. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht a.o., 1993.
39. **Wiener N.** — *J. Math. and Phys.*, 1923, p.131; *Proc. London Math. Soc.*, 1924, vol.22, No.6, p.454.
40. **Yeh J.** — *Stochastic Processes and Wiener Integral*. M.Dekker, New York, 1973.
41. **Ковальчик И.М., Янович Л.А.** — *Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения*. Минск: Наука и техника, 1989.
42. **Klauder J.R.** — *Measure and Support in Functional Integration*. In: *Progress in Quantum Field Theory*, Ed. Ezawa H. and Kamefuchi S., Elsevier Science Publ., 1986, p.31.
43. **Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.** — *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*. М.: Наука, 1983.
44. **Cugliandolo L.F. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1990, vol.244, No.2, p.249.
45. **Cugliandolo L.F. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1991, vol.253, No.1,2, p.90.
46. **Хренников А.Ю.** — *Сиб. матем. ж.*, 1988, т.29, №4, с.180.
47. **Ellicott P. et al.** — *Ann. Phys.*, 1991, vol.205, No.1, p.70.
48. **Reisz T.** — *VI-TP 90/10*, Bielefeld, 1990.
49. **Янович Л.А.** — *Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам*. Минск: Наука и техника, 1976.
50. **Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А.** — *Приближенные методы вычисления континуальных интегралов*. Минск: Наука и техника, 1985.
51. **Pollock E.L., Runge K.J.** — *Lectures on Path Integral Computations*. In: *Lectures on Path Integration*. Trieste 1991. Singapore: World Scientific, 1993, p.242.
52. **Lobanov Yu.Yu.** — *New Approximation Formulas for Functional Integrals with Gaussian Measures*. In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.26.
53. **Петров В.А.** — *Ин-т математики АН БССР*, №28(264), №29(265), Минск, 1986.
54. **Grosche C., Steiner F.** — *Classification of Solvable Feynman Path Integrals*. In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.276.
55. **Albeverio S. et al.** — *BiBos 391/89*, Bielefeld, 1989.
56. **Cheng B.K.** — *Phys. Rev. A.*, 1987, vol.36, No.6, p.2964.

57. **McKeon D.G., Sherry T.N.** — *Int. J. Theor. Phys.*, 1993, vol.32, No.7, p.1105.
58. **Abraham F.F., Broughton J.Q.** — *Phys. Lett.*, 1987, vol.59, No.1, p.64.
59. **Tiedemann H.** — DESY 90-161, Hamburg, 1990.
60. **Gestrin G.N.** — *Inverse Problems*, 1991, vol.7, No.1, p.85.
61. **Bernido C.C.** — *Nucl. Phys. B*, 1989, vol.321, No.1, p.108.
62. **Kholodenko A.L.** — *Phys. Lett. A*, 1989, vol.138, No.1,2, p.13.
63. **Efimov G.V., Ganbold G.** — *Mod. Phys. Lett. A*, 1992, vol.47, p.4539.
64. **Mit'rushkin V.K., Zadorozhny A.M.** — *Phys. Lett. B*, 1987, vol.185, 3/4, p.377.
65. **Тепляков В.И.** — ДАН, 1994, т.334, №2, с.177.
66. **Inomata A., Zhu P.C.** — In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.136.
67. **Гельфанд И.М., Яглом А.М.** — УМН, 1956, т.11, №1, с.77.
68. **Кас М.** — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, vol.65, p.1.
69. **Далецкий Ю.Л.** — ДАН СССР, 1961, т.137, 2, с.268.
70. **Далецкий Ю.Л.** — ДАН СССР, 1960, т.134, 5, с.1013.
71. **Далецкий Ю.Л.** — УМН, 1962, т.17, 5, с.3.
72. **Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu.** — *Diff. Equations*, 1993, vol.29, No.9, p.1399.
73. **Lobanov Yu.Yu., Shahbagian R.R., Zhidkov E.P.** — In: *Colloquium on Differential Equations and Applications*, Budapest, 1991 (Abstracts), *J. Bolyai Math. Soc.*, p.24; JINR, E11-91-353, Dubna, 1991.
74. **Алимов А.Л.** — ТМФ, 1972, т.2, №2, с.182.
75. **Евграфов М.А.** — ДАН СССР, 1971, 5, с.979.
76. **Ито К.** — *Вероятностные процессы*. М., 1960.
77. **Вентцель А.Д.** — *Курс теории случайных процессов*. М., 1975.
78. **Билуцак Г.И.** — *Укр. матем. ж.*, 1987, т.39., 4, с.418.
79. **Lapidus M.L.** — *Stud. Appl. Math.*, 1987, vol.76, 2, p.93.
80. **Grieg R., Hersh R.** — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol.156, 2, p.405.
81. **Далецкий Ю.Л., Заплитная А.Т.** — *Укр. матем. ж.*, 1965, т.5, с.110.
82. **Alicki R., Makowiec D.** — *J. Phys. A (Math. Gen.)*, 1987, vol.20, 5, p.1075.
83. **Сторчак С.Н.** — ТМФ, 1993, т.94, №3, с.375.
84. **Сторчак С.Н.** — ТМФ, 1992, т.93, №1, с.17.
85. **Антонец М.А.** — ДАН, 1988, т.298, №1, с.11.
86. **Drozdov A.N.** — *Phys. Lett. A*, 1992, vol.171, 3/4, p.175.
87. **Gaveau B., Schulman L.** — *Nuovo Cim. D*, 1989, vol.11, 1/2, p.31.
88. **De-Angelis G.F., Serva M.** — *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, vol.25, 24, p.6539.
89. **Hanggi P.** — In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.289.
90. **Foong S.K., Nakamura F.E.** — In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.268.
91. **Simon B.** — *Functional Integration and Quantum Physics*. New York: Acad. Press, 1979; **Roepstorff G.** — *Path Integral approach to Quantum Physics: an Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
92. **Glimm J., Jaffe A.** — *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. New York: Springer-Verlag, 1987.
93. **Anselmi D.** — *Phys. Rev. D*, 1993, vol.48, 2, p.680.
94. **Daubechies I. et al.** — *J. Math. Phys.*, 1987, vol.28, 1, p.85.
95. **Dorlas T.C.** — DIAS-STP-87-35, Dublin, 1987.
96. **Toms D.J.** — *Phys. Rev. D*, 1987, vol.35, 12, p.3796.

97. Леффельхольц Ю. — ОИЯИ, P2-87-386, Дубна, 1987.
98. Фрадкина Т.Е. — ЯФ, 1987, т.46, вып.1, с.309.
99. Garchynski W. — Phys. Lett. B, 1987, vol.198, 3, p.367.
100. Kupsch J. — Fortschr. Phys., 1987, vol.35, 5, p.415.
101. Lobanov Yu.Yu., Shahbagian R.R., Zhidkov E.P. — In: Programming and Mathematical Techniques in Physics. Singapore: World Scientific, 1994, p.25.
102. Фейнман Р., Хибс А. — Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
103. Creutz M., Freedman B. — Ann. of Phys., 1981, vol.132, p.427.
104. Shuryak E.V., Zhirov O.V. — Nucl. Phys., 1984, vol.B242, p.393.
105. Rozansky L. — Int. J. Mod. Phys. A, 1992, vol.31, p.7775.
106. Milstein A.I. — Phys. Lett. A, 1987, vol.122, 1, p.1.
107. Barut A.O. et al. — J. Phys. A: Math. Gen., 1987, vol.20, 18, p.6271.
108. Scher G., Smith M., Baranger M. — Ann. of Phys., 1980, vol.130, p.290.
109. Swanson D.R., Edwards D.O. — Phys. Rev. B, 1988, vol.37, 4, p.1539.
110. Behn U. — Functional Integral Method in the Theory of Electron Correlation. Preprint Karl-Marx-Univ., Leipzig, 1986.
111. Sloan J.H. — Nucl. Phys. B., 1988, vol.302, 2, p.349.
112. Carreau M. et al. — Ann. Phys., 1990, vol.204, 1, p.186.
113. Maddox J. — Nature, 1992, vol.358, p.707.
114. Cai J.M., Inomata A. — Phys. Lett. A, 1989, vol.141, 7, p.315.
115. Grosche C. — Phys. Lett. A, 1992, vol.165, 3, p.185.
116. De R. et al. — Phys. Rev. A, 1992, vol.46, 11, p.6869.
117. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P. — Evaluation of Quantum Mechanics Path Integrals by the Approximations Exact on a Class of Polynomial Functionals (Contribution to the Intern. JINR-CERN School of Physics, Varna, Bulgaria, 1987), JINR, E2-87-507, Dubna, 1987.
118. Greguš M., Lobanov Yu.Yu., Sidorova O.V., Zhidkov E.P. — J. Comput. Appl. Math., 1987, vol.20, p.247.
119. Барбашов Б.М. — ЖЭТФ, 1965, т.48, вып.2, с.607.
120. Schmidt M.G., Schubert C. — HD-THEP 94-32, Heidelberg, 1994.
121. Gockeler M. et al. — DESY 89-124, Hamburg, 1989.
122. De Angelis G., Serva M. — J.Phys. A: Math. Gen., 1990, vol.23, 18, p.965.
123. Ichinose T., Tamura H. — Progr. Theor. Phys. Suppl., 1987, No.92, p.144.
124. Fradkin E.S. et al. — IC 90/134, Trieste, 1990.
125. Gur H. — Found. Phys., 1991, vol.21, 11, p.1305.
126. Batlle C. — Phys. Rev.D., 1989, vol.40, 6, p.1950.
127. Ikemori H. — Phys. Rev. D., 1989, vol.40, 10, p.3512.
128. Kochetov E.A. — Laser Physics, 1994, vol.4, 1, p.136.
129. Kolokolov I.V. — Ann. Phys., 1990, vol.202, 1, p.165.
130. Barcelos-Neto J., Das A. — Mod. Phys. Lett. A, 1990, vol.5, 30, p.2573.
131. Trembl T.F. — Can. J. Phys., 1990, vol.68, 1, p.96.
132. Inagaki T. — Mod. Phys. Lett. A, 1990, vol.5, 18, p.1423.
133. Harada K., Tsutsui I. — Phys. Lett. B., 1987, vol.183, 3/4, p.311.
134. Maatsuki T. — Phys. Rev. D, 1983, vol.28, 8, p.2107.
135. Umezawa M. — Phys. Rev. D, 1989, vol.39, 12, p.3672.
136. Mehta M.R. — Phys. Rev. D, 1991, vol.44, 4, p.1228.
137. Tsatsui I. — Phys. Rev. D, 1989, vol.40, 10, p.3543.

138. **Functional Integration, Geometry and Strings:** Proc. XXV Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, 1989. Basel: Birkhauser, 1989.
139. **Weinberg S.** — UTTG-17-87, Austin, 1987.
140. **Berkovits N.** — Nucl. Phys. B, 1988, vol.304, 3, p.537.
141. **Birmingham D., Torre C.G.** — Imperial/TP/85-86/22, London, 1986.
142. **Weisberger W.I.** — Nucl. Phys. B, 1987, vol.284, 1, p.171.
143. **Chaudhuri S., Kawai H., Henry Tye S.-H.** — Phys. Rev. D, 1987, vol.36, 4, p.1148.
144. **Hamada K.-J., Takao M.** — KEK-TH-182, Ibaraki, 1987.
145. **Das A. et al.** — Mod. Phys. Lett. A, 1988, vol.3,8, p.759.
146. **Mezincescu L. et al.** — Nucl. Phys. B, 1989, vol.322, 1, p.127.
147. **Berkovits N.** — Nucl. Phys. B, 1990, vol.331, 3, p.659.
148. **Fujikawa K.** — RRR 87-20, Hiroshima, 1987.
149. **Gamboa J., Ruiz-Altaba M.** — CERN-TH 4912/87, Geneva, 1987.
150. **Ganbold G., Efimov G.V.** — Phys. Rev. B, 1994, vol.50, 12, p.3733.
151. **Кочетов Е.А., Кулепов С.П., Смондырев М.А.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.3, с.635.
152. **Кочетов Е.А., Смондырев М.А.** — ТМФ, 1990, т.85, 1, с.74.
153. **Anselmi D.** — IFUP-TH 18/91, Pisa, 1991.
154. **Bernido C.C.** — J. Phys. A: Math. Gen., 1993, vol.26,20, p.5461.
155. **Maggiore M.** — Phys. Lett. B., 1994, vol.333, 1/2, p.39.
156. **Van Nieuwenhuizen P.** — ITP-SB 87-8, Stony Brook, 1987.
157. **Menotti P., Pelissetto A.** — IFUP-TH 24/86, Pisa, 1986.
158. **Bander M.** — Preprint Univ. of California, No.86-16, Irvine, 1986.
159. **Hatsuda M. et al.** — ITP-SB-89-43, Stony Brook, 1989.
160. **Brown J.D., York J.W., Jr.** — Phys. Rev D, 1993, vol.47, 4, p.1420.
161. **Laenen E., Van-Nieuwenhuizen P.** — Ann. Phys., 1991, vol.207, 1, p.77.
162. **Guven J., Ryan M.P.** — Phys. Rev. D, 1992, vol.45, 10, p.3559.
163. **Fukutaka H.** — YITP/K 972, Kyoto, 1992.
164. **Bershadsky M., Klebanov I.R.** — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.65, 25, p.3088.
165. **Bern Z. et al.** — LA-UR 90-3172, Los Alamos, 1990.
166. **Fukutaka H., Kashiwa T.** — Progr. Theor. Phys., 1989, vol.82, 4, p.791.
167. **Kiefer C.** — Ann. Phys., 1991, vol.207, 1, p.53.
168. **Linden N., Perry M.J.** — Nucl. Phys. B, 1991, vol.357, 1, p.289.
169. **Halliwell J.J.** — NSF-ITP 88-127, Santa Barbara, 1988.
170. **Halliwell J.J., Myers R.C.** — NSF-ITP 89-124, Santa Barbara, 1989.
171. **Calzetta E., Hu B.L.** — Phys. Rev. D, 1987, vol.35, 1, p.495.
172. **Hochberg D.** — Nucl. Phys. B, 1989, vol.319, 3, p.709.
173. **Farhi E., Gutmann S.** — Ann. Phys., 1992, vol.213, 1, p.182.
174. **Vanzo L.** — J. Math. Phys., 1993, vol.34, 12, p.5625.
175. **Carreau M.** — J. Math. Phys., 1992, vol.33, 12, p.4139.
176. **Колоколов И.В.** — ИЯФ 93-12, Новосибирск, 1993.
177. **Shabanov S.V.** — Phys. Lett. B., 1991, vol.255, 3, p.398; JINR, E2-90-402, Dubna, 1990.
178. **Blau S.K.** — Ann. Phys., 1991, vol.205, 2, p.392.
179. **Kondratiev Yu.G.** — BiBos 446/90, Bielefeld, 1990.
180. **Kijowski J., Rudolph G.** — Nucl. Phys. B, 1989, vol.325, 1, p.211.
181. **Belvedere L.V. et al.** — Z. Phys. C, 1992, vol.56, 4, p.609.

182. **Alonso J.L. et al.** — *Int. J. Mod. Phys. A*, 1990, vol.5, 14, p.2839.
183. **Farhi E., Gutmann S.** — *Int. J. Mod. Phys. A*, 1990, vol.5, 15, p.3029.
184. **Fischer W. et al.** — *Ann. Phys.*, 1993, vol.227, 2, p.206.
185. **Kochetov E.A.** а) *JINR, E17-92-412, Dubna, 1992*; б) *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, vol.25, 2, p.411.
186. **Streit L.** — *UMa Mat 10/92, Funchal, 1992*.
187. **Fukui T.** — *RCNP 044, Osaka, 1992*.
188. **Weinstein M.** — *SLAC-PUB 5739, Stanford, 1992*.
189. **Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.** — *Приближение эйконала для процессов выскоэнергетического рассеяния частиц. М.: Изд. Моск. Ун-та, 1977*.
190. **Efimov G.V., Ganbold G.** — *Phys. Stat. Sol. B*, 1991, vol.168, p.165.
191. **Kashiwa T. et al.** — *KYUSHU HET-12, Fukuoka, 1994*.
192. **Dewey T.G.** — *Phys. Rev. A*, 1990, vol.42, 1, p.32.
193. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — *Phys. Lett. A*, 1991, vol.157, 4/5, p.261.
194. **Stump D.R.** — *Phys. Rev. A*, 1987, vol.36, 1, p.365.
195. **Moretti P.** — *J. Math. Phys.*, 1987, vol.28, 4, p.765.
196. **Bolz G.F., Serva M.** — *BiBoS 363/89, Bielefeld, 1989*.
197. **Физиев П.П.** — а) *ОИЯИ, P2-84-229, Дубна, 1984*; б) *Bulg. J. Phys.*, 1983, vol.10, 1, p.27.
198. **Drummond I.T., Horgan R.R.** — *Phys. Lett. B*, 1990, vol.242, 3/4, p.419.
199. **Боос Э.Э., Давыдычев А.И.** — *ТМФ*, 1991, т.89, 1, с.56.
200. **Алексеев А.И., Еднерал В.Ф.** — *ИФВЭ 87-118, Серпухов, 1987*.
201. **Adachi S.** — *Ann. Phys.*, 1989, vol.195, 1, p.45.
202. **Кройц М.** — *Кварки, глюоны и решетки. М.: Мир, 1987*.
203. **Gerdt V.P., Mitrushkin V.K., Zadorozhny A.M.** — *Phys. Lett. B*, 1986, vol.172, No.1, p.65.
204. **Lattice 93:** *Proc. Int. Symposium on Lattice Field Theory, Dallas, USA, 1993. North-Holland, 1994*.
205. **Ukawa A.** — *UTHEP 213, Ibaraki, 1990*.
206. **Kennedy A.D.** — *FSU-SCRI 89-47, Tallahassee, 1989*.
207. **Hoek J.** — *RAL 89-076, Chilton, 1989*.
208. **Sakai S., Iso H.** — *Phys. Rev. D*, 1987, vol.36, 8, p.2545.
209. **Matone M.** — *Phys. Lett. B*, 1987, vol.187, 1/2, p.159.
210. **Michael C., Teper M.** — *Phys. Lett. B*, 1987, vol.199, 1, p.95.
211. **Driver B.K.** — *Comm. Math. Phys.*, 1987, vol.110, 3, p.479.
212. **Wohlert R.** — *DESY 87-069, 87-069, Hamburg, 1987*.
213. **Wu Ch.M., Zhao P.Y.** — *Mod. Phys. Lett. A*, 1987, vol.2, 2, p.113.
214. **Cahill K. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1988, vol.210, 1/2, p.198.
215. **Горенштейн М.И., Могилевский О.А.** — *ЯФ*, 1987, т.46, вып.3, с.975.
216. **Van Baal P.** — *Phys. Lett. B*, 1989, vol.224, 4, p.397.
217. **Ben-Av R., Solomon S.** — *Int. J. Mod. Phys. A*, 1990, vol.5, 2, p.427.
218. **Laursen M.L.** — *ITFA 89-32, Amsterdam, 1989*.
219. **Alles B. et al.** — *IFUP-TH 23/90, Pisa, 1990*.
220. **Di Giacomo A. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1989, vol.224, 3, p.324.
221. **Booth S.P. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1992, vol.275, 3/4, p.424.
222. **Belyaev V.M.** — *CEBAF TH-94-11, Newport News, 1994*.
223. **Gockeler M. et al.** — *Nucl. Phys. B*, 1993, vol.404, 3, p.839.
224. **Kogut J.B. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1991, vol.263, 1, p.101.

225. Catterall S. — ILL-(TH) 90-38, Urbana, 1990.
226. Pasquier V. — Nucl. Phys. B, 1988, vol.295, 4, p.491.
227. Pugh D.J.R., Teper M. — Phys. Lett. B, 1989, vol.224, 1/2, p.159.
228. Aoki S. et al. — Phys. Lett. B, 1990, vol.244, 2, p.301.
229. Gonzales-Arroyo A. — Phys. Lett. B, 1987, vol.193, 4, p.499.
230. Mack G. — DESY 85-111, Hamburg, 1985.
231. Karanikas A.I., Ktorides C.N. — Phys. Rev. D, 1987, vol.35, 4, p.1478; 1484.
232. Bern Z. et al. — Nucl. Phys. B, 1987, vol.284, 1, p.1; 35.
233. Chan H.S. — LBL-23148, Berkeley, 1987.
234. Kalivas N.G. — Phys. Rev. D, 1987, vol.36, 4, p.1210.
235. Sadun L. — Z. Phys. C, 1987, vol.36, p.407.
236. Cahill K., Reeder R. — Phys. Lett., 1984, vol.136B, 1/2, p.77.
237. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Мат. моделирование, 1989, т.1, вып.8, с.139.
238. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — ОИЯИ, P11-85-765, Дубна, 1985.
239. Саймон Б. — Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
240. Cameron R.H. — Duke Math. J., 1951, vol.18, 1, p.111.
241. Гельфанд И.М., Ченцов Н.Н. — ЖЭТФ, 1956, т.31, вып.6, с.1106.
242. Владимирова В.С. — УМН, 1960, т.15, вып.4, с.129.
243. Тобиас Г. — Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1965, 2, с.214.
244. Konheim A.G., Miranker W.L. — Math. Comput., 1967, vol.21, p.49.
245. Fosdick L.D., Jordan H.F. — J. Comp. Phys., 1968, vol.3, 1, p.1.
246. Finlayson H.C. — а) Canad.J.Math., 1967, vol.19, 1, p.58; б) Trans.Amer.Math.Soc., 1968, vol.132, 2, p.461; в) Pacific J. Math., 1970, vol.34, 1, p.61.
247. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — ОИЯИ, P11-83-867, Дубна, 1983.
248. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — ОИЯИ, P11-84-775, Дубна, 1984.
249. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — Кр. сообщ. ОИЯИ, 1984, №4, с.28.
250. Lobanov Yu.Yu. et al. — J.Comput.Appl.Math., 1990, vol.29, p.51.
251. Biswas S.N. et al. — J.Math.Phys., 1973, vol.14, p.1190.
252. Ивлев Б.И. — ЖЭТФ, 1988, т.94, вып.7, с.333.
253. Доброхотов С.Ю., Колокольцев В.Н. — ТМФ, 1993, т.94, вып.3, с.426.
254. Gangopadhyaya A. et al. — Phys.Rev.A, 1993, vol.47, 4-A, p.2720.
255. Овчинников Ю.Н. — ЖЭТФ, 1998, т.94, вып.5, с.365.
256. Shanley P.E. — Phys. Lett. A, 1989, vol.141, 7, p.331.
257. Kleinert H. — Phys.Lett.A, 1994, vol.190, 2, p.131.
258. Konwent H. — Acta Phys.Pol.A, 1987, vol.71, 4, p.637.
259. Leo K. et al. — Phys.Rev.Lett., 1991, vol.66, 2, p.201.
260. Вайнштейн А.И. и др. — УФН, 1982, т.136, вып.4, с.553.
261. Раджараман Р. — Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
262. Leinaas J.M., Olausson K. — Ann.Phys., 1989, vol.189, 2, p.243.
263. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. — ОИЯИ, P2-86-433, Дубна, 1986.
264. Blankenbecler R. et al. — Phys.Rev.D, 1980, vol.21, p.1055.
265. Shuryak E.V. — Phys.Rep., 1984, vol.115, 4/5, p.151.
266. Berg B., Lüscher M. — Nucl.Phys., 1981, vol.B190, 2, p.412.
267. Camprotrini M. et al. — Phys.Lett.B, 1988, vol.212, 2, p.206.

268. Di-Giacomo A., Vicari E. — Phys.Lett.B, 1992, vol.275, 3/4. p.249.
269. Lüscher M. — a) Nucl.Phys., 1982, vol.B205, 3, p.483; b) Comm.Math. Phys., 1982, vol.85, 1, p.39.
270. Woit P. — Phys. Rev. Lett., 1983, vol.51, 8, p.638.
271. Polonyi J. — Phys.Rev., 1984, vol.D29, 4, p.716.
272. Fox I.A. et al. — Phys. Rev. Lett., 1985, vol.54, 8, p.749.
273. Teper M. — RAL-85-089, Chilton, 1985.
274. Bhanot G. et al. — Nucl. Phys., 1984, vol.B230, p.291.
275. Iwasaki Y., Yoshie T. — Phys. Lett., 1984, vol.B245, 2, p.259.
276. Veneziano G. — Nucl. Phys., 1979, vol.B159, p.213.
277. Di Vecchia P. et al. — Nucl. Phys., 1981, vol.B181, p.318.
278. Narison S. — CERN TH-3796, Geneva, 1984.
279. Laursen M.L., Schierholz G., Wiese U.-J. — DESY, 85-062, Hamburg, 1985.
280. Gökceler M. et al. — DESY 85-142, Hamburg, 1985.
281. Рид М., Саймон Б. — Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982, т.4.
282. Займан Дж. — Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974.
283. Хуанг К. — Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.
284. Bunk B., Wolff U. — Nucl. Phys., 1983, vol.B215, 4, p.495.
285. Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu., Shakhbagyan R.R. — Math. Modelling and Computational Experiment, 1993, 1, p.65.
286. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Мат. моделирование, 1993, т.5, вып.12, с.61.
287. Lobanov Yu.Yu. et al. — In: Algorithms and Programs for Solution of Some Problems in Physics, vol.6, KFKI-1989-62/M, Budapest, 1989, p.1.
288. Calogero F. — J.Math.Phys., 1969, vol.10, p.2191.
289. Camiz P. et al. — J.Math.Phys., 1971, vol.12, p.2040.
290. Goovaerts M.J. — J. Math. Phys., 1975, vol.16, p.720.
291. Grimm R.C., Storer R.G. — J. Comp. Phys., 1971, vol.7, 1, p.134.
292. Turbiner A. — Phys. Lett. B, 1994, vol.320, 3/4, p.281.
293. Gorsky A., Nekrasov N. — Nucl. Phys. B, 1994, vol.414, 1/2. p.213.
294. Negele J.W. — J.Stat.Phys., 1986, vol.43, 5/6. p.991.
295. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P., Shahbagian R.R. — In: Math. Modelling and Applied Mathematics. Elsevier (North-Holland), 1992, p.273.
296. Baker R.A. et al. — Phys. Rev., 1962, vol.125, p.1754.
297. Herndon R.C., Tang Y.C. — Nucl. Phys., 1967, A93, p.692.
298. Rosati S., Barbi M. — Phys. Rev., 1966, vol.147, p.730.
299. Banville M., Kunz P.D. — Can. J. Phys., 1966, vol.44, p.2095.
300. Homan D.H., Kok L.P. — Nucl. Phys., 1968, vol.A117, p.231.
301. Kalos M.H. — Phys. Rev., 1962, vol.128, p.1791.
302. Carlson J. — Phys.Rev. C, 1987, vol.36, 5, p.2026.
303. Gilerak R. — Rep. Math. Phys., 1986, vol.24, 2, p.145.
304. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P. — JINR, E5-88-659, Dubna, 1988.
305. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P., Shahbagian R.R. — In: 5-th Intern. Symposium on Selected Topics in Statistical Mechanics, Dubna, 1989. Singapore: World Scientific, 1990, p.469.
306. Lobanov Yu.Yu., Zeinalova O.V., Zhidkov E.P. — JINR, E11-91-352, Dubna, 1991.
307. Brown L. — Quantum Field Theory. Cambridge Univ. Press, 1992.