

# ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ УРОВНЕЙ

*А.А.Сузько\**, *Е.П.Величева\*\**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

На основе обратной задачи в адиабатическом подходе исследован ряд двумерных точно решаемых моделей. С использованием баргмановских потенциалов построены точно решаемые модели с предписанными спектральными свойствами. При заданной функциональной зависимости термов исследованы матричные элементы оператора связности и скалярного потенциала при сближении уровней вплоть до пересечения и квазипересечения термов. Показано, что в ряде случаев потенциалы, отвечающие им базисные функции и связности сингулярны в точках вырождения состояний. Проблема пересечения уровней изучается на основе точно решаемых моделей обратной задачи.

On the basis of the inverse scattering problem in the adiabatic approach, a wide class of exactly solvable two-dimensional models is investigated. Exactly solvable models with prescribed spectral properties are constructed by using a generalized technique of Bargmann potentials. The matrix elements of the connection operator and the scalar potential are generated and studied in the vicinity of level crossings for terms with the given functional dependence. It is shown that some potentials, relevant basis functions and the connections are singular at the degeneracy points of wave states. The problem of level crossing is studied by exactly solvable models of the inverse problem.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Особенность сложных систем, таких как молекулярные, атомные, ядерные, состоит в том, что они характеризуются несколькими степенями свободы, разделение которых в сильно взаимодействующих системах, как правило, несправедливо. Метод адиабатического представления [1—3] поз-

---

\*Постоянный адрес: ИРФХП АН РБ, Минск, Белоруссия

\*\*Постоянный адрес: Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, Гомель, Белоруссия

воляет учесть взаимное влияние медленно изменяющегося внешнего (коллективного) и быстро изменяющегося внутреннего полей. Прямая задача рассеяния в адиабатическом подходе, начиная с работ Борна [1], имеет достаточно богатую историю развития, в то время как конструктивный подход к трехчастичной обратной задаче рассеяния предложен относительно недавно [4,5]. Он основан на глобальном адиабатическом представлении для трехчастичной волновой функции, построенном через локальные адиабатические разложения фаддеевских компонент [6,7].

Одно из основных достоинств метода обратной задачи — это возможность получать аналитические решения как в линейной, так и в нелинейной теории волн. Моделирование квантовых двух-, трехчастичных и эффективных многочастичных сложных систем представляется также очень важным применением точно решаемых моделей. Обратная задача в адиабатическом представлении, в свою очередь, расширяет возможности метода обратной задачи в исследовании многих реальных квантовых систем со сложной динамикой. Топологическая природа пространства сложных систем определяется взаимодействием коллективных и внутренних полей, которое может приводить к возникновению монопольных калибровочных потенциалов и, как следствие, к таким явлениям, как неинтегрируемые геометрические фазы [8—10], открытые Берри [8], молекулярный эффект Ааронова — Бома [11], хаос для коллективного движения [12] и эффект дробной статистики [13,14]. Точно решаемые модели в адиабатическом подходе, на наш взгляд, в ряде случаев позволят промоделировать эти процессы и послужат хорошим аппаратом для исследования монопольных калибровочных потенциалов в квантовых системах и связанной с ними проблемы пересечения уровней. В связи с интенсивным исследованием этих явлений [8—19] старая проблема пересечения уровней, ассоциируемая с переходами Ландау — Зинера [20,21], и ее связь с топологическими эффектами в квантовых системах становятся особенно актуальными. Здесь мы предлагаем исследовать проблему пересечения уровней на основе широкого класса точно решаемых моделей обратной задачи в адиабатическом представлении.

Многомерная обратная задача в адиабатическом подходе, который по математической сути своей представляет один из вариантов размерной редукции пространства  $M = B \times \hat{M}$ , сводится к согласованному решению двух обратных задач в пространствах  $B$  и  $\hat{M}$  меньшей размерности, чем исходное [4,5,22,23]. Одна из них — параметрическая — формулируется для уравнения Шредингера, описывающего быструю динамику при параметрической зависимости от медленных переменных, другая — многокалланная — для систем уравнений калибровочного типа, описывающих медленное движение. На основе обобщения техники баргмановских

потенциалов как для параметрического уравнения Шредингера, так и для многоканальной системы калибровочных уравнений в [22,23,5,24] разрабатывается метод конструирования широкого класса точно решаемых моделей в пространстве нескольких измерений, предложенный в [22]. Здесь мы исследуем двумерные точно решаемые модели при согласованной постановке обратных задач для обоих этих случаев и приводим ряд примеров в иллюстрациях, демонстрируя возможности метода обратной задачи. В частности, дано графическое представление двумерных потенциалов и базисных функций для систем с одним, двумя, тремя связанными состояниями в регулярном и сингулярном случаях. Исследуется ряд двумерных точно решаемых моделей, построенных на основе параметрической обратной задачи в подходах Гельфанда — Левитана и Марченко с заданной зависимостью спектральных характеристик от внешней координатной переменной.

С использованием полученных в замкнутом аналитическом виде функций параметрической задачи разрабатывается метод определения обменного взаимодействия, индуцированного этими функциями и на этой основе способ вычисления амплитуд перехода между уровнями. Исследуется проблема пересечения уровней, и рассматриваются некоторые геометрические аспекты адиабатического подхода, связанные с возникновением монополярных калибровочных потенциалов при вырождении уровней.

Такой подход можно рассматривать как полезный аппарат исследования проблемы пересечения уровней Ландау и некоторых других проблем, связанных с топологической природой пространства сложных систем с несколькими степенями свободы. При этом открываются возможности исследования влияния быстрой динамики отдельных частиц на коллективную динамику всей системы в целом и, наоборот, влияния коллективной динамики на внутренние двух- и трехчастичные взаимодействия в системе.

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАЗЫ

Предположим, что состояние  $|\Psi(t)\rangle$  системы эволюционирует в соответствии с уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\Psi(t)\rangle. \quad (1)$$

В квантовой механике решение уравнения (1), вообще говоря, сложная задача, поскольку при зависящем от времени гамильтониане энергия не сохраняется и стационарных состояний не существует. Введем унитарное преобразование  $C(t)$  для волновой функции

$$|\Psi(t)\rangle = C(t)|\psi(t)\rangle \quad (2)$$

таким образом, чтобы в полученном из (1) уравнении для  $|\psi(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = h|\psi(t)\rangle \quad (3)$$

гамильтониан

$$h = C^\dagger H C - i\hbar C^\dagger \dot{C} \quad (4)$$

не зависел от времени, т.е.  $(\partial/\partial t)h = 0$ . Отсюда мы получаем уравнение на преобразование  $C(t) \equiv C$ :

$$\dot{C}^\dagger H C + C^\dagger \dot{H} C + C^\dagger H \dot{C} - i\hbar \dot{C}^\dagger \dot{C} - i\hbar C^\dagger \ddot{C} = 0, \quad (5)$$

где использовано обозначение  $\dot{C} = (d/dt)C$ . Волновая функция уравнения (3) может быть представлена в виде

$$|\psi(t, \mathbf{X})\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(t') dt'\right) |\varphi(\mathbf{X})\rangle, \quad (6)$$

и, по сути дела, сводится к решению задачи

$$h|\varphi(\mathbf{X})\rangle = E|\varphi(\mathbf{X})\rangle \quad (7)$$

с не зависящим от времени гамильтонианом  $h$ .

Для самосопряженного оператора  $h$  функции  $|\varphi(\mathbf{X})\rangle$  образуют полный и ортонормированный набор. Подставляя  $|\psi(t, \mathbf{X})\rangle$  в (3) и используя ортогональность функций  $|\varphi(\mathbf{X})\rangle$ , с учетом (4) получим

$$\frac{iE(t)}{\hbar} = -\frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | H(t) | \Psi(t) \rangle - \langle \varphi | C^\dagger \dot{C} | \varphi \rangle. \quad (8)$$

С учетом этого соотношения в (2) волновая функция уравнения (1) приобретает вид

$$|\Psi(t)\rangle = C(t) |\varphi\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle \Psi(t') | H(t') | \Psi(t') \rangle dt' - \int_0^t \langle \varphi | C^\dagger \dot{C} | \varphi \rangle dt'\right). \quad (9)$$

Первое слагаемое в скобках — динамическая часть фазы, второе слагаемое — геометрическая часть. Следовательно, если исключить динамическую часть из фазового множителя [10,18], то волновую функцию  $|\Psi'(t)\rangle$  уравнения (1) можно переписать так:

$$|\Psi'(t)\rangle = C(t)|\varphi\rangle \exp\left(-\int_0^t \langle\varphi|C^\dagger\dot{C}|\varphi\rangle dt'\right). \quad (10)$$

Фазовое различие между  $|\Psi'(0)\rangle$  и  $|\Psi'(T)\rangle$  и есть геометрическая фаза  $\delta$ , определяемая следующим образом. Домножим соотношение (10) при  $t = T$  на вектор состояний (10)  $\langle\Psi'(0)|$  в начальный момент времени:

$$\begin{aligned} &\langle\Psi'(0)| |\Psi'(T)\rangle = \\ &= \langle\varphi|C^\dagger(0)C(T)|\varphi\rangle \exp\left(-\int_0^T \langle\varphi|C^\dagger\dot{C}|\varphi\rangle dt'\right) = \rho \exp(i\delta). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку множитель перед экспонентой — комплексное число

$$\langle\varphi|C^\dagger(0)C(T)|\varphi\rangle = \rho \exp(i\text{Arg}[\langle\varphi|C^\dagger(0)C(T)|\varphi\rangle]) = \rho \exp(i\beta),$$

то фазу  $\delta$  можно представить в виде

$$\delta = \beta + i \left( \int_0^T \langle\varphi|C^\dagger\dot{C}|\varphi\rangle dt' \right). \quad (12)$$

Если в процессе эволюции квантовой системы к какому-то моменту  $t = T'$ ,  $C(T')|\varphi\rangle = C(0)|\varphi\rangle$ , то  $\beta = 0$  и фаза (12) есть в точности геометрическая фаза Ааронова — Анандана [10].

В квантовой механике использование унитарных преобразований типа (4) — стандартная техника. Она эффективно используется при получении геометрических фаз (8) при медленной и плавной циклической эволюции во времени коллективных координат  $\mathbf{x}(t) \in V$  системы, управляемой гамильтонианом  $H(t) \equiv H(\mathbf{x}(t))$ . Тогда решение уравнения (1) ищут в виде разложения

$$|\Psi(t, \mathbf{x}(t), y)\rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{E}_n(\mathbf{x}(t')) dt'\right) |\varphi_n(\mathbf{x}(t); y)\rangle \quad (13)$$

по полному ортонормированному набору собственных функций  $\{|\varphi_n(\mathbf{x}(t); y)\rangle\}$  мгновенного гамильтониана

$$H(\mathbf{x}(t))|\varphi_n(\mathbf{x}(t); y)\rangle = \mathcal{E}_n(\mathbf{x}(t))|\varphi_n(\mathbf{x}(t); y)\rangle. \quad (14)$$

Подставляя разложение (13) в уравнение (1) и используя ортонормированность  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$  функций базиса  $|\varphi_n(t)\rangle \equiv |n(t)\rangle$ , нетрудно получить систему линейных дифференциальных уравнений для коэффициентов  $c_n(t)$ :

$$i\hbar \frac{dc_n(t)}{dt} = \left\{ -i\hbar \sum_m \langle m | \dot{n} \rangle c_m(t) + \sum_m \langle m | H | n \rangle c_m(t) \right\} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t (\mathcal{E}_n(t') - \mathcal{E}_m(t')) dt' \right] - \mathcal{E}_n(t) c_n(t). \quad (15)$$

Система уравнений для  $c(t)$  с учетом (14) может быть переписана в виде

$$\dot{c}_n(t) = \sum_m B_{nm}(\mathbf{x}(t)) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t (\mathcal{E}_n(t') - \mathcal{E}_m(t')) dt' \right] c_m(t). \quad (16)$$

Здесь матричные элементы обменного взаимодействия

$$B_{nm}(\mathbf{x}(t)) = \langle n | \dot{m} \rangle = A_{nm}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t),$$

где

$$A_{nm}(\mathbf{x}) = \langle n(\mathbf{x}) | \nabla_{\mathbf{x}} | m(\mathbf{x}) \rangle, \quad (17)$$

генерируются базисными функциями  $|n\rangle$  «мгновенного» гамильтониана (14).

Продифференцировав уравнение (14) по  $t$ , при  $n \neq m$  получим

$$\langle m | \dot{n} \rangle = \frac{\langle m | \dot{H} | n \rangle}{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}.$$

Адиабатическое приближение соответствует тому, что примесь других состояний к данному  $|n\rangle$  мала, т.е. оценка недиагональных элементов соотношения (16) приводит к условию

$$\frac{\langle m | \dot{H} | n \rangle}{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m)^2} \ll 1, \quad (18)$$

при выполнении которого система будет оставаться в одном и том же состоянии при своей эволюции с хорошим приближением, что, как следует из соотношения (15), дает

$$c_n(t) = \exp \left[ -\int_0^t \langle n | \dot{n} \rangle dt' \right] c_n(0).$$

Берри показал, что при циклической адиабатической эволюции фаза

$$\delta = -i \int_0^T \langle n | \dot{n} \rangle dt'$$

не зависит от выбора состояния  $|n(t)\rangle$  и, следовательно, отражает геометрическое свойство параметрического пространства  $x \in B$ , от которого зависит гамильтониан  $H(x(t))$ . Действительно, с учетом (17) последнее соотношение переписывается в следующем виде:

$$\delta = -i \oint_{\Gamma} \langle n(x) | \nabla_x | n(x) \rangle \cdot \dot{x}(t) = -i \operatorname{Im} \iint_{\Gamma} dS \cdot \operatorname{rot} A. \quad (19)$$

Здесь  $S$  есть поверхность, ограниченная контуром  $\Gamma$ . Заключение Берри основано на том, что вихрь вектора  $\langle n(x) | \nabla_x | n(x) \rangle$  не зависит от выбора фазы собственного состояния  $|n(x)\rangle$ . Действительно, если вектор  $|n(x)\rangle$  заменить вектором  $|n(x)\rangle \rightarrow \exp i\mu(x) |n(x)\rangle$ , то  $\langle n | \nabla | n \rangle \rightarrow \langle n | \nabla | n \rangle + i \nabla \mu$ , при этом вихрь вектора  $A$  не изменится, то есть, вектор может быть не единственным, а вихрь связности, определяющий геометрическую фазу, один.

Вполне очевидно, что представление (13) ограничено и не охватывает ряд ситуаций: первый случай, когда нет медленной эволюции гамильтониана  $H(t) \equiv H(x(t))$  со временем, и второй, не всегда совпадающий с первым, когда нельзя пренебречь гамильтонианом, управляющим коллективными «медленными» степенями свободы системы, по сравнению с гамильтонианом, описывающим внутреннее межчастичное взаимодействие. Геометрическая фаза (12), введенная Аароновым и Ананданом [10], справедлива при любой циклической эволюции и в частном случае адиабатической эволюции содержит в себе фазу Берри.

При сближении уровней, как легко видеть из (18), условие адиабатичности нарушается. Обычно в данной ситуации предполагают диабатическую динамику — используют теорию переходов Ландау — Зинера. В работах Булгака и Кузнецова [12,25] исследуется взаимное влияние коллективных и внутренних степеней свободы и отмечается, что оно проявляется в макроскопических процессах, таких как диссипация, коллективная диффузия, хаотическое поведение как медленных, так и быстрых степеней свободы, энергетические переходы. Утверждается, что в переходной области вблизи пересечения уровней нельзя плавно перейти от адиабатической картины взаимодействия к диабатической. В частности, вблизи пересечения уровней особенно сильно сказывается взаимное влияние коллективной и внутренней динамики в многочастичных системах.

Мы предлагаем исследование проблемы пересечения уровней и связанных с нею задач на основе точно решаемых моделей в рамках метода адиабатического представления.

### 3. МЕТОД АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Будем исходить из уравнения Шредингера (3) с гамильтонианом, не зависящим от времени. Предлагаемый подход может быть использован при исследовании более сложных уравнений (1) с зависящим от времени гамильтонианом, после осуществления процедуры унитарного преобразования (2)—(9) и приведения уравнения (1) к уравнению (3) с гамильтонианом (4), не зависящим от времени. Здесь мы также будем использовать технику унитарных преобразований типа (4) в координатном пространстве.

Адиабатическое представление, когда для гамильтониана  $h$  вводят разбиение

$$h = h^s \otimes I + h^f, \quad (20)$$

формулируется на гильбертовом расслоенном пространстве  $\mathcal{H} = \int_B \oplus \mathcal{F}_x d\mu(x)$ , где  $B$  есть база,  $\mu(x)$  — положительная мера на  $B$ , слои  $\mathcal{F}_x \ni \{\varphi_n(x, \cdot)\}$  образованы из собственных функций  $\varphi_n(x, \cdot)$  самосопряженных операторов  $h^f(x)$ , параметризованных точками  $x \in B$ :

$$h^f(x) \varphi_n(x; \cdot) = \mathcal{E}_n(x) \varphi_n(x; \cdot);$$

$$h^f(x) = -\Delta_y + V(x, y). \quad (21)$$

Поскольку операторы  $h^f(x)$  действуют в гильбертовых слоях  $\mathcal{F}_x$ , они называются слоями оператора  $H$ :  $H = \int_B \oplus h^f(x) dx$ . Оператор  $h^s \otimes I$  действует как  $h^s$  по медленным  $s$ -переменным  $x$  и как единичный оператор по быстрым  $f$ -переменным  $y \in M$ .

Полная волновая функция системы  $\varphi(X)$ ,  $X = \{x, y\} \in M$  в таком подходе представляется в виде разложения

$$|\psi(X)\rangle = |n\rangle \langle n | \psi \rangle = \sum_n \int \varphi_n(x; \cdot) F_n(x) \quad (22)$$

по собственным состояниям  $\varphi_n(x; \cdot)$  гамильтониана быстрого движения  $h^f(x) \forall x \in B$  (21), которые, вследствие его самосопряженности, образуют полный ортонормированный набор

$$\langle n | m \rangle = \int \varphi_n^\dagger(x; y) \varphi_m(x; y) dy = \delta_{nm}; \quad |n\rangle \langle n| = \delta(y - y'), \quad \forall x. \quad (23)$$



Символ  $\sum \int$  в (22) обозначает суммирование по состояниям дискретного спектра  $\mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \in \sigma_d(h^f(\mathbf{x}))$  и интегрирование по состояниям непрерывного спектра  $\mathcal{E}_k(\mathbf{x}) \in \sigma_c(h^f(\mathbf{x}))$ . Если функции заданы на компактном множестве значений  $\mathbf{y} \in M$ , то они все квадратично интегрируемы, и спектр чисто дискретный, как это имеет место в случае гиперсферической параметризации пространства, когда  $\mathbf{y} \in S^M$  — набор углов. В общем случае, поскольку состояния рассеяния  $\psi_k(\mathbf{x}; \cdot) \equiv \psi(k, \mathbf{x}; \cdot)$  вместе с состояниями дискретного спектра образуют полный набор, их необходимо учитывать в разложении (1), хотя они и не из  $L_2$ . В зависимости от конкретной постановки задачи используется как компактное базовое многообразие, так и некомпактное.

Подстановка разложения (22) для  $\psi$  в исходное многомерное уравнение Шредингера и усреднение по быстрым переменным внутреннего движения приводит к многоканальной системе уравнений с удлиненной производной для коэффициентов разложения  $F = \{F_n\}$ :

$$[-(\nabla \otimes I - iA(\mathbf{x}))^2 + V(\mathbf{x}) \otimes I - P^2] F(\mathbf{x}) = 0, \quad (24)$$

$$P = \text{diag}(p_n),$$

где операторы  $A(\mathbf{x})$  и  $V(\mathbf{x})$  действуют как операторнозначные для матричных компонент эффективных векторного и скалярного потенциалов, генерируемых функциями базиса

$$A_{nm}(\mathbf{x}) = \langle \varphi_n(\mathbf{x}; \cdot) | i \nabla_{\mathbf{x}} | \varphi_m(\mathbf{x}; \cdot) \rangle. \quad (25)$$

Это определение матричных элементов  $A$ , осуществляющих обменное взаимодействие, совпадает с определением (17), только  $A$  входят в разные уравнения (24) и (15). В обоих случаях матричные элементы  $A$  выполняют функции связи и являются источниками топологических эффектов. Потенциальная матрица в (24) диагональна ( $V(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\mathcal{E}(\mathbf{x})\}$ ) и ее элементы совпадают с энергетическими уровнями  $\mathcal{E}_m(\mathbf{x})$  мгновенного гамильтониана  $h^f(\mathbf{x})$  (21):

$$V_{nm}(\mathbf{x}) = \langle \varphi_n(\mathbf{x}; \cdot) | h^f(\mathbf{x}) | \varphi_m(\mathbf{x}; \cdot) \rangle = \mathcal{E}_n(\mathbf{x}) \delta_{nm}. \quad (26)$$

В общем случае  $V(\mathbf{x})$  необходимо дополнить некоторой потенциальной матрицей  $V^s(\mathbf{x})$ , содержащейся только в системе уравнений (24)  $V_{nm}^s = \langle \varphi_n(\mathbf{x}; \cdot) | V^s(\mathbf{x}, \cdot) | \varphi_m(\mathbf{x}; \cdot) \rangle$ . Отметим, что представление (22) полной

волновой функции  $\psi$  должно быть инвариантно относительно выбора базисного набора функций:

$$|\psi\rangle = |n\rangle \langle n | \psi \rangle = |n\rangle \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \langle n | \psi \rangle. \quad (22a)$$

Тогда, как следует из (22),  $|\varphi(x; \cdot)\rangle$  заменяется на  $|\varphi'(x; \cdot)\rangle$ , а  $F(x)$  — на  $F'(x)$ :

$$|\varphi'(x, y)\rangle = |\varphi(x; y)\rangle \mathcal{U}^\dagger(x), \quad F'(x) = \mathcal{U}(x) F(x). \quad (27)$$

Легко показать, что при таком преобразовании эффективные матрицы  $V(x)$  и  $A(x)$  преобразуются как калибровочные скалярные и векторные потенциалы:

$$V'(x) = \mathcal{U}(x) V(x) \mathcal{U}^{-1}(x), \quad A'_v(x) = \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1} - i \mathcal{U}^{-1} \partial_v \mathcal{U}, \quad (28)$$

а удлиненная производная  $D_v \equiv \partial_v \otimes I - i A'_v(x)$  в (24) — как ковариантная производная. Здесь  $\mathcal{U}(x)$  — калибровочное преобразование. Унитарность  $\mathcal{U}$  следует из условия полноты наборов  $\{\varphi\}$  и  $\{\varphi'\}$  в каждом слое  $\mathcal{F}_x$ :

$$\mathcal{U}(x) \mathcal{U}^{-1}(x) = 1, \quad \mathcal{U}^\dagger(x) = \mathcal{U}^{-1}(x), \quad \forall x \in B. \quad (29)$$

Используя соотношения ортогональности и полноты (23), определим репер  $|e(y)\rangle \equiv |\varphi(x_0; y)\rangle$  в некоторой фиксированной точке  $x = x_0$ . Движущийся репер  $|\varphi(x; \cdot)\rangle$  связан с фиксированным  $|e(\cdot)\rangle$  с помощью унитарного билокального оператора  $\mathcal{U}(x) \equiv \mathcal{U}(x, x_0)$ :

$$|\varphi(x; \cdot)\rangle = |e(\cdot)\rangle \mathcal{U}(x, x_0), \quad \mathcal{U}(x, x_0) = \langle e(\cdot) | \varphi(x; \cdot) \rangle, \quad (30)$$

осуществляющего параллельный перенос репера из  $x_0$  в  $x$ . Теперь, используя унитарное калибровочное преобразование

$$\mathcal{U}(x, x_0) = \exp i \int_{x_0}^x A(x') dx',$$

переходим к представлению фиксированного базиса  $|e(x_0, y)\rangle$ . При условии чистой калибровки  $A$  аннигилируется, и система уравнений (24) сводится к обычной многоканальной системе уравнений с потенциальным зацеплением для новых коэффициентов  $F'$ , связанных со старыми  $F$  соотношением (27):

$$[-(1/2) \Delta + \mathcal{U}(x) V(x) \mathcal{U}^{-1}(x) - P^2] F'(x, P) = 0. \quad (31)$$

После этого к системе уравнений (31) можно применить стандартные методы многоканальной обратной задачи при условии, что известна соответствующая матрица рассеяния и информация по состояниям дискретного спектра — по положениям и нормировкам. Отметим, что это возможно в отсутствие сингулярностей  $A(x)$ .

### 3.1. Обратная задача рассеяния в адиабатическом представлении.

Таким образом, обратная задача в адиабатическом подходе сводится к согласованному решению многоканальной обратной задачи для системы уравнений калибровочного типа (24) и параметрической задачи в слое (21). На основе многоканальной и одноканальной техники баргмановских потенциалов в статьях [22,23,5] был сформулирован метод аналитического моделирования эффективных взаимодействий и соответствующих решений в сложных квантовых системах с несколькими степенями свободы. Для потенциалов баргмановского типа ядра уравнений обратной задачи представляются как сумма факторизованных членов, в результате интегральные уравнения обратной задачи сводятся к системам алгебраических и решаются в замкнутом виде.

В данной работе мы демонстрируем возможности метода на примерах двумерных точно решаемых моделей  $X = \{x, y\}$ . Восстановить потенциал  $V(X)$  и найти функции движущегося репера можно с помощью формализма обратной задачи для «быстрого» уравнения (21) при параметрической зависимости данных рассеяния от медленных переменных  $x$ , определяемой, в свою очередь, при решении обратной задачи для «медленной» системы уравнений (24). При заранее заданной зависимости от параметра спектральных данных  $\{S(x, k), \mathcal{E}_i(x), \gamma_i^2(x)\}$  вначале восстанавливается двумерный потенциал  $V(x, y)$  при решении параметрической обратной задачи и определяются базисные функции  $\psi_i(x; y)$ , по которым из (25) можно найти матрицу индуцированного векторного потенциала  $A(x)$ . После этого можно разрешить систему уравнений (24) относительно  $F(x)$  и  $S$ -матрицы или систему уравнений (16) относительно амплитуд  $s(t)$ . В отличие от известных моделей Ландау — Зинера [20,21], резонансной перезарядки [28], Розена — Зинера — Демкова [26,27], в данной постановке для получения амплитуды переходов как в классическом [20,21,26—28], так и в квантово-механическом подходах [30—32] нет жесткого ограничения на вид обменного взаимодействия  $A(x)$  и закон изменения расстояния между уровнями  $\Delta(x) = \mathcal{E}_n(x) - \mathcal{E}_m(x)$ .

### 3.2. Точно решаемые модели для параметрической задачи.

По аналогии с обычной техникой баргмановских потенциалов функции Йоста параметрических уравнений (14), (21) выбираются в дробно-рациональном

виде [22,5]. Однако теперь они зависят от внешней координатной переменной через зависимость от нее спектральных параметров  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ :

$$f(x; k) = \overset{\circ}{f}(k) \prod \frac{k - i\alpha(x)}{k + i\beta(x)}. \quad (32)$$

Параметрическая функция Йоста (32) имеет  $N$  простых полюсов на траекториях импульсов в параметрическом пространстве  $B \ni x$  при  $k = i\beta_j(x)$  и  $N$  простых нулей при  $k = i\alpha_j(x)$ , а не в отдельных точках, как в обычной обратной задаче. Причем в  $\alpha(x)$  содержатся не только нули на мнимой полуоси, отвечающие связанным состояниям  $\text{Re } \kappa_j(x) = 0$ ,  $\text{Im } \kappa_j(x) > 0$ , но и нули в нижней полуплоскости с  $\text{Im } \nu_j(x) < 0$  (число простых полюсов  $\beta_j$  равно числу значений  $\kappa_j$  и  $\nu_j$  вместе взятых). Тогда матрица рассеяния и спектральная функция приобретают вид

$$s(x; k) = \overset{\circ}{s}(k) \prod \frac{(k + i\alpha(x))(k + i\beta(x))}{(k - i\beta(x))(k - i\alpha(x))}, \quad (33)$$

$$\rho(x; k) = \overset{\circ}{\rho}(k) \prod \frac{(k - i\beta(x))(k + i\beta(x))}{(k + i\alpha(x))(k - i\alpha(x))}. \quad (34)$$

Функции  $\overset{\circ}{s}(k)$  и  $\overset{\circ}{\rho}(k)$  известны, поскольку известен потенциал  $\overset{\circ}{V}(y)$ ; в частном случае  $\overset{\circ}{V}(y) = 0$ . Для таких  $s(x, k)$ ,  $\rho(x, k)$ , как (33), (34), ядра  $Q(x; y, y')$  и  $K(x; y, y')$  интегральных уравнений обратной задачи

$$K(x; y, y') + Q(x; y, y') + \int_{y(0)}^{\infty(y)} K(x; y', y'') Q(x; y', y'') dy'' = 0 \quad (35)$$

вырождаются и представляются в виде суммы нескольких членов с факторизованной координатной зависимостью по быстрой переменной  $y$ :

$$\begin{aligned} Q(x; y, y') &= \sum_n^m \gamma_n^2(x) \overset{\circ}{\phi}(i\kappa_n(x), y) \overset{\circ}{\phi}(i\kappa_n(x), y') - \\ &- \sum_n^{\overset{\circ}{m}} \overset{\circ}{\gamma}_n^2(x) \overset{\circ}{\phi}(i\overset{\circ}{\kappa}_n(x), y) \overset{\circ}{\phi}(i\overset{\circ}{\kappa}_n(x), y'), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} K(x; y, y') &= - \left\{ \sum_n^m \gamma_n^2(x) \phi(i\kappa_n(x), y) \overset{\circ}{\phi}(i\kappa_n(x), y') - \right. \\ &\left. - \sum_n^{\overset{\circ}{m}} \overset{\circ}{\gamma}_n^2(x) \phi(i\overset{\circ}{\kappa}_n(x), y) \overset{\circ}{\phi}(i\overset{\circ}{\kappa}_n(x), y') \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Как следствие этого, интегральные уравнения (35) становятся алгебраическими, сферически-несимметричный потенциал и соответствующие ему решения выражаются в замкнутом аналитическом виде через известные решения непараметрической задачи с потенциалом  $\overset{\circ}{V}(y)$  и через спектральные характеристики двух задач: непараметрической с потенциалом  $\overset{\circ}{V}(y)$  и параметрической (14), (21) с потенциалом  $\overset{\circ}{V}(y) + V(x, y)$ :

$$V(x; y) = \overset{\circ}{V}(y) \mp 2 \frac{d}{dy} K(x; y, y), \quad (38)$$

$$\varphi(x; k, y) = \overset{\circ}{\varphi}(k, y) + \int_{y(0)}^{\infty(y)} K(x; y, y') \overset{\circ}{\varphi}(k, y') dy'. \quad (39)$$

Здесь  $\varphi(x; k, y)$  — решения (21) или (14) с искомым потенциалом  $V(x; y)$  при произвольном  $k$ , представленные через решения  $\varphi[i\kappa_n(x), y]$  того же уравнения при  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ :

$$\varphi[i\kappa_n(x), y] = \sum_j^m \overset{\circ}{\varphi}[i\kappa_j(x), y] P_{jn}^{-1}(x; y), \quad (40)$$

где

$$P_{nj}(x; y) = \delta_{nj} + \gamma_n^2 \int_{y(0)}^{\infty(y)} \overset{\circ}{\varphi}[i\kappa_n(x), y'] \overset{\circ}{\varphi}[i\kappa_j(x), y'] dy'.$$

Под  $\overset{\circ}{\varphi}(k, y)$  следует понимать решения Йоста в подходе Марченко или регулярные решения в подходе Гельфанда — Левитана, отвечающие потенциалу  $\overset{\circ}{V}(y)$ . Пределы интегрирования и знаки в (39), (40) зависят от конкретного подхода обратной задачи. Пределы от  $y$  до  $\infty$  и знак минус отвечают формулировке Марченко. Пределы  $[0, y]$  и знак плюс — подходу Гельфанда — Левитана.

Рассмотрим задачу конструирования безотражательных симметричных потенциалов по быстрой переменной  $y$  и соответствующих им решений при  $\overset{\circ}{V}(y) = 0$ , следуя работам [33,24]. Соотношения для потенциалов и решений (38)—(40) могут быть выражены через нормированные собственные функции (14):

$$\Psi(x; y) = \gamma_n(x) f_+(x; k, y), \quad (41)$$

где  $f_+(x; k, y)$  — решения Йоста уравнения (14). Для безотражательных потенциалов  $S^r(x; k) = 0, \forall x$  в ядре  $Q(x; y, y')$ , определяемом данными рассеяния, остается лишь сумма по связанным состояниям:

$$Q(x; y, y') = \sum_n \gamma_n^2 \exp(-\kappa_n(x)y) \exp(-\kappa_n(x)y'). \quad (42)$$

Если безотражательные потенциалы симметричны по быстрой переменной  $y$ , то потенциал и решения полностью заданы значениями энергий уровней  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ , поскольку их нормировки определяются энергиями связанных состояний

$$\gamma_n^2(x) = i \operatorname{Res} S^{lr}(k) / k = i\kappa_n(x) = 2\kappa_n(x) \prod_{m \neq n} \left| \frac{\kappa_m(x) + \kappa_n(x)}{\kappa_m(x) - \kappa_n(x)} \right|. \quad (43)$$

Перепишем ядро (42) в следующем виде:

$$Q(x; y, y') = \sum_n^m \lambda_n(x; y) \lambda_n(x; y'), \quad (44)$$

введя функции

$$\lambda_n(x; y) = \gamma_n(x) \exp(-\kappa_n(x)y).$$

После этого ядро обобщенного сдвига  $K(x; y, y')$  представляется следующим образом:

$$K(x; y, y') = - \sum_n^m \gamma_n(x) \psi_n(x; y) \exp(-\kappa_n(x)y') = - \sum_n^m \psi_n(x; y) \lambda_n(x; y'). \quad (45)$$

Для нормированных собственных функций получаем

$$\psi_n(x; y) = \sum_j^m \lambda_j(x; y) C_{jn}^{-1}(x; y) \quad (46)$$

с матрицей коэффициентов

$$C_{jn}(x; y) = \delta_{jn} + \frac{\lambda_j(x; y) \lambda_n(x; y)}{\kappa_n(x) + \kappa_j(x)}. \quad (47)$$

Наконец, ядро  $K(x, y, y')$  и потенциал могут быть представлены в виде

$$K(x; y, y') = - \sum_n^m \sum_j^m \lambda_j(x; y) C_{jn}^{-1}(x; y) \lambda_n(x; y'),$$

$$V(x; y) = -4 \sum_n^m \kappa_n(x) \psi_n^2(x; y). \quad (48)$$

Заметим еще раз, что эти соотношения получены для конкретного случая нулевого коэффициента отражения  $S^r(x; k) = 0, \forall x$ .

Теперь могут быть определены матричные элементы оператора связности  $A(x)$  в обоих подходах (25), (17), индуцированные функциями (46) параметрической быстрой задачи. Отметим определяющую роль связности  $A(x)$  при возникновении таких явлений, как пересечение уровней, геометрические фазы  $\oint_c A(x) \cdot dx$ , эффект Ааронова — Бома, также интерпретируемый как частный случай фазы Ааронова — Анандана.

#### 4. ДВУМЕРНЫЕ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

Ниже мы приведем несколько конкретных примеров конструирования двумерных потенциалов, соответствующих им аналитических решений параметрической задачи, матричных элементов обменного взаимодействия при заданной функциональной зависимости термов.

**4.1. Конструирование точно решаемых моделей в подходе Марченко.** Приведем пример простого случая безотражательных симметричных потенциалов с одним термом. Пусть  $\dot{V}(y) = 0$ . Соотношения (41)—(48) дают обобщенный потенциал Эккарта

$$V(x; y) = -2 \frac{2\kappa(x) \gamma^2(x) \exp(-2\kappa(x)y)}{[1 + (\gamma^2(x)/2\kappa(x)) \exp(-2\kappa(x)y)]^2}, \quad (49)$$

который преобразуется к более простому виду, хорошо известному в теории солитонов:

$$V(x; y) = - \frac{2\kappa^2(x)}{\cosh^2[\kappa(x)(y - y_0(x))]} \quad (50)$$

при использовании подстановки

$$\exp(2\kappa(x)y_0) = \gamma^2(x)/2\kappa(x) \quad (51)$$

и преобразования

$$\{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]\}^2 = 4 \cosh^2[\kappa(x)(y - y_0(x))] \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))].$$

Решения Йоста, ему отвечающие, на траектории  $k = \kappa(x)$ , а также при произвольных значениях  $k$  запишутся в явном виде:

$$f(i\kappa(x), y) = \frac{\exp(-\kappa(x)y)}{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]}, \quad (52)$$

$$f_{\pm}(x; k, y) = \exp(\pm iky) \left\{ 1 - \frac{\exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]}{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]} (\kappa(x) \mp ik) \right\}. \quad (53)$$

Приведем явное выражение для нормированной волновой функции  $\psi(x, y)$  потенциала (50), соответствующей терму  $\mathcal{E}(x) = -\kappa^2(x)$ :

$$\psi(x, y) = \frac{\sqrt{\kappa(x)/2}}{\cosh[\kappa(x)(y - y_0(x))]} \quad (54)$$

Легко показать, что потенциал связан с нормированной волновой функцией соотношением

$$V(x; y) = -4\kappa(x)\psi^2(x; y). \quad (55)$$

Отметим, что в формулах (50), (52)—(55) величина  $y_0(x)$  всегда связана с нормировочной функцией  $\gamma^2(x)$  соотношением (51). Если нормировочная функция выбрана в соответствии с (43):

$$\gamma^2(x) = 2\kappa(x),$$

т.е. отвечает симметричному прозрачному потенциалу по  $y$ , то  $y_0(x) = 0$ ,  $\forall x$ , что неудивительно; как видно из формулы (50), при  $y_0(x) = 0$  потенциал симметричен относительно  $y = 0$ . Если, в свою очередь, поведение терма  $\mathcal{E}(x)$  (рис.1,а) отвечает потенциалу  $V(x) \equiv \mathcal{E}(x)$  «медленного» уравнения

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{2\kappa^2}{\cosh^2(\kappa(x - x_0))}, \quad (56)$$

симметричному и прозрачному по  $x$ ,  $\gamma^2 = 2\kappa$ ,  $x_0 = 0$ , то соотношения (50) или (55), (54) и (53) дают прозрачный, симметричный по обеим переменным двумерный потенциал с одним связанным состоянием  $E = -\kappa^2$



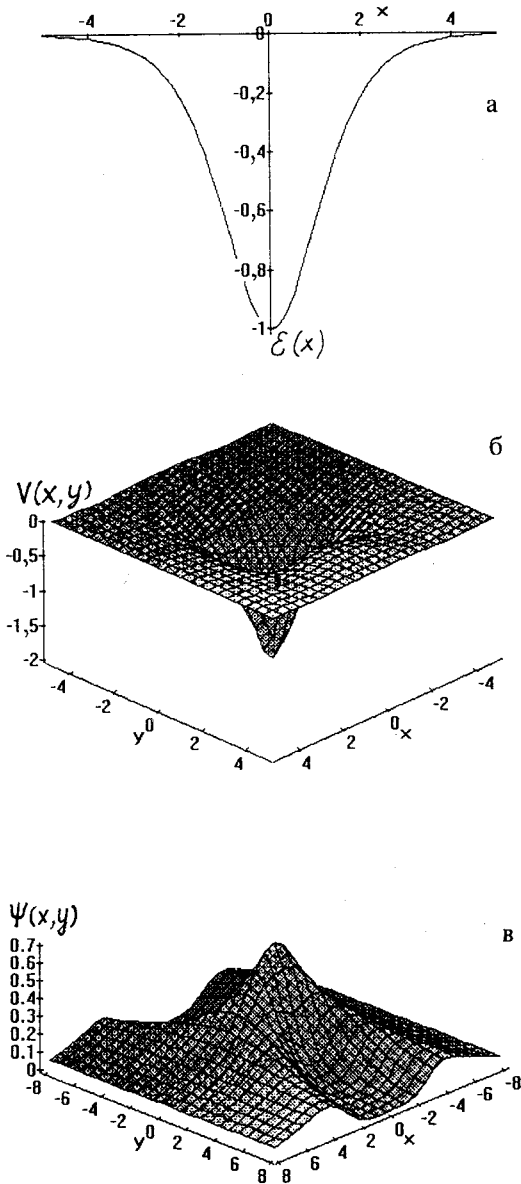


Рис.1. Безотражательный двумерный потенциал  $V(x, y)$  (б), симметричный по обеим координатам  $x$  и  $y$ , с одним связанным состоянием. а) Терм  $\mathcal{E}(x)$  соответствует прозрачному симметричному по  $x$  потенциалу со связанным состоянием  $E = -0,5$ . в) Собственная функция  $\psi(x, y)$  параметрической задачи, соответствующая терму (а)

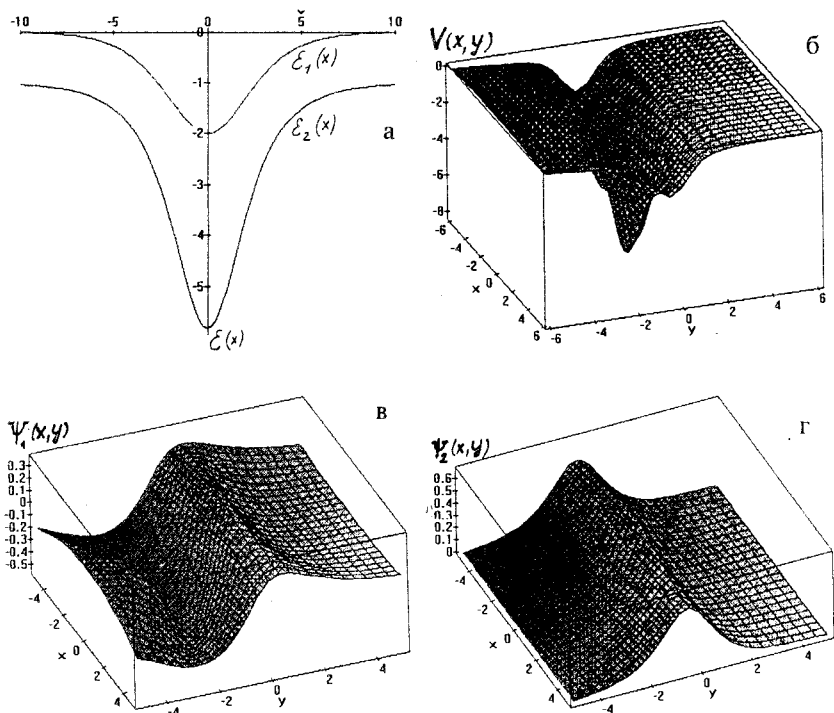


Рис.2. Безотражательный по переменной  $y$  потенциал  $V(x; y)$  (б), симметричный по обеим координатам  $x$  и  $y$ , с двумя симметричными по  $x$  термами а)  $E_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ :  $\kappa_1(x) = 2^{1/2}/\cosh(x/3)$ ,  $\kappa_2(x) = 2^{1/2}/\cosh(x/2) + 1$ ; в, г) собственные функции  $\Psi_1(x; y)$ ,  $\Psi_2(x; y)$  параметрической задачи с нормировками (43)

(рис.1,б), а также двумерные волновые функции связанного состояния  $\psi(x; y)$  (рис.1,в) и непрерывного спектра  $f_{\pm}(x; k, y)$  параметрической задачи.

Приведем теперь несколько примеров двумерного потенциала и соответствующих ему аналитических решений параметрической задачи с двумя термами. В зависимости от конкретной задачи термы, вообще говоря, могут иметь различное поведение. В представленном случае зададим их следующим образом:

$$\kappa_n(x) = \frac{b_n}{\cosh(a_n x)} + c_n, \quad n = 1, 2,$$

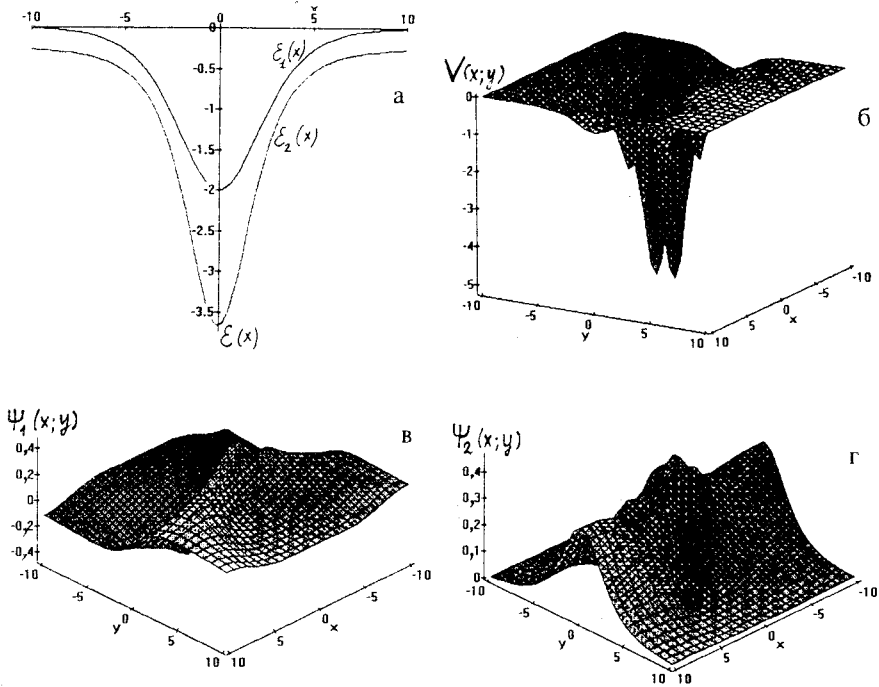


Рис.3. Потенциал  $V(x; y)$  (б) и функции  $\psi_1(x; y)$ ,  $\psi_2(x; y)$  (в, г), отвечающие, как и в случае рис.2, ситуации с двумя термами а)  $\kappa_1(x) = 2^{1/2} / \cosh(x/3)$ ,  $\kappa_2(x) = 2^{1/2} / \cosh(x/2) + 0,5$ , расположенными; однако, на более близком расстоянии друг к другу

где  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  — некоторые константы, определяющие форму термов  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ . Нормировку выберем в виде (43), отвечающем случаю безотражательных симметричных потенциалов. Тогда из соотношений (38), (37) или (46)—(48) получаем двумерный потенциал (рис.2,б, 3,б, 4,б) и двумерные волновые функции (рис.2,в,г, рис.3,в,г и рис.4,в,г), соответствующие выбранным термам (рис.2,а и 3,а). Как видно из сравнения рис.2,б, 3,б и 4,б, 2,в,г, 3,в,г и 4,в,г, поведение потенциала и функций при сближении уровней становится более сложным.

Сингулярной в точках пересечения уровней оказывается индуцированная связность (рис.5), рассчитанная по формулам (25), (46). Два пересекающихся терма на рис.5,б определены следующим образом:  $\mathcal{E}_1(x) =$

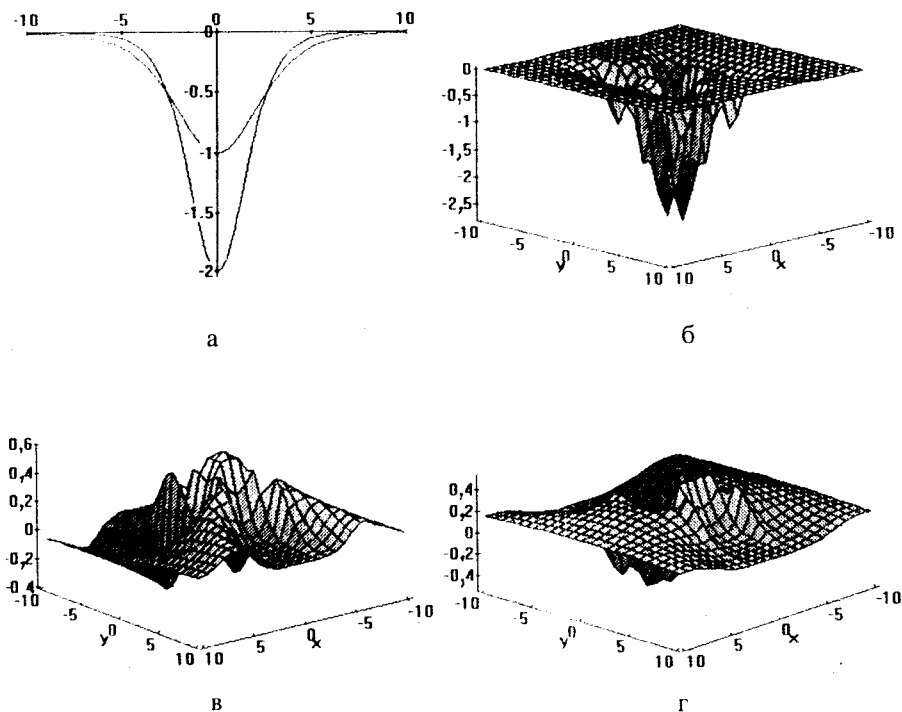


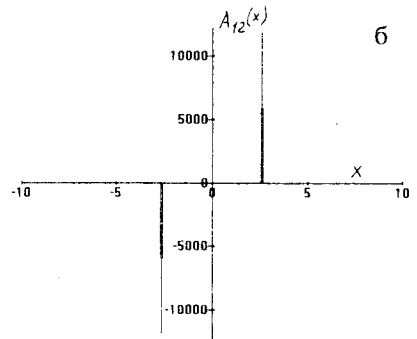
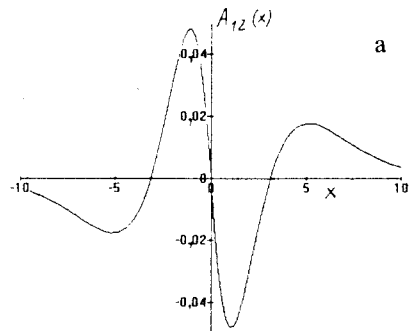
Рис.4. Потенциал  $V(x; y)$  (б) и функции  $\psi_1(x; y)$ ,  $\psi_2(x; y)$  (в,г), отвечающие ситуации с двумя термами а)  $\kappa_1(x) = 2^{1/2} / \cosh(x/2)$ ,  $\kappa_2(x) = \cosh(x/3)$ , имеющими одну общую точку

$= -2 / \cosh^2(x/2)$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = -1 / \cosh^2(x/3)$ . Для сравнения на рис.5,а представлен матричный элемент  $A_{12}(x)$  для непересекающихся термов:  $\mathcal{E}_1(x) = -2 / \cosh^2(x/2)$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = -(1 / \cosh(x/3) + 0,5)^2$ . Берри [8] также отмечал особую роль вырождения состояний в параметрическом пространстве, которое важно для существования нетривиальной топологической фазы. Исследованию ситуации с пересечением и квазипересечением уровней будет посвящена отдельная работа (см. также [15] и последний раздел данного обзора).

Приведем пример двумерной точно решаемой модели, отвечающей ситуации с тремя термами. На рис.6 показан двумерный безотражательный по  $y$  потенциал и отвечающие ему волновые функции базиса.

Для полноты картины приведем также пример периодического изменения термов (рис.7,8,9). Как видно из сравнения рис.7,б, 8,б и 9,б, сближение

Рис.5.а) Матричный элемент  $A_{12}(x)$  для термов без пересечения:  $\mathcal{E}_1(x) = -2/\cosh^2(x/2)$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = -(1/\cosh(x/3) + 0,5)^2$ ; б) матричный элемент  $A_{12}(x)$  для термов, имеющих две вырожденные точки:  $\mathcal{E}_1(x) = -2/\cosh^2(x/2)$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = -1/\cosh^2(x/3)$



уровней влияет на возникшую по  $y$  структуру потенциала. Поведение центрального слоя нечувствительно к сближению уровней, в то время как роль второго и третьего слоев возрастает и становится сравнимой с ролью основного. В особенности увеличился третий слой и возник четвертый, ранее отсутствовавший. Потенциал симметричен по  $y$ , так же, конечно, как и по  $x$ . Отметим, что добавление нескольких осцилляций в термах почти не влияет на поведение потенциала по быстрой переменной  $y$ . Потенциал так же, как и волновые функции собственных состояний параметрической задачи, имеет четкую периодическую структуру по медленной переменной  $x$ , как и следовало ожидать из периодического поведения термов. Основной слой имеет максимальные значения, отвечающие наибольшему расхождению термов, в то время как последующие слои дают растущий вклад вблизи минимального расстояния между термами.

**4.2. Конструирование точно решаемых моделей в подходе Гельфанда — Левитана.** Вначале рассмотрим наиболее простой пример, возможный в подходе Гельфанда — Левитана, — это спектрально-эквивалентный потенциал (при  $E > 0$ ,  $\rho(x; k) = \hat{\rho}(k)$ ) с одним связанным состоянием: в нашем случае с одним термом,  $\mathcal{E}(x) = -\kappa^2(x)$ . Для максимального упрощения задачи опять выберем опорный потенциал  $\hat{V}(y) \equiv 0$ . Тогда соответствующая функция Йоста запишется в следующем виде:

$$f(x; k) = \frac{k - i\kappa(x)}{k + i\kappa(x)}. \quad (57)$$

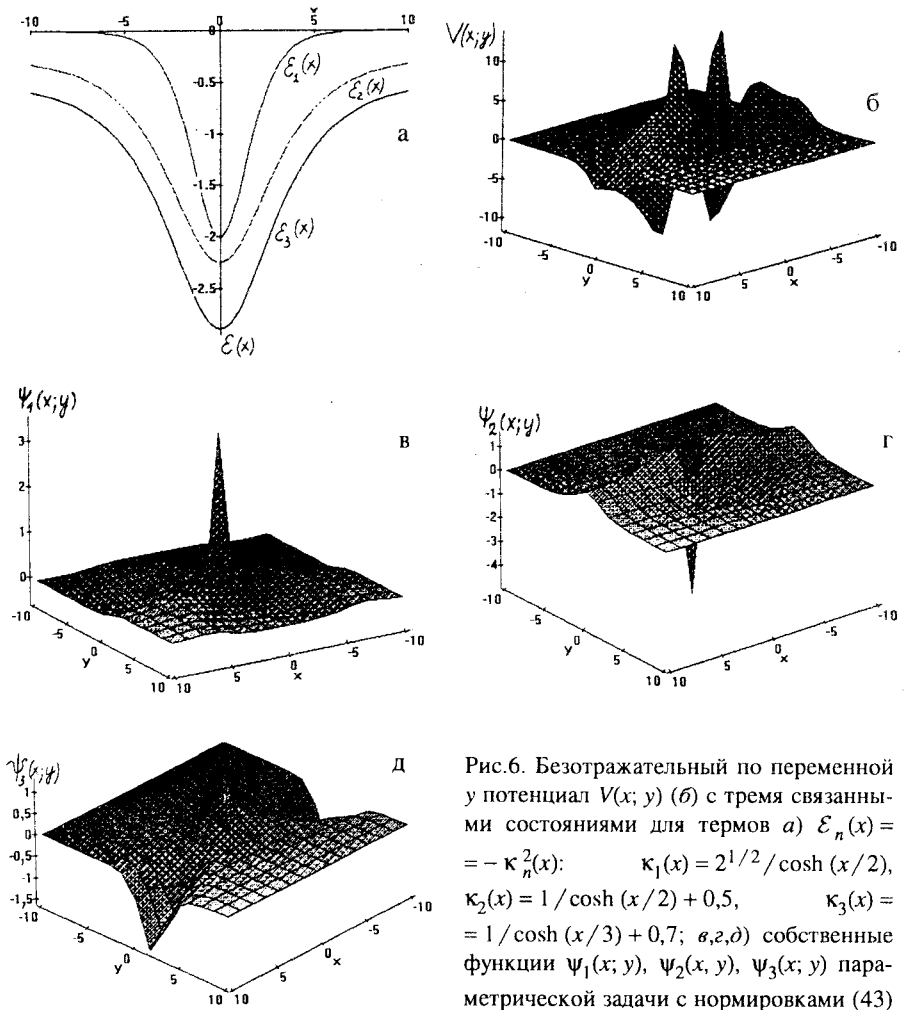


Рис.6. Безотражательный по переменной  $y$  потенциал  $V(x; y)$  (б) с тремя связанными состояниями для термов а)  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ :  $\kappa_1(x) = 2^{1/2} / \cosh(x/2)$ ,  $\kappa_2(x) = 1 / \cosh(x/2) + 0,5$ ,  $\kappa_3(x) = 1 / \cosh(x/3) + 0,7$ ; в, г, д) собственные функции  $\Psi_1(x; y)$ ,  $\Psi_2(x; y)$ ,  $\Psi_3(x; y)$  параметрической задачи с нормировками (43)

Отсюда, как следует из (34),  $\rho(x, k) = 2k / \pi = \hat{\rho}(k)$ , т.е. спектральная функция непрерывного спектра совпадает со спектральной функцией свободного движения. Тогда из соотношений (35), (37) получаем выражения для ядер основных уравнений Гельфанда — Левитана

$$Q^{\Gamma L}(x; y, y') = c^2(x) \frac{\sinh[\kappa(x)y] \sinh[\kappa(x)y']}{\kappa^2(x)}; \tag{58}$$

$$K^{\Gamma L}(x; y, y') = -c^2(x) \varphi(i\kappa(x), y) \frac{\sinh[\kappa(x)y']}{\kappa(x)} \tag{59}$$

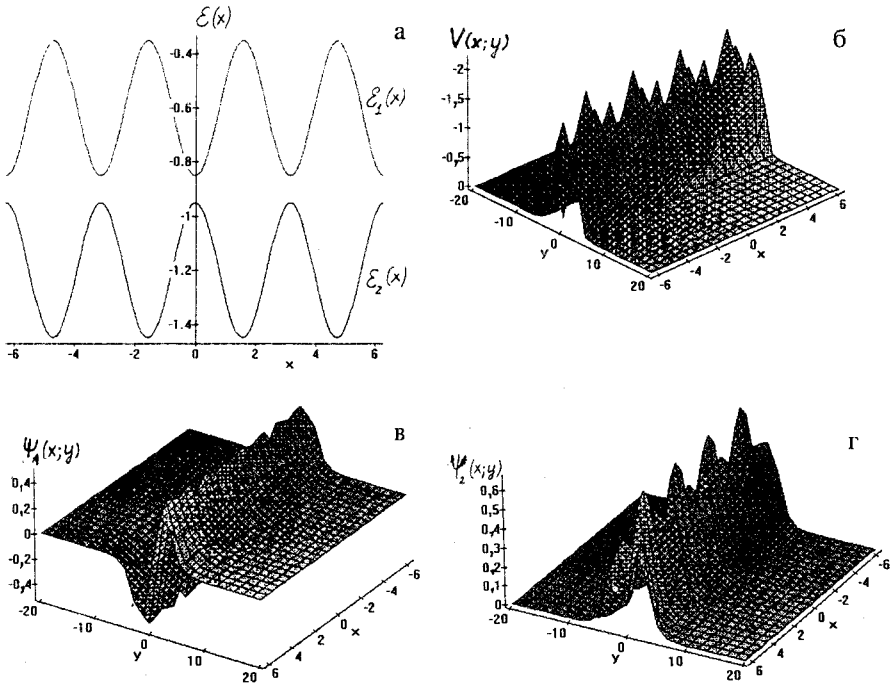


Рис.7. Симметричный безотражательный по быстрой переменной  $y$  потенциал  $V(x; y)$  (б) и соответствующие собственные функции а, з)  $\Psi_1(x; y)$ ,  $\Psi_2(x; y)$  для термов (а), периодически зависящих от  $x$ :  $\mathcal{E}_1(x) = - (1/4) \cos (2x) - 0,6$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = (1/4) \cos (2x) - 1,2$

и для регулярных решений на траектории  $k = \kappa(x)$ :

$$\varphi(i\kappa(x), y) = \frac{\kappa(x) \sinh (\kappa(x) y)}{\kappa^2(x) + 1/2 c^2(\sinh (2\kappa(x) y) / 2\kappa(x) - y)} . \quad (60)$$

Наконец, учитывая (60) в (59) и подставляя результат в соотношения (38), (39), получаем в явном виде соотношение для двумерного потенциала  $V(x; y)$  и для отвечающих ему решений при произвольном  $k$  с параметрической зависимостью от  $x$ :

$$V(x; y) = \frac{2\kappa(x)[y/2 - c^{-2}(x) \kappa^2(x)] \sinh 2(\kappa(x) y) - 2 \sinh^2(\kappa(x) y)}{[c^{-2}(x) \kappa^2(x) + 1/2[\sinh (2\kappa(x) y) / 2\kappa(x) - y]]^2} , \quad (61)$$

$$\varphi(x; k, y) = \frac{\sin ky}{k} - \frac{c^2(x) \sinh (\kappa(x) y)[\kappa(x) \cosh (\kappa(x) y) \sin ky - k \sinh (\kappa(x) y) \cos ky]}{k[\kappa^2(x) + k^2][\kappa^2(x) + (1/2) c^2(x)(\sinh (2\kappa(x) y) / 2\kappa(x) - y)]} . \quad (62)$$

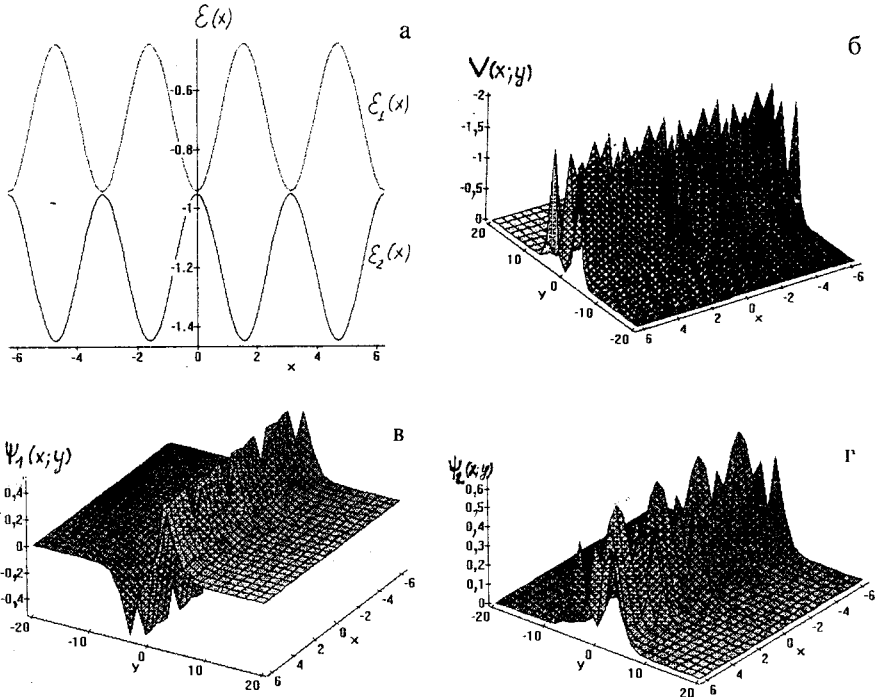


Рис.8. Симметричный безотражательный по быстрой переменной  $y$  потенциал  $V(x; y)$  (б) и соответствующие собственные функции  $\psi_1(x; y)$ ,  $\psi_2(x; y)$  для термов (а), периодически зависящих от  $x$ :  $\mathcal{E}_1(x) = -(1/4) \cos(2x) - 0,69$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = (1/4) \cos(2x) - 1,2$ . Здесь термы (а) расположены значительно ближе по отношению друг к другу, чем на рис.7,а

Задавая в конкретном виде зависимость спектральных характеристик от параметра, моделируем соответствующие потенциал и решения параметрической задачи. На рис.10 приведен пример двумерного потенциала с одним термом, отвечающим симметричному и прозрачному по  $x$  потенциалу (56), и соответствующей ему волновой функции. Отметим, что в данном случае потенциал несимметричен по другой переменной  $y$ .

Примеру с  $m$ -связанными состояниями и с потенциалом  $\overset{\circ}{V}(y) \neq 0$  соответствует

$$f_+(x; k) = f(k) \overset{\circ}{\prod}_n^m \frac{k - i\kappa_n(x)}{k + i\kappa_n(x)}, \quad (63)$$

где термы  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$  определяются при восстановлении потенциальной матрицы для многоканальной системы уравнений (31) и последующей



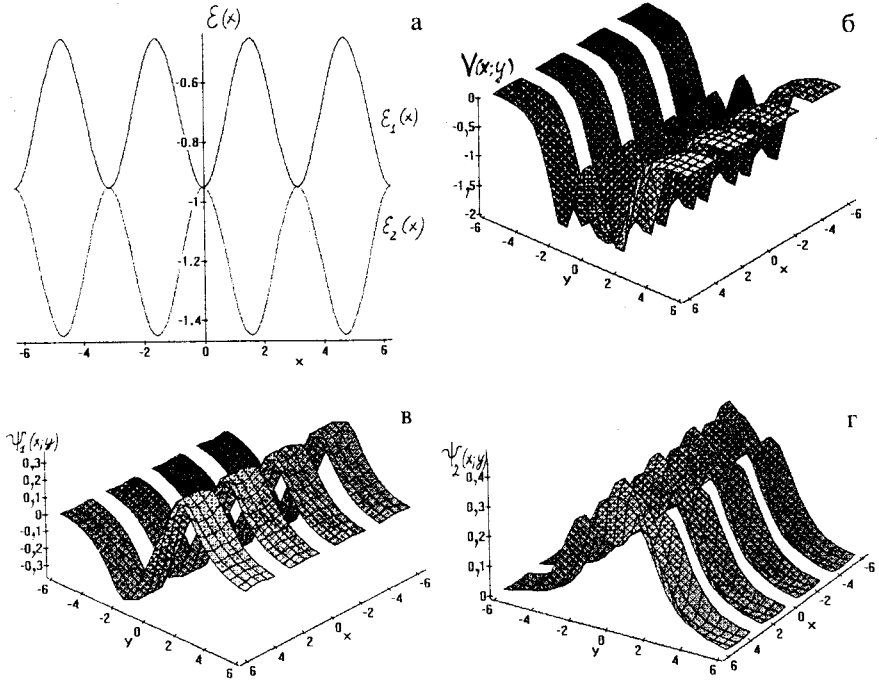


Рис.9. Симметричный безотражательный по быстрой переменной  $y$  потенциал  $V(x; y)$  (б) и соответствующие собственные функции  $\Psi_1(x; y)$ ,  $\Psi_2(x; y)$  (в, г) для термов (а), периодически зависящих от  $x$ :  $E_1(x) = -(1/4) \cos(2x) - 0,7$ ,  $E_2(x) = (1/4) \cos(2x) - 1,2$  и имеющих несколько точек вырождения

ее диагонализации (см. следующий пункт). Легко написать  $m$ -членное обобщение формул (58)—(61), используя соотношения (35)—(40).

На рис.11 демонстрируется пример спектрально-эквивалентных по быстрой переменной двумерных потенциалов с двумя термами. Так же, как и в подходе Марченко, чувствительным к поведению термов оказывается не первый ближайший к нулю основной слой в потенциале, а более отдаленные по  $y$  его гребенки. Исследования легко провести в сферических координатах, выбирая в качестве быстрой переменной угол, медленной — координату, и наоборот.

Знания термов в случае прозрачных симметричных потенциалов достаточно для однозначного восстановления двумерного потенциала и соответствующих ему решений, поскольку, как видно из соотношения (43), нормировки определены значениями энергий уровней. В обычном случае в

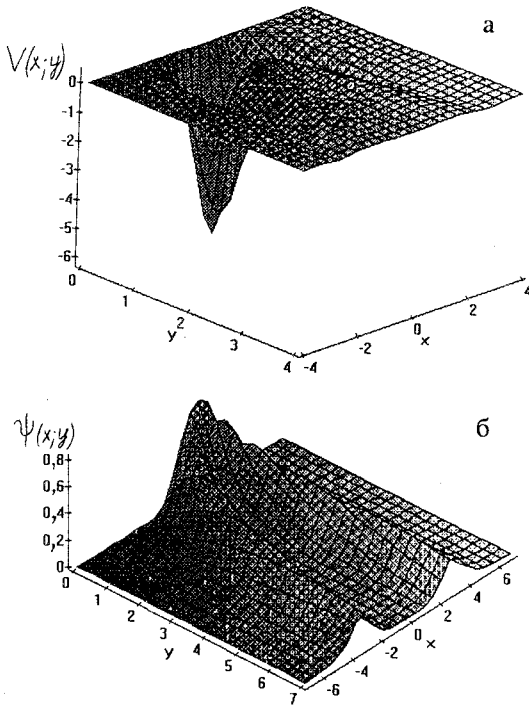


Рис.10. Потенциал  $V(x, y)$  (а) и собственная функция  $\psi(x, y)$  (б) терма рис.1,а, рассчитанные в подходе Гельфанда — Левитана

зависимости от выбора нормировок восстанавливается семейство фазово-эквивалентных потенциалов. В нашем случае нормировки являются к тому же функциями координатной переменной  $x$ . При этом нормировочные функции решений Йоста и регулярных решений связаны с соответствующими нормировками задачи фиксированного базиса соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_n^{-2}(x) &= \sum_j^m \mathcal{U}_{nj}^{-1}(x) \int_0^\infty |e_j^M(y)|^2 dy \mathcal{U}_{jn}(x) = \sum_j^m \mathcal{U}_{nj}^{-1}(x) M_j^{-2} \mathcal{U}_{jn}(x), \\ c_n^{-2}(x) &= \sum_j^m \mathcal{U}_{nj}^{-1}(x) N_j^{-2} \mathcal{U}_{jn}(x), \quad N_j^{-2} = \int_0^\infty |e_j^{\text{П}}(y)|^2 dy. \end{aligned} \quad (64)$$

Однако определение матрицы унитарного преобразования  $\mathcal{U}(x)$  — неоднозначная процедура, неоднозначно и определение потенциала. Так, проявилась неоднозначность двумерной обратной задачи. В двухканальном случае неопределенность, связанная с процедурой диагонализации, исчезает. Этот случай поэтому очень удобен для исследования и используется здесь для конструирования некоторых точно решаемых моделей. Следует, однако, отметить, что задание из физических соображений по определенному закону поведения нормировок позволяет однозначно выделить потенциал из непрерывного семейства эквивалентных потенциалов и получить в аналитическом виде соответствующие решения, как это продемонстрировано на

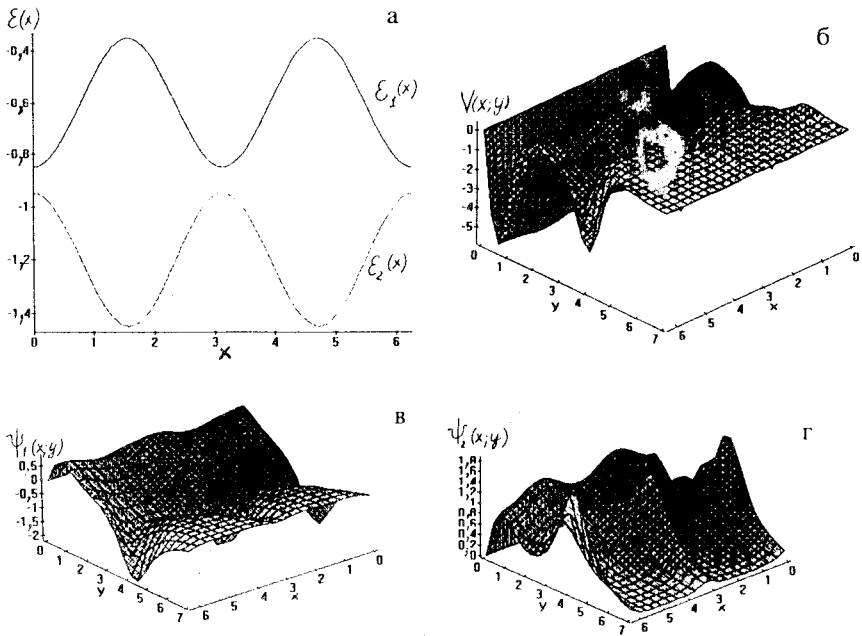


Рис. 11. Потенциал  $V(x, y)$  (б) и собственные функции  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$  (в, г) в подходе Гельфанда — Левитана, отвечающие периодическому изменению термов (а):  $E_1(x) = -(1/4) \cos(2x) - 0,6$ ,  $E_2(x) = (1/4) \cos(2x) - 1,2$

примере симметричных безотражательных по быстрой переменной потенциалов.

**4.3. Двумерные точно решаемые модели, полученные в согласованной постановке.** Поскольку задача данной статьи — исследование точно решаемых моделей, представим алгебраическую схему решения многоканальной обратной задачи в адиабатическом представлении, основываясь на результатах [22,5]. Вначале, используя технику вырожденных ядер, 1) определим в явном аналитическом виде баргмановскую потенциальную матрицу  $V'(x)$  и отвечающую ей матрицу решений системы уравнений по данным рассеяния (31)  $\{S'(p), \{M'_\lambda\}, \{E_\lambda\}\}$ . 2) Перейдем от представления фиксированного базиса к представлению изменяющегося от слоя к слою базиса (27), используя обратное унитарное преобразование. Это позволяет определить термы и соответствующие им функции нормировок. 3) Наконец, используя алгебраическую процедуру решения параметрической обратной задачи, определим двумерный потенциал и двумерные волновые функции термов. Это

замкнутая процедура полного согласованного получения в аналитическом виде двумерных решений и потенциалов.

Пользуясь изложенной выше техникой вырожденных ядер, приведем пример аналитического моделирования двумерной задачи, полученный при аналитическом решении системы медленных уравнений и параметрической задачи. В целях максимального упрощения в качестве опорного потенциала при восстановлении матрицы потенциального взаимодействия  $V'(x)$  возьмем  $\overset{\circ}{V}'(x) = 0$ . Для безотражательных потенциалов по медленной переменной в  $Q^M(x, x')$  остается лишь сумма по связанным состояниям

$$Q_{ij}(x, x') = \sum_{\lambda}^N \exp(-\kappa_i^{\lambda} x) \gamma_i^{\lambda} \gamma_j^{\lambda} \exp(-\kappa_j^{\lambda} x'). \quad (65)$$

Из матричного аналога основных соотношений обратной задачи

$$K(x, x') + Q(x, x') + \int_{x(0)}^{\infty(x)} K(x, x'') Q(x'', x') dx'' = 0, \quad (66)$$

$$V(x) = \overset{\circ}{V}(x) \mp 2 \frac{d}{dy} K(x, x), \quad (67)$$

$$\phi(k, x) = \overset{\circ}{\phi}(k, x) + \int_{x(0)}^{\infty(y)} K(x, x') \overset{\circ}{\phi}(k, x') dx' \quad (68)$$

легко получить явный вид для матричных элементов потенциала и решений [5,34]:

$$V'_{ij}(x) = 2 \frac{d}{dx} \sum_{\nu\lambda} \exp(-\kappa_i^{\nu} x) \gamma_i^{\nu} P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \gamma_j^{\lambda} \exp(-\kappa_j^{\lambda} x), \quad (69)$$

$$F'_{jj'}^{\pm}(k, X) = \exp(\pm ik_j X) \delta_{jj'} - \frac{\gamma_j \gamma_{j'} \exp(-\kappa_j X) \int_X^{\infty} \exp(-(\kappa_{j'} \mp ik_{j'}) X') dX'}{1 + \sum_i^m (\gamma_i^2 / 2\kappa_i) \exp(-2\kappa_i X)}, \quad (70)$$

где

$$P_{\nu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} + \sum_{j'}^m \frac{\gamma_{j'}^{\nu} \gamma_{j'}^{\lambda}}{\kappa_{j'}^{\nu} + \kappa_{j'}^{\lambda}} \exp(-(\kappa_{j'}^{\nu} + \kappa_{j'}^{\lambda}) x).$$

Ограничимся рассмотрением примера «прозрачных» потенциальных матриц с двумя каналами в подходе Марченко:  $i, j = 1, 2$ . Из процедуры диагонализации потенциальной матрицы  $V'$ :

$$U^{-1}(x) V'(x) U(x) = \mathcal{E}(x)$$

получаем  $U(x)$ ,  $\mathcal{E}(x)$  и  $\delta(x)$ :

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos \delta(x)/2 & \sin \delta(x)/2 \\ -\sin \delta(x)/2 & \cos \delta(x)/2 \end{pmatrix}, \quad (71)$$

где

$$\delta(x)/2 = \int_x A_{12}(x') dx'.$$

Из этих соотношений следует

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \cos^2 \delta/2 + \mathcal{E}_2 \sin^2 \delta/2 & (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \cos \delta/2 \sin \delta/2 \\ (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \cos \delta/2 \sin \delta/2 & \mathcal{E}_1 \sin^2 \delta/2 + \mathcal{E}_2 \cos^2 \delta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V'_{11} & V'_{12} \\ V'_{21} & V'_{22} \end{pmatrix}.$$

В результате имеем

$$\operatorname{tg} \delta(x) = \frac{2V'_{21}(x)}{V'_{11}(x) - V'_{22}(x)} \quad \text{или} \quad \sin \delta(x) = \frac{2V'_{21}(x)}{\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x)}. \quad (72)$$

$$\mathcal{E}_{1,2}(x) = \frac{1}{2} [V'_{11}(x) + V'_{22}(x)] \pm \sqrt{(V'_{11}(x) - V'_{22}(x))^2 + 4V'^2_{12}(x)}. \quad (73)$$

Восстановим теперь двумерный потенциал  $V(x)$  и определим соответствующие ему двумерные волновые функции  $\psi_i(x; y)$ ,  $i = 1, 2$  параметрической задачи (14) или (21) по найденным только что спектральным данным  $\{\mathcal{E}_i(x), \gamma_i^2(x)\}$ , используя при фиксированном значении  $x$  параметрическую обратную задачу (35), (38), (39). При этом для параметрического семейства обратных задач техника баргмановских потенциалов позволяет в явном аналитическом виде конструировать решения  $\psi(x, y)$  и потенциал  $V(x, y)$  в рамках последовательного подхода адиабатического представления. Действительно, термы соотношением (73) определены однозначно. Если мы хотим определить прозрачные при всех  $x$  потенциалы, необходимо еще знание нормировок, которые для прозрачных симметричных по  $y$  потенциалов определяются значениями энергий уровней (43). Для восстановления проз-

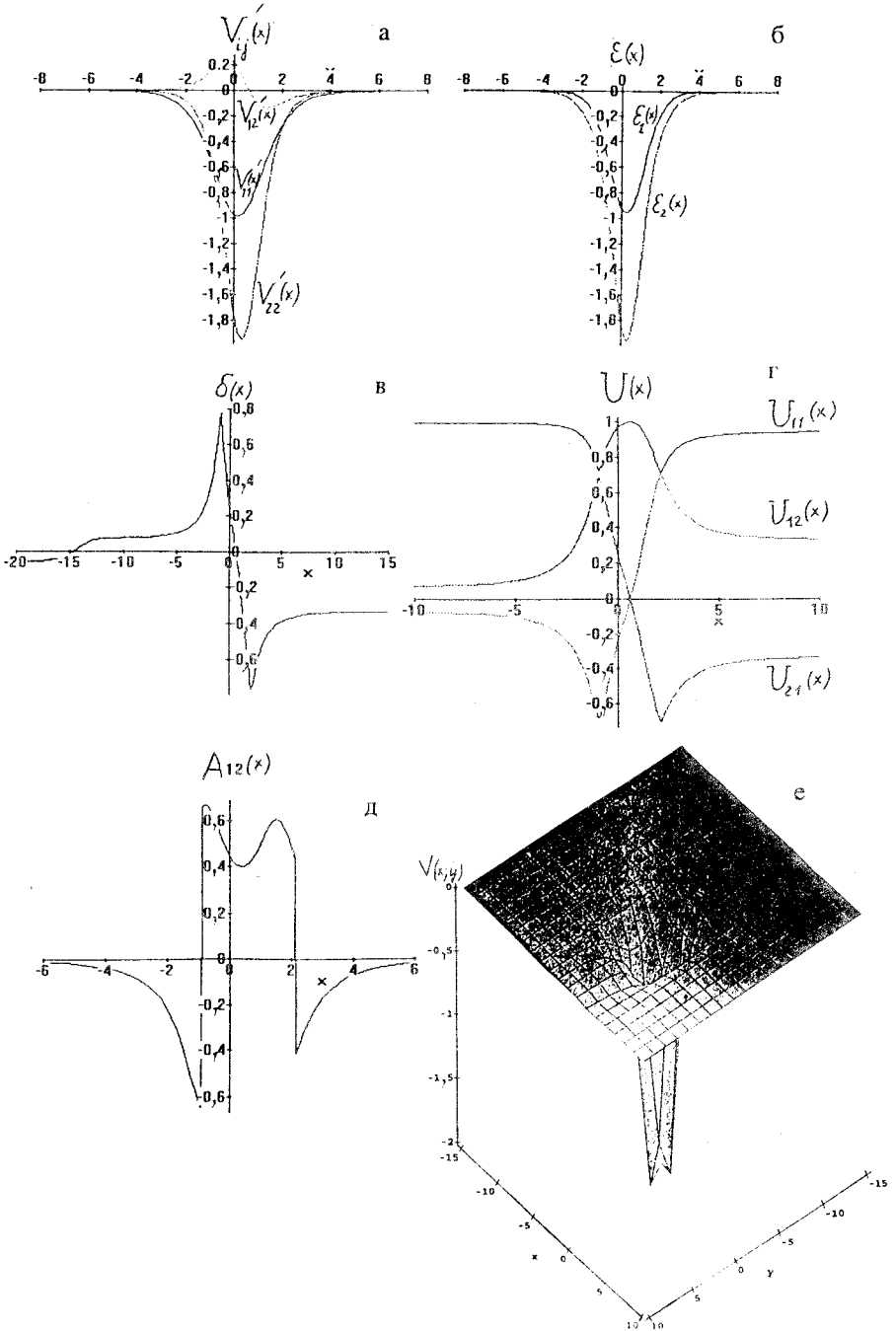
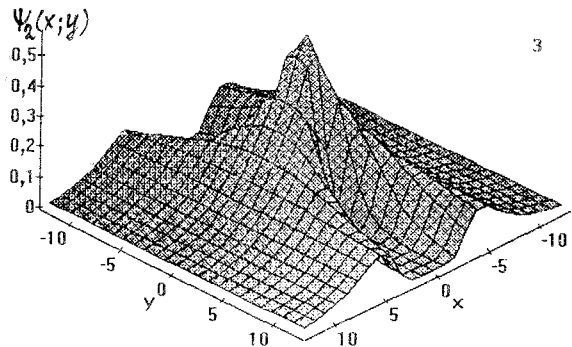
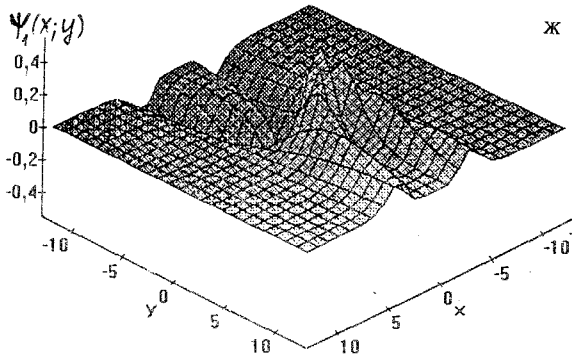
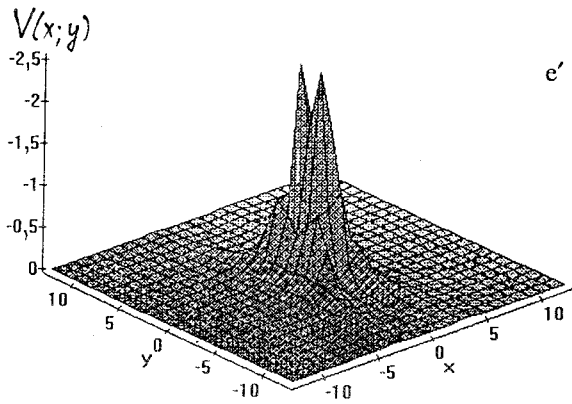


Рис.12

Рис.12. Согласованное восстановление двумерного потенциала  $V(x, y)$ , безотражательного по обеим координатным переменным и симметричного по  $y$  в силу выбора нормировок в виде (43). а) Элементы безотражательной потенциальной матрицы  $V'_{i,j}(x)$  для энергий связанных состояний  $E_1 = -0,5$ ,  $E_2 = -1$  и нормировок:  $\gamma_1^1 = 1$ ,  $\gamma_2^2 = 2$ ,  $\gamma_1^2 = 0,5$ ,  $\gamma_2^1 = 0,24$ ; б) термы  $\mathcal{E}_1(x)$ ,  $\mathcal{E}_2(x)$ ; в) фазовый фактор  $\delta(x)$ ; г) матричные элементы  $\mathcal{U}(x)$  ( $\mathcal{U}_{11}(x) = \mathcal{U}_{22}(x)$ ); д) векторный потенциал  $A_{12}(x)$ ; е) двумерный потенциал  $V(x, y)$  и ж,з) соответствующие ему нормированные функции термов  $\Psi_1(x, y)$ ,  $\Psi_2(x, y)$



рачных несимметричных по переменной  $y$  потенциалов следует использовать для нормировок соотношения (64). При этом будет восстанавливаться целое семейство прозрачных потенциалов — аналог фазово-эквивалентного семейства потенциалов в обычной постановке обратной задачи.

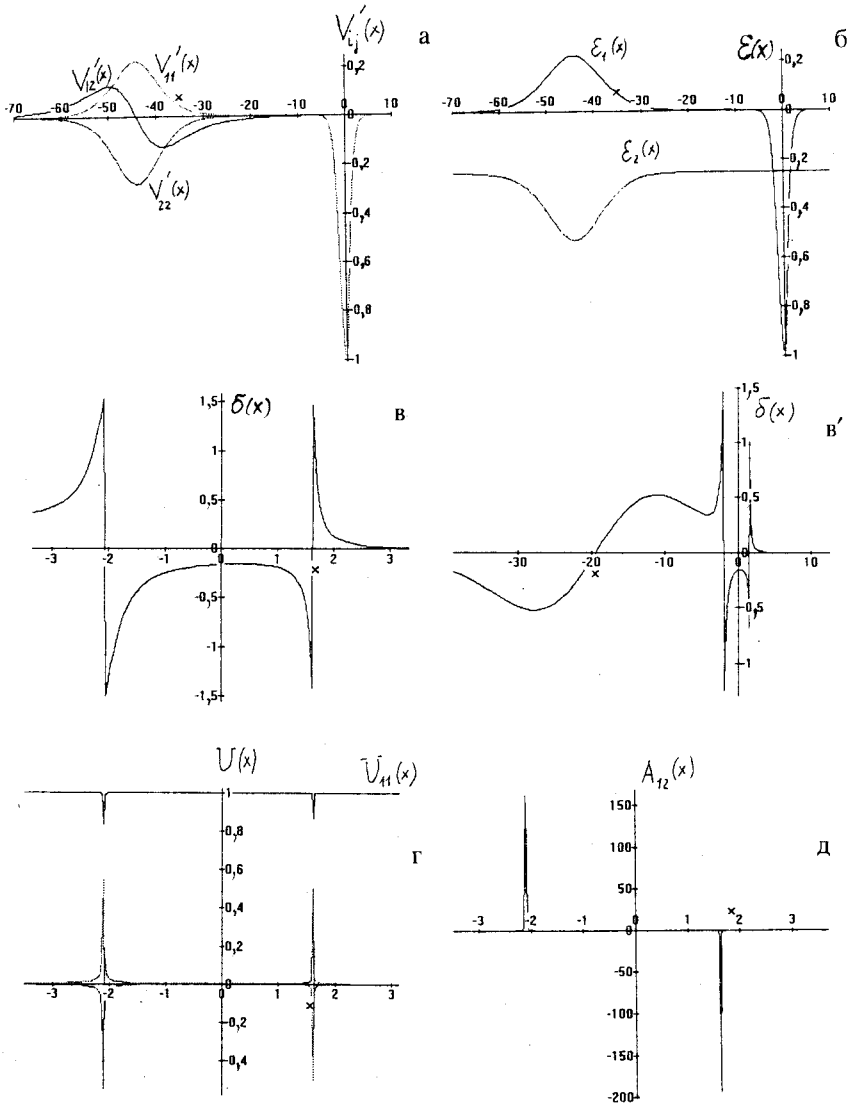


Рис.13

На рисунках 12—15 представлены примеры согласованного аналитического решения полной задачи для потенциала, прозрачного как по медленной  $x$ , так и по быстрой  $y$  переменным. Обе задачи решены в модифицированных подходах Марченко для двухканальной системы уравнений и



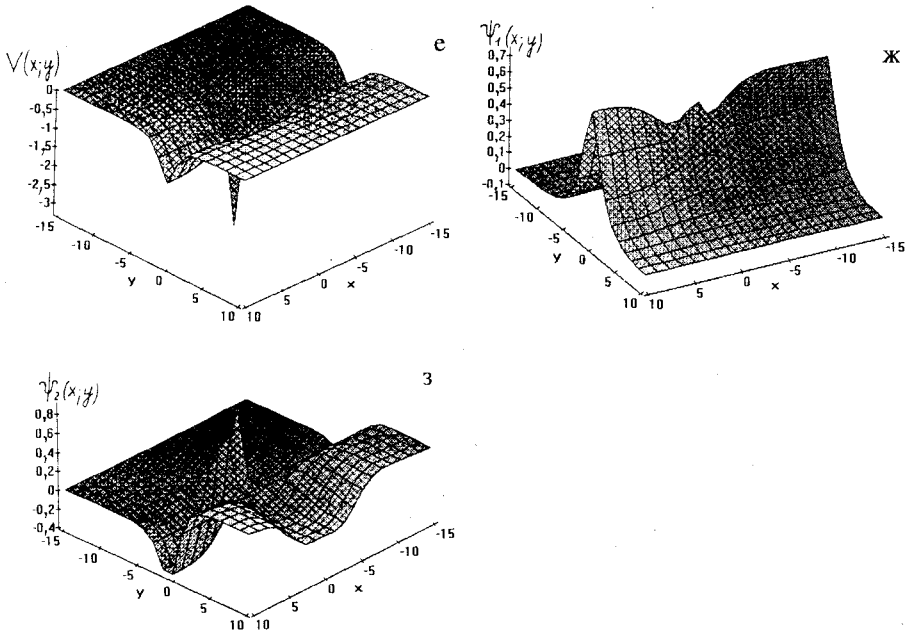


Рис.13. Согласованное восстановление двумерного симметричного по  $y$  потенциала  $V(x, y)$ , безотражательного по  $x$  и  $y$  с одним связанным состоянием  $E = -0,5$  и нормировками:  $\gamma_1^1 = 1$ ,  $\gamma_1^2 = 0,001$ . а) Элементы безотражательной потенциальной матрицы  $V'_{i,j}(x)$ ; б) термы  $\mathcal{E}_1(x)$ ,  $\mathcal{E}_2(x)$ ; в) фазовый фактор  $\delta(x)$ ; г) матричные элементы  $\mathcal{U}(x)$ ; д) векторный потенциал  $A_{12}(x)$ ; е) двумерный потенциал  $V(x, y)$ , ж,з) соответствующие ему нормированные функции термов  $\Psi_1(x, y)$ ,  $\Psi_2(x, y)$

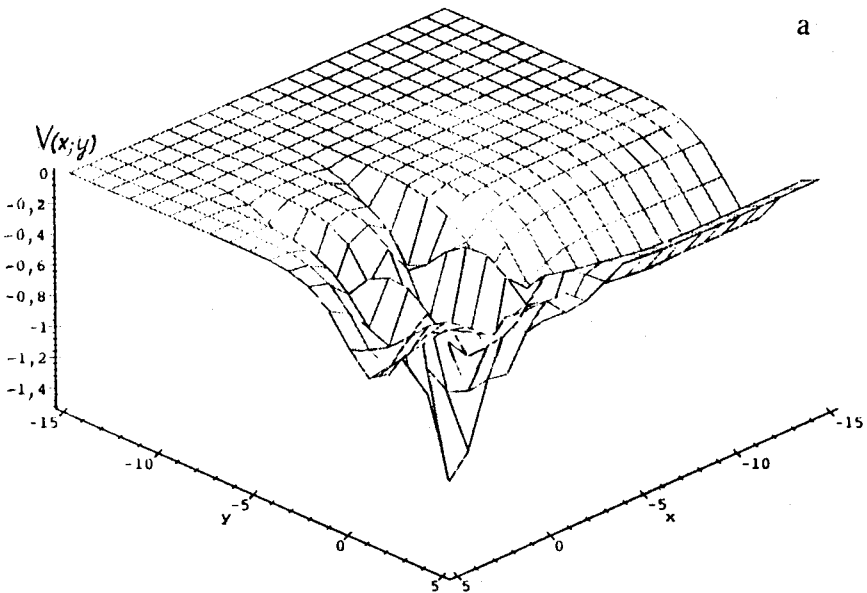
параметрического уравнения Шредингера. Вначале исследуется система с двумя связанными состояниями, рис.12,а—д. Для выбранных значений параметров: энергий связанных состояний  $E_1 = -0,5$ ,  $E_2 = -1$  и их нормировок —  $\{\gamma_j^\lambda\}$ :  $\gamma_1^1 = 1$ ,  $\gamma_2^2 = 2$ ,  $\gamma_1^2 = 0,5$ ,  $\gamma_2^1 = 0,24$  найдена безотражательная потенциальная матрица, элементы которой  $V'_{11}(x)$ ,  $V'_{12}(x)$ ,  $V'_{21}(x) = V'_{12}(x)$ ,  $V'_{22}(x)$  графически представлены на рис.12,а. Рассчитанные с помощью процедуры диагонализации (73) термы  $\mathcal{E}_1(x)$ ,  $\mathcal{E}_2(x)$  изображены на рис.12,б. На рис.12,в представлен фазовый фактор  $\delta(x)$ , входящий в определение матрицы диагонализации  $\mathcal{U}(x)$  (71) (рис.12,г). На рис.12,д

изображен векторный потенциал  $A(x)$ , и, наконец, на рис.12,е,ж,з представлены двумерный потенциал и соответствующие ему волновые функции термов. Симметричный безотражательный по  $y$  потенциал имеет, как мы могли увидеть из предыдущих примеров, некоторую структуру по  $y$ : основной слой и несколько слабых быстро затухающих слоев.

Используя аналитические выражения (69)—(73), рассмотрим пример прозрачной потенциальной матрицы с одним связанным состоянием  $\nu = 1$  и одним порогом:  $E_1 = -k_j^2 + \varepsilon_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $E_1 = -0,5$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0,25$ ,  $\gamma_1^1 = 1$ ,  $\gamma_2^1 = 0,001$ . Элементы потенциальной матрицы  $V_{ij}'(x)$  и соответствующие термы  $\mathcal{E}_j(x)$  представлены на рис.13,а,б. Двумерный потенциал  $V(x, y)$  и отвечающие ему волновые функции термов  $\psi_1(x; y)$  и  $\psi_2(x; y)$  показаны на рис.13,е,ж,з. Для сравнения на рис.14,а—ж приведено семейство двумерных потенциалов при различном выборе фиксированного базиса. Поведение матричных элементов  $A_{12}(x) = -A_{21}(x)$  индуцированного векторного потенциала, матричных элементов  $\mathcal{U}_{ij}(x)$  и их аргумента  $\delta(x)$  демонстрируется на рис.13,в,в',г,д. Матричные элементы  $A(x)$  сингулярны в точках пересечения уровней. При пересечении уровней  $\delta(x)$  изменяется на  $\pi$ , чему соответствует одновременное изменение знака базисных функций  $\psi(x; y)$  и функций медленного движения  $F(x)$ . Изменение знака функций — топологический эффект, возникающий в простой двухканальной системе. В результате первого пересечения в точке  $x'$  имеем

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x' + \Delta; y) \\ \psi_2(x' + \Delta; y) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_1(x' - \Delta; y) \\ \psi_2(x' - \Delta; y) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} F_1(x' + \Delta) \\ F_2(x' + \Delta) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x' - \Delta) \\ F_2(x' - \Delta) \end{pmatrix}. \quad (74)$$

В результате второго пересечения в точке  $x''$  знак восстанавливается. Поэтому, несмотря на очевидное возникновение топологической фазы при пересечении уровней, она не детектируется в нашей замкнутой физической системе с баргмановской потенциальной матрицей. Но, быть может, удастся выделить топологическую фазу в функциях медленного (быстрого) движения при нечетном числе пересечений. Естественно, казалось бы, рассмотреть самую простую ситуацию с одним пересечением. Однако наш анализ показал, что ни при каком выборе спектральных параметров для двухканальной баргмановской потенциальной матрицы не удастся определить термы с единственной точкой вырождения состояний. Случай, де-



а

Рис.14. Семейство потенциалов, отвечающее различному выбору нормировочных функций: а)  $V(x, y)$  соответствует выбору нормировки по формуле (65); б—ж)  $V(x, y)$  соответствует различному выбору фиксированного базиса

монстрирующий ситуацию с двумя близкими, но нигде не совпадающими термами, представлен на рис.15. Как видно из рис.15,в,  $\delta(x)$  вблизи пересечения достигает своего максимального значения, но не проходит через нуль. Следует отметить, что добиться пересечения термов можно только при наличии порогов, т.е. внутреннего взаимодействия. Из этого можно заключить, что топологические эффекты возможны только в достаточно сложных системах.

Элементы потенциальной матрицы  $V'_{ij}(x)$  и соответствующие термы  $\mathcal{E}_j(x)$  с одним связанным состоянием  $E_1 = -0,5$ , одним порогом  $\varepsilon = 1,0$  и нормировками, определяемыми значениями  $\gamma_1^1 = 1$ ,  $\gamma_2^1 = 0,009$ , приведены на рис.15,а и б соответственно. Матричные элементы  $U(x)$ , аргумент  $\delta(x)$  и векторный потенциал  $A(x)$  графически представлены рис.15,в,г и д. Двумерный потенциал и отвечающие ему волновые функции термов  $\Psi_1(x, y)$  и  $\Psi_2(x, y)$  показаны на рис.15,е,ж,з.

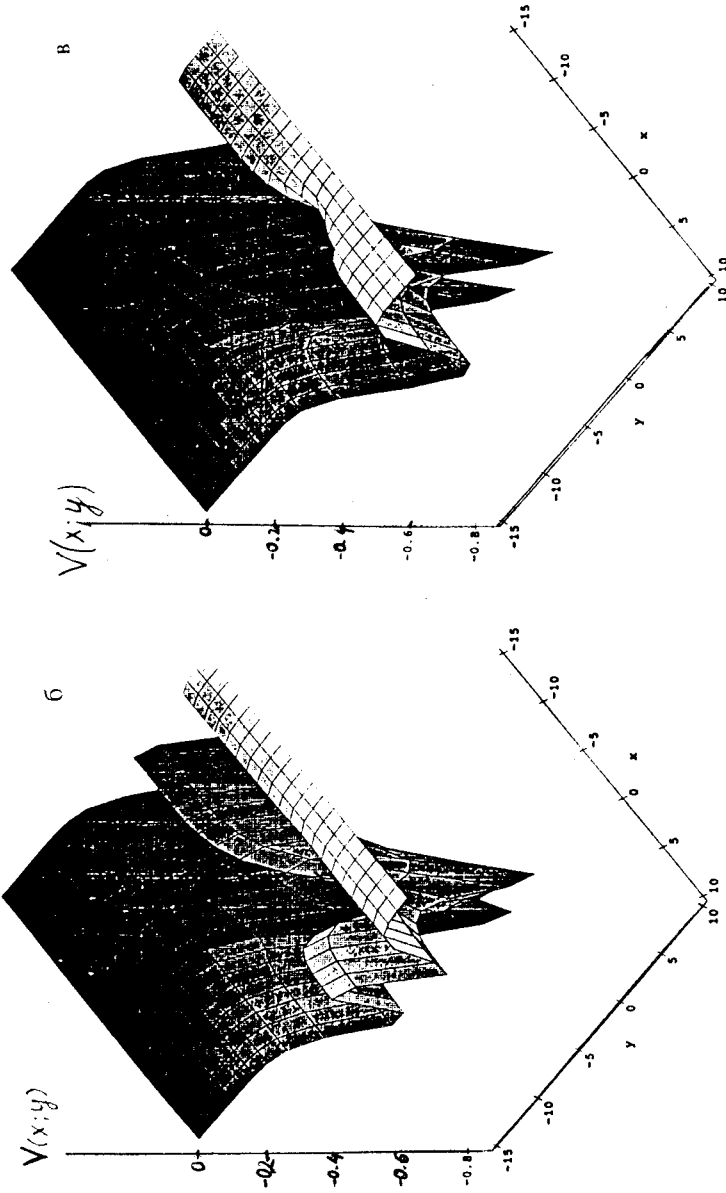


Рис.14

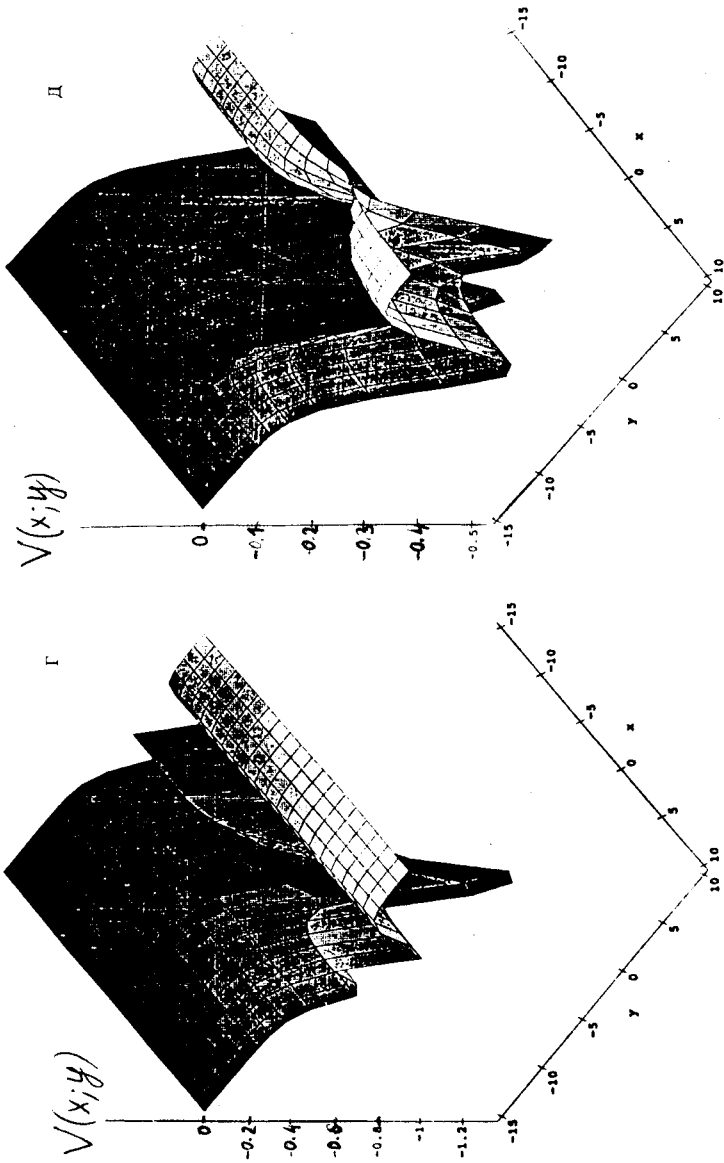


Рис. 14

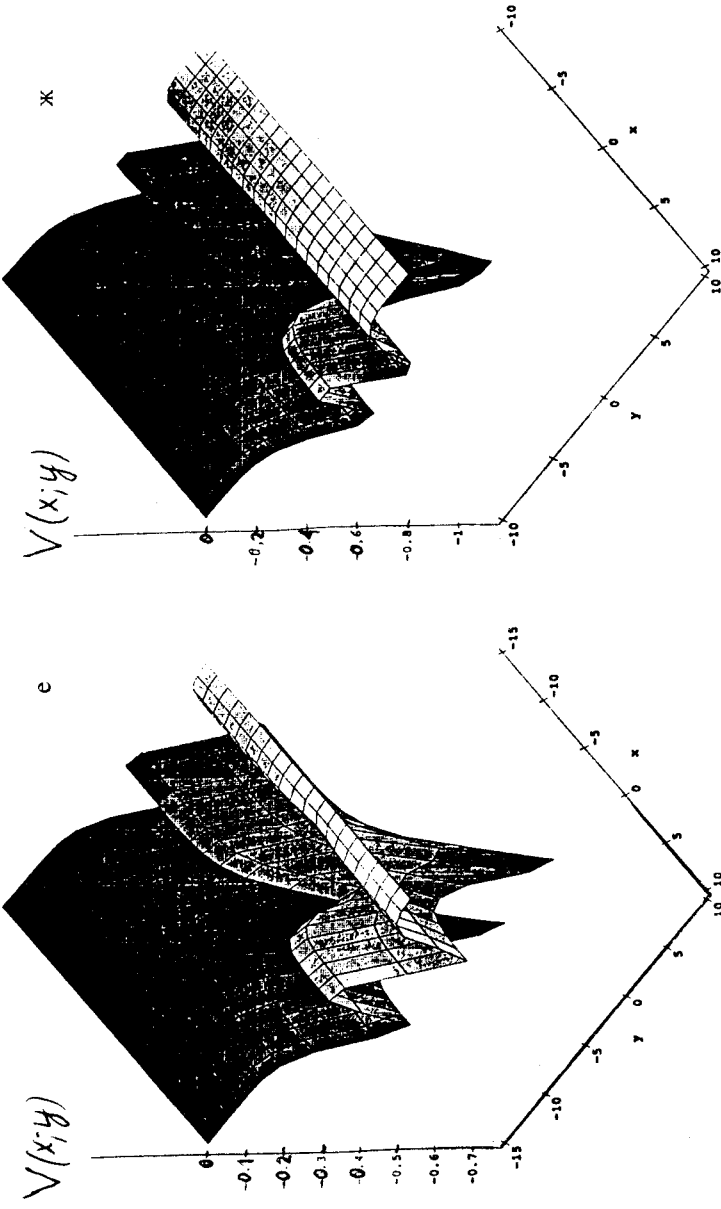


Рис.14

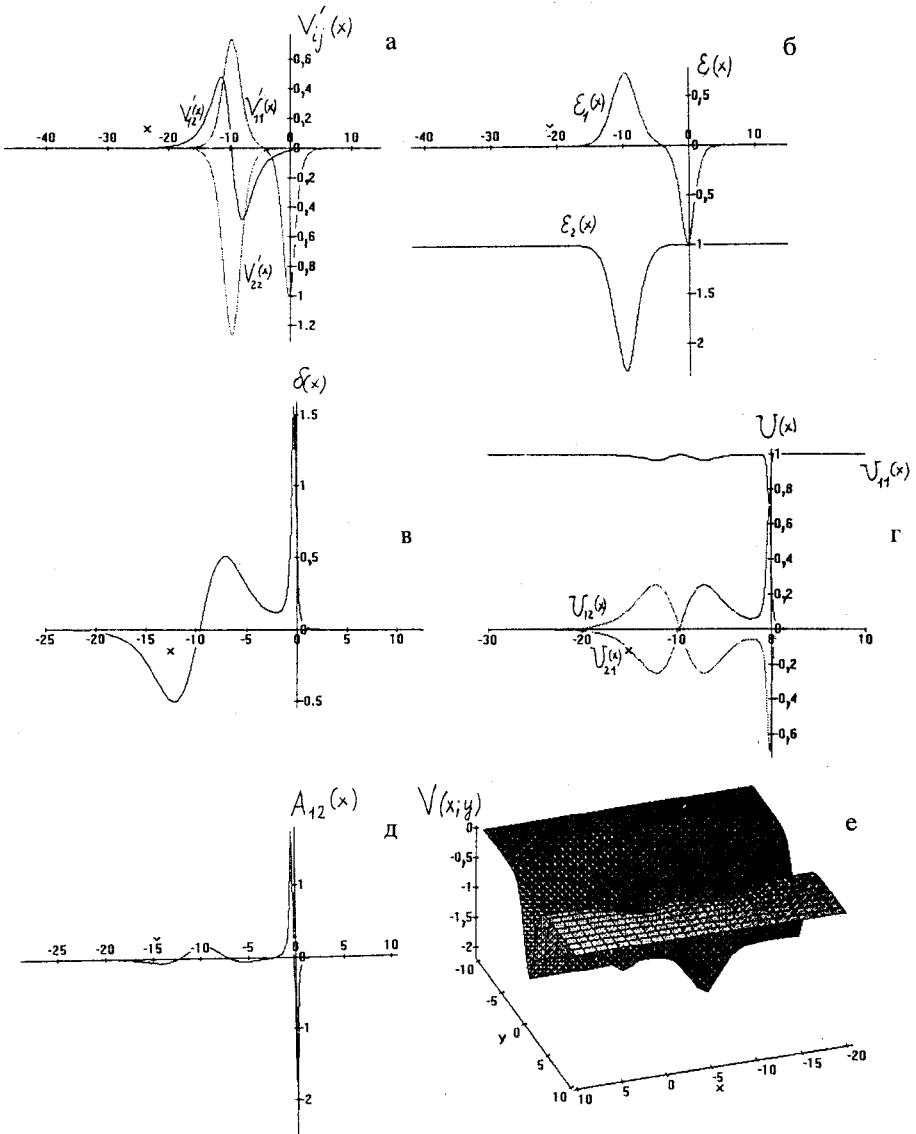


Рис.15

Интересно поведение фактора  $\delta(x)$ , который, как оказывается, имеет несколько максимальных значений, никак не связанных с проблемой пересечения уровней Ландау [29]. Простой анализ формулы (72) показывает, что

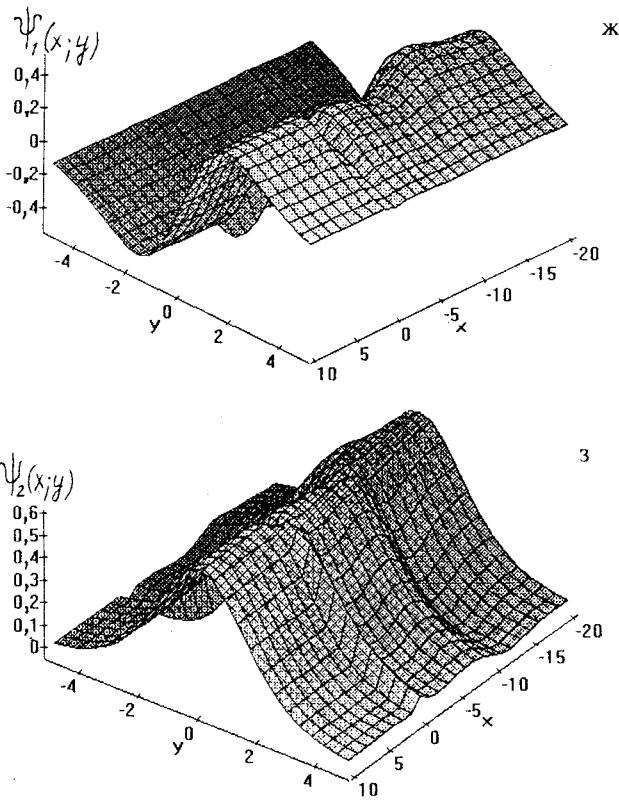


Рис.15. Согласованное восстановление двумерного потенциала, симметричного по  $y$  и безотражательного по обеим координатным переменным с одним связанным состоянием  $E = -0,5$  и нормировками  $\gamma_1^1 = 1, \gamma_1^2 = 0,009$ . а) Элементы безотражательной потенциальной матрицы  $V'_{i,j}(x)$ ; б) термы  $\mathcal{E}_1(x), \mathcal{E}_2(x)$ ; в) фазовый фактор  $\delta(x)$ ; г) матричные элементы  $U(x)$ ; д) векторный потенциал  $A_{12}(x)$ ; е) двумерный потенциал  $V(x, y)$  и ж,з) соответствующие ему нормированные функции термов  $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)$

$\delta(x)$  достигает своего максимального значения не только при сближении термов, но и когда  $2V'_{21}(x) = \mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x)$ , либо когда  $2V'_{21}(x) = V'_{11}(x) - V'_{22}(x)$   $V'_{11}(x) - V'_{22}(x)$ . Таким образом, случай с  $V'_{12}(x) = 0, \mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x) = 0$  является частным для ситуации с  $2V'_{12}(x) = V'_{11}(x) - V'_{22}(x)$  и  $\delta(x) = (n + 1) \pi / 2$  при  $n = 0, 2, 4 \dots$ . Если  $\mathcal{E}_1(x)$  близко к  $\mathcal{E}_2(x)$  и  $V'_{12}(x)$  равно



нулю либо конечному значению, не совпадающему с  $\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x)$ , то аргумент  $\delta(x)$  принимает значения  $\delta(x) = (n + 1) \pi / 2$  при  $n = 1, 3, 5 \dots$ . Очевидно, что обратная задача в адиабатическом подходе открывает не только широкие возможности конструирования точно решаемых моделей в пространстве нескольких измерений  $N \geq 2$ , но и служит удобным аппаратом исследования различных физических проблем, в частности, проблемы пересечения уровней и геометрических аспектов теории рассеяния, возникающих в сложных динамических системах.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках обратной задачи в адиабатическом представлении построен ряд точно решаемых двумерных моделей в регулярном и сингулярном случаях. Приведены некоторые примеры точно решаемых моделей на основе развиваемой техники баргмановских потенциалов для параметрического семейства обратных задач и для систем уравнений с ковариантной производной как при их согласованном решении в последовательном подходе, так и на основе только параметрической обратной задачи. С использованием формализма обратной задачи в подходах Гельфанда — Левитана и Марченко анализируются различные ситуации как с периодической структурой термов, так и с непериодическим аналитическим поведением термов. Проблема пересечения уровней исследуется на основе точно решаемых моделей параметрической обратной задачи и посредством анализа двухканальных точно решаемых моделей. Показано, что квантовые системы с регулярными баргмановскими потенциалами приобретают геометрическую фазу при пересечении уровней даже в одномерных случаях медленного движения, однако она не проявляется при четном числе пересечений.

Авторы благодарны профессорам Х.В. фон Герамбу и В.Б.Приезжеву за проявленный интерес к работе. Следовало бы отметить, что впервые мысль использовать точно решаемые модели для изучения проблемы пересечения уровней возникла при совместной работе с С.И.Виницким, которому авторы выражают признательность. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Сороса (грант NK8300).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Born M.** — Nachr. Acad. Wiss. Gottingen, 1951, Bd.1, No.6, s.1; Борн М., Хуан Кунь — Динамическая теория кристаллических решеток. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. **Macek J.** — J. Phys., 1968, vol.B1, p.831.
3. **Виницкий С.И., Пономарев Л.И.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.6, с.1336.

4. Dubovik V.M., Markovski B.L., Suzko A.A., Vinitsky S.I. — Phys. Lett., 1989, vol.A142, p.133.
5. Сузько А.А. — ЭЧАЯ, 1993, т.24, вып.4, с.1133; In: Proc. Int. Conf. in Lecture Notes in Physics, Quantum Inversion Theory and Applications (Ed. H.V. von Geramb), 1993, Vol. 427, Springer-Verlag, Heidelberg, p.67.
6. Vinitsky S.I., Markovski B.L., Suzko A.A. — Sov. J. Nucl. Phys., 1992, vol.55, p.669; Vinitsky S.I., Suzko A.A., Markovski B.L. et al. — In: Proc. Int. Seminar Topological Phases in Quantum Theory. Dubna, 2—4 September 1988. World Scientific, Singapore, 1989, p.173.
7. Vinitsky S.I., Kadomtsev M.B., Suzko A.A. — Sov. J. Nucl. Phys., 1990, vol.51, p.952.
8. Berry M. — Proc. R. Soc. Lond., 1984, vol.A392, p.45.
9. Simon B. — Phys. Rev. Lett., 1983, vol.51, p.1983.
10. Aharonov Y.A., Anandan J. — Phys. Rev. Lett., 1987, vol.58, p.1593.
11. Mead C.A. — Phys. Rev. Lett., 1987, vol.59, p.161; Rev. Mod. Phys., 1992, vol.64, p.51.
12. Bulgac A. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.67, p.965; Kuznezov D. — Phys. Lett. B, 1993, vol.319, p.381.
13. Laughlin R.B. — Phys. Rev. Lett., 1983, vol.50, p.1395.
14. Semenov G.W., Sodano P. — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.57, p.1195.
15. Suzko A.A., Velicheva E.P. — In: Proc. VII Intern. Conf. on Symmetry Methods in Physics. Dubna, 10—16 July, 1995; Preprint JINR E4-95-535, Dubna, 1995; Proc. Int. Conf. on Few-Body Systems. Spain, Juni, 1995.
16. Wilczek F., Zee A. — Phys. Rev. Lett., 1984, vol.52, p.2111.
17. Zygelman B. — Phys. Lett. A., 1987, vol.125, p.476; Zygelman B. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.64, p.256.
18. Wu L.-Ao, Sun J., Ji-Yu Zhong — Phys. Lett. A, 1993, vol.183, p.257.
19. Qian T.-Z., Su Z.-B. — Phys. Rev. Lett., 1994, vol.72, p.2311.
20. Landau L.D. — Phys. Z. Sov., 1932, vol.1, p.88.
21. Zener C. — Proc. Roy. Soc. A, 1932, vol.137, p.696.
22. Веницкий С.И., Сузько А.А. — ЯФ, 1990, т.52, с.686.
23. Сузько А.А. — ЯФ, 1992, т.55, с.2446; ЯФ, 1993, т.56, с.189.
24. Величева Е.П., Сузько А.А. — ЯФ, 1996, т.59, с.1.
25. Kuznezov D., Bulgac A. — Ann. of Phys., 1992, vol.214, с.180; Kuznezov D. — Phys. Rev. Lett., 1994, vol.72, с.1990.
26. Rozen N., Zener C. — Phys. Rev., 1932, vol.40, p.502.
27. Демков Ю.Н. — ЖЭТФ, 1983, т.85, с.1159.
28. Фирсов О.Б. — ЖЭТФ, 1951, т.21, с.1001.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Квантовая механика, т.3. М.: Наука, 1974.
30. Stuckelberg E.C.G. — Helv. Phys. Acta, 1932, vol.5, p.370.
31. Massey H.S.W., Smith R.A. — Proc. Roy. Soc. A, 1933, vol.142, p.142.
32. Меньшиков Л.И. — ЖЭТФ, 1983, т.85, с.1159.
33. Калоджеро Ф., Дегасперис А. — Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985.
34. Zakhariev B.N., Suzko A.A. — Direct and Inverse Problems (Potentials in Quantum Scattering). Springer-Verlag. Berlin Heidelberg/New York, 1990, 223p. 2-nd ed.)
35. Hwang J.-T., Pechukas Ph. — J. Chem. Phys., 1977, vol.67, p.4640.