

## БАБА-РАССЕЯНИЕ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

*А.Б.Арбузов, Э.А.Кураев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор современного состояния теоретического описания процесса электрон-позитронного рассеяния на малые углы. В деталях излагается подход, позволяющий уменьшить теоретическую неопределенность до уровня 0,1%, соответствующего точности, требуемой для прецизионного определения светимости на LEP I. Указанная точность достигается путем точного учета радиационных поправок в первом порядке теории возмущений и логарифмических вкладов во втором порядке. Вклады в третьем порядке учтены в приближении старших логарифмов. Приводятся результаты численных расчетов для условий эксперимента LEP I и дается их сравнение с результатами других групп.

The present status of the theoretical description of the low-angle electron-positron scattering is reviewed. The approach, which allows one to decrease the theoretical uncertainty to 0.1% needed for the precise luminosity determination at LEP I, is described in detail. The precision is reached due to the explicit calculations of the radiative corrections in the first order of perturbation theory and of the logarithmic contributions in the second order. The contributions of the third order are accounted in the leading logarithmic approximation. The results of numerical calculations for LEP I conditions are presented. They are compared with the results of other groups.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Сечение  $\sigma$  любого процесса, идущего на электрон-позитронных коллайдерах, определяется как отношение числа событий в секунду  $N$  к светимости  $\mathcal{L}$ :  $\sigma = N/\mathcal{L}$ . Светимость — это одна из основных характеристик коллайдеров. Для ее определения измеряется число событий в секунду  $N_1$  какого-либо процесса, сечение которого  $\sigma_1$  хорошо известно теоретически:  $\mathcal{L} = N_1/\sigma_1$ . Требования, позволяющие уменьшить статистическую ошибку, предъявляемые к сечению такого эталонного процесса, следующие: оно должно быть достаточно большим, и соответствующие события должны быть достаточно надежно идентифицируемы. Для ускорителей средних

энергий с небольшим числом электронов (позитронов) в сгустках ( $\leq 10^{13}$ ) для этой цели используется процесс двойного тормозного излучения в разные стороны. Однако с увеличением числа частиц в сгустке этот процесс становится непригодным из-за большой вероятности имитации его двумя несвязанными процессами однократного тормозного излучения, произошедшими при столкновении сгустков. Другим процессом, используемым для определения светимости на электрон-позитронных коллайдерах, является процесс  $e^+e^-$ -рассеяния (процесс баба-рассеяния). Причем в случае коллайдеров умеренно высоких энергий (Ф- и Ψ-фабрик) с суммарной энергией пучков  $\sqrt{s} = 2E \leq 1 + 3$  ГэВ отбираются события баба-рассеяния на большие углы (БРБУ). Иногда используются также процессы образования мюонной пары и аннигиляции в фотоны. В случае коллайдеров высоких энергий типа LEP I, LEP II (Женева) более удобен процесс баба-рассеяния на малые (не превышающие 100 мрад) углы (БРМУ). Действительно, сечение этого процесса не убывает с ростом энергии пучков  $\epsilon$  благодаря доминирующему вкладу  $t$ -канальных диаграмм (мы будем работать в системе центра инерции начальных частиц (СЦИ)). Сечения как упругого, так и ряда неупругих процессов, дающие вклад в измеряемое на эксперименте число событий, могут быть рассчитаны в принципе с любой точностью в рамках хорошо обоснованной в настоящее время теории электрослабого взаимодействия. Более того, за исключением малых адронных поправок и малых эффектов интерференции амплитуд обмена фотоном и Z-бозоном, расчеты могут быть выполнены в рамках квантовой электродинамики (КЭД). Для мобильного определения на эксперименте светимости существенно то, что при достаточно малых углах рассеяния электрона и позитрона при энергии, близкой к  $\sqrt{s} = M_Z$ , скорость счета числа событий БРМУ на LEP I много выше, чем скорость счета числа событий образования Z-бозона.

Экспериментальная точность измерения светимости непрерывно повышается. Если в начальный период работы LEP I она имела порядок 1%, то в настоящем составляет уже 0,07% (значительно превысив точность, заложенную в проекте) и, вполне возможно, в ближайшем будущем она дойдет до 0,05%. Можно ли снизить неопределенность *теоретического* вычисления сечения БРМУ процесса с учетом реальных экспериментальных условий до уровня экспериментальной? По-видимому, да. Особенно много внимания этому вопросу уделялось в последнее время (см. [1] и ссылки на литературу, там приведенные). Следует отметить, что высокая точность теоретического расчета сечения процесса баба-рассеяния необходима также для прецизионных тестов стандартной модели (СМ), так как этот процесс задает абсолютную нормировку всех процессов на LEP. Теоретическому

расчету сечения процесса БРМУ с учетом экспериментальных условий и гарантированной точностью

$$\frac{\Delta \sigma_{\text{theor}}}{\sigma} \leq 0,1\% \quad (1)$$

и посвящен настоящий обзор.

Подходы к теоретическому описанию сечения БРМУ можно условно разбить на два направления. Первое связано с точным учетом радиационных поправок (РП) в низшем порядке теории возмущений (ТВ) и использованием приближенных формул для учета вкладов высших порядков ТВ. Причем в расчетах сечений неупругих процессов основную роль играют методы Монте-Карло для получения численных результатов с учетом конкретных экспериментальных условий. Этот подход широко освещен в литературе. Наиболее продвинутыми в данном направлении являются работы группы С.Ядаха [2,3], основанные на применении процедуры экспоненциации при учете главных вкладов высших порядков ТВ применительно к дифференциальным сечениям. Именно на результатах этой группы была основана обработка данных на LEP I в период, когда точность эксперимента не превышала 0,25%, т.е. до 1991 г. В настоящее время точность эксперимента увеличилась по крайней мере в четыре раза, и поэтому требования к точности теоретического расчета становятся насущными. При этом использование приближенных формул типа формул экспоненциации, которые только в частном случае согласуются с более общим подходом структурных функций, не обеспечивает нужной точности.

Вторым подходом [4], описанию которого в основном и уделяется внимание ниже, является аналитическое вычисление неведущих вкладов вплоть до второго порядка ТВ. Преимуществом этого подхода является возможность точного вычисления нелидирующих вкладов. Недостатком — необходимость независимого расчета вкладов неупругих процессов при изменении постановки опыта — условий детектирования конечных частиц. Безусловным преимуществом первого подхода является использование метода Монте-Карло в любых постановках опыта, тогда как его недостатком является отсутствие точного учета нелидирующих вкладов.

В работах групп Никрозини [5] и Каффо [6] осуществляется синтез точных результатов, известных в первых порядках ТВ с техникой структурных функций. Используется интегрирование по методу Монте-Карло со взвешенными событиями так, чтобы как можно точнее учесть условия опыта. Специальная техника применяется для сглаживания пиковостей подынтегрального выражения. При этом также нелидирующие вклады высших порядков только оцениваются.

Сечение процесса БРМУ рассчитывается в рамках СМ, причем основные вклады получаются из теории возмущений квантовой электродинамики

(КЭД), а собственно вклады, происходящие при учете тяжелых векторных  $Z$ - и  $W$ -бозонов, оказывается, достаточно учесть только в борновском приближении. Наряду с процессом упругого рассеяния (с учетом недеформируемых на опыте *мягких* фотонов и  $e^+e^-$ -пар), необходимо принимать во внимание также и различные неупругие процессы: излучение дополнительного жесткого фотона, двух жестких фотонов, образование жестких электрон-позитронных пар и т.д. Дифференциальные сечения этих процессов должны быть проинтегрированы по фазовому пространству излученных дополнительных частиц с ограничениями, соответствующими реальным экспериментальным условиям.

Процесс БРМУ, как и любой процесс при высоких энергиях с легкими заряженными фермионами, имеет относительно большие, порядка нескольких процентов, радиационные поправки КЭД-происхождения.

Подчеркнем, что поскольку процедура вычитания КЭД-эффектов применяется к экспериментальным величинам, то все неопределенности вычисления КЭД непосредственно становятся их систематическими ошибками. В случае недавних экспериментов на LEP КЭД-компонента систематических экспериментальных ошибок в определении светимости была такая же, как и аппаратурная систематическая ошибка.

Если КЭД неопределенность так важна, то возникает вопрос — откуда она происходит и как ее уменьшить. Следуя авторам работы [3], мы выделим два равно важных ее истока. Первый — *техническая точность* ошибки в численных приближениях, программные эффекты случайных чисел. Второй — эффекты высших порядков, новой физики и т.д., нелидирующие вклады, это — *физическая точность*. Полная КЭД-неопределенность есть сумма (в квадратурах) технической и физической точностей.

Для оценки технической точности вычисления проводятся разными способами, например, с использованием двух разных программ Монте-Карло, затем производится сравнение и прикладываются усилия для уменьшения ошибки. Группа Ядаха добивается здесь технической ошибки 0,02%.

Источник физической ошибки — вычисление эффектов высших порядков ТВ и оценка отбрасываемых членов. Надо отметить, что надежная оценка технической и физической точности не менее трудоемка, чем само их вычисление.

Единственным путем достижения физической точности в вычислении эффектов высших порядков является явное определение слагаемых, которыми обычно пренебрегают. Именно этот путь и использует подход, созданный в работах с участием авторов. Что же касается подхода группы Ядаха, то они находят верхнюю границу для *малых* вкладов. На этом пути часто приходится развивать свои вычислительные методы и создавать новые программы Монте-Карло. Тем не менее в их работах была поставлена и решена

задача уменьшения неопределенностей до 0,25%. Это было достигнуто сочетанием полуаналитических вычислений и новых программ Монте-Карло, в котором результат первого порядка ТВ воспроизводился точно. Вычисление второго порядка было фактически сведено к учету ведущих слагаемых вида  $(\alpha/\pi)^2 L^2$ , где  $L$  есть т.н. *большой* логарифм,  $L = \ln(t_0/m_c^2)$ , и  $t_0$  — квадрат характерного переданного импульса ( $L \approx 15$  для условий LEP), и оценке нелидирующих вкладов вида  $(\alpha/\pi)^2 L$  и вклада процесса образования пар. Так, для нелидирующих вкладов от излучения фотонов неопределенность составила 0,2%, от образования пар 0,1%. Принимая во внимание также неопределенность, вносимую поляризацией вакуума адронами 0,08%, и техническую неопределенность, было получено значение полной теоретической неопределенности 0,25%.

Несколько слов о процедуре экспоненциации Иени — Фраучи — Суура (ИФС) [7], интенсивно используемой группой Ядаха. Она подробно описана в работе [3] (см. ссылки в ней). Авторами построена некоторая синтетическая формула (см. (2) в [3]) для описания излучения фотонов (виртуальных и реальных). Она представляет собой проинтегрированное по состояниям конечных фермионов (с учетом экспериментальных ограничений) произведение известного множителя ИФС, описывающего излучение виртуальных и мягких (с энергией, не превышающей некоторого значения  $\Omega$ ) фотонов, и бесконечной суммы по числу излученных реальных фотонов (с энергией, большей  $\Omega$ ) некоторой комбинации множителей сопровождающего излучения с весовыми множителями, правильно воспроизводящими РП первого порядка ТВ. С помощью методов Монте-Карло эта формула исследовалась авторами на независимость от выбора параметра  $\Omega$ , на соответствие однопетлевым расчетам и вычислениям сечений неупругих процессов, проведенных группой CALCUL [8], и впоследствии явилась основой в расчете физических неопределенностей КЭД.

У нас нет сомнений, что такой подход правильно описывает поправки первого порядка и является хорошей моделью для учета высших порядков ТВ, по крайней мере в ведущем приближении. Однако сделаем следующие замечания. Авторы не провели сравнения с точными результатами для каналов двойного тормозного излучения и рождения пар на малые углы, полученными в серии работ 70-х годов [9], где, в частности, отмечалось, что приближение множителями сопровождающего излучения является довольно грубым для случая излучения жестких фотонов, и приведены точные формулы. Второе замечание касается применения теоремы Киношита — Ли — Науенберга. Она гарантирует сокращение лидирующих вкладов виртуальных РП и вкладов, происходящих от учета жестких фотонов, при интегрировании по всему спектру, тогда как на опыте на энергии конечных частиц накладывается некоторое ограничение. Третье замечание касается процесса

рождения легких фермионных пар, который не описывается подобными формулами, и в лучшем случае он описывался авторами в приближении структурных функций. Наш подход к учету *физических неопределенностей*, детально представленный ниже, сводится к их явному вычислению. Причем мы вычисляем нелидирующие вклады порядка  $(\alpha/\pi)^2 L$  как от процессов излучения фотонов, так и от процессов образования пар.

Специфика малых углов предоставляет некоторые преимущества при проведении расчетов. Так, слагаемые порядка  $\theta^2 = 4|t|/s$  при расчете высших порядков ТВ, как правило, могут быть опущены, хотя их учет необходим в борновском приближении. В частности, в случае рассеяния на малые углы появляется возможность пренебречь целым классом поправок, происходящих вследствие так называемой *«верх-низ»-интерференции*.

Мы имеем в виду пропорциональную  $\theta^2(\alpha/\pi)^n$  ( $n = 1, 2$ ) величину вклада в поправку к сечению, происходящую за счет интерференции амплитуд, описывающих излучение реальных фотонов и пар вдоль направлений электронного и позитронного начальных пучков. Аналогичное явление имеет место при учете обмена несколькими фотонами в  $t$ -канале в случае упругого рассеяния, где имеет место *обобщенное зйкональное представление* для амплитуды. Точная амплитуда процесса с учетом многофотонных обменов отличается от амплитуды в борновском приближении фазовым множителем  $\exp\{i\phi\}$  и наличием формфакторов [10]:

$$A(t) = A_0(t)(\Gamma(t))^2 e^{i\phi(t)} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha t}{\pi s}\right) \right).$$

Ниже рассчитаны вклады в радиационную поправку порядка  $(\alpha/\pi)$  со степенной точностью (т.е. пренебрегая членами порядка  $\mathcal{O}(m^2/|t|)$ ), а также вклады порядка  $(\alpha/\pi)^2$  в логарифмическом приближении (т.е. удерживая только слагаемые, содержащие большой логарифм  $L$ ). При этом мы убедились в справедливости партонного представления (представления в виде сечения процесса типа Дрелла — Яна) для сечения процесса БРМУ в главном логарифмическом приближении (при удержании только поправок  $\sim (\alpha L/\pi)^n$ ). Кроме того, нелидирующие вклады порядка  $(\alpha/\pi)$  и  $(\alpha/\pi)^2 L$  получены явно. Их вид не может быть установлен с помощью формализма ренормализационной группы, определяющей вид сечения в главном логарифмическом приближении.

Поправки, происходящие за счет излучения виртуальных и реальных электрон-позитронных пар, также должны быть учтены с требуемой точностью. Здесь мы снова обнаруживаем, что лидирующие вклады  $\sim (\alpha L/\pi)^2$  согласуются с партонным представлением, а нелидирующие вклады должны приниматься во внимание при оценке гарантируемой точности. Вообще

лидирующие вклады в сечение могут быть получены в рамках приближения ренормализационной группы путем итерации уравнений Липатова [11—14] (см. приложение 7).

Знание перечисленных вкладов позволяет гарантировать точность вычислений радиационных поправок к дифференциальному сечению в борновском приближении  $d\sigma_0$ :

$$d\sigma = d\sigma_0(1 + \delta), \quad \delta = \delta_{\text{lead}} + \delta_{\text{nonlead}} + \Delta\delta, \quad \Delta\delta < 0,1\%, \quad (2)$$

где  $\delta_{\text{lead}}$  обозначает вклад главного логарифмического приближения, а  $\delta_{\text{nonlead}}$  — вклад следующего за лидирующим логарифмического приближения (next-to-leading). Погрешность  $\Delta\delta$  содержит не принимаемые нами в расчет вклады типа

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2, \quad \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 L^2, \quad \frac{\alpha}{\pi} \theta^2, \quad \frac{m^2 L^2}{|t|}, \dots$$

Мы также не учитываем вклады высших порядков за счет образования пар тяжелых частиц (пионов, мюонов и т.д., см. разд.8).

Напомним, чем же важно точное измерение светимости и сечений для прецизионной проверки стандартной модели. Известно, что измерение невидимых каналов распада  $Z$ -бозона, параметризованное через число сортов нейтрино  $N_\nu$ , непосредственно зависит от погрешности измерения светимости  $\delta\mathcal{L}/\mathcal{L}$ . Так как  $N_\nu$  и  $\sigma_{\text{tot}}(M_z)$  весьма слабо зависят от деталей СМ, в частности, от масс хиггс-бозона и топ-кварка, то заметное отличие  $N_\nu$  от 3 было бы сигналом *новой физики*, не укладывающейся в СМ. Величина  $\delta\mathcal{L}/\mathcal{L}$  также непосредственно влияет на точность измерения электрон-позитронной ширины  $Z$ -бозона и, следовательно, на точность измерения угла электрослабого смешивания.

В разд.2 мы обсуждаем постановку опыта с симметрично расположенными кольцевыми детекторами малой апертуры. Там мы приводим также известные результаты для сечения в борновском приближении, вычисленные в рамках СМ. В разд.3 рассматривается радиационная поправка за счет излучения одного реального или виртуального фотона. В разд.4,5 вычисляются радиационные поправки в порядке  $\alpha^2$  за счет излучения двух фотонов (реальных или виртуальных) и за счет рождения электрон-позитронной пары (реальной или виртуальной) соответственно. Вклад лидирующих слагаемых вида  $(\alpha L/\pi)^3$  приводится в разд.6. В разд.7 рассматривается так называемая *калориметрическая постановка опыта*. В разд.8 мы проводим анализ отбрасываемых слагаемых и точности вычислений. В заключение да-

ется численный анализ результатов и их обсуждение. В приложениях мы приводим вывод с помощью техники Судакова сечения однократного тормозного излучения; детали вычислений виртуальных поправок к однократному тормозному излучению; вычисление вклада полуколлинеарной кинематики в двойном тормозном излучении; сокращение  $\Delta$ -зависимости в нелидирующих вкладах; представление лидирующих вкладов в терминах структурных функций; анализ случая несимметричных детекторов; итерацию уравнений Липатова.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СЕЧЕНИЕ В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Мы будем рассматривать реакцию

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2) + (n \gamma) + (e^+ e^-) \quad (3)$$

в инклюзивной постановке, т.е. как баба-событие рассматривается одновременная регистрация двумя противоположными детекторами электрона и позитрона. Рассматривается диапазон энергий, характерный для установок LEP I и LEP II:  $2\varepsilon = \sqrt{s} = 90 + 200$  ГэВ,  $\varepsilon$  — энергия начальной частицы в системе центра масс. При обобщении результатов на другие диапазоны энергий будет необходим дополнительный анализ вклада отбрасываемых нами слагаемых. На углы рассеяния накладываются следующие экспериментальные ограничения:

$$\theta_1 < \theta_- = \widehat{\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1} \equiv \theta < \theta_3, \quad \theta_2 < \theta_+ = \widehat{\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2} < \theta_4, \quad 0,01 \lesssim \theta_i \lesssim 0,1 \text{ рад}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1$  ( $\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2$ ) — импульсы начального и рассеянного электрона (позитрона). В рассматриваемом нами случае симметричных кольцевых детекторов мы имеем  $\theta_1 = \theta_2$  и  $\theta_3 = \theta_4$ . При анализе наблюдаемых событий накладывается дополнительное условие на энергии детектируемых частиц:

$$x_1 x_2 < x_c, \quad x_{1,2} = \frac{q_{1,2}^0}{\varepsilon}, \quad (5)$$

$x_1$  и  $x_2$  — доли энергии конечных электрона и позитрона,  $x_c$  — параметр, выбираемый при анализе экспериментальных данных ( $0 < x_c < 1$ ). Под экспериментально наблюдаемым сечением  $\sigma_{\text{exp}}$  мы понимаем сечение процесса (3), проинтегрированное в заданном диапазоне углов с учетом условия



(5). На практике возможны также и другие постановки эксперимента. Например, в так называемой калориметрической постановке, которая будет обсуждаться в разд.7, при одновременном попадании в малую область детектора двух или более частиц они будут регистрироваться как одна частица с энергией, равной сумме энергий всех частиц, образовавших *кластер*. В своих расчетах мы считаем, что детектор различает заряженные и нейтральные частицы, в противном случае необходимо учитывать возможность событий, когда одну или обе заряженные конечные частицы имитируют фотоны. В любом случае предлагаемая нами схема вычислений РП допускает модификации, соответствующие весьма широкому классу экспериментальных ситуаций.

В рассматриваемом диапазоне малых углов рассеяния мы можем разлагать выражение для сечения в ряд по степеням угла рассеяния. Главный вклад в дифференциальное сечение  $d\sigma/d\theta^2$  происходит за счет диаграммы с однофотонным обменом в  $t$ -канале. Этот вклад имеет сингулярность  $\theta^{-4}$  при  $\theta \rightarrow 0$ . Оценим величину поправки относительного порядка  $\theta^2$  к указанному вкладу. Если

$$\frac{d\sigma}{d\theta^2} \sim \theta^{-4}(1 + c_1\theta^2), \quad (6)$$

то после интегрирования по  $\theta^2$  в пределах (4) мы получим

$$\int_{\theta_1^2}^{\theta_3^2} \frac{d\sigma}{d\theta^2} d\theta^2 \sim \theta_1^{-2} \left( 1 + c_1\theta_1^2 \ln \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2} \right).$$

При  $\theta_1 = 50$  мрад и  $\theta_3 = 150$  мрад относительный вклад рассматриваемой поправки будет иметь порядок  $2,5 \cdot 10^{-3} c_1$ . Следовательно, слагаемые относительного порядка  $\theta^2$  должны удерживаться только при работе в борновском приближении, где  $c_1$  не мал. В более высоких порядках теории возмущений коэффициент  $c_1$  содержит малый фактор  $\alpha/\pi$ , что позволяет отбрасывать такие вклады. Это означает, что в рассматриваемом диапазоне углов при заданной точности радиационные поправки возникают только за счет фейнмановских диаграмм рассеивательного типа. Более того, мы должны рассматривать при расчете РП только вклады диаграмм с обменом одним фотоном в  $t$ -канале вследствие обобщенного зйконального представления [10].

Принимая во внимание то, что минимальное значение модуля квадрата переданного импульса  $|t| = Q^2 = 2\varepsilon^2(1 - \cos \theta)$  порядка 1 ГэВ<sup>2</sup>, мы будем

пренебрегать, не выходя за требуемую точность, слагаемыми, пропорциональными  $m^2/Q^2$  ( $m$  — масса электрона), а также аналогичными слагаемыми, возникающими при расчете РП, типа  $m_\mu^2/Q^2$ .

Сечение баба-рассеяния в борновском приближении в рамках СМ хорошо известно [15]:

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8s} \{4B_1 + (1-c)^2 B_2 + (1+c)^2 B_3\}, \quad (7)$$

где

$$B_1 = \left(\frac{s}{t}\right)^2 |1 + (g_v^2 - g_a^2) \xi|^2, \quad B_2 = |1 + (g_v^2 - g_a^2) \chi|^2,$$

$$B_3 = \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{s}{t} + (g_v + g_a)^2 \left(\frac{s}{t} \xi + \chi\right) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{s}{t} + (g_v - g_a)^2 \left(\frac{s}{t} \xi + \chi\right) \right|^2,$$

$$\chi = \frac{\Lambda s}{s - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z}, \quad \xi = \frac{\Lambda t}{t - M_Z^2},$$

$$\Lambda = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha} = (\sin 2\theta_w)^{-2}, \quad g_a = -\frac{1}{2}, \quad g_v = -\frac{1}{2}(1 - 4\sin^2 \theta_w),$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4\varepsilon^2, \quad t = -Q^2 = (p_1 - q_1)^2 = -\frac{1}{2}s(1-c),$$

$$c = \cos \theta, \quad \theta = \widehat{p_1 q_1}.$$

Здесь  $\theta_w$  — угол Вайнберга. В пределе малых углов, разлагая (7), мы получаем

$$\frac{d\sigma^B}{d\theta} = \frac{8\pi\alpha^2}{\varepsilon^2\theta^4} \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{9}{40}\theta^4 + \delta_{\text{weak}} \right),$$

где  $\varepsilon = \sqrt{s}/2$  — начальная энергия электрона (позитрона) в СЦИ. Поправка  $\delta_{\text{weak}}$  связана с вкладом диаграмм, учитывающих обмен Z-бозоном, она может быть записана в виде

$$\delta_{\text{weak}} = 2g_v^2 \xi - \frac{\theta^2}{4} (g_v^2 + g_a^2) \text{Re} \chi + \frac{\theta^4}{32} (g_v^4 + g_a^4 + 6g_v^2 g_a^2) |\chi|^2. \quad (8)$$

Из выражения (8) можно видеть, что соответствующий вклад  $c_1^w$  в коэффициент  $c_1$ , введенный в (6), дается формулой

$$c_1^w \lesssim 2g_v^2 + \frac{(g_v^2 + g_a^2) M_Z}{4 \Gamma_Z} + \theta_{\max}^2 \frac{(g_v^4 + g_a^4 + 6g_v^2 g_a^2) M_Z^2}{32 \Gamma_Z^2} \simeq 1. \quad (9)$$

Согласно изложенным выше соображениям, это означает, что на борновском уровне вклад  $Z$ -бозонного обмена не превышает 0,3%. Следовательно, диаграммы с радиационными поправками, учитывающие обмен  $Z$ -бозоном, могут быть отброшены, т.к. они дают вклад, не превышающий 0,01%.

### 3. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ ПОРЯДКА $\mathcal{O}(\alpha)$ К БАБА-РАССЕЯНИЮ

Рассмотрим сначала поправки за счет излучения одного виртуального или мягкого фотона. В случае чистой электродинамики однопетлевые РП к сечению процесса баба-рассеяния были рассчитаны много лет назад [16]. Принимая во внимание вклад за счет излучения мягкого фотона с энергией, меньшей некоторого малого конечного значения  $\Delta\varepsilon$ , рассматриваемую однопетлевую поправку можно представить в виде:

$$\frac{d\sigma_{QED}^{(1)}}{dc} = \frac{d\sigma_{QED}^B}{dc} (1 + \delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{soft}}), \quad (10)$$

где  $d\sigma_{QED}^B$  — борновское сечение в случае чистой КЭД (оно равно  $d\sigma^B$  при  $g_a = g_v = 0$ ),

$$\begin{aligned} \delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{soft}} = & 2 \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2 \left( 1 - \ln \left( \frac{4\varepsilon^2}{m^2} \right) + 2 \ln \left( \text{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \right) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} + \right. \\ & + \int_{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}} \frac{dx}{x} \ln(1-x) - \frac{23}{9} + \frac{11}{6} \ln \left( \frac{4\varepsilon^2}{m^2} \right) \left. \right] + \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{(3+c^2)^2} \left[ \frac{\pi^2}{3} (2c^4 - 3c^3 - 15c) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(2c^4 - 3c^3 + 9c^2 + 3c + 21) \ln^2 \left( \sin \frac{\theta}{2} \right) - \\
& - 4(c^4 + c^2 - 2c) \ln^2 \left( \cos \frac{\theta}{2} \right) - \\
& - 4(c^3 + 4c^2 + 5c + 6) \ln^2 \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + \frac{2}{3} (11c^3 + 33c^2 + 21c + 111) \ln \left( \sin \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + 2(c^3 - 3c^2 + 7c - 5) \ln \left( \cos \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + 2(c^3 + 3c^2 + 3c + 9) \delta_t - 2(c^3 + 3c)(1 - c) \delta_s \Big].
\end{aligned}$$

Величина  $\delta_t$  ( $\delta_s$ ) определяется через вклад в оператор поляризации вакуума фотона  $\Pi(t)$  ( $\Pi(s)$ ):

$$\Pi(t) = \frac{\alpha}{\pi} \left( \delta_t + \frac{1}{3} \ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{9} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \ln \frac{Q^2}{m^2},$$

где

$$Q^2 = -t = 2\varepsilon^2(1 - c), \quad \delta_s = \delta_t(Q^2 \rightarrow -s).$$

Мы удержали только ведущую часть двухпетлевого вклада в поляризационный оператор. В СМ  $\delta_t$  содержит вклады мюонов,  $\tau$ -лептонов,  $W$ -бозонов и адронов:

$$\delta_t = \delta_t^\mu + \delta_t^\tau + \delta_t^W + \delta_t^H.$$

Первые три вклада могут быть рассчитаны теоретически:

$$\delta_t^\mu = \frac{1}{3} \ln \frac{Q^2}{m_\mu^2} - \frac{5}{9},$$

$$\delta_t^\tau = \frac{1}{2} v_\tau \left( 1 - \frac{1}{3} v_\tau^2 \right) \ln \frac{v_\tau + 1}{v_\tau - 1} + \frac{1}{3} v_\tau^2 - \frac{8}{9}, \quad v_\tau = \sqrt{1 + \frac{4m_\tau^2}{Q^2}},$$

$$\delta_t^W = \frac{1}{4} v_W (v_W^2 - 4) \ln \frac{v_W + 1}{v_W - 1} - \frac{1}{2} v_W^2 + \frac{11}{6}, \quad v_W = \sqrt{1 + \frac{4m_W^2}{Q^2}}.$$

Вклад адронов в поляризацию вакуума может быть представлен в виде интеграла от экспериментально измеренного сечения электрон-позитронной аннигиляции в адроны:

$$\delta_t^H = \frac{Q^2}{4\pi\alpha^2} \int_{4m_\pi^2}^{+\infty} \frac{\sigma^{e^+e^- \rightarrow h}(x)}{x + Q^2} dx.$$

В численных расчетах мы используем параметризацию  $\Pi(t)$ , предложенную в работе [17].

В пределе малых углов рассеяния мы можем представить (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{QED}^{(1)}}{dc} &= \frac{d\sigma_{QED}^B}{dc} (1 - \Pi(t))^{-2} (1 + \delta), \\ \delta &= 2 \frac{\alpha}{\pi} \left[ 2(1 - L) \ln \frac{1}{\Delta} + \frac{3}{2} L - 2 \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^2 \Delta_\theta + \frac{\alpha}{\pi} \theta^2 \ln \Delta, \\ \Delta_\theta &= \frac{3}{16} l^2 + \frac{7}{12} l - \frac{19}{18} + \frac{1}{4} (\delta_t - \delta_s), \\ \Delta &= \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}, \quad l = \ln \frac{Q^2}{s} \simeq \ln \frac{\theta^2}{4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Это представление дает нам возможность явно проверить утверждение о малости вклада в РП слагаемых относительного порядка  $\theta^2$ . Принимая во внимание то, что большие по величине слагаемые, пропорциональные  $\ln \Delta$ , сокращаются в сумме при добавлении вклада за счет излучения жесткого фотона, можно убедиться в малости вклада в коэффициент  $c_1$ , следующего из рассмотренных однопетлевых поправок. Далее мы будем систематически отбрасывать вклады в РП аннигиляционных диаграмм, а также диаграмм с обменом несколькими фотонами в  $t$ -канале. Второе следует из обобщенного эйконального представления, которое применимо в случае малых углов рассеяния. В частности, в случае упругого рассеяния мы имеем [10]:

$$A(s, t) = A_0(s, t) F_1^2(t) (1 - \Pi(t))^{-1} e^{i\varphi(t)} \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{\alpha Q^2}{\pi s} \right) \right], \quad s \gg Q^2 \gg m^2, \quad (12)$$

где  $A_0(s, t)$  — борновская амплитуда,  $F_1(t)$  — дираковский формфактор электрона и  $\varphi(t) = -\alpha \ln(Q^2/\lambda^2)$  представляет собой известную кулоновскую фазу,  $\lambda$  здесь и далее — вспомогательный параметр, введенный как масса фотона. Эйкональное представление нарушается на трехпетлевом

уровне, однако соответствующий вклад в сечение рассматриваемого процесса достаточно мал ( $\sim \alpha^5$ ) и может быть отброшен; т.е. мы можем считать обобщенное эйкональное представление верным в рамках заданной точности\*.

Введем теперь безразмерную величину  $\Sigma = (Q_1^2 \sigma_{\text{exp}}) / (4\pi\alpha^2)$ , где  $Q_1^2 = \varepsilon^2 \theta_1^2$ , а  $\sigma_{\text{exp}}$  обозначает экспериментально наблюдаемое сечение:

$$\Sigma = \frac{Q_1^2}{4\pi\alpha^2} \int dx_1 \int dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \int d^2 \mathbf{q}_1^\perp \Theta_1^c \int d^2 \mathbf{q}_2^\perp \Theta_2^c \times \\ \times \frac{d\sigma\{e^+ + e^- \rightarrow e^+(\mathbf{q}_2^\perp, x_2) + e^-(\mathbf{q}_1^\perp, x_1) + X\}}{dx_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2 \mathbf{q}_2^\perp},$$

где  $x_{1,2}$ ,  $\mathbf{q}_{1,2}^\perp$  обозначают доли энергии и поперечные по отношению к оси начальных пучков составляющие импульсов конечных электрона (индекс 1) и позитрона (индекс 2). Величина  $s x_c$  задает экспериментальное обрешение по квадрату инвариантной массы регистрируемых частиц. Обобщенные функции  $\Theta_{1,2}^c$  задают пределы интегрирования по углам (4):

$$\Theta_1^c = \Theta\left(\theta_3 - \frac{|\mathbf{q}_1^\perp|}{x_1 \varepsilon}\right) \Theta\left(\frac{|\mathbf{q}_1^\perp|}{x_1 \varepsilon} - \theta_1\right), \quad \Theta_2^c = \Theta\left(\theta_4 - \frac{|\mathbf{q}_2^\perp|}{x_2 \varepsilon}\right) \Theta\left(\frac{|\mathbf{q}_2^\perp|}{x_2 \varepsilon} - \theta_2\right).$$

В случае симметричной по углам вылета позитрона и электрона постановки опыта можно ввести параметр  $\rho$ :

$$\rho = \frac{\theta_3}{\theta_1} = \frac{\theta_4}{\theta_2} > 1.$$

Представим  $\Sigma$  как сумму рассматриваемых вкладов:

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma^\gamma + \Sigma^{2\gamma} + \Sigma^{e^+ e^-} + \Sigma^{3\gamma} + \Sigma^{e^+ e^- \gamma}, \quad (13)$$

\*В недавней работе [18] авторы обнаружили нарушение обобщенного эйконального представления на двухплетевом уровне. Мы не согласны с таким утверждением, так как полученный в [18] результат ошибочен в инфракрасном пределе.

где  $\Sigma_0$  обозначает модифицированное борновское сечение,  $\Sigma^\gamma$  дает вклад излучения одного фотона (реального или виртуального), и так далее. Мы модифицировали первый член ряда теории возмущений, явно введя в него учет поляризации вакуума виртуального фотона в  $t$ -канале:

$$\Sigma_0 = \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta^2}{\theta^4} (1 - \Pi(t))^{-2} + \Sigma_W + \Sigma_\theta, \quad (14)$$

где  $\Sigma_W$  — поправка за счет электрослабых взаимодействий:

$$\Sigma_W = \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta^2}{\theta^4} \delta_{\text{weak}}, \quad (15)$$

и слагаемое  $\Sigma_\theta$  отражает учет следующих членов разложения по степеням  $\theta^2$  точного выражения для сечения в борновском приближении:

$$\Sigma_\theta = \theta_1^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left( -\frac{1}{2} + z \theta_1^2 \frac{9}{40} \right). \quad (16)$$

Ниже мы рассмотрим остальные вклады в  $\Sigma$ .

Рассмотрим теперь вклад за счет излучения одного жесткого фотона. Запишем дифференциальное сечение процесса однократного тормозного излучения при баба-рассеянии через доли энергии  $x_{1,2}$  и поперечные составляющие импульсов конечных частиц в виде [9] (см. приложение 1):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_B^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma}}{dx_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2 \mathbf{q}_2^\perp} &= \frac{2\alpha^3}{\pi^2} \left\{ \frac{R(x_1; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{q}_2^\perp) \delta(1-x_2)}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2 (1 - \Pi(-\mathbf{q}_2^\perp)^2)} + \right. \\ &\left. + \frac{R(x_2; \mathbf{q}_2^\perp, \mathbf{q}_1^\perp) \delta(1-x_1)}{(\mathbf{q}_1^\perp)^2 (1 - \Pi(-\mathbf{q}_1^\perp)^2)} \right\} (1 + \mathcal{O}(\theta^2)), \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R(x; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{q}_2^\perp) &= \frac{1+x^2}{1-x} \left[ \frac{\mathbf{q}_2^\perp{}^2 (1-x)^2}{d_1 d_2} - \frac{2m^2 (1-x)^2 x}{1+x^2} \frac{(d_1 - d_2)^2}{d_1^2 d_2^2} \right], \\ d_1 &= m^2 (1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}_2^\perp)^2, \quad d_2 = m^2 (1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - x \mathbf{q}_2^\perp)^2. \quad (18) \end{aligned}$$

Выше мы опять использовали поправку за счет поляризации вакуума в пропагаторе виртуального фотона в  $t$ -канале. Выполняя тривиальное интегрирование по азимутальному углу в (17), мы получаем вклад за счет излучения одного жесткого фотона  $\Sigma^H$  в виде

$$\Sigma^H = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} F(x, D_1, D_3; D_2, D_4), \quad (19)$$

где

$$F = \int_{D_1}^{D_3} dz_1 \int_{D_2}^{D_4} \frac{dz_2}{z_2} (1 - \Pi(-z_2 Q_1^2))^{-2} \left\{ \frac{1-x}{z_1 - xz_2} (a_1^{-1/2} - xa_2^{-1/2}) - \right. \\ \left. - \frac{4x\sigma^2}{1+x^2} [a_1^{-3/2} + x^2 a_2^{-3/2}] \right\},$$

$$a_1 = (z_1 - z_2)^2 + 4z_2 \sigma^2, \quad a_2 = (z_1 - x^2 z_2)^2 + 4x^2 z_2 \sigma^2, \quad \sigma^2 = \frac{m^2}{Q_1^2} (1-x)^2.$$

Пределы интегрирования в случае симметричных детекторов равны

$$D_1 = x^2, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = x^2 \rho^2, \quad D_4 = \rho^2. \quad (20)$$

Перепишем рассматриваемый вклад в окончательном виде (детали приведены в приложении 1):

$$\Sigma^H = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-z Q_1^2))^{-2} \times \\ \times \{ [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)](L - 1) + k(x, z) \}, \\ k(x, z) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)] + L_1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)L_2 + \\ + \Theta(z - x^2 \rho^2)L_3, \quad (21)$$



где  $L = \ln(zQ_1^2/m^2)$  и

$$L_1 = \ln \left| \frac{x^2(z-1)(\rho^2-z)}{(x-z)(x\rho^2-z)} \right|, \quad L_2 = \ln \left| \frac{(z-x^2)(x^2\rho^2-z)}{x^2(x-z)(x\rho^2-z)} \right|,$$

$$L_3 = \ln \left| \frac{(z-x^2)(x\rho^2-z)}{(x-z)(x^2\rho^2-z)} \right|. \quad (22)$$

Из выражения (21) видно, что  $\Sigma^H$  содержит вспомогательный параметр  $\Delta$ . Этот параметр сокращается, как это и должно быть, в сумме  $\Sigma^\gamma = \Sigma^H + \Sigma^{V+S}$ , где  $\Sigma^{V+S}$  — вклад мягких и виртуальных фотонов, этот вклад получается из (11). Для суммы имеем

$$\Sigma^\gamma = \frac{\alpha}{\pi} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left\{ (L-1) P(x) \times \right.$$

$$\left. \times [1 + \Theta(x^2\rho^2-z)] + \frac{1+x^2}{1-x} k(x, z) - \delta(1-x) \right\}, \quad (23)$$

где

$$P(x) = \left( \frac{1+x^2}{1-x} \right)_+ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1+x^2}{1-x} \Theta(1-x-\Delta) + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{3}{2} + 2\ln \Delta \right) \delta(1-x) \right\} \quad (24)$$

является известным несинглетным ядром уравнений эволюции.

#### 4. ИЗЛУЧЕНИЕ ДВУХ ФОТОНОВ В ПРОЦЕССЕ БАБА-РАСSEЯНИЯ

Рассмотрим поправки за счет излучения фотонов, как реальных, так и виртуальных. Проанализируем сначала виртуальные двухпетлевые поправки  $d\sigma_{VV}^{(2)}$  к дифференциальному сечению упругого рассеяния. Используя представление (12) и петлевое разложение дираковского формфактора электрона

$$F_1 = 1 + \frac{\alpha}{\pi} F_1^{(1)} + \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 F_1^{(2)}, \quad (25)$$

мы получаем

$$\frac{d\sigma_{VV}^{(2)}}{dc} = \frac{d\sigma_0}{dc} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} [6(F_1^{(1)})^2 + 4F_1^{(2)}]. \quad (26)$$

Однопетлевой вклад в формфактор хорошо известен:

$$F_1^{(1)} = (L-1) \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{4} L - \frac{1}{4} L^2 - 1 + \frac{1}{2} \zeta_2, \\ \zeta_2 = \sum_1^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (27)$$

Двухпетлевой вклад может быть найден в работе [19]. Нам будет удобно представить его в следующем виде:

$$F_1^{(2)} = F_1^{\mathcal{Y}} + F_1^{e^+e^-}, \quad (28)$$

где слагаемое  $F_1^{e^+e^-}$  связано с поляризацией вакуума  $e^+e^-$ -парами:

$$F_1^{e^+e^-} = -\frac{1}{36} L^3 + \frac{19}{72} L^2 - \left( \frac{265}{216} + \frac{1}{6} \zeta_2 \right) L + \mathcal{O}(1), \quad (29)$$

$$F_1^{\mathcal{Y}} = \frac{1}{32} L^4 - \frac{3}{16} L^3 + \left( \frac{17}{32} - \frac{1}{8} \zeta_2 \right) L^2 + \left( -\frac{21}{32} - \frac{3}{8} \zeta_2 + \frac{3}{2} \zeta_3 \right) L + \\ + \frac{1}{2} (L-1)^2 \ln^2 \frac{m}{\lambda} + (L-1) \left[ -\frac{1}{4} L^2 + \frac{3}{4} L - 1 + \frac{1}{2} \zeta_2 \right] \ln \frac{\lambda}{m} + \mathcal{O}(1),$$

$$\zeta_3 = \sum_1^{\infty} n^{-3} \approx 1,2020569. \quad (30)$$

Вспомогательный параметр  $\lambda$  (масса фотона), входящий в приведенные выражения, сократится в сумме с вкладом за счет излучения мягких фотонов:

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{dc} = \frac{d\sigma_{VV}^{(2)}}{dc} + \frac{d\sigma_{SS}^{(2)}}{dc} + \frac{d\sigma_{SV}^{(2)}}{dc}. \quad (31)$$

Дифференциальное сечение  $d\sigma_{SS}^{(2)}/dc$  отвечает излучению двух мягких фотонов, причем энергия, уносимая каждым из них, не превышает  $\Delta\epsilon$  ( $\Delta \ll 1$ ):

$$d\sigma_{SS}^{(2)} = d\sigma_0 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} 8 \left[ (L - 1) \ln \frac{m\Delta}{\lambda} + \frac{1}{4} L^2 - \frac{1}{2} \zeta_2 \right]^2. \quad (32)$$

Вклад же излучения одного мягкого фотона с однопетлевой виртуальной поправкой равен

$$d\sigma_{SV}^{(2)} = d\sigma_0 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} 16F_1^{(1)} \left[ (L - 1) \ln \frac{m\Delta}{\lambda} + \frac{1}{4} L^2 - \frac{1}{2} \zeta_2 \right]. \quad (33)$$

Вклад рассмотренной суммы, за исключением слагаемых, входящих в  $F_1^{e^+e^-}$ , содержит степени большого логарифма  $L$  не выше второй. Он имеет вид

$$\Sigma_{S+V}^{\gamma\gamma} = \Sigma_{VV} + \Sigma_{VS} + \Sigma_{SS} = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} R_{S+V}^{\gamma\gamma}. \quad (34)$$

Представим для удобства величину  $R_{S+V}^{\gamma\gamma}$  в виде суммы:

$$\begin{aligned} R_{S+V}^{\gamma\gamma} &= r_{S+V}^{\gamma\gamma} + r_{S+V\gamma\gamma} + r_{S+V\gamma}^{\gamma}, \\ r_{S+V}^{\gamma\gamma} &= r_{S+V\gamma\gamma} = L^2 \left( 2\ln^2 \Delta + 3\ln \Delta + \frac{9}{8} \right) + \\ &+ L \left( -4\ln^2 \Delta - 7\ln \Delta + 3\zeta_3 - \frac{3}{2} \zeta_2 - \frac{45}{16} \right), \\ r_{S+V\gamma}^{\gamma} &= 4 \left[ (L - 1) \ln \Delta + \frac{3}{4} L - 1 \right]^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Вклад формфактора  $F_1^{e^+e^-}$  будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим теперь поправки к излучению одного жесткого фотона за счет излучения мягкого или виртуального фотона. Здесь мы выделим два случая: в первом излучение обоих фотонов происходит из одной и той же фермионной линии, а во втором — из разных. Верхние индексы обозначают излучение из электронной линии, а нижние — из позитронной:

$$d\sigma \Big|_{H, (S+V)} = d\sigma^{H(S+V)} + d\sigma_{H(S+V)} + d\sigma_{(S+V)}^H + d\sigma_H^{(S+V)}. \quad (36)$$

В случае излучения разными фермионами получаем

$$\Sigma_{(S+V)}^H + \Sigma_H^{(S+V)} = 2\Sigma^H \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) \left[ (L-1) \ln \Delta + \frac{3}{4} L - 1 \right], \quad (37)$$

где  $\Sigma^H$  задается выражением (21). Более сложный результат получается при вычислении РП к излучению жесткого фотона из той же фермионной линии. В этом случае сечение может быть получено с помощью комптоновского тензора с *тяжелым фотоном* [20], описывающего процесс

$$\gamma^*(q) + e^-(p_1) \rightarrow e^-(q_1) + \gamma(k) + (\gamma_{\text{soft}}). \quad (38)$$

В пределе малых углов излучения жесткого фотона мы имеем

$$d\sigma^{H(S+V)} = \frac{\alpha^4 dx d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{4x(1-x)(\mathbf{q}_2^\perp)^4 \pi^3} [(B_{11}(s_1, t_1) + x^2 B_{11}(t_1, s_1)) \eta + T],$$

$$T = T_{11}(s_1, t_1) + x^2 T_{11}(t_1, s_1) + x(T_{12}(s_1, t_1) + T_{12}(t_1, s_1)),$$

$$\eta = 2 \left( L - \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{-u_1} - 1 \right) (2 \ln \Delta - \ln x) + 3L - \ln^2 x - \frac{9}{2}, \quad (39)$$

где  $\Delta = \Delta \epsilon / \epsilon \ll 1$  ( $\Delta \epsilon$  — максимальная энергия мягкого фотона);

$$B_{11}(s_1, t_1) = (-4(\mathbf{q}_2^\perp)^2) / (s_1 t_1) - 8m^2 / s_1^2 \quad (40)$$

есть нужная нам борновская компонента комптоновского тензора; инварианты определены следующим образом:

$$s_1 = 2q_1 k, \quad t_1 = -2p_1 k, \quad u_1 = (p_1 - q_1)^2, \quad s_1 + t_1 + u_1 = q^2. \quad (41)$$

Конечный результат (см. приложение 2) имеет вид

$$\Sigma^{H(S+V)} = \Sigma_{H(S+V)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_x^{1-\Delta} \frac{dx(1+x^2)}{1-x} L \times$$

$$\times \left\{ \left( 2 \ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times [(L-1)(1+\Theta) + k(x, z)] + \frac{1}{2} \ln^2 x + \\
 & + (1+\Theta)[-2 + \ln x - 2 \ln \Delta] + \\
 & + (1-\Theta) \left[ \frac{1}{2} L \ln x + 2 \ln \Delta \ln x - \ln x \ln(1-x) - \right. \\
 & \left. - \ln^2 x - \text{Li}_2(1-x) - \frac{x(1-x) + 4x \ln x}{2(1+x^2)} \right] - \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \Bigg\}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

где  $k(x, z)$  дано в (21),  $\Theta = \Theta(x^2 \rho^2 - z)$ .

Рассмотрим теперь двойное тормозное излучение жестких фотонов в процессе баба-рассеяния на малые углы. Опять мы выделяем два случая: когда два фотона излучаются из разных фермионных линий, и когда они излучаются одним из фермионов. Дифференциальное сечение в первом случае может быть получено с помощью факторизационного свойства сечения в представлении импакт-параметров. Оно принимает вид [9]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow (e^+\gamma)(e^-\gamma)}}{dx_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2 \mathbf{q}_2^\perp} &= \frac{\alpha^4}{\pi^3} \int \frac{d^2 \mathbf{k}^\perp}{\pi(\mathbf{k}^\perp)^4} (1 - \Pi((- \mathbf{k}^\perp)^2))^{-2} \times \\
 &\times R(x_1; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{k}^\perp) R(x_2; \mathbf{q}_2^\perp, -\mathbf{k}^\perp), \quad (43)
 \end{aligned}$$

где  $R(x; \mathbf{q}^\perp, \mathbf{k}^\perp)$  дано в (18). Вычисление соответствующего вклада  $\Sigma_H^H$  в  $\Sigma$  аналогично вычислениям в случае однократного тормозного излучения жесткого фотона. Получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_H^H &= \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty dz z^{-2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx_1 \int_{\frac{x_c}{x_1}}^{1-\Delta} dx_2 \times \\
 &\times \frac{1+x_1^2}{1-x_1} \frac{1+x_2^2}{1-x_2} \Phi(x_1, z) \Phi(x_2, z), \quad (44)
 \end{aligned}$$

где (см. (22)):

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, z) &= (L-1)[\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x^2) \Theta(\rho^2 x^2 - z)] + \\
 &+ L_3[-\Theta(x^2 - z) + \Theta(z-x^2 \rho^2)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( L_2 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(z-x^2) \Theta(x^2\rho^2-z) + \\
& + \left( L_1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(z-1) \Theta(\rho^2-z) + \\
& + (\Theta(1-z) - \Theta(z-\rho^2)) \ln \left| \frac{(z-x)(\rho^2-z)}{(x\rho^2-z)(z-1)} \right|.
\end{aligned}$$

При рассмотрении двойного тормозного излучения в одну сторону (из одной и той же лептонной линии) мы будем пользоваться методом, развитым Н.П.Меренковым [21,22]. Мы будем различать *коллинеарную* и *полуколлинеарную* кинематики излучения фотонов. В первом случае все излученные фотоны движутся внутри узкого конуса вокруг направления движения одной из заряженных частиц (начальной или конечной). Углы между импульсами фотонов и одним из импульсов лептонов не превышают некоторого вспомогательного параметра  $\theta_0$ :

$$\theta_i \leq \theta_0 \ll 1. \quad (45)$$

В полуколлинеарной кинематической области фазового пространства только один из рожденных фотонов движется внутри такого конуса (с тем же углом  $\theta_0$ ), а второй — вне конусов (всего имеется четыре конуса: два вокруг импульсов начальных частиц и два вокруг импульсов конечных частиц). При полностью инклюзивном определении сечения рассеяния введенное разделение не имеет физического смысла, и в конечном результате параметр  $\theta_0$  сокращается. Возможны, однако, такие экспериментальные условия, когда  $\theta_0$  будет иметь наглядный физический смысл. Например, в калориметрической постановке опыта  $\theta_0$  может рассматриваться как минимальный угол между фотоном и заряженной частицей, при котором они детектируются раздельно (при меньших углах две частицы создают в калориметре один кластер, что приводит к их регистрации как одной частицы с суммарной энергией).

При вычислениях мы рассматривали для определенности только излучение из электронной линии — вклад излучения позитрона тождествен. Сумма вкладов обеих кинематик (некоторые детали вычислений приведены в приложении 3) имеет вид

$$\Sigma^{HH} = \Sigma_{HH} = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} dz z^{-2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \times$$

$$\times \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-x-\Delta} dx_1 \frac{I^{HH}L}{x_1(1-x-x_1)(1-x_1)^2},$$

$$I^{HH} = A \Theta(x^2 \rho^2 - z) + B + C \Theta((1-x_1)^2 \rho^2 - z), \quad (46)$$

где

$$A = \gamma\beta \left( \frac{L}{2} + \ln \frac{(\rho^2 x^2 - z)^2}{x^2 (\rho^2 x (1-x_1) - z)^2} \right) +$$

$$+ (x^2 + (1-x_1)^4) \ln \frac{(1-x_1)^2 (1-x-x_1)}{xx_1} + \gamma_A,$$

$$B = \gamma\beta \left( \frac{L}{2} + \ln \left| \frac{x^2(z-1)(\rho^2-z)(z-x^2)(z-(1-x_1)^2)(\rho^2 x(1-x_1)-z)^2}{(\rho^2 x^2 - z)(z-(1-x_1))^2(\rho^2(1-x_1)^2 - z)^2(z-x(1-x_1))^2} \right| \right) +$$

$$+ (x^2 + (1-x_1)^4) \ln \frac{(1-x_1)^2 x_1}{x(1-x-x_1)} + \delta_B,$$

$$C = \gamma\beta \left( L + 2 \ln \left| \frac{x(\rho^2(1-x_1)^2 - z)^2}{(1-x_1)^2(\rho^2 x(1-x_1) - z)(\rho^2(1-x_1) - z)} \right| \right) -$$

$$- 2(1-x_1)\beta - 2x(1-x_1)\gamma,$$

$$\gamma = 1 + (1-x_1)^2, \quad \beta = x^2 + (1-x_1)^2,$$

$$\gamma_A = xx_1(1-x-x_1) - x_1^2(1-x-x_1)^2 - 2(1-x_1)\beta,$$

$$\delta_B = xx_1(1-x-x_1) - x_1^2(1-x-x_1)^2 - 2x(1-x_1)\gamma.$$

Можно убедиться, что комбинации

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} r_{S+V}^{\gamma} + \Sigma^{H(S+V)} + \Sigma^{HH},$$

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} r_{S+V}^{\gamma} + \Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^{S+V} + \Sigma_H^H \quad (47)$$

не зависят от  $\Delta$  при  $\Delta \rightarrow 0$  (см. приложение 4).

Полное выражение для  $\Sigma^{2\gamma}$ , которое описывает вклады в (2) за счет излучения двух фотонов, как реальных, так и виртуальных, определяется суммой

$$\begin{aligned}\Sigma^{2\gamma} &= \Sigma_{S+V}^{\gamma\gamma} + 2\Sigma^{H(V+S)} + 2\Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^H + 2\Sigma^{HH} = \\ &= \Sigma^{\gamma\gamma} + \Sigma_V^{\gamma} + \Phi^{\gamma\gamma} + \Phi_V^{\gamma},\end{aligned}\quad (48)$$

которая не зависит от вспомогательного параметра  $\Delta$ .

Вклады в ведущем логарифмическом приближении (см. приложение 5) имеют вид

$$\begin{aligned}\Sigma^{\gamma\gamma} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} L^2 dz z^{-2} (1 - \Pi(-Q_1^2 z))^{-2} \int_{x_c}^1 dx \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} P^{(2)}(x) [\Theta(x^2 \rho^2 - z) + 1] + \int_x^1 \frac{dt}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) \Theta(t^2 \rho^2 - z) \right\},\end{aligned}\quad (49)$$

$$\begin{aligned}P^{(2)}(x) &= \int_x^1 \frac{dt}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \left[ \left( 2\ln \Delta + \frac{3}{2} \right)^2 - 4\zeta_2 \right] \delta(1-x) + \right. \\ &+ 2 \left[ \frac{1+x^2}{1-x} \left( 2\ln(1-x) - \ln x + \frac{3}{2} \right) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} (1+x) \ln x - 1 + x \right] \Theta(1-x-\Delta) \right\},\end{aligned}\quad (50)$$

$$\begin{aligned}\Sigma_V^{\gamma} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^{\infty} L^2 dz z^{-2} (1 - \Pi(-Q_1^2 z))^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{\frac{x_c}{x_1}}^1 dx_2 P(x_1) P(x_2) \times \\ &\times [\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x_1^2) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z)] \times \\ &\times [\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x_2^2) \Theta(x_2^2 \rho^2 - z)].\end{aligned}\quad (51)$$

Видно, что ведущие вклады в  $\Sigma^{2\gamma}$  представляются через ядра уравнений эволюции структурных функций.



Функции  $\varphi^{\gamma\gamma}$  и  $\varphi_{\gamma}^{\gamma}$  в (48) собирают нелидирующие вклады, которые не могут быть получены методом структурных функций [11—14]. Их явный вид может быть установлен из сравнения результатов в логарифмическом и ведущем логарифмическом приближениях, приведенных выше.

## 5. РОЖДЕНИЕ $e^+e^-$ -ПАР В ПРОЦЕССЕ БАБА-РАССЕЯНИЯ

Обратимся теперь к поправкам порядка  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , связанным с рождением  $e^+e^-$ -пар в процессе баба-рассеяния на малые углы. Мы должны учесть вклады виртуальных, мягких и жестких реальных пар. Причем в случае рождения жестких пар нужно рассматривать как коллинеарную, так и полуколлинеарную кинематические ситуации. Будем считать, что в процессе с рождением пары

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2) + e^-(p_-) + e^+(p_+)$$

регистрируются электрон и позитрон с импульсами  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Тождественность двух пар частиц в конечном состоянии принимается во внимание путем рассмотрения соответствующих диаграмм Фейнмана.

Область коллинеарной кинематики мы определяем как ту область фазового пространства конечных частиц, в которой электрон и позитрон из недетектируемой пары движутся внутри узкого конуса вокруг направления импульса одной из заряженных начальных или детектируемых конечных частиц:

$$\widehat{p_+ p_-} \sim \widehat{p_- p_i} \sim \widehat{p_+ p_i} < \theta_0 \ll 1, \quad \varepsilon \theta_0 / m \gg 1, \quad p_i = p_1, p_2, q_1, q_2. \quad (52)$$

Вклад коллинеарной кинематики содержит члены порядка  $(\alpha L / \pi)^2$  и  $(\alpha / \pi)^2 L$ . В полуколлинеарной кинематической области выполняется только одно из условий (52) на углы:

$$\widehat{p_+ p_-} < \theta_0, \quad \widehat{p_{\pm} p_i} > \theta_0; \quad \text{или} \quad \widehat{p_- p_i} < \theta_0, \quad \widehat{p_+ p_i} > \theta_0;$$

или

$$\widehat{p_- p_i} > \theta_0, \quad \widehat{p_+ p_i} < \theta_0.$$

Вклад полуколлинеарной кинематики содержит слагаемые вида

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L \ln \frac{\theta_0}{\theta}, \quad \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L,$$

где  $\theta = \widehat{p_- q_1}$  — угол рассеяния электрона. Вспомогательный параметр  $\theta_0$  сокращается в сумме вкладов коллинеарной и полуколлинеарной кинематик. Как и выше, мы систематически опускаем слагаемые, которые не содержат большой логарифм  $L$ .

Мы ограничились рассмотрением случая рождения электрон-позитронной пары. Эффекты образования других пар ( $\mu^+\mu^-$ ,  $\pi^+\pi^-$  и др.) по крайней мере на порядок (см. [9]) меньше рассматриваемых, и их можно отбрасывать, принимая во внимание представленные ниже численные результаты.

Процессу образования пар при столкновениях лептонов высоких энергий уделялось много внимания (см. [9] и ссылки, там приведенные). В частности, было установлено, что полное сечение содержит вклады, пропорциональные кубу большого логарифма, происходящие от двухфотонного механизма образования пары с малой инвариантной массой. Принимая во внимание тот факт, что в этом случае рассеянные электрон и позитрон движутся под очень маленькими углами ( $\sim m/\epsilon$ ) по отношению к осям пучков, можно убедиться, что такие события не могут быть зарегистрированы на LEP I.

Учитывая все возможные механизмы образования пар (синглетный и несинглетный) с учетом условий эксперимента на LEP I, а также тождественность частиц в конечном состоянии, можно построить 36 диаграмм Фейнмана, описывающих рождение реальных  $e^+e^-$ -пар на древесном уровне. В случае баба-рассеяния на малые углы только часть из этих диаграмм, а именно диаграммы рассеивательного типа, дают вклад в поправку к сечению. Кроме того, прямые вычисления показывают сокращение вкладов интерференции амплитуд, описывающих излучение пары вдоль направления электронного пучка, с амплитудами, описывающими излучение пары вдоль позитронного пучка. Этот факт является проявлением уже упоминавшегося сокращения вкладов, происходящих от «верх-низ»-интерференции.

В сумме вкладов за счет излучения виртуальных пар (вставки поляризации вакуума в пропагатор виртуального фотона) и излучения реальных мягких пар сокращаются кубы большого логарифма, но содержится вспомогательный параметр  $\Delta = \delta\epsilon/\epsilon$  ( $m_e \ll \delta\epsilon \ll \epsilon$ , где  $\delta\epsilon$  является суммарной энергией компонент мягкой пары). Зависимость от  $\Delta$  исчезает в полной сумме после добавления вклада жестких реальных пар. До суммирования необходимо проинтегрировать вклад жестких пар по долям энергии компонент пары и по долям энергии регистрируемых электрона и позитрона:

$$\Delta = \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} < x_1 + x_2, \quad x_c < x = 1 - x_1 - x_2 < 1 - \Delta,$$

$$x_1 = \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon}, \quad x = \frac{q_1^0}{\varepsilon},$$

где  $\varepsilon_{\pm}$  — энергии позитрона и электрона из родившейся пары.

**5.1. Коллинеарные кинематические области.** Всего имеется четыре области коллинеарной кинематики: пара может двигаться вдоль импульсов начального электрона (позитрона) или вдоль импульса конечного регистрируемого электрона (позитрона). Для определенности мы рассматриваем случай движения пары только вдоль направлений начального и конечного электрона. Учет движения вдоль позитронных направлений в случае симметричных детекторов заключается в умножении получаемой величины на два.

В случае излучения пары вдоль направления начального электрона удобно разложить импульсы частиц на продольные и поперечные составляющие:

$$p_+ = x_1 p_1 + \mathbf{p}_+^{\perp}, \quad p_- = x_2 p_1 + \mathbf{p}_-^{\perp}, \quad q_1 = x p_1 + \mathbf{q}_1^{\perp},$$

$$x = 1 - x_1 - x_2, \quad q_2 \approx p_2, \quad \mathbf{p}_+^{\perp} + \mathbf{p}_-^{\perp} + \mathbf{q}_1^{\perp} = 0,$$

где  $\mathbf{p}_i^{\perp}$  — поперечные по отношению к направлению начального электронного пучка двумерные компоненты конечных частиц. Введем безразмерные величины, связанные с кинематическими инвариантами:

$$z_i = \left( \frac{\varepsilon \theta_i}{m} \right)^2, \quad z_1 = \left( \frac{\mathbf{p}_+^{\perp}}{m} \right)^2, \quad z_2 = \left( \frac{\mathbf{p}_-^{\perp}}{m} \right)^2, \quad 0 < z_i < \left( \frac{\varepsilon \theta_0}{m} \right)^2 \gg 1,$$

$$A = \frac{(p_+ + p_-)^2}{m^2} = (x_1 x_2)^{-1} [(1-x)^2 + x_1^2 x_2^2 (z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2} \cos \varphi)],$$

$$A_1 = \frac{2p_1 p_-}{m^2} = x_2^{-1} [1 + x_2^2 + x_2^2 z_2], \quad A_2 = \frac{2p_1 p_+}{m^2} = x_1^{-1} [1 + x_1^2 + x_1^2 z_1],$$

$$C = \frac{(p_1 - p_-)^2}{m^2} = 2 - A_1, \quad D = \frac{(p_1 - q_1)^2}{m^2} - 1 = A - A_1 - A_2,$$

где  $\varphi$  — азимутальный угол между плоскостями  $(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_+^{\perp})$  и  $(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_-^{\perp})$ . Удерживая в просуммированном по спиновым состояниям матричном элементе только те слагаемые, которые дают ненулевые вклады при  $\theta_0 \rightarrow 0$ , мы обнаруживаем, что важны только 8 из 36 фейнмановских диаграмм.

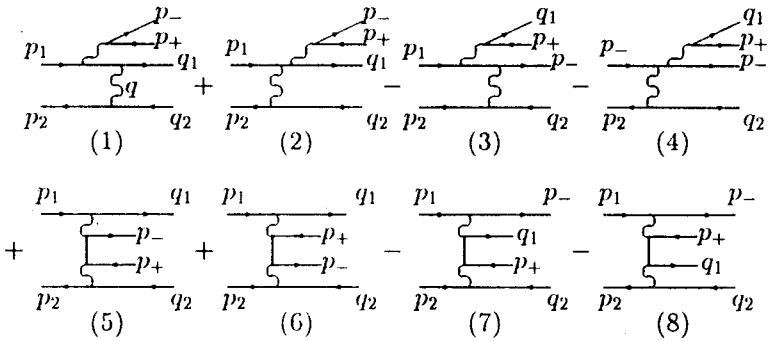


Рис.1. Диаграммы Фейнмана, дающие логарифмически усиленные вклады, когда пара движется вдоль направлений конечного или начального электрона

Они представлены на рис.1, знаки перед диаграммами учитывают статистику Ферми—Дирака при перестановке тождественных фермионов.

Результат для рассматриваемой коллинеарной кинематики имеет факторизованную форму, что согласуется с известной факторизационной теоремой [26]:

$$\sum_{\text{spins}} |M|^2|_{p_+, p_- \parallel p_1} = \sum_{\text{spins}} |M_0|^2 2^7 \pi^2 \alpha^2 \frac{I}{m^4},$$

где один из сомножителей соответствует борновскому матричному элементу (без рождения пар):

$$\sum_{\text{spin}} |M_0|^2 = 2^7 \pi^2 \alpha^2 \left( \frac{s^4 + t^4 + u^4}{s^2 t^2} \right),$$

$$s = 2p_1 p_2 x, \quad t = -Q^2 x, \quad u = -s - t,$$

и величина  $I$ , называемая коллинеарным фактором, совпадает с выражением, полученным в работе [22]. В наших кинематических переменных она записывается в виде

$$I = (1 - x_2)^{-2} \left( \frac{A(1 - x_2) + Dx_2}{DC} \right)^2 + (1 - x)^{-2} \left( \frac{C(1 - x) - Dx_2}{AD} \right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2xAD} \left[ \frac{2(1-x_2)^2 - (1-x)^2}{1-x} + \frac{x_1x - x_2}{1-x_2} + 3(x_2 - x) \right] + \\
 & + \frac{1}{2xCD} \left[ \frac{(1-x_2)^2 - 2(1-x)^2}{1-x_2} + \frac{x - x_1x_2}{1-x} + 3(x_2 - x) \right] + \\
 & + \frac{x_2(x^2 + x_2^2)}{2x(1-x_2)(1-x)AC} + \frac{3x}{D^2} + \frac{2C}{AD^2} + \frac{2A}{CD^2} + \frac{2(1-x_2)}{xA^2D} - \\
 & - \frac{4C}{xA^2D^2} - \frac{4A}{D^2C^2} + \frac{1}{DC^2} \left[ \frac{(x_1-x)(1+x_2)}{x(1-x_2)} - 2 \frac{1-x}{x} \right].
 \end{aligned}$$

Преобразуем фазовый объем конечных частиц к виду

$$\begin{aligned}
 d\Gamma = & \frac{d^3\mathbf{q}_1 d^3\mathbf{q}_2}{(2\pi)^6 2q_1^0 2q_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1x + p_2 - q_1 - q_2) \times \\
 & \times m^4 2^{-8} \pi^{-4} x_1 x_2 dx_1 dx_2 dz_1 dz_2 \frac{d\varphi}{2\pi}
 \end{aligned}$$

и проинтегрируем по переменным родившейся пары (детали могут быть найдены в препринте [23]):

$$\begin{aligned}
 \bar{I} = & \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{z_0} dz_1 \int_0^{z_0} dz_2 I = \frac{L_0}{2xx_1x_2} \left\{ D_1 \left( L_0 + 2 \ln \frac{x_1x_2}{x} \right) + \right. \\
 & \left. + D_2 \ln \frac{(1-x_2)(1-x)}{xx_2} + D_3 \right\}, \quad L_0 = \ln \left( \frac{\varepsilon\theta_0}{m} \right)^2, \\
 D_1 = & 2xx_1x_2 \left( \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x_2)^4} \right) - \frac{(1-x_2)^2}{(1-x)^2} - \frac{(1-x)^2}{(1-x_2)^2} + 1 + \\
 & + \frac{(x+x_2)^2}{2(1-x)(1-x_2)} + \frac{3(x_2-x)^2}{2(1-x)(1-x_2)} - \frac{x^2+x_2^2}{(1-x)(1-x_2)} - \\
 & - 2xx_2 \left( \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x_2)^2} \right), \quad D_2 = \frac{2(x^2+x_2^2)}{(1-x)(1-x_2)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 = & \frac{2xx_1x_2}{(1-x_2)^2} \left( -\frac{8}{(1-x_2)^2} + \frac{(1-x)^2}{xx_1x_2} \right) + \frac{2xx_1x_2}{(1-x)^2} \left[ \frac{x_2}{xx_1} + \right. \\
& + \frac{2(x_1-x_2)}{xx_1(1-x)} - \frac{8}{(1-x)^2} + \frac{1}{xx_1x_2} - \frac{4}{x(1-x)} \left. \right] + 6 + 4x \left[ \frac{x_2-x_1}{(1-x)^2} - \right. \\
& - \frac{x_1}{x(1-x)} \left. \right] + \frac{4(xx_2-x_1)}{(1-x_2)^2} - \frac{4(1-x_2)x_1x_2}{(1-x)^3} + \frac{8xx_1x_2^2}{(1-x)^4} - \\
& - \frac{xx_2^2}{(1-x_2)^4} + \frac{x_2}{(1-x_2)^2} \left[ 4(1-x) + \frac{2(x-x_1)(1+x_2)}{1-x_2} \right].
\end{aligned}$$

Выполняя аналогичные действия в случае, когда пара движется в направлении рассеянного электрона, интегрируя получаемую сумму по долям энергии компонент пары, и, наконец, добавляя оставшиеся две коллинеарные области, когда пара движется вдоль начального или конечного позитрона, мы получаем

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\text{coll}} = & \frac{\alpha^4 dx}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \left\{ R_0(x) \left( L + 2 \ln \frac{\eta^2}{z} \right) (1 + \Theta) + \right. \\
& \left. + 4R_0(x) \ln x + 2\Theta f(x) + 2f_1(x) \right\}, \quad (53)
\end{aligned}$$

$$\eta = \frac{\theta_0}{\theta_{\min}}, \quad \Theta \equiv \Theta(x^2 \rho^2 - z),$$

$$R_0(x) = \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} + \frac{(1-x)}{3x} (4 + 7x + 4x^2) + 2(1+x) \ln x,$$

$$\begin{aligned}
f(x) = & -\frac{107}{9} + \frac{136}{9}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3x} - \frac{20}{9(1-x)} + \frac{2}{3} \left[ -4x^2 - 5x + 1 + \right. \\
& \left. + \frac{4}{x(1-x)} \right] \ln(1-x) + \frac{1}{3} \left[ 8x^2 + 5x - 7 - \frac{13}{1-x} \right] \ln x - \\
& - \frac{2}{1-x} \ln^2 x + 4(1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{2(3x^2-1)}{1-x} \text{Li}_2(1-x),
\end{aligned}$$

$$f_1(x) = -x \text{Re} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{116}{9} + \frac{127}{9}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3x} - \frac{20}{9(1-x)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3} \left[ -4x^2 - 5x + 1 + \frac{4}{x(1-x)} \right] \ln(1-x) + \frac{1}{3} \left[ 8x^2 - 10x - 10 + \frac{5}{1-x} \right] \ln x - \\
 & - (1+x) \ln^2 x + 4(1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{2(x^2-3)}{1-x} \text{Li}_2(1-x), \\
 & \text{Li}_2(x) \equiv - \int_0^x \frac{dy}{y} \ln(1-y), \quad Q_1 = \varepsilon \theta_{\min}, \quad L = \ln \frac{z Q_1^2}{m^2}.
 \end{aligned}$$

**5.2. Полуколлинеарные кинематические области.** Мы опять ограничиваемся случаем излучения пары из электронной линии. Существуют три различные полуколлинеарные кинематические области, дающие вклад в пределах заданной точности. Первая область включает события с очень маленькой инвариантной массой родившейся пары:

$$4m^2 \ll (p_+ + p_-)^2 \ll |q^2|,$$

причем обе частицы из этой пары не попадают в рассмотренные выше узкие конусы, задаваемые тем же углом  $\theta_0$ , вокруг импульсов начального и конечного электронов. Мы будем обозначать эту область  $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$ . Только диаграммы (1) и (2) рис.1 дают вклад в этом случае, что связано с малостью знаменателя виртуального фотона, рождающего пару.

Вторая полуколлинеарная область включает события, в которых мала инвариантная масса системы из родившегося позитрона и рассеянного электрона:  $4m^2 \ll (p_+ + q_1)^2 \ll |q^2|$ , причем родившийся позитрон не должен попадать в узкий конус вокруг импульса начального электрона. Мы обозначаем эту область  $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1$  и отмечаем, что только диаграммы (3) и (4) рис.1 дают в нее вклад.

Третья полуколлинеарная область включает события, в которых электрон из рожденной пары движется внутри узкого конуса вдоль импульса начального электрона, а позитрон — нет. Мы обозначаем эту область  $\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1$ . Здесь важны только диаграммы (7) и (8) рис.1.

Дифференциальное сечение процесса с рождением пары запишем в виде

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & \frac{\alpha^4}{8\pi^4 s^2} \frac{|M|^2}{q^4} \frac{dx_1 dx_2 dx}{x_1 x_2 x} d^2 \mathbf{p}_+^\perp d^2 \mathbf{p}_-^\perp d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp \delta(1-x_1-x_2-x) \times \\
 & \times \delta^{(2)}(\mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp), \quad |M|^2 = -L_{\lambda\rho} p_{2\lambda} p_{2\rho}, \quad (54)
 \end{aligned}$$

где  $x_1(x_2)$ ,  $x$  и  $\mathbf{p}_+^\perp(\mathbf{p}_-^\perp)$ ,  $\mathbf{q}_1^\perp$  — доли энергии и поперечные составляющие импульсов рожденного электрона (позитрона) и рассеянного электрона соответственно;  $s = (p_1 + p_2)^2$  и  $q^2 = -Q^2 = (p_2 - q_2)^2 = -\varepsilon^2\theta^2$  — квадрат суммарной энергии в СЦИ и квадрат переданного импульса. Лептонный тензор  $L_{\lambda\rho}$  имеет различный вид в трех полуколлинеарных областях.

Рассмотрим область  $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$ . В этой области мы можем использовать лептонный тензор, полученный в работе [22]. Удерживая только существенные слагаемые, мы записываем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{P^4}{8} L_{\lambda\rho} = & \frac{4P^2q^2}{(1)(2)} [- (p_1p_1)_{\lambda\rho} - (q_1q_1)_{\lambda\rho} + (p_1q_1)_{\lambda\rho}] - 4(p_+p_-)_{\lambda\rho} \left( 1 - \frac{q^2P^2}{(1)(2)} \right) - \\ & - \frac{4}{(1)} [q^2(p_1q_1)_{\lambda\rho} - 2(p_1p_+)(q_1p_-)_{\lambda\rho} - 2(p_1p_-)(q_1p_+)_{\lambda\rho}] - \\ & - \frac{4}{(2)} [P^2(p_1q_1)_{\lambda\rho} - 2(p_+q_1)(p_1p_-)_{\lambda\rho} - 2(p_-q_1)(p_1p_+)_{\lambda\rho}] - \\ & - \frac{32(p_1p_+)(p_1p_-)}{(1)^2} (q_1q_1)_{\lambda\rho} - \frac{32(q_1p_+)(q_1p_-)}{(2)^2} (p_1p_1)_{\lambda\rho} + \\ & + \frac{8(p_1q_1)_{\lambda\rho}}{(1)(2)} [P^2(p_1q_1) - 2(p_1p_+)(p_-q_1) - 2(p_1p_-)(q_1p_+)], \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} P &= p_+ + p_-, \quad (aa)_{\lambda\rho} = a_\lambda a_\rho, \quad (ab)_{\lambda\rho} = a_\lambda b_\rho + a_\rho b_\lambda, \\ q &= p_1 - q_1 - P, \quad (1) = (p_1 - P)^2 - m^2, \quad (2) = (p_1 - q_1)^2 - m^2. \end{aligned}$$

После некоторых алгебраических преобразований выражение для квадрата матричного элемента, входящее в (54), может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^4} |M|^2 = & - \frac{2s^2}{q^4 P^4} \left\{ - \frac{4P^2q^2}{(1)(2)} [(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2] + \right. \\ & \left. + \frac{128}{(1)^2(2)^2} [(q_1p)(p_+p_1) - x(p_1p)(q_1p_+)]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где  $p = p_- - x_2p_+/x_1$ ,  $(\mathbf{q}_2^\perp)^2 = -q^2$ . В этой области мы можем использовать следующие соотношения:



$$(1) = -\frac{1-x}{x_1} 2(p_1 p_+), \quad (2) = \frac{1-x}{x_1} 2(q_1 p_+).$$

Полезно представить все инварианты через переменные Судакова (доли энергий и поперечные составляющие импульсов):

$$q_1^2 = \frac{1}{x_1 x_2} ((\mathbf{p}^\perp)^2 + m^2(1-x)^2), \quad 2(q_1 p_+) = \frac{1}{x x_1} (x \mathbf{p}_+^\perp - x_1 \mathbf{q}_1^\perp)^2,$$

$$2(p_1 p_+) = \frac{1}{x_1} (\mathbf{p}_+^\perp)^2, \quad 2(p_1 p) = \frac{2}{x_1^2} \mathbf{p}_+^\perp \mathbf{p}_+^\perp, \quad 2(q_1 p) = \frac{2}{x_1^2} (\mathbf{p}^\perp [x \mathbf{p}_+^\perp - x_1 \mathbf{q}_1^\perp]),$$

$$\mathbf{p}^\perp = x_1 \mathbf{p}_-^\perp - x_2 \mathbf{p}_+^\perp.$$

Большой логарифм, который мы стремимся выделить, появляется при интегрировании по  $\mathbf{p}^\perp$ . Чтобы провести это интегрирование, мы используем соотношение

$$\delta^{(2)}(\mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp) d^2 \mathbf{p}_+^\perp d^2 \mathbf{p}_-^\perp = \frac{1}{(1-x)^2} d^2 \mathbf{p}^\perp,$$

которое верно в области  $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$ . Интегрируя, мы получаем следующий вклад в сечение баба-рассеяния на малые углы за счет рассматриваемой области:

$$d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-} = \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp)^2} \times \\ \times \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + x \mathbf{q}_2^\perp)^2} \left[ (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 - \frac{4x x_1 x_2}{(1-x)^2} \right],$$

где  $\phi$  является углом между двумерными векторами  $\mathbf{q}_1^\perp$  и  $\mathbf{q}_2^\perp$ .

На этом этапе необходимо использовать ограничения на величины  $\mathbf{q}_1^\perp$  и  $\mathbf{q}_2^\perp$ . Эти ограничения возникают, если мы отбросим часть фазового объема, соответствующую уже рассмотренному случаю коллинеарной кинематики, т.е. мы должны исключить узкие конусы вокруг импульсов начального и конечного электронов.

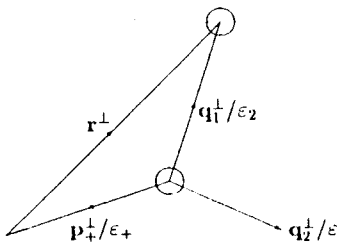


Рис.2. Кинематика события с образованием пары в плоскости, перпендикулярной оси пучков, для полуколлинеарной области  $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$

Кинематика события представлена на рис.2, окружности радиуса  $\theta_0$  вокруг точек, соответствующих направлениям импульсов начального и конечного электронов, ограничивают запрещенные коллинеарные области. Исключение этих областей приводит к следующим ограничениям:

$$\left| \frac{\mathbf{p}_+^\perp}{\epsilon_+} \right| > \theta_0, \quad |\mathbf{r}^\perp| = \left| \frac{\mathbf{p}_+^\perp}{\epsilon_+} - \frac{\mathbf{q}_1^\perp}{\epsilon_2} \right| > \theta_0, \quad (56)$$

где  $\epsilon_+$  и  $\epsilon_2$  — энергии рожденного позитрона и рассеянного электрона соответственно. Чтобы исключить  $\mathbf{p}_+^\perp$ , мы используем закон сохранения перпендикулярных составляющих импульсов, верный в рассматриваемой области:

$$\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \frac{1-x}{x_1} \mathbf{p}_+^\perp = 0.$$

Полезно ввести безразмерные переменные  $z_{1,2} = (\mathbf{q}_{1,2}^\perp)^2 / (\epsilon \theta_{\min})^2$ , где  $\theta_{\min}$  — минимальный угол детектирования рассеянных электрона и позитрона. Условия (56) переписываются в виде

$$\begin{cases} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2(1-x)^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2}}, & |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \eta(1-x), \\ 1 > \cos \varphi > -1, & |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| > \eta(1-x), \quad \eta = \theta_0 / \theta_{\min}, \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2 x^2 (1-x)^2 - (\sqrt{z_1} - x\sqrt{z_2})^2}{2x\sqrt{z_1 z_2}}, & |\sqrt{z_1} - x\sqrt{z_2}| < \eta x(1-x), \\ 1 > \cos \varphi > -1, & |\sqrt{z_1} - x\sqrt{z_2}| > \eta x(1-x). \end{cases} \quad (58)$$

Условия (57) исключают излучение пары в узком конусе вокруг направления начального электрона, а условия (58) — рассеянного электрона. На вспомогательный параметр  $\theta_0$  мы налагаем условие

$$\theta_0 \gg \frac{m}{\varepsilon} \approx 10^{-5},$$

а экспериментальные ограничения имеют порядок  $\theta_{\min} \sim 10^{-2}$ . Это позволяет нам считать  $\eta \ll 1$ . Процедура интегрирования дифференциального сечения с наложенными условиями подробно описана в [23]. Здесь мы приводим вклад в сечение рассматриваемой кинематической области при условии, что детектируются только те рассеянные электроны, доля энергии которых  $x$  превышает заданную величину  $x_c$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-} = & \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \mathcal{L} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \int_0^{1-x} dx_2 \left[ \frac{(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2}{(1-x)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4xx_1x_2}{(1-x)^2} \right] \left\{ (1+\Theta) \ln \frac{z}{\eta^2} + \Theta \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{x^2(x\rho^2 - z)^2} + \right. \\ & \left. + \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2 - z)(z-1)}{(z-x)^2(z-x^2\rho^2)} \right| \right\}, \quad \mathcal{L} = \ln \frac{\varepsilon^2 \theta_{\min}^2}{m^2}, \end{aligned} \quad (59)$$

где  $\Theta \equiv \Theta(x^2\rho^2 - z)$ ,  $z \equiv z_2$ . Вспомогательный параметр  $\Delta$ , входящий в (59), задает минимальную энергию рожденной жесткой пары,  $2m/\varepsilon \ll \Delta \ll 1$ . Отметим, что мы заменили  $L$  на  $\mathcal{L}$ , так как мы не различаем их на однологарифмическом уровне.

Рассмотрим теперь область  $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1$ . Как уже отмечалось, в этой области логарифмически усиленный вклад дают только диаграммы (3) и (4) рис.1. Лептонный тензор для этого случая может быть получен из (55) с помощью замены  $p_- \leftrightarrow q_1$ . Квадрат матричного элемента записывается в виде

$$\begin{aligned} |M|_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1}^2 = & - \frac{4s^2}{q_1'^2 q_2^{\perp 2}} \frac{1}{(1')(2)} \left\{ (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{32}{q_1'^2 q_2^{\perp 2}} \frac{1}{(1')(2)} [(p_1 p_+) (p_- p') - x_2 (p_- p_+) (p_1 p')]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$p' = q_1 - p_+ x/x_1, \quad q_1'^2 = (q_1 + p_+)^2,$$

$$(2) = 2(p_+ p_-)(1-x_2)/x_1, \quad (1') = -2(p_1 p_+)(1-x_2)/x_1.$$

Интегрирование по  $(\mathbf{p}_1^\perp)^2 (\mathbf{p}_-^\perp)^2$  может быть проведено аналогично предыдущему случаю, и вклад в дифференциальное сечение может быть представлен в следующем виде:

$$d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1} = \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp)^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + x \mathbf{q}_2^\perp)^2} \times \\ \times \frac{x^2}{(1-x_2)^2} \left[ (1-x)^2 + (1-x_1)^2 - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^2} \right]. \quad (60)$$

Ограничения на фазовый объем, отражающие исключение коллинеарной области движения родившейся пары внутри узкого конуса вокруг импульса рассеянного электрона, приводят к неравенству

$$\left| \frac{\mathbf{p}_-^\perp}{\varepsilon_-} - \frac{\mathbf{q}_1^\perp}{\varepsilon_2} \right| > \theta_0. \quad (61)$$

Мы исключаем  $\mathbf{p}_-^\perp$  из (61), используя закон сохранения поперечных составляющих импульсов в форме, справедливой в данной кинематической области:  $\mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{q}_1^\perp(1-x_2)/x = 0$ . В терминах безразмерных переменных  $z_1, z_2$  угла  $\varphi$  условие (61) переписывается в виде

$$\begin{cases} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2 x^2 x_2^2 - (\sqrt{z_1} - x \sqrt{z_2})^2}{2x \sqrt{z_1} z_2}, & |\sqrt{z_1} - x \sqrt{z_2}| < \eta x x_2, \\ 1 > \cos \varphi > -1, & |\sqrt{z_1} - x \sqrt{z_2}| > \eta x x_2. \end{cases} \quad (62)$$

Интегрирование дифференциального сечения (61) по области (62) приводит к следующему результату:

$$\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1} = \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \mathcal{L} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \int_0^{1-x} dx_2 \left[ \frac{(1-x)^2 + (1-x_1)^2}{(1-x_2)^2} - \right. \\ \left. - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^4} \right] \left\{ \ln \frac{z}{\eta^2} + \ln \frac{(\rho^2 - z)(z - 1)}{x_2^2 \rho^2} \right\}. \quad (63)$$

Рассмотрим третью полуколлинеарную кинематическую область  $\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1$ , в которой важны диаграммы (7) и (8) рис.1. Лептонный тензор может быть

получен из выражения (55) заменой  $p_1 \leftrightarrow -p_+$ . Квадрат модуля матричного элемента имеет вид

$$|M|_{\mathbf{p}_{\parallel} \mathbf{p}_1}^2 = -\frac{4s^2}{q_2'^2 (\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{1}{(1)(2')} \left\{ (1-x)^2 + (1-x_1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{32}{q_2'^2 (\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{1}{(1)(2')} [x_1(p_1 \tilde{p})(p_1 p_+) + x(p_+ \tilde{p})(q_1 p_1)]^2 \right\},$$

где

$$\tilde{p} = p_- - x_2 p_1, \quad q_2'^2 = (p_1 - p_-)^2, \\ (2') = -2(p_1 q_1)(1-x_2), \quad (1) = -2(p_1 p_+)(1-x_2).$$

Интегрирование по  $(\mathbf{p}_+^\perp)^2$  и  $(\mathbf{p}_-^\perp)^2$  приводит к дифференциальному сечению

$$d\sigma_{\mathbf{p}_{\parallel} \mathbf{p}_1} = \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp)^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \times \\ \times \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp)^2} \left[ \frac{(1-x)^2 + (1-x_2)^2}{(1-x_2)^2} - \frac{4xx_1 x_2}{(1-x_2)^4} \right]. \quad (64)$$

Ограничение, соответствующее исключению коллинеарной кинематической области, в которой рожденная пара движется внутри узкого конуса вокруг импульса начального электрона, имеет вид

$$\frac{|\mathbf{p}_+^\perp|}{\varepsilon_1} > \theta_0, \quad \mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp = 0$$

или

$$\left\{ \begin{aligned} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2 x_1^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1} z_2}, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \eta x_1, \\ 1 > \cos \varphi > -1, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| > \eta x_1. \end{aligned} \right. \quad (65)$$

Интегрирование дифференциального сечения (64) по области (65) приводит к следующему вкладу:

$$\sigma_{p_- \| p_1} = \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \mathcal{L} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \int_0^{1-x} dx_2 \left[ \frac{(1-x)^2 + (1-x_1)^2}{(1-x_2)^2} - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^2} \right] \left\{ \Theta \ln \frac{z}{\eta^2} + \Theta \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{x_1^2 x^4 \rho^4} + \ln \left| \frac{\rho^2(z-x^2)}{z-x^2\rho^2} \right| \right\}. \quad (66)$$

Полный вклад полуколлинеарных кинематических областей определяется суммой выражений (59), (63), и (66):

$$\sigma_{s\text{-coll}} = \sigma_{p_+ \| p_-} + \sigma_{p_+ \| q_1} + \sigma_{p_- \| p_1}. \quad (67)$$

**5.3. Сумма вкладов виртуальных и реальных пар.** Для получения окончательного вклада образования пар необходимо добавить к (67) вклад коллинеарной кинематики (53), а также вклады за счет виртуальных и мягких пар.

Принимая во внимание ведущие и следующие за ведущими слагаемые, складываем вклады (67) и (53), при этом зависимость от параметра  $\eta$  исчезает, в результате получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{hard}} = & \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \left\{ \frac{1}{2} L^2 R_0(x) + \mathcal{L} [\Theta f(x) + f_1(x)] + \right. \\ & + \mathcal{L} \int_0^{1-x} dx_2 \left[ \left( \Theta \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{x^2} + \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2 - z)(z-1)x^2}{z-x^2\rho^2} \right| \right) \varphi - \right. \\ & \left. \left. - (\Theta \ln (x\rho^2 - z)^2 + \ln (z-x)^2) \varphi(x, x_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\Theta \ln (x_1^2 x^2 \rho^4) + \ln x_2^2) \varphi(x_2, x) \right] \right\}, \quad L = \ln \frac{Q_1^2 z}{m^2}, \quad \mathcal{L} = \ln \frac{Q_1^2}{m^2}, \quad (68) \end{aligned}$$

где

$$\varphi = \varphi(x, x_2) + \varphi(x_2, x),$$

$$\varphi(x_2, x) = \frac{(1-x)^2 + (x+x_2)^2}{(1-x_2)^2} - \frac{4xx_2(1-x-x_2)}{(1-x_2)^4}.$$

Интегрируя по  $x_2$  третье слагаемое в фигурных скобках выражения (68), мы получаем вклад в сечение баба-рассеяния на малые углы за счет излучения реальных жестких пар:

$$\sigma_{\text{hard}} = \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \left\{ \frac{1}{2} L^2 (1 + \Theta) R_0(x) + \mathcal{L} [\Theta F_1(x) + F_2(x)] \right\},$$

$$F_1(x) = d(x) + C_1(x), \quad F_2(x) = d(x) + C_2(x),$$

$$d(x) = \frac{1}{1-x} \left( \frac{8}{3} \ln(1-x) - \frac{20}{9} \right),$$

$$C_1(x) = -\frac{113}{9} + \frac{142}{9}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3x} - \frac{4}{3}(1+x) \ln(1-x) +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} \left[ \ln \frac{(x^2 \rho^2 - z)^2}{(x \rho^2 - z)^2} - 3 \text{Li}_2(1-x) \right] + \left( 8x^2 + 3x - 9 - \right.$$

$$\left. - \frac{8}{x} - \frac{7}{1-x} \right) \ln x + \frac{2(5x^2 - 6)}{1-x} \ln^2 x + \beta(x) \ln \frac{(x^2 \rho^2 - z)^2}{\rho^4},$$

$$C_2(x) = -\frac{122}{9} + \frac{133}{9}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3x} - \frac{4}{3}(1+x) \ln(1-x) +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} \left[ \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2-z)(z-1)}{(x^2 \rho^2 - z)(z-x)^2} \right| + 3 \text{Li}_2(1-x) \right] +$$

$$+ \frac{1}{3} \left( -8x^2 - 32x - 20 + \frac{13}{1-x} + \frac{8}{x} \right) \ln x + 3(1+x) \ln^2 x +$$

$$+ \beta(x) \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2-z)(z-1)}{x^2 \rho^2 - z} \right|, \quad \beta = R_0(x) - \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x}. \quad (69)$$

Формула (69) описывает излучение пары из электронной линии. Для учета излучения из позитронной линии при симметричной постановке опыта достаточно удвоить полученное выражение.

Для выделения зависимости от вспомогательного параметра  $\Delta$  в  $\sigma_{\text{hard}}$  мы используем следующие соотношения:

$$\int_1^{\rho^2} dz \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \Theta(x^2 \rho^2 - z) = \int_1^{\rho^2} dz \left[ \int_{\tilde{x}_c}^{1-\Delta} dx - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \bar{\Theta} \right],$$

$$\bar{\Theta} = 1 - \Theta(x^2 \rho^2 - z), \quad \tilde{x}_c = \max(x_c, \rho^{-1}).$$

Следовательно,

$$\int_1^{\rho^2} dz \int_{x_c}^{1-\Delta} \Theta \frac{dx}{1-x} = \int_1^{\rho^2} dz \left[ \ln \frac{1-\tilde{x}_c}{\Delta} - \int_{\tilde{x}_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \right], \quad (70)$$

$$\int_1^{\rho^2} dz \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \Theta \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \int_1^{\rho^2} dz \left[ \frac{1}{2} \ln^2(1-\tilde{x}_c) - \frac{1}{2} \ln^2 \Delta - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{\ln(1-x)}{1-x} \bar{\Theta} \right]. \quad (71)$$

Вклад в сечение  $e^+e^-$ -рассеяния на малые углы при высоких энергиях за счет излучения реальных мягких [13] (с энергией, меньшей  $\Delta\epsilon$ ) и виртуальных (29) пар определяется формулой:

$$\sigma_{\text{soft+virt}} = \frac{4\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L^2 \left( \frac{2}{3} \ln \Delta + \frac{1}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{L} \left( -\frac{17}{6} + \frac{4}{3} \ln^2 \Delta - \frac{20}{9} \ln \Delta - \frac{4}{3} \zeta_2 \right) \right\}.$$

Используя равенства (70) и (71), нетрудно проверить, что вспомогательный параметр  $\Delta$  сокращается в сумме  $\sigma_{\text{pair}} = 2\sigma_{\text{hadr}} + \sigma_{\text{soft+virt}}$ . Теперь мы можем записать полный вклад образования пар в окончательном виде:

$$\sigma_{\text{pair}} = \frac{2\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L^2 \left( 1 + \frac{4}{3} \ln(1-x_c) - \frac{2}{3} \int_{x_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \right) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{L} \left[ -\frac{17}{3} - \frac{8}{3} \zeta_2 - \frac{40}{9} \ln(1-x_c) + \frac{8}{3} \ln^2(1-x_c) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_{x_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \left( \frac{20}{9} - \frac{8}{3} \ln(1-x) \right) \right] \right\} +$$



$$+ \int_{x_c}^1 dx \left[ L^2(1 + \Theta) \bar{R}(x) + \mathcal{L} (\Theta C_1(x) + C_2(x)) \right] \Big\} ,$$

$$\bar{R}(x) = \frac{1}{2} R_0(x) - \frac{2}{3(1-x)} . \tag{72}$$

Это выражение является исходной формулой для численных расчетов сечения процесса баба-рассеяния на малые углы, сопровождаемого рождением  $e^+e^-$ -пары. Отметим, что ведущий вклад описывается электронной структурной функцией  $D_e^{\bar{e}}(x)$ , которая задает вероятность найти позитрон в электроне, имеющем виртуальность  $Q^2$ , при условии, что электрон теряет долю энергии  $(1-x)$  [24,27].

В табл.1 представлено отношение сечения  $\sigma_{\text{pair}}$  (72) к нормализационному сечению  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{\varepsilon^2\theta_{\min}^2} .$$

**Таблица 1.** Отношение  $S = \sigma_{\text{pair}} / \sigma_0$  в процентах как функция  $x_c$  для  $NN$ - ( $\rho = 1,74$ ,  $\theta_{\min} = 1,61^\circ$ ) и  $WW$ -детекторов ( $\rho = 2,10$ ,  $\theta_{\min} = 1,50^\circ$ ),  $\sqrt{s} = 2\varepsilon = M_Z = 91,187$  ГэВ

$x_c$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$S_{NN}, \%$	-0,018	-0,022	-0,026	-0,029	-0,033	-0,038	-0,046
$S_{WW}, \%$	-0,013	-0,019	-0,024	-0,029	-0,035	-0,042	-0,052

**Таблица 2.** Относительный вклад нелидирующих слагаемых в образование пар  $R$  для  $NN$ - и  $WW$ -детекторов (см. табл.1)

$x_c$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$R_{NN}$	0,036	-0,122	-0,194	-0,238	-0,268	-0,335	-0,465
$R_{WW}$	0,179	-0,021	-0,088	-0,120	-0,179	-0,271	-0,415

В табл.2 мы приводим соотношение между неведущими логарифмическими вкладами, содержащими только первую степень большого логарифма  $\mathcal{L}$ , и полным выражением  $\sigma_{\text{pair}}$ :

$$R = \frac{\sigma_{\text{pair}}^{\text{non-leading}}}{\sigma_{\text{pair}}}.$$

## 6. ВЕДУЩИЕ $\mathcal{O}(\alpha^3)$ -ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССУ БАБА-РАССЕЯНИЯ

Чтобы вычислить ведущие логарифмические вклады, представляемые членами вида  $(\alpha\mathcal{L})^3$ , мы используем итерацию вплоть до  $\beta^3$  уравнений Липатова [11,13,24] (см. приложение 7). Для упрощения аналитических выражений мы использовали реалистическое предположение о малости порога регистрации энергии жесткого подпроцесса, что позволяет пренебрегать членами вида

$$x_c^n \left( \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \sim 10^{-4}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Это означает, что мы можем ограничиться только учетом излучения начальными электроном и позитроном.

Вклад за счет излучения трех фотонов, как реальных, так и виртуальных, в величину  $\Sigma$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \Sigma^{3\gamma} = & \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \int_1^{\rho^2} dz \cdot z^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c}^1 dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \times \\ & \times \left[ \frac{1}{6} \delta(1 - x_2) P^{(3)}(x_1) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z) + \frac{1}{2x_1^2} P^{(2)}(x_1) P(x_2) \Theta_1 \Theta_2 \right], \end{aligned}$$

где  $P(x)$  и  $P^{(2)}(x)$  определены формулами (24) и (50),

$$\Theta_1 \Theta_2 = \Theta \left( z - \frac{x_2^2}{x_1^2} \right) \Theta \left( \rho^2 \frac{x_2^2}{x_1^2} - z \right),$$

$$P^{(3)}(x) = \delta(1 - x) \Delta_t + \Theta(1 - x - \Delta) \theta_t,$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_t = & 48 \left[ \frac{1}{3} \zeta_3 - \frac{1}{2} \zeta_2 \left( \ln \Delta + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{6} \left( \ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^3 \right], \\
 \theta_t = & 48 \left\{ \frac{1}{2} \frac{1+x^2}{1-x} \left[ \frac{9}{32} - \frac{1}{2} \zeta_2 + \frac{3}{4} \ln(1-x) - \frac{3}{8} \ln x + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \ln^2(1-x) + \frac{1}{12} \ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x \ln(1-x) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8} (1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{1}{4} (1-x) \ln(1-x) + \frac{1}{32} (5-3x) \ln x - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{16} (1-x) - \frac{1}{32} (1+x) \ln^2 x + \frac{1}{8} (1+x) \text{Li}_2(1-x) \right\}. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь вклад в  $\Sigma$  за счет процесса с образованием  $e^+e^-$ -пары и одновременным излучением фотона. Причем как пара, так и фотон могут быть как реальными, так и виртуальными. Мы учитываем синглетный и несинглетный механизмы рождения пары (в работе [24] рассмотрен только синглетный). Результат имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{e^+e^- \gamma} = & \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c}^1 dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{3} \left[ R^P(x_1) + \frac{1}{3} P^{(2)}(x_1) + \frac{2}{3} R(x_1) \right] \delta(1-x_2) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2x_1^2} P(x_2) R(x_1) \Theta_1 \Theta_2 \right\} (1 + \mathcal{O}(x_c^3)),
 \end{aligned}$$

где

$$R(x) = R^s(x) + \frac{2}{3} P(x), \quad R^s(x) = \frac{1-x}{3x} (4 + 7x + 4x^2) + 2(1+x) \ln x,$$

$$\begin{aligned}
 R^P(x) = & R^s(x) \left( \frac{3}{2} + 2 \ln(1-x) \right) + (1+x) (-\ln^2 x + 4 \text{Li}_2(1-x)) + \\
 & + \frac{1}{3} (-9 - 3x + 8x^2) \ln x + \frac{2}{3} \left( -\frac{3}{x} - 8 + 8x + 3x^2 \right) + \frac{2}{3} P^{(2)}(x).
 \end{aligned}$$

## 7. КАЛОРИМЕТРИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ОПЫТА

В калориметрической постановке эксперимента события, в которых электрон (позитрон) одновременно с одним или более фотонами попадает в малую область детектора, так что виден единый *кластер*, неотличимы от событий, в которых в ту же область детектора попадает один электрон (позитрон), если выделенная энергия одинакова. Для описания этой ситуации вводят определяемый параметрами детектора малый угол  $\delta$ , так что при относительном угле между электроном и сопровождающим его фотоном, меньшим  $\delta$ , они регистрируются как одна частица. Отметим, что здесь мы, как и выше, считаем, что при детектировании различают заряженные и незаряженные частицы. Для детекторов LEP I параметр  $\delta$  имеет порядок  $10 \cdot 10^{-3}$  рад, что сравнимо с угловым раствором детекторов и минимальным углом рассеяния. Реалистичны, например, условия

$$\theta_1 = \theta_{\min} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \quad \theta_{\max} = \rho\theta_1 = 58 \cdot 10^{-3} \text{ рад}. \quad (74)$$

Поэтому краевые эффекты могут быть значительны, и формулы для вкладов в  $\Sigma$  усложняются. В этом случае, естественно, выгодно использовать метод Монте-Карло. Тем не менее достаточно точные результаты могут быть получены и аналитически. Прежде всего, в порядках  $(L\alpha/\pi)^2$  и  $(L\alpha/\pi)^3$  необходимо отбросить вклады, отвечающие излучению вдоль рассеянных электрона и позитрона, т.е. удержать только слагаемые, содержащие  $\Theta(x^2\rho^2 - z)$  в (49), (72).

Что касается вклада поправок порядка  $\alpha/\pi$  за счет излучения одного жесткого фотона (см. (19)), то его удобно представить в виде

$$\Sigma^Y = \frac{\alpha}{\pi} (\Sigma_i^Y + \Sigma_f^Y), \quad (75)$$

где слагаемое  $\Sigma_i^Y$ , описывающее вклад за счет излучения начальным электроном имеет прежний вид:

$$\Sigma_i^Y = \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ 2(1-L) \ln \frac{1}{\Delta} + \frac{3}{3} L - 2 + \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \times \right. \\ \left. \times \left[ \left( L - 1 + L_2 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(x^2\rho^2 - z) + L_3 \Theta(z - x^2\rho^2) \right] \right\}. \quad (76)$$

Для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_f^y = & \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ \int_0^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} \ln \left| \frac{(d_- - z)(d_+ - z)x^2}{(xd_- - z)(xd_+ - z)} \right| + \right. \\ & \left. + \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} \left[ \ln \left| \frac{(\rho^2 - z)(z - 1)}{(z - x)(\rho^2 x - z)} \right| + \ln \left| \frac{(xd_+ - z)(xd_- - z)}{(d_+ - z)(d_- - z)} \right| \right] \right\}, \\ & d_{\pm} = \left( \sqrt{z} \pm (1 - x) \frac{\delta}{\theta_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (77)$$

Этот результат выводится (аналогично приведенному в разд.3) путем интегрирования слагаемого, пропорционального  $1/\sqrt{a_2}$  в (19), причем удобно разбить интеграл по прямоугольнику  $1 < z < \rho^2$ ,  $x^2 < z_1 < x^2 \rho^2$  на следующие пять областей:

- 1)  $x^2 < z_1 < x^2 z - \eta$ ,
  - 2)  $x^2 z - \eta < z_1 < x^2 z - \eta_1$ ,
  - 3)  $x^2 z - \eta_1 < z_1 < x^2 z + \eta_1$ ,
  - 4)  $x^2 z + \eta_1 < z_1 < x^2 z + \eta$ ,
  - 5)  $xz^2 + \eta < z_1 < x^2 \rho^2$ ,
- $$\eta = 2x^2(1 - x) \sqrt{z} \frac{\delta}{\theta_1}.$$

Зависимость от вспомогательного параметра  $\eta_1$  в полной сумме вкладов областей исчезает.

## 8. ОЦЕНКА ОТБРАСЫВАЕМЫХ СЛАГАЕМЫХ И ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Обсудим теперь величины слагаемых, не принимавшихся в расчет ввиду требуемой точности (1). Разделим их на следующие группы:

а) Электрослабые вклады высших порядков не превышают величины

$$\Sigma_{EW}^{h.o} = \frac{\alpha Q_1^2}{\pi M_Z^2} \leq 10^{-4}. \quad (78)$$

б) При вычислении вклада тормозного излучения в низшем порядке ТВ мы рассмотрели только диаграммы рассеивательного типа и пренебрегли вкладами диаграмм аннигиляционного типа, при этом неучтенными оказались вклады от виртуальных и реальных РП вида

$$\theta_1^2 \frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{s}{-t} \leq 10^{-4}. \quad (79)$$

Отметим, что наш результат для  $\Sigma^Y$  совпадает численно с результатами, полученными другими группами [1], использовавшими точный матричный элемент [25].

в) Мы пренебрегли в расчете тормозного излучения также интерференционными вкладами рассеивательных и аннигиляционных диаграмм:

$$\theta_1^2 \frac{\alpha}{\pi} L \leq 10^{-4} \quad (80)$$

и соответствующими слагаемыми в двойном тормозном излучении:

$$\theta_1^2 \left( \frac{\alpha L}{\pi} \right)^2 \leq 10^{-4}. \quad (81)$$

г) Интерференционные вклады в образовании пар типа «верх-низ» (на электроне и на позитроне), в том числе таковые от учета тождественности фермионов:

$$\theta_1^2 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 L^3 \leq 10^{-4}. \quad (82)$$

д) Эйкональный вид амплитуды, учитывающий многофотонные обмены в канале рассеяния, нарушается слагаемыми вида

$$\theta_1^2 \frac{\alpha}{\pi} \leq 10^{-4}. \quad (83)$$

е) Образование пар тяжелых фермионов ( $\mu$ ,  $\tau$ ) (виртуальных и реальных), а также образование реальных пар пионов вносит вклад, по крайней мере на порядок меньший вклада легких фермионов [9].

ж) Вклады высших порядков ТВ в лидирующем приближении имеют порядок

$$\left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^n \leq 10^{-4}, \quad n \geq 4.$$

Объединяя эти оценки как независимые, можно утверждать, что физическая неопределенность полученных формул удовлетворяет требованию (1):

$$\left| \frac{\delta\sigma_{\text{phys}}}{\sigma} \right| < 10^{-3}.$$

### 9. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Мы представили сечение баба-рассеяния на малые углы в двух, эквивалентных с точки зрения заданной точности, видах:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{Q_1^2} \{ \Sigma_0 + \Sigma^\gamma + \Sigma^{2\gamma} + \Sigma^{e^+e^-} + \Sigma^{3\gamma} + \Sigma^{e^+e^-\gamma} \},$$

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{Q_1^2} \Sigma_{00} \{ 1 + \delta_0 + \delta^\gamma + \delta^{2\gamma} + \delta^{e^+e^-} + \delta^{3\gamma} + \delta^{e^+e^-\gamma} \},$$

где

$$\Sigma_{00} = \Sigma_0 \Big|_{\Pi=0} = 1 - \rho^{-2} + \Sigma_W + \Sigma_\theta,$$

$$\delta_0 = \frac{\Sigma_0 - \Sigma_{00}}{\Sigma_{00}}, \quad \delta^\gamma = \frac{\Sigma^\gamma}{\Sigma_{00}}, \dots$$

Величина борновского сечения

$$\sigma^B = \frac{4\pi\alpha^2}{Q_1^2} \Sigma_0$$

для  $\theta_1 = 26,125$  мрад,  $\theta_2 = 55,875$  мрад, задающих так называемый NN-детектор, при  $\sqrt{s} = 92,3$  ГэВ имеет величину  $\sigma^B = 148,186$  нб, а для  $\theta_1 = 24$  мрад,  $\theta_2 = 58$  мрад (WW-детектор) —  $\sigma^B = 175,588$  нб. Результаты наших вычислений приведены в табл.3,4 и на рис.4.

Таблица 3. Значения  $\delta_i$  для NN-детектора  
 при  $\theta_{\min}^{NN} = 26,125$  мрад,  $\theta_{\max}^{NN} = 55,875$  мрад,  $\sqrt{s} = 92,3$  ГэВ

NN-детектор, $\rho = 1,97$									
$x_c$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\delta_0$	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13
$\delta\gamma$	-6,84	-7,17	-7,44	-8,16	-8,94	-10,32	-12,67	-16,73	-24,98
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	0,01	0,00	-0,01	-0,02	-0,05	-0,08	-0,05	0,13	0,87
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	0,49	0,46	0,42	0,36	0,27	0,17	0,14	0,25	0,93
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,07	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,06	-0,03
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,03	-0,02
$\delta e^+e^-$	-0,00	-0,02	-0,02	-0,03	-0,04	-0,05	-0,06	-0,07	-0,09
$\delta e^+e^-\gamma$	0,008	0,006	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003	0,006
$\delta^3\gamma$	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01
$\Sigma\delta_i$	-2,11	-2,50	-2,82	-3,60	-4,51	-6,99	-8,37	-12,19	-19,19

Таблица 4. Значения  $\delta_i$  для WW-детектора  
 при  $\theta_{\min}^{WW} = 24$  мрад,  $\theta_{\max}^{WW} = 58$  мрад,  $\sqrt{s} = 92,3$  ГэВ

WW-детектор, $\rho = 2,42$									
$x_c$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\delta_0$	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05
$\delta\gamma$	-5,87	-6,22	-6,66	-7,24	-8,14	-9,69	-12,18	-16,35	-24,65
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	-0,01	-0,02	-0,04	-0,06	-0,10	-0,12	-0,09	0,09	0,84
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	0,45	0,41	0,36	0,29	0,18	0,10	0,07	0,20	0,89
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	0,08	0,06	-0,03
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,05	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,03	-0,05
$\delta e^+e^-$	0,00	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,04	-0,05	-0,07	-0,08
$\delta e^+e^-\gamma$	-0,012	-0,007	-0,004	-0,002	-0,001	-0,001	0,000	0,001	0,004
$\delta^3\gamma$	-0,026	-0,024	-0,021	-0,018	-0,013	-0,007	0,000	0,009	0,015
$\Sigma\delta_i$	-1,32	-1,72	-2,23	-2,89	-3,93	-5,56	-8,06	-11,97	-19,02



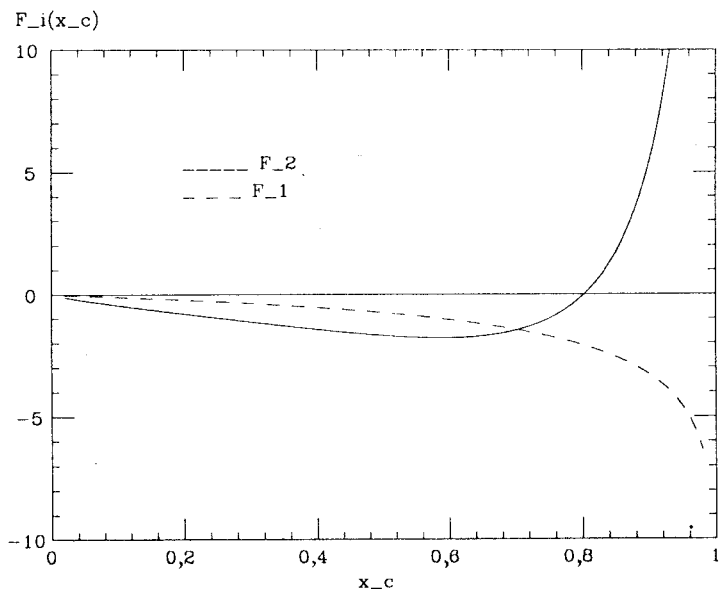


Рис.3. Значения интегралов ядер уравнений эволюции

$$F_i = \int_{x_c}^1 P^{(i)}(x) dx \text{ как функции нижнего предела}$$

Обсудим некоторые общие черты радиационных поправок. Знак каждого из вкладов  $\Sigma_i$  может меняться в зависимости от соотношения виртуальных и реальных вкладов. Сечение, отвечающее вкладам диаграмм в борновском приближении, положительно, тогда как знак РП зависит от порядка ТВ: для вкладов нечетных порядков он отрицателен, а для вкладов четных порядков — положителен. Когда апертура счетчиков велика, а энергетический порог регистрации мал, имеет место полное сокращение ведущих логарифмических вкладов в силу теоремы Киношита — Ли — Науенберга. С уменьшением апертуры и увеличением параметра  $x_c$  компенсация виртуальных и реальных вкладов в РП становится неполной. Как следствие этого, можно отметить то, что РП для  $NN$ -случая больше по абсолютной величине, чем РП для  $WW$ -случая. Из таблиц 3,4 видно также, что при увеличении порога регистрации  $x_c$  происходит подавление вкладов за счет излучения реальных частиц и РП; они, становясь отрицательными, растут по абсолютной величине.

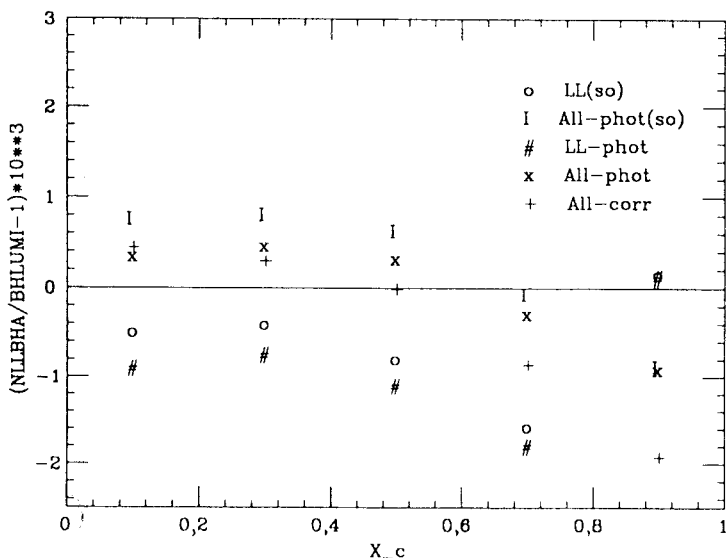


Рис.4. Величина  $(\sigma_{NLLBHA}/\sigma_{VHLUMI} - 1)$  в процентах как функция  $x_c$  при учете различных вкладов.  $\sigma_{NLLBHA}$  — результаты излагаемого подхода;  $\sigma_{VHLUMI}$  — результаты группы Ядаха

Отметим, что отношение лидирующих и нелидирующих вкладов в  $\Sigma^{2\gamma}$  не всегда является величиной много больше единицы (по модулю). Как видно из графика рис.3, представляющего поведение функции

$$F_2(x) = \int_x^1 P^{(2)}(y) dy, \text{ описывающей характерный вклад в ведущем логариф-}$$

мическом приближении, эта функция проходит через ноль при  $x \approx 0,8$ . Это показывает, что в ведущих вкладах возможны существенные внутренние компенсации, что, конечно, сильно зависит от выбора параметра  $x_c$  и диапазона углов.

На рис.4 мы приводим сравнение наших результатов, полученных с помощью программы NLLBHA, с результатами группы Ядаха, полученными с помощью программы VHLUMI по методу Монте-Карло. Выбраны значения параметров WW-детектора (см. табл.4). В широкой области изменения параметра  $x_c$  наблюдается согласие результатов на уровне 0,1% при учете излучения фотонов. Причем, как видно из рис.4, в области  $x_c \sim 0,8$

существен вклад нелидирующих слагаемых. Что же касается вклада пар (который не учитывается в ВНЛУМИ), то он не превышает 0,1% везде, кроме области  $x_c \geq 0,8$ , где он должен учитываться.

Авторы благодарны В.С.Фадину, Л.Н.Липатову, Н.П.Меренкову и Л.Трентадуэ как соавторам работ, на которых основан этот обзор. Авторы признательны Д.Бардину, Ф.Берендсу, Б.Варду, Е.Левину, Б.Пьетержаку, М.Скржипеку, Дж.Филду и С.Ядаху, дискуссии с которыми на разных стадиях проведенных исследований были весьма полезны. Э.А.Кураев благодарен фонду ИНТАС (грант 93-1867) за частичную поддержку. А.Б.Арбузов признателен Шведской Королевской академии наук за финансовую поддержку в виде гранта ICFPM.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

#### КИНЕМАТИКА СИСТЕМЫ БЕСКОНЕЧНОГО ИМПУЛЬСА. ОДНОКРАТНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Для процесса

$$e^+(p_2) + e^-(p_1) \rightarrow e^+(q_2) + e^-(q_1) + \gamma(k)$$

удобно ввести параметризацию Судакова для 4-импульсов конечных частиц:

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 \tilde{p}_2 + \beta_1 \tilde{p}_1 + \mathbf{q}_1^\perp, & q_2 &= \alpha_2 \tilde{p}_2 + \beta_2 \tilde{p}_1 + \mathbf{q}_2^\perp, \\ k &= \alpha \tilde{p}_2 + \beta \tilde{p}_1 + \mathbf{k}^\perp, \end{aligned} \quad (84)$$

где  $\tilde{p}_{1,2}$  являются 4-векторами, лежащими почти на световом конусе,  $\mathbf{q}_i^\perp$  и  $\mathbf{k}^\perp$  — евклидовы двумерные векторы, заданные в СЦИ:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^\perp \mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_i^\perp \mathbf{p}_1 = 0, & (\mathbf{q}_i^\perp)^2 &= -\mathbf{q}_i^2 < 0, & i &= 1, 2; \\ \tilde{p}_1 &= p_1 - \frac{m^2}{s} p_2, & \tilde{p}_2 &= p_2 - \frac{m^2}{s} p_1, \\ p_1^2 &= p_2^2 = q_1^2 = q_2^2 = m^2, & k^2 &= 0 & \tilde{p}_1^2 &= \tilde{p}_2^2 = \frac{m^6}{s^2}, \\ s &= 2p_1 p_2 = 2\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = 2\tilde{p}_1 p_2 = 2\tilde{p}_2 p_1 \gg m^2. \end{aligned}$$

Мы рассматриваем кинематическую ситуацию, в которой фотон излучается под малым углом к направлению движения начального электрона. Условия массовой поверхности для 4-импульсов приводят к тождествам

$$q_1^2 = s \alpha_1 \beta_1 - (\mathbf{q}_1^\perp)^2 = m^2, \quad \alpha_1 = \frac{(\mathbf{q}_1^\perp)^2 + m^2}{s \beta_1},$$

$$q_2^2 = s \alpha_2 \beta_2 - (\mathbf{q}_2^\perp)^2 = m^2, \quad \beta_2 = \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2 + m^2}{s \alpha_2},$$

$$k^2 = s \alpha \beta - (\mathbf{k}^\perp)^2 = 0, \quad s \alpha = \frac{(\mathbf{k}^\perp)^2}{\beta},$$

$$\alpha_2 = 1, \quad |\beta_2| \sim |\alpha_1| \sim |\alpha| \ll 1, \quad \beta_1 \sim \beta \sim 1.$$

С помощью соотношения  $d^4 q_1 = (s/2) d\alpha_1 d\beta_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp$  получаем представление фазового объема в виде

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 d^3 \mathbf{k}}{2q_1^0 2q_2^0 2k^0} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - k) = \\ &= \frac{1}{4s \beta \beta_1} d\beta d\beta_1 \delta(1 - \beta - \beta_1) d^2 \mathbf{k}^\perp d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp \delta^{(2)}(\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{k}^\perp). \end{aligned}$$

Закон сохранения энергии-импульса записывается в виде

$$q + p_1 = q_1 + k, \quad p_2 = q_2 + q, \quad \mathbf{q}^\perp = -\mathbf{q}_2^\perp.$$

Приведем формулы для знаменателей пропагаторов (далее  $\beta_1 = x$ ,  $\beta = 1 - x$ ):

$$(p_1 - k)^2 - m^2 = \frac{-d_1}{1-x}, \quad (p_1 + q)^2 - m^2 = \frac{d}{x(1-x)},$$

$$q^2 = -(\mathbf{q}_2^\perp)^2, \quad d = m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}_2^\perp)^2,$$

$$d_1 = m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}_2^\perp)^2. \quad (85)$$

Матричный элемент процесса принимает вид

$$M = \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(q_2) \bar{u}(q_1) O_\nu u(p_1),$$

$$O^\nu = \gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2} \hat{e} + \hat{e} \frac{\hat{p}_1 + \hat{q} + m}{(p_1 + q)^2 - m^2} \gamma^\nu.$$

Полезно использовать следующее разложение тензора  $g_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^\perp + \frac{p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 p_2} \simeq \frac{2p_1^\mu p_2^\nu}{s} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{(\mathbf{q}^\perp)^2}{2s}\right) \right).$$

Используя (84) и (85), можно записать

$$p_2^\nu \bar{u}(q_1) O_\nu u(p_1) \equiv \bar{u}(q_1) \hat{v}_\rho u(p_1) e_\rho(k),$$

где обобщенная вершина  $v_\rho$  представляется в виде

$$v_\rho = s \gamma_\rho x(1-x) \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) - \frac{\gamma_\rho \hat{k} \hat{p}_2}{d} x(1-x) - \frac{\hat{p}_2 \hat{k} \gamma_\rho}{d_1} (1-x).$$

Преобразуем сумму по спиновым состояниям квадрата матричного элемента:

$$\sum_{\text{spin}} |\bar{v}(q_2) \hat{p}_1 v(p_2)|^2 = \text{Tr} \hat{p}_2 \hat{p}_1 \hat{p}_2 \hat{p}_1 = 2s^2,$$

$$R = \frac{-1}{4s^2} \text{Tr} (\hat{p}_1 + m) \hat{v}_\mu (\hat{p}_1 + \hat{k} - \hat{q} + m) \hat{v}_\mu =$$

$$= x[-2xm^2(d-d_1)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp)^2(1+x^2) dd_1] \frac{1}{d^2 d_1^2}.$$

В итоге получаем

$$d\sigma^{e^+ e^- \rightarrow e^+(e^- \gamma)} = 2\alpha^3 \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp dx(1-x)}{\pi^2 (\mathbf{q}_2^\perp)^4 (dd_1)^2} \times$$

$$\times [-2xm^2(d-d_1)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp)^2(1+x^2) dd_1].$$

Таким же образом можно получить дифференциальное сечение процесса двойного тормозного излучения в разные стороны:

$$\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+\gamma e^-\gamma}}{d^2\mathbf{q}_1^\perp d^2\mathbf{q}_2^\perp dx_1 dx_2} = \frac{\alpha^4(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{\pi^4(1-x_1)(1-x_2)} \int \frac{d^2\mathbf{q}^\perp}{(\mathbf{q}^\perp)^4} \left[ \frac{(\mathbf{q}^\perp)^2(1-x_2)^2}{d_1 d_2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{m^2(1-x_1)^2(d_1-d_2)^2}{d_1^2 d_2^2} \right] \times \\ \times \left[ \frac{(\mathbf{q}^\perp)^2(1-x_2)^2}{\tilde{d}_2 \tilde{d}_2} - \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{m^2(1-x_2)^2(\tilde{d}_2-\tilde{d}_1)^2}{\tilde{d}_1^2 \tilde{d}_2^2} \right],$$

где  $x_1$ ,  $\mathbf{q}_1^\perp$  и  $x_2$ ,  $\mathbf{q}_2^\perp$  суть доли энергии и поперечные по отношению к начальному пучку компоненты импульсов рассеянных электрона и позитрона соответственно;  $\mathbf{q}^\perp$  — поперечные составляющие импульса виртуального фотона,

$$d_1 = (1-x_1)^2 m^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}^\perp x_1)^2, \quad d_2 = (1-x_1)^2 m^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}^\perp)^2,$$

$$\tilde{d}_1 = (1-x_2)^2 m^2 + (\mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{q}^\perp x_2)^2, \quad \tilde{d}_2 = (1-x_2)^2 m^2 + (\mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{q}^\perp)^2.$$

Рассмотрим теперь экспериментальные ограничения (4) на область интегрирования по  $d^2\mathbf{q}_1^\perp$ ,  $d^2\mathbf{q}_2^\perp$ . Определим безразмерные переменные

$$z_{1,2} = \frac{(\mathbf{q}_{1,2}^\perp)^2}{Q_1^2}.$$

Две узкие полосы  $z_1 \simeq z_2$  и  $z_1 \simeq x^2 z_2$  в области интегрирования на плоскости  $(z_1, z_2)$  дают логарифмически усиленные вклады. Следовательно, ведущий логарифмический вклад в  $\Sigma^H$  будет набираться тогда, когда хотя бы одна из указанных полос будет пересекать прямоугольник  $x^2 < z_1 < < \rho^2 x^2$ ,  $1 < z_2 < \rho^2$ . Заметим, что полоса  $z_1 \simeq x^2 z_2$ , отвечающая излучению одного жесткого фотона вдоль направления движения рассеянного электрона, является диагональю этого прямоугольника. Полоса же  $z_1 \simeq z_2$ , отвечающая излучению жесткого фотона вдоль направления движения началь-

ного электрона, пересекает прямоугольник, если  $x^2\rho^2 > z_2$  и  $x\rho > 1$ . Эти условия и дают  $\Theta$ -функции в ведущем вкладе в  $\Sigma^H$ .

Действительно, для вклада от излучения начального электрона (см. (19)) получим

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \Theta(1 - \rho x) \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \int_x^{x^2\rho^2} \frac{dz_1 z_2 (1-x)}{(z_1 - xz_2)(z_2 - z_1)} + \\
 & + \Theta(x\rho - 1) \int_{x^2\rho^2}^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \int_x^{x^2\rho^2} \frac{dz_1 z_2 (1-x)}{(z_1 - xz_2)(z_2 - z_1)} + \\
 & + \Theta(x\rho - 1) \int_1^{x^2\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \left\{ \int_x^{z_2 - \eta} \frac{dz_1 (1-x) z_2}{(z_1 - xz_2)(z_2 - z_1)} + \int_{z_2 + \eta}^{x^2\rho^2} \frac{dz_1 (1-x) z_2}{(z_1 - xz_2)(z_1 - z_2)} + \right. \\
 & \left. + \int_{z_2 - \eta}^{z_2 + \eta} \frac{dz_1}{[(z_2 - z_1)^2 + 4\sigma^2 z_2^2]^{1/2}} - \frac{2x\sigma^2}{1+x^2} \int_{z_2 - \eta}^{z_2 + \eta} \frac{2dz_1 z_2}{[(z_2 - z_1)^2 + 4\sigma^2 z_2^2]^{3/2}} \right\},
 \end{aligned}$$

где мы ввели вспомогательный параметр  $\eta$ :  $\sigma^2 \ll \eta \ll 1$ .

Мы видим, что с помощью этого приема ответ может быть получен в аналитическом виде, причем зависимость от  $\eta$  исчезает в сумме

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ \Theta(x\rho - 1) \Theta(x^2\rho^2 - z) \left( L - \frac{2x}{1+x^2} \right) + \right. \\
 & \left. + \Theta(x^2\rho^2 - z) L_2 + (\Theta(1 - x\rho) + \Theta(x\rho - 1) \Theta(z - x^2\rho^2)) L_3 \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично получаем вклад за счет излучения вдоль рассеянного электрона:

$$F_2 = \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L - \frac{2x}{1+x^2} + L_1 \right\},$$

где  $L = \ln(Q_1^2 z / m^2)$ , а величины  $L_1, L_2$  и  $L_3$  приведены в (22).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ВИРТУАЛЬНЫЕ ПОПРАВКИ  
К ИЗЛУЧЕНИЮ ОДНОГО ФОТОНА

Дифференциальное сечение процесса электрон-позитронного рассеяния при высоких энергиях, сопровождаемого излучением одного жесткого фотона, может быть записано в виде

$$d\sigma^{H(S+V)} = \frac{\alpha^3 dx d^2 q_2 d^2 q_1}{2\pi^2 x(1-x)((\mathbf{q}_2^\perp)^2)^2} R, \quad R = \lim_{(p_1 p_2) \rightarrow \infty} \frac{4p_{2\rho} p_{2\sigma} k_{\rho\sigma}}{(2p_1 p_2)^2}.$$

Тензор  $k_{\rho\sigma}$ , входящий в  $R$ , связан с матричным элементом  $\varepsilon_\rho M_\rho$  процесса комптоновского рассеяния ( $\varepsilon_\rho$  — вектор поляризации *тяжелого* фотона) следующим образом:

$$k_{\rho\sigma} = \sum_{\text{spin}} M_\rho M_\sigma^* = \tilde{g}_{\rho\sigma} k_g + \tilde{p}_{1\rho} \tilde{p}_{1\sigma} k_{11} + \tilde{q}_{1\rho} \tilde{q}_{1\sigma} k_{22} + \tilde{q}_{1\rho} \tilde{p}_{1\sigma} k_{21} + \tilde{p}_{1\rho} \tilde{q}_{1\sigma} k_{12},$$

$$k_{ij} = B_{ij} + \frac{\alpha}{2\pi} T_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad k_g = B_g + \frac{\alpha}{2\pi} T_g,$$

где

$$\tilde{g}_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} - \frac{q_\rho q_\sigma}{q^2}, \quad \tilde{p}_{1\rho} = p_{1\rho} - \frac{p_1 q_\rho}{q^2}, \quad \tilde{q}_{1\rho} = q_{1\rho} - \frac{q_1 q_\rho}{q^2}$$

суть явно калибровочно-инвариантные комбинации импульсов:  $k_{\rho\sigma} q_\rho = k_{\rho\sigma} q_\sigma = 0$ .

В рассматриваемом случае малых углов рассеяния  $R$  представлено в виде

$$R = \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \eta \right) (B_{11}(s_1, t_1) + x^2 B_{11}(t_1, s_1)) + \frac{\alpha}{2\pi} T,$$

$$T = T_{11} + x^2 T_{22} + x(T_{12} + T_{21}),$$

где  $\eta$  дано в (39).

Точные выражения для  $T_{ik}$  приведены в работе [20]. Нам же эти величины нужны только в предельном случае, когда  $s_1 \ll |t_1|$  и  $|t_1| \ll s_1$ , при фиксированных  $q^2$  и  $u_1 = -2p_1 q_1$ .



В случае малых  $s_1$  мы имеем

$$s = \frac{1}{x(1-x)} [m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp x + \mathbf{q}_1^\perp)^2],$$

далее в этом приложении мы опускаем нижний индекс 1 при инвариантах  $s$  и  $t$ , характеризующих комптоновский подпроцесс, см. (41).

Принимая во внимание то, что при малых  $s$  будем иметь  $q^2 = -(\mathbf{q}_2^\perp)^2$ ,  $t = -(1-x)(\mathbf{q}_2^\perp)^2$  и  $u = -(\mathbf{q}_2^\perp)^2 x$ , мы получаем следующие выражения для  $T$  и  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \eta_{s \ll |t|} &= 2(L-1+\ln x)(2\ln \Delta - \ln x) + 3L - \ln^2 x - \frac{9}{2}, \\ T_{s \ll |t|} &= \frac{2}{s(1-x)} \left\{ 4(1+x^2) \left[ \ln x \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{s} - \text{Li}_2(1-x) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 1 + 2x + x^2 \right\} - \frac{16m^2}{s^2} l_q \ln x. \end{aligned}$$

В случае малых  $|t|$  имеем

$$\begin{aligned} \eta_{|t| \ll s} &= 2(L-1-\ln x)(2\ln \Delta - \ln x) + 3L - \ln^2 x - \frac{9}{2}, \\ T_{|t| \ll s} &= \frac{2x}{t(1-x)} \left\{ 4(1+x^2) \left[ \ln x \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{-t} - \frac{1}{2} \ln^2 x - \text{Li}_2(1-x) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 1 - 2x + x^2 \right\} + \frac{16m^2 x^2}{t^2} l_q \ln x. \end{aligned}$$

Дальнейшее интегрирование тривиально. Мы приведем лишь наиболее важные этапы. Вклад членов, содержащих  $\eta$ , можно представить в форме, аналогичной форме борновского вклада:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\eta}^{H(s+v)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \left\{ (1 + \Theta(\rho^2 x^2 - z)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ L \left( 2\ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) + (2\ln \Delta - \ln x)(\ln x - 2) - \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{15}{4} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left( 2 \ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) k(x, z) - 2 \ln x (2 \ln \Delta - \ln x) \Theta(\rho^2 x^2 - z) \}.$$

Чтобы получить вклад слагаемых, содержащих  $T$ , надо рассмотреть сначала следующие типы интегралов:

$$I_{s\{t\}} = Q_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp}{\pi s\{t\}} \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{s\{-t\}}, \quad i_{s\{t\}} = Q_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp}{\pi s\{t\}},$$

$$m_{s\{t\}} = Q_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp m^2}{\pi s^2\{t^2\}}.$$

Обозначая  $\sigma^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp x - \mathbf{q}_1^\perp)^2 / Q_1^2$  как  $a + b \cos \varphi$  и используя интегралы

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{a + b \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\ln(a + b \cos \varphi)}{a + b \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{2(a^2 - b^2)}{a + \sqrt{a^2 - b^2}},$$

получаем

$$I_s = (1-x)x \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \int_{x^2}^{x^2 \rho^2} dz_1 \times \\ \times \frac{\ln(z_2^2(1-x)x^3) - \ln[(z_1 - z_2 x^2)^2 + 4\sigma^2 x^2(1-x)^2 z_2]}{\sqrt{(z_1 - x^2 z_2)^2 + 4\sigma^2 x^2(1-x)^2 z_2}}.$$

Так как мы работаем с логарифмической точностью, то при интегрировании по  $z_1$  мы можем рассматривать только область  $|z_1 - x^2 z_2| < \eta$ ,  $\sigma^2 \ll \eta \ll 1$ . Мы получаем

$$I_s = x(1-x) \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L \left[ \frac{1}{2} L + \ln \frac{x}{1-x} \right].$$

Оставшиеся интегралы вычисляются аналогично:

$$I_t = -(1-x) \int_1^{\rho^2 x^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L \left[ \frac{1}{2} L + \ln \frac{1}{1-x} \right], \quad i_s = x(1-x) \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L,$$

$$i_t = -(1-x) \int_1^{\rho^2 x^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L, \quad m_s = x^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2}, \quad m_t = \int_1^{\rho^2 x^2} \frac{dz_2}{z_2^2}.$$

Теперь мы можем записать вклад  $T$  в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \Sigma_T^{H(S+V)} = & \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \int_x^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \left\{ \left( \frac{1}{2} L + \ln \frac{x}{1-x} \right) \ln x - \right. \\ & - \text{Li}_2(1-x) + \frac{x^2 + 2x - 1}{4(1+x^2)} - \frac{2x \ln x}{1+x^2} - \\ & - \Theta(x^2 \rho^2 - z) \left[ \left( \frac{1}{2} L + \ln \frac{1}{1-x} \right) \ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x - \text{Li}_2(1-x) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1 + 2x - x^2}{4(1+x^2)} - \frac{2x \ln x}{1+x^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Тогда полный вклад излучения одного жесткого фотона из электронной линии с учетом виртуальных однопетлевых поправок и сопровождающего излучения мягкого фотона можно записать как сумму:

$$\Sigma^{H(S+V)} = \Sigma_{\eta}^{H(S+V)} + \Sigma_T^{H(S+V)},$$

которая приведена в выражении (4).

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### ВКЛАД ПОЛУКОЛЛИНЕАРНОЙ КИНЕМАТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ ДВУХ ФОТОНОВ ИЗ ОДНОЙ ЛЕПТОННОЙ ЛИНИИ

Альтернативой использованию приближения квазиреальных электронов [26] является прямой расчет вкладов различных диаграмм. Так как здесь мы работаем с логарифмической точностью, то можно ограничиться рассмотрением двух полуколлинеарных областей: 1) когда фотон с 4-импульсом  $k_1$

излучается под углом не большим, чем  $\theta_0 \ll 1$ , к направлению движения начального электрона; 2) когда фотон с импульсом  $k_1$  излучается внутри такого же конуса вокруг направления движения рассеянного электрона. В обоих случаях считается, что второй фотон не попадает ни в один из указанных конусов. Принимая во внимание тождественность фотонов с помощью статистического фактора  $1/2!$ , получаем дифференциальное сечение в виде

$$d\sigma_{SC}^{HH} = \frac{\alpha^4}{2\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp}{\pi} \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-x-\Delta} \frac{dx_1 dx_2}{x_1 x_2 x} \times \\ \times \delta(1-x_1-x_2-x) \int R \frac{d^2 \mathbf{k}_1^\perp}{\pi}, \quad (86)$$

где

$$Q_1^{-4} \int R \frac{d^2 \mathbf{k}_1^\perp}{\pi} = 2(\mathbf{q}_2^\perp)^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1^\perp}{\pi} \left\{ \frac{[1 + (1-x_1)^2][x^2 + (1-x_1)^2]}{x_1(1-x_1)^2(2p_1 k_1)(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \right\}_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{p}_1} + \\ + \left. \frac{x[1 + (1-x_2)^2][x^2 + (1-x_2)^2]}{x_1(1-x_2)^2(2q_1 k_1)(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \right\}_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{q}_1}.$$

В случае излучения коллинеарного фотона с импульсом  $\mathbf{k}_1$  вдоль импульса  $\mathbf{p}_1$  кинематические инварианты удобно представить в виде

$$2p_1 k_1 = \frac{Q_1^2}{x_1} [(\mathbf{k}_1^\perp)^2 + \sigma^2 x_1^2], \quad 2p_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2} (\mathbf{k}_2^\perp)^2,$$

$$2q_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2 x} [x \mathbf{q}_2^\perp - (1-x_1) \mathbf{q}_1^\perp]^2, \quad \mathbf{k}_2^\perp = -\mathbf{q}_2^\perp - \mathbf{q}_1^\perp,$$

а в случае излучения вдоль  $\mathbf{q}_1$  — в виде

$$2k_1 q_1 = \frac{Q_1^2}{x_1 x} [\sigma^2 x_1^2 + (x \mathbf{k}_1^\perp - \mathbf{q}_1^\perp)^2], \quad 2p_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2} (\mathbf{k}_2^\perp)^2,$$

$$2q_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2 x} (q_1^\perp - x q_2^\perp)^2, \quad k_2^\perp = q_2^\perp - q_1^\perp \frac{1-x_2}{x},$$

где  $Q_1^2 = \varepsilon^2 \theta_1^2$ ,  $\sigma^2 = m^2 / Q_1^2$ , и введено безразмерные векторы  $k_2^\perp$ ,  $q_1^\perp$  и  $q_2^\perp$  так, что  $(q_1^\perp)^2 = z_1$ , и  $\widehat{q_1^\perp q_2^\perp} = \varphi$ .

Интегрирование по  $d^2 k_1^\perp$  проводится с однологарифмической точностью:

$$Q_1^2 \int \frac{d^2 k_1^\perp}{\pi(2p_1 k_1)} \Big|_{k_1 \parallel p_1} = x_1 L, \quad Q_1^2 \int \frac{d^2 k_1^\perp}{\pi(2q_1 k_1)} \Big|_{k_1 \parallel q_1} = \frac{x_1}{x} L.$$

На этом этапе необходимо рассмотреть кинематические ограничения на переменные интегрирования  $\varphi$  и  $z_1$ . Рассмотрим условия на угол вылета второго фотона:

$$\left| \frac{k_2^\perp}{x_2} \right| > \theta_0, \quad \left| \frac{q_1^\perp}{x} - \frac{k_2^\perp}{x_2} \right| > \theta_0.$$

Первое условие не позволяет фотону попасть в коллинеарный конус вокруг направления движения начального электрона, а второе — конечного. В терминах переменных  $z_1$  и  $\varphi$  они представлены в виде набора условий:

$$i) 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\lambda^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2}}, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \lambda,$$

$$ii) 1 > \cos \varphi > -1, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| > \lambda,$$

$$iii) 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\frac{x^2}{(1-x_1)^2} \lambda^2 - (\sqrt{z_1} - \frac{x}{1-x_1} \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2} \frac{x}{1-x_1}},$$

$$\left| \sqrt{z_1} - \frac{x \sqrt{z_2}}{1-x_1} \right| < \lambda \frac{x}{1-x_1},$$

$$iv) 1 > \cos \varphi > -1, \quad \left| z_1 - \frac{x^2}{(1-x_1)^2} z_2 \right| > 2\lambda \sqrt{z_2} \frac{x^2}{(1-x_1)^2},$$

где  $\lambda = x_2 \theta_0 / \theta_1$ . Мы считаем, что  $\lambda \ll 1$ . Действительно, для параметра  $\theta_0$ , определяющего область коллинеарной кинематики, имеем  $\theta_0 \varepsilon \gg m$  или  $\theta_0 \gg 10^{-5}$  для энергий коллайдера LEP I. С другой стороны, имеем экспериментальные ограничения на параметр  $\theta_1$ :  $\theta_1 \geq 10^{-2}$ . Это позволяет в рамках заданной точности считать  $\lambda \ll 1$ .

Аналогично можно получить ограничения на область интегрирования и для случая, когда фотон с импульсом  $k_1$  попадает в коллинеарный конус вокруг направления движения рассеянного электрона.

В областях *ii*) и *iv*) мы можем провести интегрирование по азимутальному углу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \Big|_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{p}_1} = \frac{x_2 x Q_1^{-4}}{(1-x_1)z_1 - xz_2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{|z_2 - z_1|} - \frac{x(1-x_1)}{|x^2 z_2 - (1-x_1)^2 z_1|} \right],$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \Big|_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{q}_1} = \frac{x_2 x^3 (1-x_2)^{-2} Q_q^{-4}}{z_1 - z_2 \frac{x^2}{1-x_2}} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\left| z_1 - z_2 \frac{x^2}{(1-x_2)^2} \right|} - \frac{1-x_2}{|z_1 - x^2 z_2|} \right].$$

В областях *i*) и *iii*) имеем

$$\mathcal{I} = \int dz_1 \frac{d\varphi}{2\pi(z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2} \cos \varphi)} \Big|_{|\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \lambda} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int \frac{dz}{|z_1 - z_2|} \arctg \left\{ \frac{(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{|z_1 - z_2|} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right\},$$

где

$$\varphi_0 = \arccos \left( -1 + \frac{\lambda^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2}} \right).$$

В результате получаем

$$\mathcal{I} = 2 \ln 2.$$

Тогда полное выражение вклада полуколлинеарной кинематической области записывается в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{SC}^{HH} = & \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-x-\Delta} \frac{dx_1 dx_2 \delta(1-x-x_1-x_2)}{x_1 x_2 (1-x_1)^2} \times \\ & \times [1 + (1-x_1)^2][x^2 + (1-x_1)^2] \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \times \\ & \times \left\{ \ln \frac{z \theta_1^2}{\theta_0^2} [1 + \Theta(\rho^2 x^2 - z) + 2\Theta(\rho^2(1-x_1)^2 - z)] + \right. \\ & + \Theta(\rho^2 x^2 - z) \ln \frac{(z-x^2)(\rho^2 x^2 - z)}{x^2(z-x(1-x_1))(\rho^2 x(1-x_1) - z)} + \\ & + \Theta(z - \rho^2(1-x_1)^2) \left[ \ln \frac{(z - \rho^2(1-x_1)x)(z - (1-x_1)^2)}{(\rho^2(1-x_1)^2 - z)(z - x(1-x_1))} + \right. \\ & \left. + \ln \frac{(\rho^2(1-x_1) - z)(z - (1-x_1)^2)}{(\rho^2(1-x_1)^2 - z)(z - (1-x_1))} \right] + \Theta(z - \rho^2 x^2) \ln \frac{(z - \rho^2 x(1-x_1))(z - x^2)}{(\rho^2 x^2 - z)(z - x(1-x_1))} + \\ & + \Theta(\rho^2(1-x_1)^2 - z) \left[ \ln \frac{(z - (1-x_1)^2)(\rho^2(1-x_1)^2 - z)}{(\rho^2 x(1-x_1) - z)(z - x(1-x_1))(1-x_1)^2} + \right. \\ & \left. + \ln \frac{(z - (1-x_1)^2)(\rho^2(1-x_1)^2 - z)}{(\rho^2(1-x_1) - z)(z - (1-x_1))(1-x_1)^2} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] + \\
 & + 4 \left[ -2 \ln(1-x_c) - 2 \ln(1-\tilde{x}_c) + \int_{x_c}^1 dx (1+x) + \right. \\
 & \left. + \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x) \right] + 2 \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] \ln x + \\
 & + 2 \int_{x_c}^1 dx k(x, z) \frac{1+x^2}{1-x} \Bigg\}, \tag{88}
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{x}_c = \max(x_c, 1/\rho)$ , а величина  $k(x, z)$  задана в (21). Сингулярный вклад, связанный с излучением двух жестких фотонов, имеет вид (см. (46)):

$$\begin{aligned}
 (\Sigma^{HH})_{\Delta} &= \ln \Delta \left\{ \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [-(1, \rho^2) L_1 - (1, \rho^2 x^2) L_2 - \right. \\
 & - ((1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)) L_3] - \int_{x_c}^1 dx (3+x) - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (3+x) - \\
 & - 4 \ln \Delta + 4 \ln(1-x_c) + 4 \ln(1-\tilde{x}_c) - \\
 & \left. - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] \right\}. \tag{89}
 \end{aligned}$$

Теперь нетрудно убедиться во взаимном сокращении этих вкладов:

$$(\Sigma^{VV+VS+SS})_{\Delta} + (\Sigma^{H(S+V)})_{\Delta} + (\Sigma^{HH})_{\Delta} = 0. \tag{90}$$

Рассмотрим соответствующие вклады в  $\Sigma_Y^Y$ :

$$(\Sigma_{S+V}^{S+V})_{\Delta} = \ln \Delta (-14 - 8 \ln \Delta)(1, \rho^2),$$



$$\begin{aligned}
\left( \Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^{S+V} \right)_{\Delta} &= \ln \Delta \left\{ 2 \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} k(x, z) + \right. \\
&+ (1, \rho^2)[16 \ln \Delta + 14 - 8 \ln(1-x_c) - \\
&- 8 \ln(1-\tilde{x}_c) + 4 \int_{x_c}^1 dx (1+x) + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x)] + \\
&\left. + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] \right\}, \quad (91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \Sigma_H^H \right)_{\Delta} &= \ln \Delta \left\{ -8(1, \rho^2)[\ln \Delta - \ln(1-x_c) - \ln(1-\tilde{x}_c)] - \right. \\
&- 8 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{[(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)]}{1-x} - 2 \int_{x_c}^1 dx k(x, z) \frac{1+x^2}{1-x} - \\
&\left. - 4 \int_{x_c}^1 dx (1+x)[(1, \rho^2) + (1, \rho^2 x^2)] \right\}.
\end{aligned}$$

Преобразуя последнее слагаемое в  $\left( \Sigma_H^H \right)_{\Delta}$  с помощью тождества

$$\begin{aligned}
-4 \int_{x_c}^1 dx (1+x)[(1, \rho^2) + (1, \rho^2 x^2)] &= -4 \int_{x_c}^1 dx (1+x)(1, \rho^2) - \\
-4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x)(1, \rho^2) + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x)[(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)], \quad (92)
\end{aligned}$$

опять можно убедиться в сокращении  $\Delta$ -зависимости:

$$\left( \Sigma_{S+V}^{S+V} \right)_{\Delta} + \left( \Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^{S+V} \right)_{\Delta} + \left( \Sigma_H^H \right)_{\Delta} = 0. \quad (93)$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕДУЩИХ ВКЛАДОВ В  $\Sigma \mathcal{Y}$   
 В ТЕРМИНАХ ЯДЕР УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ

Здесь мы покажем, что ведущие логарифмические вклады могут быть представлены в виде, предсказываемом ренормализационной группой. Сумму приведенных выше вкладов в  $\Sigma \mathcal{Y}$ , выделив ведущие слагаемые, можно записать как

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{Y} = & 2 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \mathcal{L}^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ 2 \int_{x_c}^1 dx \delta(1-x) \left( \ln^2 \Delta + \frac{3}{2} \ln \Delta + \frac{9}{16} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \left( 2 \ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) (1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)) + \\ & + \frac{1}{4} \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \left[ 2 \frac{1+x^2}{1-x} \ln \frac{1-x-\Delta}{\Delta} + \frac{1}{2} (1+x) \ln x - 1 + x \right] \times \\ & \times [1 + 3\Theta(x^2 \rho^2 - z)] + \frac{1}{4} \int_{x_c}^1 dx \left[ 2 \frac{1+x^2}{1-x} \ln \left( \frac{1-x-\Delta}{\Delta} \frac{\rho - \sqrt{z}}{\sqrt{z} - \rho x} \sqrt{x} \right) + \right. \\ & \left. + x - 1 - \frac{1}{2} (1+x) \ln \frac{\rho^2}{z} + \frac{\sqrt{z}}{\rho} - \frac{x\rho}{\sqrt{z}} \right] \Theta(-x^2 \rho^2 + z) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (94)$$

Можно убедиться, что зависимость от  $\Delta$  в приведенном выше выражении сокращается. Покажем далее, что это выражение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{Y} = & \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha \mathcal{L}}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx \left\{ \frac{1}{2} P^{(2)}(x) [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)] + \right. \\ & \left. + \int_x^1 dt \frac{1}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) \Theta(t^2 \rho^2 - z) \right\}, \end{aligned} \quad (95)$$

где ядра уравнений эволюции (см. приложение 7)  $P$  и  $P^{(2)}$  приведены выше (см. (24), (50)). Преобразуем выражение (95) с помощью подстановки

$$\Theta(t^2 \rho^2 - z) = \frac{1}{2} (1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)) + \frac{1}{2} \Theta(z - x^2 \rho^2) - \Theta(z - t^2 \rho^2)$$

и изменим порядок интегрирования в последнем слагаемом:

$$\begin{aligned} \int_x^1 dt \int_{\rho^2 t^2}^{\rho^2} dz &= \int_{x^2 \rho^2}^{\rho^2} dz \int_x^{\sqrt{z}/\rho} dt = \\ &= \int_1^{\rho^2} dz \Theta(z - \rho^2 x^2) \int_x^{\sqrt{z}/\rho} dt. \end{aligned}$$

Проводя элементарное интегрирование по  $t$  и используя явные выражения для ядер, нетрудно убедиться в тождественности (95) и (94). Аналогично можно убедиться в справедливости представления (51) для  $\Sigma_\gamma^Y$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

### СЛУЧАЙ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕТЕКТОРОВ

Для определенности мы будем предполагать, что рассеянный электрон детектируется более широким кольцевым счетчиком с апертурой

$$\theta_1 < \theta_e^- < \theta_3,$$

а позитрон — более узким:

$$\theta_2 < \theta_e^+ < \theta_4,$$

причем

$$1 < \rho_2 < \rho_4 < \rho_3, \quad \rho_{2,3,4} = \theta_{2,3,4} / \theta_1.$$

Такое упорядочение характерно для экспериментов на LEP I. Вычисления, аналогичные приведенным в приложении 1, дают вклад излучения одного жесткого фотона:

$$\Sigma^{H(W)} + \Sigma_{H(N)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{1-\Delta} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \int_1^{\rho_3} \frac{dz}{z^2} \times$$

$$\times (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \{A + B + C + D\}, \quad (96)$$

$$\begin{aligned}
 A &= [\Theta(\rho_2 - x\rho_3)(\rho_2^2, \rho_4^2) + \\
 &+ \Theta(x\rho_3 - \rho_2) \Theta(\rho_4 - x\rho_3)(x^2\rho_3^2, \rho_4^2)] \ln \left| \frac{(x\rho_3^2 - z)(z - x^2)}{(x^2\rho_3^2 - z)(z - x)} \right| + \\
 &+ (\rho_2^2, \rho_4^2)(x^2, x^2\rho_3^2) \left[ L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{(x^2\rho_3^2 - z)(z - x^2)}{x^2(x\rho_3^2 - z)(z - x)} \right| \right], \\
 B &= (\rho_2^2, \rho_4^2) \left[ L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{x^2(\rho_3^2 - z)(z - 1)}{(x\rho_3^2 - z)(z - x)} \right| \right], \\
 C &= [ -((1, x^2\rho_2^2) - (x^2\rho_4^2, \rho_3^2)) \Theta(x\rho_2 - 1) + (1, \rho_3^2) \Theta(1 - x\rho_4) + \\
 &+ (x^2\rho_4^2, \rho_3^2) \Theta(1 - x\rho_2) \Theta(x\rho_4 - 1)] \ln \left| \frac{(x\rho_4^2 - z)(z - x^2\rho_2^2)}{(x^2\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| + \\
 &+ (1, \rho_3^2)(x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2) \left[ L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{(x^2\rho_4^2 - z)(z - x^2\rho_2^2)}{x^2(x\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| \right], \\
 D &= -[(1, \rho_2^2) - (\rho_4^2, \rho_3^2)] \ln \left| \frac{(x\rho_4^2 - z)(z - \rho_2^2)}{(\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| + \\
 &+ (\rho_2^2, \rho_4^2) \left[ L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{x^2(\rho_4^2 - z)(z - \rho_2^2)}{(x\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| \right].
 \end{aligned}$$

Слагаемые  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  отвечают, соответственно, вкладам излучения начального электрона, конечного электрона, начального и конечного позитрона. Отметим, что при  $\rho_2 = 1$  и  $\rho_4 = \rho_3 = \rho$  приведенный выше результат переходит в формулу (21).

Принимая во внимание поправки, связанные с излучением виртуальных и мягких фотонов, поправку в первом порядке ТВ представим в виде

$$\begin{aligned} (\Sigma \gamma)^{NW} = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_1^{\rho_3^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left\{ -2 + \right. \\ & \left. + \int_{x_c}^1 dx P(x) [(\rho_2^2, \rho_4^2)((1, \rho_3^2) + (x^2, x^2\rho_3^2)) + \right. \\ & \left. + (1, \rho_3^2)((\rho_2^2, \rho_4^2) + (x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2))] + \int_{x_c}^1 dx k(x, z)^{NW} \frac{1+x^2}{1-x} \right\}, \end{aligned}$$

где величина  $k(x, z)^{NW}$  получится из выражения в фигурных скобках в (96) при отбрасывании слагаемых, пропорциональных  $(L-1)$ .

Мы приведем также выражения для вкладов второго порядка ТВ в лидирующем логарифмическом приближении:

$$\begin{aligned} (\Sigma \gamma)^{NW} = & \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_{x_c}^{\rho_4^2} \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c/x_1}^1 dx_2 P(x_1) P(x_2) \times \\ & \times [(1, \rho_3^2) + (x_1^2, x_1^2\rho_3^2)][(\rho_2^2, \rho_4^2) + (x_2^2\rho_2^2, x_2^2\rho_4^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Sigma \gamma)^{NW} = & \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho_4^2} \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^1 dx \left\{ \frac{1}{2} P^{(2)}(x) \times \right. \\ & \times [(\rho_2^2, \rho_4^2)((1, \rho_3^2) + (x^2, x^2\rho_3^2)) + (1, \rho_3^2)((\rho_2^2, \rho_4^2) + (x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2))] + \\ & \left. + \int_x^1 \frac{dt}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) [(\rho_2^2, \rho_4^2)(1, t^2\rho_3^2) + (1, \rho_3^2)(\rho_2^2, t^2\rho_4^2)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Sigma e^+ e^-)^{NW} = & \frac{1}{8} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho_4^2} \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^1 dx \cdot R(x) \times \\ & \times [(\rho_2^2, \rho_4^2)((1, \rho_3^2) + (x^2, x^2\rho_3^2)) + (1, \rho_3^2)((\rho_2^2, \rho_4^2) + (x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2))]. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

ИТЕРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИПАТОВА

Сечение процесса  $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$  с учетом радиационных поправок к начальному состоянию как сечение процесса Дрелла — Яна записывается в виде

$$\sigma^{e\bar{e} \rightarrow h}(s) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \Theta(-2 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + x_1 + x_2) \mathcal{D}_e^e(x_1) \mathcal{D}_e^{\bar{e}}(x_2) \times \\ \times \sigma_0^{e\bar{e} \rightarrow h}(x_1, x_2, s) (1 - \Pi(x_1, x_2, s))^{-2} K,$$

где  $\sigma_0$  есть сечение без учета РП,

$$\Pi(s) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln \frac{s}{m^2} - \frac{5}{9} \right),$$

$K$  — множитель, учитывающий пеллидирующие поправки:

$$K = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right).$$

Структурные функции  $\mathcal{D}_a^b(x)$  описывают вероятность найти частицу сорта  $b$  с долей импульса  $x$  в частице сорта  $a$ . Они удовлетворяют уравнениям Липатова [11]:

$$\mathcal{D}_e^e(x, s) = \delta(1-x) + \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[ \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^e(y, t) P_e^e\left(\frac{x}{y}\right) + \right. \\ \left. + \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^\gamma(y, t) P_\gamma^e\left(\frac{x}{y}\right) \right],$$

$$\mathcal{D}_e^{\bar{e}}(x, s) = \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[ \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^{\bar{e}}(y, t) P_e^{\bar{e}}\left(\frac{x}{y}\right) + \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^\gamma(y, t) P_\gamma^{\bar{e}}\left(\frac{x}{y}\right) \right],$$

$$\mathcal{D}_e^\gamma(x, s) = -\frac{2}{3} \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \mathcal{D}_e^\gamma(x, t) + \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[ \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^e(y, t) P_e^\gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \right.$$

$$+ \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^{\bar{e}}(y, t) P_e^{\gamma} \left( \frac{x}{y} \right) \Big],$$

где

$$\alpha(t) = \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{t}{m^2} \right)^{-1}, \quad P_{\gamma}^e(z) = P_{\gamma}^{\bar{e}}(z) = z^2 + (1-z)^2,$$

$$P_e^e(z) = P_e^{\bar{e}}(z) \equiv P(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \Theta(1-z-\Delta) \frac{1+z^2}{1-z} + \delta(1-z) \left( \frac{3}{2} + 2 \ln \Delta \right) \right\},$$

$$P_e^{\gamma}(z) = P_e^{\gamma}(z) = \frac{1}{z} (1 + (1-z)^2).$$

Удобно представить  $\mathcal{D}_e^e$  в виде суммы синглетного и несинглетного вкладов:

$$\mathcal{D}_e^e = \mathcal{D}_{NS} + \mathcal{D}_S.$$

Один из них,  $\mathcal{D}_{NS}$ , допускает разложение в функциональный ряд:

$$\mathcal{D}_{NS}(x, \beta) = \delta(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{\beta}{4} \right)^k P^{*k}(x), \quad \beta = \frac{2\alpha}{\pi} L,$$

$$P^{*k}(x) = \underbrace{P(\bullet) \otimes P(\bullet) \otimes \dots \otimes P(x)}_k,$$

$$P_1(\bullet) \otimes P_2(x) = \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x - x_1 x_2) P_1(x_1) P_2(x_2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P_1(y) P_2 \left( \frac{x}{y} \right).$$

Явные выражения для ядер  $P^{(2)}(x)$  и  $P^{(3)}(x)$  приведены выше в тексте обзора. Отметим важное свойство  $P^{(k)}(x)$ :

$$\int_0^1 dx P^{(k)}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{97}$$

Для итераций удобно, следуя работе [24], ввести новые функции

$$\mathcal{D}_S = \mathcal{D}_e^{\bar{e}}, \quad \mathcal{D}_{NS} = \mathcal{D}_e^e - \mathcal{D}_S, \quad \mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_e^e + \mathcal{D}_e^{\bar{e}}.$$

Эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{D}_e^\gamma &= -\frac{\beta}{6} \mathcal{D}_e^\gamma + \frac{\beta}{4} \mathcal{D}_+ \otimes P_e^\gamma, \\ \mathcal{D}_+(x, \beta) &= \delta(1-x) + \frac{1}{4} \int_0^\beta d\eta \left\{ \mathcal{D}_+(\bullet, \eta) \otimes P(x) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\eta}{6}\right) \int_0^\eta dy \cdot \exp\left(\frac{y}{6}\right) \mathcal{D}_+(\bullet, y) \otimes R(x) \right\}, \\ R(x) &= P_e^\gamma(\bullet) \otimes P_e^\gamma(x) = \\ &= \frac{1-x}{3x} (4 + 7x + 4x^2) + 2(1+x) \ln x \equiv R_s(x). \end{aligned}$$

Для  $\mathcal{D}_s(x, \beta)$  имеем

$$\mathcal{D}_s = \frac{\beta^2}{32} R(x) + \frac{\beta^3}{6} \left[ \frac{1}{32} P(\bullet) \otimes R(x) - \frac{1}{96} R(x) \right].$$

В заключение отметим, что функция  $f(z)$ , связывающая сечения процессов образования системы конечных частиц  $X$  с инвариантной массой  $W$  при столкновениях  $e^+e^-$ -пучков и фотонных пучков, является сверткой двух ядер эволюции:

$$\begin{aligned} \sigma^{e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}X}(s) &\approx \left( \frac{\alpha}{2\pi} L \right)^2 \int_{z_{\text{th}}}^1 \frac{dz}{z} f(z) \sigma^{\gamma \rightarrow X}(zs), \\ f(z) &= \int_z^1 \frac{dx}{x} (1 + (1-x)^2) \left( 1 + \left( 1 - \frac{z}{x} \right)^2 \right) = (2+z)^2 \ln \frac{1}{z} - 2(1-z)(3+z), \\ f(z) &= P_e^\gamma(\bullet) \otimes P_e^\gamma(z), \quad L = \ln \frac{s}{m_e^2}, \quad z_{\text{th}} = \frac{W^2}{s}. \end{aligned}$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reports of the working groups on precision calculations for the Z resonance. Bardin D., Holik W., Passarino G. (eds.), — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995.
2. Jadach S., Melles M., Placzek W. et al. — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995, p.343 (and references therein).



3. **Jadach S., Richter-Was E., Ward B.F.L., Was Z.** — *Comp.Phys.Comm.*, 1992, vol.70, p.305; *ibid.* 1994, vol.79, p.503.
4. **Arbuzov A., Fadin V., Kuraev E. et al.** — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995, p.369; **Fadin V., Kuraev E., Lipatov L. et al.** — In: *Proc. of Tennessee Int. Sympos. on Radiative Corrections*, Ward B.F.L. (ed.), 1994, p.168.
5. **Cacciari M., Montagna G., Nicosini O., Piccini F.** — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995, p.389 (and references therein).
6. **Caffo M., Czyz H., Remiddi E.** — *Phys.Lett.*, 1994, vol.B327, p.369; *Int. J. Mod. Phys.*, 1993 vol.4, p.591; *Nuovo Cim.*, 1992, vol.A105, p.277.
7. **Yennie D.R., Frautschi S., Suura H.** — *Ann.Phys. (NY)*, 1961, vol.13, p.379.
8. **Berends F.A., Kleiss R., De Gausmaecker P. et al.** — *Phys.Lett.*, 1981, vol.B103, p.124; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1982, vol.B206, p.61; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1983, vol.B253, p.537; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1984, vol.B264, p.243.
9. **Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A., Kuraev E.A.** — *Phys.Rep.*, 1981, vol.78, p.294; **Budnev V.M., Ginzburg I.F., Meledin G.V., Serbo V.G.** — *Phys.Rep.*, 1975, vol.C15, p.183.
10. **Kuraev E.A., Lipatov L.N., Merenkov N.P.** — *Phys.Lett.*, 1973, vol.B47, p.33; Препринт ЛИЯФ, №46, Л., 1973; **Cheng H., Wu T.T.** — *Phys.Rev.*, 1969, vol.187, p.1868; **Кураев Э.А., Липатов Л.Н., Меренков Н.П., Фадин В.С., Трентаду Л.** — *ЯФ*, 1993, т.56, с.145.
11. **Липатов Л.Н.** — *ЯФ*, 1974, т.20, с.94.
12. **Altarelli G., Parisi G.** — *Nucl.Phys.*, 1977, vol.B126, p.298.
13. **Кураев Э.А., Фадин В.С.** — *ЯФ*, 1985, т.41, с.466; препринт ИЯФ 84-44, Новосибирск, 1984.
14. **Nicosini O., Trentadue L.** — *Phys.Lett.*, 1987, vol.B196, p.551.
15. **Budny R.** — *Phys.Lett.*, 1975, vol.55B, p.227; **Bardin D., Hollik W., Riemann T.** — Preprint MPI-PAE/Pth, 32/90, PHE90-9, 1990; **Boehm M., Denner A., Hollik W.** — *Nucl.Phys.*, 1988, vol.B304, p.687.
16. **Половин Р.В.** — *ЖЭТФ*, 1956, т.31, с.449; **Redhead F.A.** — *Proc.Roy.Soc.*, 1953, vol.220, p.219; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1974, vol.B68, p.541.
17. **Jegerlehner F.** — *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 1991, vol.27 p.1.
18. **Fäldt G., Osland P.** — University of Bergen, Report 1993—04, 1993.
19. **Barbieri R., Mignasco J.A., Remiddi E.** — *Nuovo Cim.*, 1972, vol.A11, p.824.
20. **Кураев Э.А., Меренков Н.П., Фадин В.С.** — *ЯФ*, 1987, т.45, с.486.
21. **Меренков Н.П.** — *ЯФ*, 1988, т.48, с.1073.
22. **Меренков Н.П.** — *ЯФ*, 1989, т.50, с.469.
23. **Arbuzov A.B., Kuraev E.A., Merenkov N.P. et al.** — *ЖЭТФ*, 1995, т.108, с.1164; JINR preprint E2-95-110, Dubna, 1995.
24. **Skrzypek M.** — *Acta Phys.Polonica*, 1992, vol.B23, p.135.
25. **Beenakker W., Pieterzyk B.** — *Phys.Lett.*, 1992, vol.B296, p.241; *ibid.* 1993, vol.B304, p.366.
26. **Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.** — In: *Perturbative QCD*, ed. by A.H.Müller, World Scientific Publ., 1989; **Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A.** — *Nucl.Phys.*, 1973, vol. B65, p.381.
27. **Кураев Э.А., Меренков Н.П., Фадин В.С.** — *ЯФ*, 1988, т.47, с.1009.