«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1996, ТОМ 27, ВЫП.5

УДК 539.12.01

КАЛИБРОВОЧНЫЕ УСЛОВИЯ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Л.В.Прохоров

Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

В обзоре обсуждаются принципиальные вопросы устранения произвола в калибровочных теориях. Подчеркивается роль расширенной по Дираку калибровочной группы и важность требования лишь слабой калибровочной инвариантности физических величин. В квантовых теориях отмечается принципиальное различие между динамическими и нединамическими калибровками. Главным образом на примере электродинамики наиболее популярные калибровки анализируются с точки зрения роли, отводимой физическим степеням свободы. Выяснена ключевая роль калибровки Фока. Подробно рассмотрены простейшие квантово-механические модели, иллюстрирующие некоторые утверждения, касающиеся полевых систем. Обсуждаются различные типы калибровочных преобразований и их физический смысл, подчеркнута принципиальная разница между локальными и глобальными преобразованиями.

The principal problems of gauge fixation in field theories and mechanical models are discussed. It is stressed the importance of the Dirac extended gauge group and of the weak gauge invariance of the physical quantities. The importance of distinguishing of dynamical gauges from nondynamical ones is pointed out. Mainly in electrodynamics the role of the physical degrees of freedom in some popular gauges is analysed. It is shown the key role of the Fock gauge. The principal difference between local and global gauge transformations and their physical sense is elucidated. Some mechanical models are investigated in detail.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Калибровочная инвариантность. Все известные взаимодействия полей — сильное, электромагнитное, слабое, гравитационное — обладают свойством локальной калибровочной инвариантности. Следовательно, принцип калибровочной инвариантности есть фундаментальный принцип физики. Он заключается в утверждении, что фундаментальные поля, фигурирующие в лагранжиане, допускают преобразования с произвольными функциями координат и времени x, не меняющими лагранжиан (действие).

В случае электромагнитного поля, описываемого вектор-потенциалом $A_\mu(x)$ [1], это хорошо известные градиентные преобразования*

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \psi \to e^{ie\Lambda}\,\psi, \quad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right), \tag{1.1}$$

где $\Lambda = \Lambda(x)$ — произвольная скалярная функция, $\psi = \psi(x)$ — заряженное поле, e — электрический заряд. В случае полей Янга — Миллса [3—5], описываемых векторными потенциалами A_μ со значениями из алгебры Ли некоторой полупростой группы G, это преобразования вида

$$A_\mu \to UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}\,U\partial_\mu U^{-1}, \quad \psi \to U\psi, \tag{1.2}$$

где $U = U(x)$ есть элемент неабелевой калибровочной группы, ψ — «поле материи». Так преобразуются глюонные поля и поля кварков ($G = SU(3)_c$, сильное взаимодействие [6—8]), а также бозонные и фермионные поля в исходном лагранжиане электрослабых взаимодействий [9,10] ($G = SU(2)\times U(1)$). В теории гравитации [11,12] это общековариантные преобразования координат x^μ:

$$x' = x'(x) \tag{1.3}$$

и соответствующие преобразования тензоров $T^{\mu\cdots}$:

$$T'^{\mu\cdots} = \Lambda^\mu_\nu(x)\ldots T^{\nu\cdots}(x), \quad \Lambda^\mu_\nu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{1.4}$$

Свойством калибровочной инвариантности в указанном выше смысле обладают также действие релятивистской частицы [13,14]:

$$S = -m\int\sqrt{\dot{x}^2}\,d\tau, \quad \dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau \tag{1.5}$$

(τ — «инвариантное время», калибровочное преобразование: $\tau \to \tau' = \tau'(\tau)$, $x'(\tau') = x(\tau)$), действие струны Намбу — Гото [13—19] и суперструны [13—16]. К примеру, действие Намбу — Гото [17—19]:

$$S = -\gamma\int\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2}\,d\tau d\sigma, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad x'^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}, \quad \gamma = \text{const} \tag{1.6}$$

инвариантно относительно преобразований репараметризации

$$\tau \to f_1(\tau,\sigma), \quad \sigma \to f_2(\tau,\sigma), \tag{1.7}$$

*Термин предложен Фоком, см. [2, с.91].

поскольку оно пропорционально площади двумерной поверхности в пространстве-времени, заметаемой струной*.

Для всех взаимодействий, кроме гравитационного, динамическими переменными являются вектор-потенциалы. Они трактуются как связности в главном расслоенном пространстве (база — пространство Минковского, слой — калибровочная группа) [21,22] и при калибровочных преобразованиях преобразуются неоднородно. В случае гравитации роль динамических переменных играют компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}(x)$. Связность в теории тяготения согласована с метрикой (символы Кристоффеля выражаются через $g_{\mu\nu}$), в силу чего именно метрический тензор играет главную роль. Отметим попутно (нам еще придется возвращаться к этому вопросу), что связности, ввиду их калибровочной неоднозначности, нередко считаются нефизическими объектами, в отличие от тензоров, преобразующихся однородно. Это, конечно, недоразумение. Любая величина, меняющаяся при калибровочных преобразованиях (однородно или неоднородно), содержит нефизические компоненты. Присутствие последних и определяет нетривиальность закона преобразования, т.е. неинвариантность связности или тензоров. Именно поэтому проблема нефизических степеней свободы существует и в теории тяготения.

1.2. Калибровочные условия. Итак, в калибровочных теориях имеются нефизические степени свободы, обеспечивающие релятивистскую инвариантность или общую ковариантность формализма. Закон их изменения со временем не фиксируется уравнениями движения, следующими из вариационного принципа Гамильтона, т.е. решения последних содержат функциональный произвол. На первый взгляд, в классической физике имеются, по крайней мере, три возможности распорядиться калибровочными переменными: 1) фиксировать их; 2) переформулировать теорию в терминах лишь инвариантных переменных; 3) изгнать из лагранжиана, например, положив их равными нулю. Оказывается, что эти возможности неравноценны. Третья из них радикально меняет динамику физических степеней совбоды (см. разд.3), а вторая даже в сравнительно простых моделях может невообразимо усложнить вычисления [23]. Поэтому практически используется лишь первая возможность. Лагранжиан или действие явным образом не содержат никаких указаний на предпочтительность той или иной зависимости нефизических степеней свободы от времени, поэтому способ их фиксации полностью зависит от фантазии автора. Ясно, что здесь имеется широкий простор для творчества. За время, прошедшее после создания электродинамики и теории тяготения, было предложено множест-

*Впервые динамика одномерных объектов изучалась в работах [20].

во различных калибровочных условий (калибровок), устраняющих произвол. Их число возросло с открытием квантовой теории, и особенно в связи с изучением полей Янга — Миллса [3—5]. Перечислим некоторые, наиболее употребительные из них*.

1. Калибровка Л.Лоренца [24]:

$$\partial_\mu A_\mu = 0. \tag{1.8}$$

Иногда ее называют калибровкой Ландау.

2. Кулоновская или радиационная калибровка

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{1.9}$$

Впервые она встречается у Максвелла [1, т.2, с.213], поэтому было бы уместным именовать ее калибровкой Максвелла.

3. Калибровка Вейля [25]:

$$A_0 = 0. \tag{1.10}$$

Это естественная калибровка, вытекающая из структуры лагранжиана электромагнитного поля (см. разд.2). Ее называют также гамильтоновой (неудачно). В англоязычной литературе употребляется термин *temporal gauge*. Связать калибровку (1.10) с именем Вейля предложил Джакив [26].

4. Калибровка Арновита — Фиклера [27] или аксиальная калибровка

$$A_3 = 0. \tag{1.11}$$

5. Светоподобная калибровка (*light-cone gauge*)

$$nA = 0, \quad n^2 = 0 \quad (nA \equiv n_\mu A_\mu \equiv g^{\mu\nu} n_\mu A_\nu). \tag{1.12}$$

Калибровки (1.10)—(1.12) можно записать в виде

$$nA = 0. \tag{1.13}$$

При $n^2 = n_0^2 - \mathbf{n}^2 = 1$ мы имеем калибровку Вейля, а при $n^2 = -1$ — калибровку Арновита — Фиклера. Аксиальными иногда называют любые калибровки вида (1.13).

6. Калибровки Фока [28—30]:

$$x_\mu A_\mu(x) = 0 \tag{1.14}$$

или

$$(x - x_0)_\mu A_\mu(x) = 0. \tag{1.15}$$

*Автор не ставит цели перечисления всех появившихся в литературе калибровочных условий — это практически невозможно, да и не нужно — «естественный отбор» отсеял малополезные.

Эту калибровку иногда называют калибровкой Фока — Швингера [31] (Швингер был первый, кто оценил ее достоинства).

Калибровочные условия обычно добавляют к уравнениям движения, т.е. закон изменения нефизических переменных задают непосредственно. Но его можно фиксировать и другим способом, видоизменив исходный лагранжиан, а именно добавив к нему член, нарушающий калибровочную инвариантность и позволяющий написать уравнения движения для нефизических переменных. Чаще всего к лагранжиану добавляют следующие слагаемые $\mathcal{L}'$, фиксирующие калибровку (фиксаторы калибровки).

7. Калибровка Гейзенберга — Паули [32,33]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2, \tag{1.16}$$

где α — произвольный параметр. Случай $\alpha = 1$ отвечает калибровке Фейнмана, а случай $\alpha = 0$ — калибровке Лоренца. Иногда калибровки вида (1.16) называют калибровками класса Ферми [34—37], хотя в первых работах Ферми явным образом не прибавлял к лагранжиану фиксирующие члены.

8. Калибровка т'Хофта [38]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu - \alpha m \operatorname{Im} \varphi)^2, \tag{1.17}$$

где φ — скалярное комплексное поле. Добавочный член $\mathcal{L}'$ выбирается из условия сокращения смешанных членов $A_\mu \partial_\mu \varphi$ в эффективных лагранжианах, описывающих феномен Хиггса [39,9,10] (см. также [40, с.443]). Это не единственная калибровка, предложенная т'Хофтом. При исследовании теорий с перестройкой вакуума может оказаться полезной следующая [41]. Если ϕ — поле Хиггса и $\chi = \arg \phi$, то требуем: $\chi + \beta^{-2}\partial_\mu A_\mu = 0$, или

$$\mathcal{L}' = 2ea^2\beta^2 \cos(\chi + \beta^{-2}\partial_\mu A_\mu). \tag{1.18}$$

Здесь β — некоторая константа, имеющая размерность массы, $a = \langle \phi \rangle_0$, e — электрический заряд. В этой калибровке фиктивные поля отщепляются. При $\beta \to \infty$ получается унитарная калибровка (нефизические поля не распространяются). Упомянем еще так называемую абелеву калибровку [41,42]. Ее название связано с выделением в неабелевой группе абелевой подгруппы. Например, для группы $SU(2)$ это $U(1)$ с соответствующим разбиением векторного поля $W_\mu^a \to (A_\mu, W_\mu^\pm)$, $W_\mu^3 = A_\mu$, $W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$, $a = 1,2,3$. Фиксатор калибровки берется в виде

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\beta}(D_\mu W_\mu^+)(D_\mu W_\mu^+)^*, \quad D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu. \tag{1.19}$$

Первый член в (1.19) нарушает инвариантность относительно абелевой подгруппы; $\mathcal{L}'$ нарушает даже глобальную $SU(2)$-симметрию, вследствие чего перенормировочные постоянные полей A_μ и $W_\mu^\pm$ в этой калибровке оказываются разными [42].

9. Калибровка т'Хофта — Вельтмана [43]. Широту возможностей, которые открывает калибровочный произвол, демонстрирует калибровка т'Хофта — Вельтмана [43]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu - \frac{1}{2}\alpha e A_\mu^2)^2 \tag{1.20}$$

в электродинамике (α — параметр). В этой калибровке имеются все атрибуты неабелевой теории: вспомогательные антикоммутирующие поля и нетривиальное самодействие электромагнитного поля (3- и 4-фотонные вершины). Тем не менее теория эквивалентна стандартной — в [43] это проверено в низшем порядке теории возмущений.

10. Планарная калибровка [44—46,31]:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2\alpha n^2} nA\Box nA, \quad \Box = -\partial_\mu^2, \quad n^2 \neq 0. \tag{1.21}$$

Это одна из нескольких калибровок, предложенных Куммером в работе [44]. Среди них, помимо известных (1.8)—(1.13), имеется такая:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}[(n\partial)nA]^2. \tag{1.22}$$

Развитием калибровочного условия, применявшегося Липатовым [45] при изучении процессов глубоконеупругого рассеяния ($n^2 \to 0$ в (1.21), см. разд.4), явилась планарная калибровка работы [46] ($n^2 \neq 0$, $\alpha \to 1$ в (1.21)).

11. Калибровка фонового поля [47,48] (см. также превосходный обзор [49]):

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu q_\mu - igA_\mu q_\mu)^2. \tag{1.23}$$

Здесь A_μ и q_μ — «фоновое» (классическое) и квантовое (вспомогательное) поля в разбиении квантуемого поля

$$A_\mu^q = q_\mu + A_\mu. \tag{1.24}$$

Такое разбиение используется при изучении эффективных лагранжианов [50—53]. Существо дела заключается в постулировании однородного закона преобразования для q_μ и неоднородного для A_μ, т.е. при калибровочных преобразованиях поле q_μ преобразуется как тензор, а поле A_μ — как связность. Разбиение (1.24) допустимо, ибо сумма «тензор плюс связность» преобразуется как связность. Данный прием позволяет развить квантовую теорию калибровочных полей без потери явной калибровочной инвариантности, в частности, удобную схему вычислений калибровочно-инвариантных эффективных лагранжианов [49]. Он эффективен также в теории тяготения [54] и супергравитации [55].

В принципе можно строить новые калибровочные условия, комбинируя известные. Получающиеся таким образом калибровки обычно зависят от параметров. Они могут оказаться полезными в конкретных задачах. Приведем примеры таких параметрических или интерполирующих калибровок.

12. Класс «калибровок потока» [56]:

$$A_0 = Z[\mathbf{A}], \tag{1.25}$$

где $Z[\mathbf{A}]$ есть некоторый функционал. Авторы называют эти калибровки «*flow gauges*», потому что уравнение, устраняющее произвол,

$$\dot{U} + ig(A_0 U - UZ[\mathbf{A}^U]) = 0 \tag{1.26}$$

(оно следует из условий $A_0^U = Z[\mathbf{A}^U]$, $A_\mu^U \equiv U^{-1}[A_\mu + (ig)^{-1}\partial_\mu]U)$, «определяет поток, известный из нелинейной динамики» [56]. Частным случаем (1.26) служит калибровка

$$\beta A_0 = \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad 0 < \beta < \infty. \tag{1.27}$$

При $\beta \to 0$ или $\beta \to \infty$ это условие превращается, соответственно, в калибровку Максвелла (1.9) или в калибровку Вейля (1.10). В классе калибровок (1.25) содержатся нелокальные калибровки [56]:

$$\alpha A_0 = (-\Delta)^{-1/2} \operatorname{div} \mathbf{A}, \qquad \Delta = \partial^2 . \tag{1.28}$$

Параметр α безразмерен (в отличие от β в (1.27), имеющего размерность массы). В калибровке с фиксатором

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(\beta A_0 - \partial \mathbf{A})^2 \tag{1.29}$$

отсутствуют инфракрасные расходимости (по крайней мере, в однопетлевом приближении [56]).

13. Параметрическая калибровка, задаваемая фиксирующим членом [57,58]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{6\beta^2}\,\partial A(\Box - \beta^2)\partial A. \tag{1.30}$$

При $\beta \to \infty$ получается калибровка Фрида — Йенни [59], а при $\beta \to 0$ — по существу, калибровка Лоренца.

Класс калибровок Ферми (1.16) также попадает в разряд интерполирующих, поскольку его частными случаями являются калибровки Фейнмана ($\alpha = 1$), Лоренца ($\alpha = 0$) и Фрида — Йенни ($\alpha = 3$). Нетрудно придумать промежуточную калибровку и для других условий, например,

$$\alpha \dot{A}_0 - \partial \mathbf{A} = 0. \tag{1.31}$$

При $\alpha = 1,0$ она превращается, соответственно, в калибровки Лоренца и радиационную, а при $\alpha \to \infty$ получается неоднородная калибровка Вейля (1.10), $A_0 = f(x)$, $\partial_0 f = 0$.

Калибровочные условия (1.8)—(1.23), (1.25), (1.27)—(1.31) написаны в форме, естественной для электродинамики. Их обобщение на неабелевы теории сводится к замене $A_\mu \to A_\mu^a$ (и $\varphi \to \varphi^a$ в (1.17)), где $a = 1,\dots,N$, $N = \dim X$ (X — алгебра Ли калибровочной группы). Пояснения требует лишь калибровка фонового поля (1.23), в которой необходимо произвести еще и замены $q_\mu \to q_\mu^a$, $A_\mu q_\mu \to if^{abc} A_\mu^b q_\mu^c$, f^{abc} — структурные постоянные группы. Следует упомянуть также так называемые контурные калибровки, появляющиеся при работе с P-экспонентами и формально относящиеся к разряду нелокальных [60].

14. «Тензорные» калибровочные условия. В приведенных примерах калибровочный произвол устранялся фиксированием связности. В принципе его можно устранять, фиксируя любую нетривиально преобразующуюся величину, например, тензор. Так, если скалярное поле φ преобразуется как «изовектор» (калибровочная группа $SO(n)$), то $n - 1$ нефизических переменных устраняются условиями

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 0. \tag{1.32}$$

Данный пример иллюстрирует утверждение, что тензоры не могут считаться более физическими объектами, чем связности — те и другие содержат как физические, так и нефизические компоненты. Здесь необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Размерность группы $SO(n)$ равна $D = n(n-1)/2$, т.е. число калибровочных параметров равно D, тогда как тензор первого ранга φ имеет лишь n компонент, и $n < D$ для $n > 2$. Парадокс разрешается просто: стационарная подгруппа вектора φ есть $SO(n-1)$, т.е. $D' = (n-1)(n-2)/2$ генераторов группы $SO(n)$ аннулируют вектор φ. Остается $D - D' = n - 1$ параметров, которые и фиксируются. Следовательно, эта калибровка будет неполной — $(n-1)(n-2)/2$ калибровочных параметров останутся произвольными.

15. В теории тяготения число применяемых калибровок не столь велико. Наиболее популярна калибровка Дедондера — Ланцоша — Фока [61—63]:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = 0. \tag{1.33}$$

Очевидно, это условие является аналогом условия Лоренца (1.8). Оно определяет так называемые «гармонические координаты». Последние удовлетворяют уравнению Даламбера

$$\Box x^\nu = 0, \tag{1.34}$$

где $\Box \equiv -(-g)^{-1/2}\partial_\mu \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu$. Но $\Box x^\nu = -(-g)^{-1/2}\partial_\mu (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})$, т.е. условие (1.34) обеспечивает гармоничность координат. Отметим, что и в условии Лоренца (1.8) остающийся произвол ограничивается уравнением Даламбера $\Box\Lambda = 0$ (см. (1.1)). Это уже не калибровочный произвол, поскольку он полностью устраняется заданием начальных условий. В РТГ (релятивистская теория гравитации) условиям (1.33) придается статус уравнений поля [64].

16. Изучались и другие калибровки, например, калибровка светового конуса [65,66], которая записывается так:

$$n^\mu g_{\mu\nu}, \quad n^2 = 0. \tag{1.35}$$

Аналогом калибровки Вейля (1.10) является условие

$$g^{\mu 0} = 0. \tag{1.36}$$

Дирак установил [67], что остающийся произвол, связанный с выбором координат на гиперповерхности $t = 0$, лучше всего устранять, требуя

$$\partial_i \tilde{g}^{ik} = 0, \quad \tilde{g}^{ik} = g^{ik}(\det g_{ik})^{1/3}, \quad i, k = 1,2,3. \tag{1.37}$$

В гамильтоновом формализме равенство (1.37) понимается в слабом смысле, т.е. его следует принимать во внимание лишь после вычисления скобок Пуассона.

Проблема устранения калибровочного произвола в теории струн и суперструн в принципе не отличается от таковой в полевых теориях. Например, для струны с действием Намбу — Гото (1.6) естественной является ортонормальная калибровка [13]:

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad \dot{x}x' = 0, \tag{1.38}$$

означающая переход к конформным (ортонормальным) координатам на поверхности, заметаемой струной. Применяются и другие калибровочные условия, в особенности калибровка светового конуса (подробнее см. в [13—16,31]).

Особо следует остановиться на так называемом «методе БРСТ» [68—70]. В формализм вводятся вспомогательные (фиктивные) скалярные антикоммутирующие поля. Фиксирующий калибровку член $\mathcal{L}'$ вместе с лагранжианом фиктивных полей $\mathcal{L}''$ оказывается инвариантным относительно глобальных суперсимметричных преобразований (см. разд.2). В данном подходе калибровочные (нефизические) степени свободы есть четные элементы грассмановой алгебры. Явное нарушение локальной калибровочной инвариантности имеет формальный характер — роль нефизических степеней свободы передается вспомогательным грассмановым полям, поэтому теория сохраняет все свойства, вытекающие из калибровочной инвариантности исходного лагранжиана. Выясняется, что именно данный формализм наиболее удобен для вывода тождеств Уорда [71]. Обобщение метода на случай нелинейных калибровок дано в [72].

Обилие калибровок порождает вопросы:

— Каковы особенности той или иной калибровки?

— Имеются ли предпочтительные калибровки?

— Вполне ли произвольны произвольные функции в формулах (1.1)—(1.3)?

— Есть ли ограничения на фиксирующие калибровку члены $\mathcal{L}'$? Какие?

— Как переносить классические калибровочные условия на квантовую теорию?

Чтобы разобраться в множестве калибровок, их нужно как-то классифицировать. Обычно используются следующие критерии.

Релятивистская инвариантность. Калибровки (1.8), (1.14)—(1.20), (1.23), (1.30), (1.32), (1.33), (1.38) относятся, очевидно, к разряду лоренц-инвариантных, тогда как в остальных релятивистская инвариантность нарушается явным образом. Калибровка Фока — Швингера нарушает инвариантность относительно сдвигов $x \to x + a$.

Линейность. Устраняющие произвол условия могут быть линейными или нелинейными относительно калибровочных полей (A_μ) и полей материи. Например, функционал в правой части уравнения (1.25) может быть нелинейным.

Однозначность. Калибровочное условие может иметь несколько или даже бесконечно много решений [73—76,23].

Наличие «духов» (появление в формализме фиктивных полей [77,78]). Необходимость привлечения нефизических скалярных антикоммутирующих полей возникает для калибровок типа (1.8), (1.9), (1.16) в теориях с неабелевой калибровочной группой [77,78], а для калибровки (1.20) — и в электродинамике.

Локальность. Локальные калибровочные условия связывают поля и их производные в одной и той же точке. Примером нелокальной калибровки служит условие (1.28).

Ренормируемость и унитарность. Калибровки, в которых теория имеет явно перенормируемый вид (по «счету степеней»), называются R-калибровками. Примерами могут служить калибровки (1.16), (1.17). Калибровки, в которых S-матрица имеет явно унитарный вид (нефизические поля не распространяются), называются U-калибровками [42]. Примером служит калибровка (1.17) при $\alpha \to \infty$ (пропагатор векторного поля в этом случае не убывает при стремлении импульса к бесконечности).

Однородность. Если, например, вместо (1.8) взять

$$\partial_\mu A_\mu = f(x), \tag{1.39}$$

где f — некоторая функция (или поле), то такая калибровка называется неоднородной.

Размерность. Калибровочные условия иногда различают по их размерности. Например, калибровка Лоренца (1.8) имеет размерность 2 ($[\partial_\mu A_\mu] = M^2$), а калибровки (1.13) — размерность 1 ($[nA] = M$).

Алгебраические калибровки [79] — в этом случае компоненты калибровочных полей связаны алгебраическими условиями. Примеры: (1.10)—(1.15), (1.32), (1.35), (1.36).

Неполные калибровки. Если калибровочное условие полностью устраняет произвол, то калибровка называется полной (*complete*), в противном случае — неполной (см. разд.3,4).

Динамические и нединамические калибровки. Их полезно различать главным образом в связи с переходом к квантовому описанию. Калибровки, задаваемые алгебраическими условиями или (в лагранжевом формализме) дифференциальными уравнениями не выше первого порядка по времени, назовем нединамическими. Калибровки, задаваемые включением в лагранжиан членов $\mathcal{L}'$, квадратичных по скоростям нефизических компонент, назовем динамическими. В классической теории такое деление не имеет особого смысла; например, лоренцевская (1.8) (нединамическая) и фейнмановская (1.16), $\alpha = 1$ (динамическая) калибровки ведут к одним и тем же уравнениям движения (разд.4). В квантовой теории нединамические калибровочные условия есть условия на канонические переменные; но нельзя требовать, например, исчезновения одной из канонических переменных — это ведет к нарушению канонических перестановочных соотношений. Динамические калибровки позволяют обойти эту проблему.

1.3. Калибровочные преобразования. Много вопросов порождает и связанная с проблемой калибровочных условий, но не идентичная ей проблема выбора калибровочных функций. Традиционно считается, что функция $\Lambda(x)$ в (1.1) абсолютно произвольна. Разумеется, это не так — она не может быть вполне произвольной. Калибровочные преобразования не могут менять природу полей, поэтому она не может быть ни комплексной функцией — поле A_μ вещественно, ни 4-вектором, ни образующей грассмановой алгебры и т.д. Это только самые очевидные ограничения на класс допустимых преобразований. Для физики существенны и более тонкие характеристики функции $\Lambda(x)$ в (1.1) и матриц $U(x)$ в (1.2) (более подробное обсуждение этого вопроса см. в разд.5). Различают следующие классы преобразований: локальные, глобальные, большие, сингулярные, суперсимметричные.

Глобальные преобразования, в отличие от локальных, характеризуются групповыми параметрами, не зависящими от координат и времени*. Для их осуществления достаточно задать генераторы и параметры калибровочных преобразований. Появление еще одного понятия — «большое преобразование» [26] — связано с топологией пространства и полей. Согласно (1.2) поле $U\partial_\mu U^{-1}$ — чисто калибровочное, т.е. отвечающий ему тензор напряженности равен нулю: $F_{\mu\nu}=0$. Следовательно, устанавливая закон убывания полей при $|\mathbf{x}|\to\infty$, мы не вправе требовать их исчезновения: $A_\mu\to 0$. Можно потребовать лишь $F_{\mu\nu}\to 0$, т.е. $A_\mu\to U\partial_\mu U^{-1}$. Невинное, на первый взгляд, ослабление асимптотического условия имеет глубокие следствия. Пусть $U(x)\equiv U_x\to U_\infty$ при $|\mathbf{x}|\to\infty$. Если данный предел не зависит от направления $\mathbf{x}$, то это означает, что мы фактически перешли от R^3 к S^3, т.е. компактифицировали 3-мерное евклидово пространство, дополнив его бесконечно далекой точкой. Но $U(x)\in G$, т.е. $U(x)$ осуществляет отображение $S^3\to G$. Из топологии известно, что множество таких отображений разбивается на топологически неэквивалентные классы, характеризуемые топологическими числами [81]. Для $G=SU(2)$ это [26]:

$$n=\frac{1}{24\pi^2}\int d^3x\,\mathrm{Tr}\,[U\partial_i U^{-1}U\partial_j U^{-1}U\partial_k U^{-1}]\,\varepsilon^{ijk}, \tag{1.40}$$

где ε^{ijk} — единичный антисимметричный тензор. Поля из разных классов не могут быть переведены друг в друга преобразованиями с непрерывными калибровочными параметрами (см. разд.5).

*Устаревшие названия для глобальных и локальных преобразований — калибровочные преобразования 1-го и 2-го рода соответственно [80].

Большими называют преобразования, переводящие поля из одного класса в другой [26, с.667], т.е. преобразования U с $n \neq 0$. Важно то, что все «вакуумные поля» $A_\mu = U\partial_\mu U^{-1}$ разных классов имеют нулевые тензоры $F_{\mu\nu}$, т.е. отвечают нулевой классической энергии. Потенциальная энергия калибровочного поля имеет, таким образом, счетное множество минимумов, разделенных потенциальными барьерами.

Сингулярные калибровочные преобразования возникают в теории магнитного монополя. Монополь Дирака представляет собой магнитный полюс с выходящей из него магнитной нитью [82,83,40]. Данная конструкция являла бы монополь, если бы нить была ненаблюдаемой. В этом случае перемещение нити отвечало бы операции с нефизическим объектом и, можно ожидать, обеспечивалось бы калибровочным преобразованием. Такое «калибровочное» преобразование действительно можно придумать, но оно не описывается однозначной функцией Λ. Если контур обхода вокруг неперемещенной нити не охватывает нить в конечном положении, то значение функции Λ после обхода контура не совпадает с ее первоначальным значением. Нить является линией сингулярности Λ, отсюда название преобразования [40,84]. Перемещение нити, однако, нельзя признать нефизической операцией, поскольку сама нить не может быть нефизическим объектом — поток магнитного поля через нее отличен от нуля (см. вступительную статью в [83]). Отказ от требования непрерывности Λ ведет к преобразованиям, меняющим физику.

Суперсимметричные калибровочные преобразования. Вскоре после открытия суперсимметрии [85—88] (см. также [89—92]) была предложена супергравитация [93—94] — как результат перехода от глобальной суперсимметрии к локальной. В этой теории калибровочные параметры есть элементы грассмановой алгебры — параметры глобальных суперсимметричных преобразований становятся функциями координат. О физическом смысле локальной суперсимметрии известно еще меньше, чем о калибровочной симметрии, хотя можно не сомневаться в ее важности для физики.

Из других проблем, связанных с калибровочной инвариантностью, выделим следующие. Весьма важна проблема фиксатора калибровки $\mathcal{L}'$. Нетрудно привести примеры, когда $\mathcal{L}'$ хотя и нарушает калибровочную инвариантность, не снимает вырождения лагранжиана (например, $\mathcal{L}' = m^2 A_\mu^2/2$), или даже ведет к противоречивой динамике [95] ($\mathcal{L}' = x^\mu A_\mu$, подробнее см. разд.4).

Далее необходимо сказать о *расширенной по Дираку* [96] *группе калибровочных преобразований* (см. разд.2). Дело в том, что совокупность нефизических степеней свободы не идентична совокупности калибровочных параметров исходного лагранжиана. Анализ показывает, что кроме первичных связей (их число равно числу параметров калибровочной группы) имеются еще и вторичные связи [97,98]. Они свидетельствуют о наличии дополнительной совокупности нефизических переменных. Обычно закон изменения со временем этих последних полностью определяется законом изменения первых, отвечающих первичным связям. Но, в принципе, этот закон можно задать независимо, т.е. реальный произвол теории шире. Теория, в которой число калибровочных (произвольных) параметров равно числу всех связей первого рода (и первичных, и вторичных), называется теорией с расширенной калибровочной группой.

Наконец, само понятие калибровочной инвариантности требует уточнения. Стандартный лагранжиан калибровочной теории не меняется при калибровочных преобразованиях. В этом случае говорят о сильной калибровочной инвариантности. Существуют, однако, физические объекты, изменение которых пропорционально связям, т.е. они не меняются лишь с учетом связей (говорят: «инвариантны на связях»). В этом случае имеет место *слабая калибровочная инвариантность*. Примером такого объекта служит гамильтониан (см. разд.2).

Уже из сказанного становится ясно, что теория калибровочных полей достаточно сложна и далека от завершенности. Проблемам выбора и тонкостям применения различных калибровок посвящена огромная литература. Для изложения их в полном объеме потребуется книга. В данном обзоре обсуждаются лишь некоторые принципиальные вопросы, связанные с калибровочной инвариантностью теорий. Внимание при этом обращается главным образом на роль, которая отводится физическим и нефизическим степеням свободы при том или ином выборе калибровки. Здесь лишь вскользь затрагиваются вопросы фиксации калибровки в гравитации и струнах. Не обсуждаются и проблемы вычислений в той или иной калибровке — фейнмановская калибровка является стандартной, и соответствующая техника изложена во всех руководствах по квантовой теории поля, а нековариантные калибровки подробно рассмотрены в обстоятельном обзоре [31] и книге [79].

В разд.2 обсуждается вопрос о физических и нефизических степенях свободы — главным образом в электродинамике. Подчеркнута важность введенного Дираком понятия расширенной калибровочной группы и понятия слабой калибровочной инвариантности. В разд.3 изучаются простые модели с конечным числом степеней свободы, иллюстрирующие некоторые типичные проблемы калибровочных теорий. В разд.4 дается сравнительный анализ различных калибровок. Показана особая роль калибровки Фока. Раздел 5 посвящен вопросам калибровочных преобразований. В разд.6 кратко подводятся итоги обсуждения. В приложении помещен материал, касающийся тех или иных аспектов калибровочной инвариантности и калибровочных условий: метод фонового поля, роль остаточной калибровочной группы, замечания исторического плана и т.п.

Обозначения. Принята метрика $g_{\mu\nu}(+---)$; компоненты координатного 4-вектора x обозначаются $x^{\mu} = (\mathbf{x}, t)$. Под координатами, как правило, понимаем пространственные координаты и время. Греческие индексы пробегают значения 0,1,2,3, латинские $i, j, k, l, \ldots$ — если не оговорено особо — 1,2,3, тогда как индексы $a, b, c, d, \ldots$ — $1, 2, \ldots, \dim X$, где X — алгебра Ли калибровочной группы G. Используется сокращенное обозначение для оператора дифференцирования $\partial_{\mu} = \partial / \partial x^{\mu}$ и оператора Даламбера $\Box \equiv -g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ (или $\Box = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_{\nu}$, где $g = \det g_{\mu\nu}$ в случае, если $\partial_{\rho} g_{\mu\nu} \neq 0$). По повторяющимся индексам одинаковой вариантности предполагается суммирование с надлежащим метрическим тензором, например, $q_{\mu}x_{\mu} = g^{\mu\nu}q_{\mu}x_{\nu} = q_{\mu}x^{\mu} \equiv qx$. Коммутатор или антикоммутатор определяются знаком при квадратных скобках $[A, B]_{\pm} = AB \pm BA$. Скобки Пуассона определяются согласно условию $\{q, p\} = 1$. Равенства, справедливые лишь при учете связей («равенства в слабом смысле»), обозначаются знаком $\approx$. В континуальных интегралах игнорируется присутствие постоянного множителя в мере. Произведение функций может подразумевать интегрирование по координатам: $JA \equiv \int dx J_{\mu}(x) A_{\mu}(x)$, где $dx \equiv d^4x$.

2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ — МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА

Типичный калибровочно-инвариантный лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_f \overline{\psi}_f (i\hat{D} - m_f)\psi_f + \sum_f D_{\mu}\varphi_f (D_{\mu}\varphi_f)^* + \ldots, \tag{2.1}$$

где $F_{\mu\nu} = (ig)^{-1}[D_{\mu}, D_{\nu}]$, $D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu}$, $A_{\mu} = A_{\mu}^a \lambda^a$, $\hat{D} = \gamma_{\mu} D_{\mu}$, и матрицы λ^a, образующие базис алгебры Ли в фундаментальном представлении, нормированы на единицу $\operatorname{Tr}\lambda^a\lambda^b = \delta^{ab}$, а матрицы Дирака γ_{μ} удовлетворяют стандартному условию $[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]_+ = 2g_{\mu\nu}$. Далее, ψ — спинорное поле, $\overline{\psi} = \psi^* \gamma_0$, φ — скалярное комплексное поле; очевидно, A_{μ} в ковариантной производной от φ есть $A_{\mu} = A_{\mu}^a T^a$, где T^a — генераторы группы в представлении, реализуемом этим полем. Суммирование в (2.1) ведется по сортам полей f («ароматам»), если их несколько; точками обозначены иные допустимые калибровочно-инвариантные члены, например, самодействие скалярного поля и вклады других полей. Лагранжиан (2.1) инвариантен относительно преобразований (1.2). Чтобы выяснить особенности динамики калибровочных систем, рассмотрим простейшую и наиболее изученную теорию — электродинамику (абелева калибровочная группа).

2.1. Свободная электродинамика. Соответствующий лагранжиан получается из (2.1) переходом $\lambda^a \to 1$ (единичная матрица):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\hat{D} - m)\psi + D_\mu\varphi(D_\mu\varphi)^* + \ldots \tag{2.2}$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$; для простоты взято лишь одно заряженное поле. Особенности динамики систем с калибровочной группой определяются уже первым слагаемым в (2.2).

Лагранжиан свободного электромагнитного поля может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\partial_\rho A_\mu T^{\rho\mu\sigma\nu}\partial_\sigma A_\nu, \tag{2.3}$$

где

$$T^{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

С помощью тензорного оператора

$$K^{\mu\nu} = -T^{\rho\mu\sigma\nu}\partial_\rho\partial_\sigma \tag{2.5}$$

перепишем (2.3) следующим образом:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}A_\mu K^{\mu\nu}A_\nu + \frac{1}{2}\partial_\rho(A_\mu T^{\rho\mu\sigma\nu}\partial_\sigma A_\nu). \tag{2.6}$$

Последний член в (2.6) есть полная дивергенция и может быть опущен. Особенности классического и квантового описания электромагнитного поля вытекают из формул (2.3)—(2.6). Зависимость $\mathcal{L}_0$ от скоростей (билинейный член) определяется матрицей

$$T^{\mu\nu} = T^{0\mu0\nu} = \frac{\partial^2\mathcal{L}_0}{\partial\dot{A}_\mu\partial\dot{A}_\nu} = g^{0\mu}g^{0\nu} - g^{00}g^{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Эта матрица вырождена, ибо, будучи диагональной, она имеет на диагонали нуль, $T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1)$. Лагранжианы, обладающие этим свойством, также называются *вырожденными* (или сингулярными): $\mathcal{L}_0$ не есть квадратичная функция скорости $\dot{A}_0$, т.е. коэффициент при $\dot{A}_0^2$ в (2.3) равен нулю. В действительности лагранжианы (2.2), (2.3) вообще не зависят от $\dot{A}_0$. Вырожденной оказывается и матрица K:

$$K_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\,\Box - \partial_\mu \partial_\nu, \quad \Box = -\partial_\mu^2, \tag{2.8}$$

поскольку $P^{(1)}_{\mu\nu} = -\Box^{-1} K_{\mu\nu}$ есть проектор ($g_{\mu\nu} = P^{(1)}_{\mu\nu} + P^{(0)}_{\mu\nu}$, $P^{(i)}_{\mu\rho} P^{(j)}_{\rho\nu} = P^{(i)}_{\mu\nu}\delta^{ij}$, $i, j = 0, 1$). Наиболее важными следствиями этих обстоятельств являются:

а) в классике — проблема перехода к гамильтонову описанию системы (неразрешимость уравнений $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ относительно $\dot{q}^i$ [96]);

б) в квантовой теории — проблема определения пропагатора, ибо в невырожденной теории пропагатор $\Delta_{\mu\nu} \sim K^{-1}_{\mu\nu}$.

2.2. Расширенная группа калибровочных преобразований. Общая теория динамических систем со связями построена Дираком и Бергманном [96—98], хотя ее основные элементы для случая электродинамики содержались уже в статьях Гейзенберга и Паули [32,33]. Существо дела проясняется при переходе к гамильтонову формализму. Из (2.3) имеем

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0}, \tag{2.9}$$

т.е. импульс, канонически сопряженный A_0, равен нулю:

$$\pi^0 = 0. \tag{2.10}$$

По терминологии Бергманна — Дирака это есть первичная связь (следуя традиции, связями будем называть и функции канонических переменных, и условия их обращения в нуль). Если игнорировать (2.10), то стандартным образом находим «гамильтониан»

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \partial A_0 \mathbf{E} + \pi^0 \dot{A}_0 \right],$$

$$E^k = \pi^k = F^{k0}, \quad \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2} F^2_{ik}. \tag{2.11}$$

Строго говоря, это не есть гамильтониан, так как H_0 зависит от скорости $\dot{A}_0$. Но, считая $\dot{A}_0$ произвольной функцией времени и учитывая (2.10), функционал (2.11) можно использовать для получения гамильтоновых уравнений движения [96]. Проверка на согласованность (2.10) и (2.11) (проверка того, что $\dot{\pi}^0 = 0$) приводит к условию*

*Относительно поверхностных членов, возникающих при интегрировании по частям во втором слагаемом (2.11), см. [99].

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_0\} = \partial_\kappa E^k = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \tag{2.12}$$

где { , } — функциональные скобки Пуассона:

$$\{A_\mu(\mathbf{x},t), \pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} = \delta^\nu_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{2.13}$$

Итак, мы получили вторичную связь, которая, очевидно, находится в инволюции с первичной ($\{\pi^0, \partial\mathbf{E}\} = 0$), т.е. π^0 и $\partial\mathbf{E}$— связи первого рода. Других связей нет ($\{\partial\mathbf{E}, H_0\} = 0$). Согласно анализу Дирака [96] можно перейти к полному гамильтониану H_{0T}:

$$H_{0T} = \int d^3x \, [\, \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2_\perp + \mathbf{H}^2) + u\pi^0 - v\partial\mathbf{E}], \quad \partial\mathbf{E}_\perp = 0, \tag{2.14}$$

с произвольными функциями времени u, v. Гамильтониан (2.14) свидетельствует: (i) в теории имеются две связи первого рода, т.е. из четырех компонент A_μ только две физические; (ii) группа преобразований, не затрагивающих физического сектора, характеризуется двумя зависящими от координат и времени параметрами u и v. Связи π^0 и $\partial\mathbf{E}$ играют роль генераторов этих преобразований. Определим

$$G = \int d^3x \, [u\pi^0 - v\partial\mathbf{E}]. \tag{2.15}$$

Вычисляя скобки Пуассона A_μ и G, находим

$$\begin{gathered} \delta A_0 = \{A_0, G\} = u \equiv \delta_u A_0, \\ \delta\mathbf{A} = \{\mathbf{A}, G\} = \partial v \equiv \delta_v \mathbf{A}; \qquad \delta_v A_0 = \delta_u \mathbf{A} = 0. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Совокупность преобразований, задаваемых (2.16), будем называть расширенной по Дираку группой калибровочных преобразований свободной электродинамики. Ими исчерпывается калибровочный произвол теории. То, что лагранжиан (2.3) инвариантен лишь относительно преобразований (1.1) (одна произвольная функция), означает: уравнения движения в свободной электродинамике таковы, что фиксация одной нефизической степени свободы целиком (или с точностью до начальных условий) фиксирует вторую. Однопараметрическая группа преобразований (1.1) получается из (2.15), (2.16) редукцией $u = \dot{v}$, $v \equiv \Lambda$; тогда равенства (2.16) запишутся в привычном виде:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \tag{2.17}$$

Сказанное можно проиллюстрировать и на лагранжевских уравнениях движения

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{2.18}$$

Выражая $F_{\mu\nu}$ через потенциалы, имеем

$$\partial_\kappa F_{k0} = \partial(\dot{\mathbf{A}} - \partial A_0) = 0, \qquad \partial_\mu F_{\mu i} = -[\Box \mathbf{A} + \partial(\dot{A}_0 - \partial \mathbf{A})]_i = 0. \tag{2.19}$$

Разбив **A** на поперечную и продольную компоненты

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_\parallel, \qquad \partial \mathbf{A}_\perp = 0, \quad \mathbf{A}_\parallel = \Delta^{-1}\partial(\partial \mathbf{A}) \tag{2.20}$$

(поскольку $\partial \mathbf{A}_\parallel = \partial \mathbf{A}$), запишем уравнения (2.19) в виде

$$\Delta A_0 = \partial_0 \partial \mathbf{A}_\parallel, \qquad \Box \mathbf{A}_\perp = \partial_0(\partial_0 \mathbf{A}_\parallel - \partial A_0). \tag{2.21}$$

Первое из этих уравнений есть лагранжевская связь (содержит лишь первые производные по времени, ср. (2.12)). Его решение обращает в нуль правую часть второго. Отсюда заключаем: 1) поперечные (физические) компоненты **A** удовлетворяют уравнению Даламбера

$$\Box \mathbf{A}_\perp = 0; \tag{2.22}$$

2) продольная компонента выражается через

$$\mathbf{A}_\parallel = \int^t dt\, \partial A_0. \tag{2.23}$$

Итак, задав A_0, мы тем самым фиксируем и вторую нефизическую переменную $\mathbf{A}_\parallel$.

2.3. Слабая калибровочная инвариантность. Обычно, когда говорят о калибровочной инвариантности в электродинамике, подразумевают неизменность какой-либо функции или функционала от калибровочных полей и их производных при градиентных преобразованиях (1.1). Примером служит лагранжиан (2.2). В гамильтоновом формализме динамическая величина есть калибровочный инвариант, если ее скобки Пуассона с генератором (2.15) (при $u = \dot{v}$) равны нулю. Говорят, что данная величина инвариантна в сильном смысле. Физически это требование представляется завышенным. Физический сектор теории определяется учетом всех связей, поэтому необходимым условием принадлежности динамической величины физическому сектору является ее слабая инвариантность относительно расширенной калибровочной группы: данная величина должна быть в инволюции со всеми связями первого рода. Это означает, что ее скобки Пуассона со связями первого рода должны обращаться в нуль при учете связей. Отказ от этого требования (его усиление) ведет к неприемлемым последствиям. Например, скобки Пуассона гамильтониана (2.11) (в нем произведена замена $A_0 \to u$) с генератором калибровочных преобразований (2.15) равны

$$\{H_0, G\} = -\int d^3xv(x)\,\partial\mathbf{E}, \tag{2.24}$$

т.е. гамильтониан (2.11) неинвариантен даже относительно исходной группы (1.1) (когда в (2.15) $u = \dot{v}$). Между тем гамильтониан системы есть, безусловно, физическая величина. Скобки Пуассона (2.24) равны нулю в слабом смысле, т.е. при учете связи $\partial\mathbf{E} = 0$.

Требование слабой калибровочной инвариантности согласуется с требованием инвариантности относительно расширенной калибровочной группы и с точки зрения лагранжевского формализма. Действительно, лагранжиан свободной теории (2.3) неинвариантен в сильном смысле относительно калибровочных преобразований из расширенной группы (2.16). Поскольку при этом

$$\delta F_{k0} = \partial_k(u - \dot{v}), \qquad \delta F_{ik} = 0, \tag{2.25}$$

то

$$\delta\mathcal{L}_0 = F_{k0}\delta F_{k0} = -(u - \dot{v})\,\partial\mathbf{E} + \partial[(u - \dot{v})\mathbf{E}]. \tag{2.26}$$

Последний член здесь несуществен (полная дивергенция), поэтому вариация функционала Лагранжа $L_0 = \int d^3x\mathcal{L}_0$ при преобразованиях (2.16) обращается в нуль лишь при учете лагранжевской связи (2.21): $\delta L_0 = 0$ при $\partial\mathbf{E} = \partial(\dot{A} - \partial A_0) = 0$.

Требования, обсуждавшиеся в двух последних пунктах, лежат в основе всех калибровочных теорий.

2.4. Электродинамика со взаимодействием. Включение взаимодействия меняет лишь вторичную связь, причем связи по-прежнему находятся в инволюции:

$$G_1 = \pi^0 = 0, \qquad G_2 = \partial\mathbf{E} - j_0 = 0, \qquad \{G_1, G_2\} = 0 \tag{2.27}$$

(j_0 — нулевая компонента тока $j_\mu = -\partial\mathcal{L}/\partial A_\mu$), т.е. в теории по-прежнему две нефизические степени свободы. Одна из них, как и раньше, A_0, вторая же — величина, канонически сопряженная G_2 (2.27). Так как $\{\mathbf{A}_\parallel, G_2\} \neq$ $\neq 0$, $\mathbf{A}_\parallel$ меняется при калибровочных преобразованиях, поэтому продольная компонента поля $\mathbf{A}$ не есть физическая степень свободы. Это проявляется в том, что она не может распространяться независимо от зарядов. Но продольная компонента $\mathbf{A}_\parallel$ легко регистрируется — статическое кулоновское поле, окружающее заряды, и есть возбужденное продольное поле [100]; в этом смысле поле $\mathbf{A}_\parallel$ наблюдаемо. Подробный анализ вопроса можно найти в [95]. Существо дела в том, что и $\mathbf{A}_\parallel$, и фаза заряженного поля есть линейные комбинации физической и нефизической степеней свободы. Из них и комбинируется калибровочный инвариант, описывающий кулоновское поле. Калибровочным преобразованием $\mathbf{A}_{\|}$ можно обратить в нуль, но при этом заряженные поля становятся нелокальными. Физическая информация о кулоновском поле перенесена в фазу заряженных полей.

Генератор расширенной калибровочной группы запишется в виде

$$G = \int d^3x\, [u\pi^0 - v(\partial\mathbf{E} - j_0)], \tag{2.28}$$

а уравнения (2.18), (2.21) изменятся очевидным образом:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \tag{2.29}$$

$$\Delta A_0 = \partial\dot{\mathbf{A}} - j_0, \quad \Box\mathbf{A}_\perp = \partial_0(\partial_0\mathbf{A}_{\|} - \partial A_0) - \mathbf{j}. \tag{2.30}$$

Первое из них есть лагранжевская связь (содержит лишь первые производные по времени бозе-поля). Пользуясь разбиением $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_{\|}$, $\partial\mathbf{j}_\perp = 0$, $\mathbf{j}_{\|} = \Delta^{-1}\partial(\partial\mathbf{j})$ и первым из уравнений (2.30), переписываем второе в виде

$$\Box\mathbf{A}_\perp = -\mathbf{j}_\perp + \Delta^{-1}\partial(\partial_\mu j_\mu); \tag{2.31}$$

итак, распространяются только поперечные возбуждения, поскольку, ввиду сохранения тока $\partial_\mu j_\mu = 0$, из (2.31) следует

$$\Box\mathbf{A}_\perp = -\mathbf{j}_\perp. \tag{2.32}$$

Что же касается продольного поля $\mathbf{A}_{\|}$, то из закона Гаусса (2.27) находим для продольной компоненты напряженности электрического поля: $\mathbf{E}_{\|} = \partial\Delta^{-1}j_0$ ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_{\|}$, $\partial\mathbf{E}_\perp = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E}_{\|} = 0$). Подставляя это выражение в новый гамильтониан

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \mathbf{A}\mathbf{j} \right] + G \tag{2.33}$$

и учитывая равенства

$$\mathbf{A}\mathbf{j} = \mathbf{A}_\perp\mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_{\|}\,\partial(\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}), \qquad \mathbf{E}_{\|}^2 = (\Delta^{-1}\partial j_0)^2, \tag{2.34}$$

заключаем, что в радиационной калибровке (1.9) гамильтониан (2.33) запишется в виде

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}_\perp^2 + \mathbf{H}^2) - \frac{1}{2} j_0\Delta^{-1}j_0 + \mathbf{j}_\perp\mathbf{A}_\perp \right] + G. \tag{2.35}$$

Продольное поле исчезло, но не бесследно — второе слагаемое в (2.35) есть вклад в гамильтониан кулоновского поля (ядро оператора Δ^{-1} есть

$\Delta^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(4\pi\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^{-1})$. Изменятся и заряженные поля. Так как $\mathbf{A}_{\parallel} = \partial(\Delta^{-1}\partial\mathbf{A})$, из условия $\mathbf{A}_{\parallel} + \partial\Lambda = 0$ находим Λ, обращающее $\mathbf{A}_{\parallel}$ в нуль, т.е. осуществляющее переход к кулоновской калибровке: $\Lambda = -\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}$. Согласно (1.1) имеем

$$\psi' = e^{-ie\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}}\psi, \qquad \mathbf{A}_{\parallel} = \partial(\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}). \tag{2.36}$$

Поле ψ становится нелокальным, его скобки Пуассона с каноническим импульсом $\pi^k = E^k$ отличны от нуля. Фактор, стоящий перед ψ, отвечает кулоновскому полю, окружающему заряд [100, §80; 95].

Обычно считается (и не без оснований), что физическая величина, переменная, должна быть калибровочным инвариантом, а калибровочно-преобразующаяся величина не может иметь отношения к физике, поскольку ее можно, например, обратить в нуль. Рассмотренный случай кулоновского поля вносит необходимые уточнения. Нефизическими переменными (степенями свободы) являются величины, канонически сопряженные связям первого рода. Величины, меняющиеся при калибровочных преобразованиях, могут нести физическую информацию. Тогда калибровочное преобразование сводится к передаче содержащейся в них информации другим степеням свободы (пример: $\mathbf{A}_{\parallel}$, см. также разд.4). И наоборот, калибровочно-инвариантная величина может оказаться нефизической (примеры: $\partial\mathbf{E}$ для свободных полей и $G_2 = \partial\mathbf{E} - j_0$ — для взаимодействующих).

2.5. Неабелевы теории. При переходе к теории с неабелевой калибровочной группой (лагранжиан (2.1)) общая структура формализма не меняется. Правда, теперь уже нельзя начать исследование со свободного лагранжиана, положив в (2.1) $g = 0$ — он калибровочно-неинвариантен. Но матрица

$$T^{\mu\nu}_{ab} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_0}{\partial \dot{A}^a_\mu \partial \dot{A}^b_\nu} = T^{0\mu 0\nu}\delta_{ab} \tag{2.37}$$

по-прежнему вырождена, т.е. все проблемы, присущие электродинамике, здесь сохраняются. Канонически сопряженный A^a_μ импульс есть

$$\pi^\mu_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^a_\mu} = F^{\mu 0}_a, \qquad F^a_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,(\lambda^a F_{\mu\nu}), \tag{2.38}$$

т.е. имеются первичные связи

$$G^a_1 = \pi^a_0 = 0. \tag{2.39}$$

Первому члену в (2.1) отвечает гамильтониан

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{H}_a^2) - \mathbf{E}^a \mathbf{D}^{ab} A_0^b + \dot{A}_0^a \pi_0^a \right],$$

$$\mathbf{H}_a^2 = \frac{1}{2}(F_{ik}^a)^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(F_{ik}^2), \tag{2.40}$$

где

$$\mathbf{D}^{ab} = \delta^{ab}\partial - gf^{abc}\mathbf{A}^c, \quad [\lambda^a, \lambda^b] = i\sqrt{2}\, f^{abc}\lambda^c. \tag{2.41}$$

Отметим, что последний член в гамильтониане (2.40) можно представить в виде $D_0^{ab} A_0{}^b \pi_0^a$. Вторичные связи

$$G_2{}^a = \{\pi_0^a, H\} = \mathbf{D}^{ab}\mathbf{E}^b = 0 \tag{2.42}$$

находятся в инволюции

$$\{G_2{}^a(\mathbf{x}, t), G_2{}^b(\mathbf{y}, t)\} = f^{abc} G_2{}^c(\mathbf{x}, t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{2.43}$$

т.е. их скобка Пуассона пропорциональна связям и исчезает вместе с ними. Нетрудно убедиться, что $\{G_2, H\} \approx 0$, $\{G_1, G_2\} = 0$, т.е. найдены все связи и они находятся в инволюции (связи первого рода). Полный гамильтониан и генератор расширенной группы калибровочных преобразований даются формулами

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{H}_a^2) + u^a G_1{}^a - v^a G_2{}^a \right], \tag{2.44}$$

$$G = \int d^3x (u^a G_1{}^a - v^a G_2{}^a), \tag{2.45}$$

где $u^a(x), v^a(x)$ — произвольные функции, так что поля A_μ^a меняются следующим образом:

$$\delta A_0{}^a = u^a, \qquad \delta \mathbf{A}^a = \mathbf{D}^{ab} v^b. \tag{2.46}$$

Если в (2.45) положим $u^a = D_0{}^{ab} v^b$, то придем к стандартным калибровочным преобразованиям

$$\delta A_\mu^a = D_\mu{}^{ab} v^b. \tag{2.47}$$

Так же, как и в случае электродинамики, убеждаемся, что относительно расширенной группы калибровочных преобразований гамильтониан и лагранжиан инвариантны лишь в слабом смысле, а полный гамильтониан H_T слабоинвариантен и относительно стандартной калибровочной группы.

Если в электродинамике проследить за судьбой физических и нефизических степеней свободы не представляло труда, то в теориях с неабелевой калибровочной симметрией это не так. Очевидная совокупность нефизических переменных A_0^a (их скорости не входят в лагранжиан) не доставляет особых хлопот. Выделить же лоренц-инвариантным образом все нефизические переменные достаточно непросто [101]. Отчасти это связано с тем общим для всех калибровочных теорий обстоятельством, что преобразования из группы симметрии пространства-времени перемешивают физические и нефизические степени свободы, т.е. в новой системе отсчета физические компоненты могут содержать нефизические. Именно поэтому в теории возмущений преобразования вектор-потенциала A_μ под действием группы Лоренца должны сопровождаться калибровочными преобразованиями [102]. Главным же образом это связано с некоммутативностью калибровочной группы. Попытки выделить физические переменные, переформулировав теорию в терминах лишь калибровочно-инвариантных величин, также не сулят успеха — в простейших случаях формализм сильно усложняется [101,23,103]. Единственной разумной стратегией представляется следующая: присоединить связи к уравнениям движения в классической теории и потребовать их исчезновения на векторах из физического гильбертова пространства — в квантовой (см. ниже).

2.6. Квантование. Общая процедура квантования динамических систем со связями была разработана Дираком [96] (см. также [32—37]). В случае связей первого рода она сводится к рецепту: 1) все канонические переменные, входящие в гамильтониан, подчиняются каноническим перестановочным соотношениям

$$[A_\mu^a(\mathbf{x}, t), \pi_b^\nu(\mathbf{y}, t)]_- = i\delta_\mu^\nu \delta_b^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$[\psi_\rho^+(\mathbf{x}, t), \psi_\sigma(\mathbf{y}, t)]_+ = \delta_\rho^\sigma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{2.48}$$

где буквы ρ, σ включают в себя как спинорные, так и иные индексы; 2) векторы из физического гильбертова подпространства Φ фиксируются исчезновением на них всех связей первого рода

$$G_i{}^a \Phi = 0. \tag{2.49}$$

Это единственный надежный рецепт квантования. Все остальные рецепты — например, квантование в рамках метода континуального интегрирования — требуют, строго говоря, доказательства своей эквивалентности каноническому.

Подчеркнем: правила, применяемые в классической теории, не переносятся автоматически на квантовую теорию. Нельзя, например, требовать выполнения условия (1.8) для операторов — это привело бы к нарушению перестановочных соотношений (2.48). Сказанное относится и ко всем другим калибровочным условиям данного типа. Наиболее естественный путь здесь — использование динамических калибровок. В этом случае нефизические компоненты полей наделяются простейшей (а иногда и сложной, см. (1.20)) динамикой, и формально с ними можно обращаться так же, как и с физическими. Их отсутствие в физическом секторе гильбертова пространства обеспечивается исчезновением на физических векторах канонически сопряженных им импульсов (связей). Равным образом в квантовой теории и связи нельзя понимать в сильном смысле, т.е. как операторные равенства [96], это тоже ведет к нарушению перестановочных соотношений (2.48).

2.7. Метод континуального интегрирования. Метод континуального интегрирования играет важную роль в современной квантовой теории поля. Его популярность объясняется несколькими причинами. Во-первых, это наиболее адекватный задаче математический аппарат; во-вторых, его применение сильно упрощает выкладки (вывод правил Фейнмана, тождеств Уорда и т.п.); наконец, он позволяет развить единственный регулярный метод, не опирающийся на малость постоянной взаимодействия, т.е. позволяющий выйти за рамки теории возмущений (квазиклассическое разложение). Производящий функционал для функции Грина в этом подходе задается континуальным интегралом [40]:

$$Z[\mathcal{J}] \equiv e^{iW[\mathcal{J}]} = \int d\,[A\bar{\psi}\psi]\; e^{i(S[Q] + \mathcal{J}Q)}. \tag{2.50}$$

Здесь S — некоторое действие (для калибровочных теорий — инвариантное действие, задаваемое, например, лагранжианом (2.1), $S = \int dx\mathcal{L}$; в дальнейшем ограничимся одним сортом полей), $\mathcal{J}Q \equiv \int dx(JA + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)$, A_μ^a — калибровочное поле, $\psi, \bar{\psi}$ — спинорные заряженные поля, $J_\mu^a(x)$, $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ — классические источники (последние два принадлежат грассмановой алгебре); по всем невыписанным индексам (векторным, спинорным, групповым) предполагается суммирование. В этом интеграле могут присутствовать и другие поля. Определяемый (2.50) производящий функционал $W[\mathcal{J}]$ есть производящий функционал для связных функций Грина*. Преобразованием Лежандра определяется еще один важный объект [50—53]:

$$\Gamma[\phi] = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\phi, \qquad \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}} = \phi. \tag{2.51}$$

*Насколько известно автору, это простое утверждение не имеет пока простого доказательства.

Предполагается, что в правой части первого равенства (2.51) стоит решение второго: $\mathcal{J}=\mathcal{J}[\phi]$. Тогда, как легко убедиться,

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}=-\mathcal{J}. \tag{2.52}$$

$\Gamma[\phi]$ есть производящий функционал для 1-неприводимых функций Грина (удалены полюсные диаграммы). Он задает все вершины эффективного лагранжиана [53]: $\Gamma=S_{\text{eff}}$. Основное свойство последнего — воспроизведение точной S-матрицы уже в низшем порядке теории возмущений (точная амплитуда вероятности любого процесса дается суммой древесных диаграмм [51,53]). В операторном формализме ϕ есть вакуумное среднее от Q (т.е. от A, ψ, $\overline{\psi}$) в присутствии внешних токов.

Как упоминалось, одна из главных проблем, порождаемых калибровочной инвариантностью, связана с интегрированием по чисто калибровочным степеням свободы. При вычислении связных функций Грина (т.е. функциональных производных от W по токам при нулевых значениях последних) интегрирование по калибровочным параметрам ведет к бесконечностям (см. пп.2.1, 2.5). Прямолинейный способ устранения калибровочного произвола заключается в подстановке под знак интеграла (2.50) произведения δ-функций от всех групповых параметров ω, т.е. $\delta(\omega)$. Обычно же калибровочный произвол устраняют с помощью калибровочных условий на вектор-потенциалы A вида $F(A)=0$ (разд.1). Для инфинитезимальных преобразований (2.47) пишут

$$\delta(\omega)=\delta(F(A^{\omega}))D, \tag{2.53}$$

где $A_\mu^{\omega}=A_\mu+D_\mu\,\omega$, а коэффициент при δ-функции есть функциональный определитель

$$D=\det\left(\frac{\partial F^a(A^{\omega})}{\partial\omega^b}\right). \tag{2.54}$$

Это и есть определитель Фаддеева — Попова [71,78]. Например, для калибровки Лоренца (1.8) имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{ab}=\frac{\partial[\partial_\mu(A_\mu^a+D_\mu^{ac}\omega^c)]}{\partial\omega^b}=\partial_\mu D_\mu^{ab}. \tag{2.55}$$

Заметим, что формула (2.53) справедлива без дальнейших уточнений лишь для малых возбуждений полей A_μ и для малых параметров ω. Во-первых, это связано с тем, что уравнение $F(A^{\omega})=0$ может иметь несколько решений [73] (в действительности — бесконечно много [74,75]), а во-вторых — с тем, что в разложении

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|\det \partial f / \partial x|}, \tag{2.56}$$

где x_n — нули функции f, стоит модуль определителя, тогда как в (2.53) — определитель (в (2.56) фигурируют многомерные δ-функции). Практически поступают следующим образом.

1) Выбирают неоднородную калибровку

$$F = \partial_\mu A_\mu - f = 0, \tag{2.57}$$

где f — произвольная функция.

2) После подстановки δ-функции (2.53) под знак интеграла (2.50) интегрируют по f с гауссовским весом $P[f] = \mathrm{const}\,\exp(-if^2/2\alpha)$. При этом к действию добавляется член типа (1.16) (фиксатор калибровки; подразумевается, что все сделанные предположения останутся верны при любом f).

3) Определитель D заменяется интегралом по скалярным антикоммутирующим полям $c^a, \bar{c}^a$ [71,78]:

$$D = \int d[\bar{c}, c]\, \mathrm{e}^{-i\int dx \bar{c} F' c}, \tag{2.58}$$

т.е. к исходному лагранжиану добавится еще и лагранжиан фиктивных полей $\mathcal{L}'' = \bar{c}F'c$, $F' = \partial F/\partial\omega$ (см. (2.55)).

После процедуры фиксации калибровки производящий функционал (2.50) приобретает вид

$$Z[\mathcal{J}] = \int d\,[A\bar{\psi}\psi\bar{c}, c]\, \mathrm{e}^{i(S + S' + S'' + \mathcal{J}Q)}, \tag{2.59}$$

где штрихованные добавки к действию отвечают лагранжианам $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$. Полный лагранжиан в (2.59) $\mathcal{L}_T = \mathcal{L} + \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ уже неинвариантен относительно калибровочных преобразований, но он инвариантен относительно глобальных суперсимметричных преобразований [68—70]. Например, для калибровки Лоренца это преобразования

$$\delta A_\mu^{\ a} = \varepsilon D_\mu^{\ ab} c^b, \qquad \delta\bar{c}^{\,a} = \frac{1}{\alpha}\,\varepsilon\partial_\mu A_\mu^{\ a}, \qquad \delta c^a = -\frac{1}{2}\,\varepsilon g f^{abc} c^b c^c, \tag{2.60}$$

где ε — не зависящий от координат антикоммутирующий параметр. Формально вектор-потенциалы преобразуются стандартно:

$$\delta A_\mu^{\ a} = D_\mu^{\ ab}\tilde{\omega}^b, \qquad \tilde{\omega}^b(x) = \varepsilon c^b(x), \tag{2.61}$$

только теперь калибровочные параметры $\tilde{\omega}$ есть четные элементы грассмановой алгебры. Замечательно, что эти преобразования, будучи формально глобальными, не ослабляют ограничений, налагаемых локальной калибровочной инвариантностью ($\tilde{\omega}$ есть функции координат).

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Скалярная электродинамика в пространстве-времени $(0+1)$. Теория поля сложна сама по себе, поэтому особенности теорий с локальной калибровочной симметрией лучше всего изучать на моделях. Простейшей из них является скалярная электродинамика в пространстве-времени $(0+1)$ [104,103]:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}} - eyT\mathbf{x})^2 - V(\mathbf{x}^2), \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где компонентами вектора $\mathbf{x}$ являются вещественная и мнимая части комплексного поля φ (точнее, $\varphi = (x_1 + ix_2)/2)$), y отвечает нулевой компоненте вектор-потенциала A_μ, V — потенциальная энергия. Лагранжиан (3.1) описывает движение частицы единичной массы в плоскости (x_1, x_2), т.е. x_1, x_2 — координаты частицы. Кроме них имеется еще одна динамическая переменная — это y. Калибровочные преобразования задаются соотношениями

$$\delta\mathbf{x} = \omega eT\mathbf{x}, \qquad \delta y = \dot{\omega} = d\omega(t)/dt, \tag{3.2}$$

в которых ω есть произвольная инфинитезимальная функция времени. Лагранжиан не зависит от скорости y, поэтому в теории имеются связи. Первичная связь очевидна: $\pi = \partial L/\partial\dot{y} = 0$. Определяя импульс $\mathbf{p} = \partial L/\partial\dot{\mathbf{x}}$, находим гамильтониан

$$H = h + ey\mathbf{p}T\mathbf{x} + \dot{y}\pi, \qquad h = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V(\mathbf{x}^2), \tag{3.3}$$

а из условия $\dot{\pi} = \{\pi, H\} = 0$ находим вторичную связь

$$\sigma = e\mathbf{p}T\mathbf{x} = 0. \tag{3.4}$$

Связи находятся в инволюции, других связей нет. Связь (3.4) с точностью до множителя есть генератор вращений в плоскости (x_1, x_2), поэтому единственной физической переменной является инвариант $r = |\mathbf{x}|$. Нефизических переменных две: y и $\theta = \operatorname{arctg} x_2/x_1$, $\{\theta, \sigma/e\} = 1$. Несмотря на свою простоту, эта модель позволяет проиллюстрировать многие принципиальные особенности калибровочных теорий.

1. Фазовое пространство. Физическое фазовое пространство модели есть развертываемый в полуплоскость конус [104], т.е. наличие нефизической степени свободы решающим образом влияет на такую фундаментальную характеристику гамильтоновой системы, как фазовое пространство.

2. Исключение нефизических переменных в лагранжиане. Положив в (3.1) $y = 0$, получим совсем другую модель — некалибровочную теорию

с двумя физическими степенями свободы. В ней нет никакой информации о вторичных связях.

3. Остаточная дискретная калибровочная группа. Фиксируя калибровку условием

$$x_2 = 0 \tag{3.5}$$

(тензорная калибровка) обнаруживаем, что она оказывается неполной: имеется остаточная дискретная калибровочная группа Z_2 [23,76], нетривиальный элемент которой задается преобразованием

$$x_1 \to -x_1. \tag{3.6}$$

Данное утверждение легко обобщается на модели с любой редуктивной калибровочной группой [23,76]. Остаточной группой в этом случае является группа Вейля [105,106] (группа симметрии корневой диаграммы, подгруппа калибровочной группы).

4. Динамическая калибровка $\mathcal{L}' = -\dot{y}^2/2\alpha$. Добавление к лагранжиану (3.1) $\mathcal{L}'$ не только задает динамику нефизических переменных, но и, вообще говоря, меняет динамику физических. Действительно, гамильтониан теперь выглядит так:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r^2) - \frac{\alpha}{2}\pi^2 + eyp_\theta, \tag{3.7}$$

где r и θ есть полярные координаты ($r = |\mathbf{x}|$), p_r, p_θ — канонически сопряженные импульсы, $\sigma = ep_\theta$. Но θ есть циклическая переменная, т.е. p_θ есть постоянная движения, задаваемая начальными условиями. Нетрудно убедиться, что при $p_\theta \neq 0$ меняются уравнения движения физических переменных r, p_r (из-за второго слагаемого в скобках равенства (3.7)). Итак, для того, чтобы нефизический сектор не влиял на физический, начальные условия для нефизических переменных в динамической калибровке не должны противоречить связям (в данном случае: $\pi(0) = p_\theta(0) = 0$).

5. Калибровка $\mathcal{L}' = -m^2y^2/2$. Иногда в качестве фиксатора калибровки берут $\mathcal{L}' = -(nA)^2/2\alpha$. Хотя данный член и нарушает калибровочную инвариантность, он не снимает вырождения — лагранжиан по-прежнему остается вырожденным. Существо происходящих при этом изменений динамики лучше всего выяснить на модели (3.1) с добавлением члена $\mathcal{L}' = -m^2y^2/2$. Сразу же подчеркнем, что это не динамическая калибровка — скорость $\dot{y}$ не входит и в новый лагранжиан, т.е., как и раньше, $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{y} = 0$ (первичная связь). Гамильтониан имеет вид

$$H = h + \frac{1}{2} m^2 y^2 + ey\mathbf{p}T\,\mathbf{x} + u\pi, \tag{3.8}$$

где u — произвольная функция времени. Из условия $\dot{\pi} = \{\pi, H\} = 0$ находим вторичную связь

$$\dot{\pi} = \tilde{\sigma} = -\,(m^2 y + e\mathbf{p}T\,\mathbf{x}) = 0. \tag{3.9}$$

Связи π и $\tilde{\sigma}$ не находятся в инволюции

$$\{\pi, \tilde{\sigma}\} = -\,m^2, \tag{3.10}$$

т.е. это есть связи второго рода. Согласно Дираку [96], в этом случае нужно видоизменить скобки Пуассона — перейти к скобкам Дирака. Условие самосогласованности $\{\pi, \tilde{\sigma}\} = -\,m^2 u = 0$ теперь есть условие на множитель Лагранжа $u(t)$. Исключая из H переменные y, π, получаем

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r^2) - \frac{e^2}{2m^2}\,p_\theta^2, \tag{3.11}$$

т.е., как и в случае (3.7), p_θ есть постоянная движения. Неудачный выбор начальных условий ($p_\theta \neq 0$) меняет динамику в физическом секторе. Единственное согласованное с условием (3.4) значение p_θ: $p_\theta(0) = 0$.

6. Квантование. Модель (3.1) позволяет проще всего проиллюстрировать тезис: в теориях со связями первого рода операции исключения нефизических переменных и квантования, вообще говоря, неперестановочны [107]. Действительно, нефизическими импульсами в (3.3) являются π и p_θ. Полагая их равными нулю, получаем

$$H'_{ph} = \frac{1}{2} p_r^2 + V(r^2). \tag{3.12}$$

Гамильтониан H'_{ph} описывает одномерное движение частицы в поле потенциала V. Рецепт квантования здесь стандартный: $r, p_r \to \hat{r}, \hat{p}_r$, $[\hat{r}, \hat{p}_r] = i$, т.е.

$$\hat{H}'_{ph} = -\frac{1}{2}\,\partial_r^2 + V. \tag{3.13}$$

С другой стороны, квантуя модель до исключения нефизических переменных, имеем:

$$\hat{H}_{ph} = -\frac{1}{2}\left[\,\partial_r^2 + \frac{1}{r}\,\partial_r + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2\,\right] + V - iey\partial_\theta - iu\partial_y\,. \tag{3.14}$$

Физический сектор задается условиями $\hat{\pi}\Phi = \hat{\sigma}\Phi = 0$, т.е. $\partial_y\Phi = \partial_\theta\Phi = 0$, и на векторах из физического гильбертова пространства гамильтониан (3.14) имеет вид

$$\hat{H}_{ph} = -\frac{1}{2}\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right) + V. \tag{3.15}$$

Гамильтонианы (3.13) и (3.15) не идентичны. С этим обстоятельством следует считаться при подстановке в континуальный интеграл δ-функций от исключаемых переменных (см. разд.4).

7. Противоречивая калибровка $\mathcal{L}' = yt$. Данный фиксатор хотя и нарушает калибровочную инвариантность, но ведет к противоречивой динамике. Имеем: $\pi = \partial L/\partial\dot{y} = 0$,

$$H = h + ey\mathbf{p}T\,\mathbf{x} + u\pi - yt. \tag{3.16}$$

Условие самосогласованности $\dot{\pi} = \{\pi, H\} \equiv \Sigma = 0$ дает

$$\Sigma = -e\mathbf{p}T\,\mathbf{x} + t. \tag{3.17}$$

Так как время явным образом входит в Σ, условие согласованности (3.17) с динамикой, задаваемой гамильтонианом (3.16), теперь должно формулироваться так:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \{\Sigma, H\} = 0. \tag{3.18}$$

Но $\{\Sigma, H\} = 0$, т.е. (3.18) сводится к абсурдному требованию $1 = 0$.

8. Неоднозначные (неполные) калибровки. Модель (3.1) позволяет прояснить так называемую «проблему копий» [73]. При перенесении условий (1.8), (1.9) на неабелевы теории выяснилось, что они не полностью устраняют калибровочный произвол [73—75]. Одно время этому обстоятельству придавалось принципиальное значение. В действительности проблема не относится к разряду физических — своим происхождением она обязана не особенностям динамики физического сектора полей Янга — Миллса, а выбору калибровки, т.е. обстоятельству сугубо нефизическому. Об этом, впрочем, говорит уже тот факт, что существуют «бездуховые» калибровки, например, калибровки Вейля (1.10), Фока (1.14), аксиальные и т.п. Проблему копий можно создать даже в электродинамике. Для выяснения существа вопроса обратимся к рис.1 из работы [23]. Калибровочные орбиты на нем (множества точек, связанных калибровочным преобразованием) — окружности. Калибровочное условие $f(x_1, x_2) = 0$, f — некоторая функция, задает линию в плоскости. Так как точки, лежащие на одной орбите, физически неразличимы, для описания эволюции физических степеней свободы достаточно взять по одной точке каждой орбиты. В этом и заключается роль калибровочного условия. Может случиться, однако, что при неудачном выборе f задаваемая калибровочным условием кривая будет пересекать орбиты два и более раз. Например, прямая $f = x_2 = 0$ пересекает все орбиты дважды. Это неполная калибровка — остается произвол, задаваемый дискретной калибровочной группой Z_2 с элементами $(1, P)$, $Px_1 = -x_1$. Кривая 2 пересе-

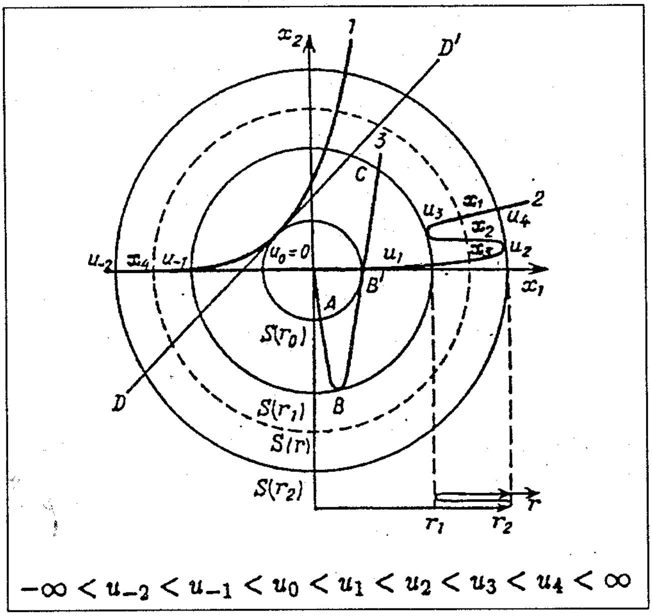

Рис.1

кает некоторые орбиты четыре раза, а кривая *1* вообще не пересекает орбит в окрестности нуля. Это недостаточная (неполная) калибровка — произвол переменных x_1, x_2 при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_0$ не устраняется (подробнее см. [23]).

Таким образом, накладывая калибровочное условие, необходимо убедиться, что оно непротиворечиво и не меняет динамики физических переменных.

3.2. Модель с калибровочной группой трансляций. Поучительна и модель, задаваемая лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}} - eyT\mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}[(\dot{x}_3 - y)^2 + (\dot{x}_4 - y)^2] - V(\mathbf{x}^2, x_3 - x_4), \tag{3.19}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Его группа инвариантности задается инфинитезимальными преобразованиями

$$\delta\mathbf{x} = \omega eT\mathbf{x}, \quad \delta y = \dot{\omega}, \quad \delta x_3 = \delta x_4 = \omega, \quad \omega \to 0. \tag{3.20}$$

Отличительная черта модели: для переменной $2y_+ = x_3 + x_4$ калибровочные преобразования сводятся к трансляциям, тогда как $2y_- = x_3 - x_4$ есть калибровочный инвариант. Первичная связь: $\pi = \partial L/\partial\dot{y} = 0$; гамильтониан:

$$H=\frac{\mathbf{p}^2}{2}+\frac{1}{2}(p_3^2+p_4^2)+V(\mathbf{x}^2, x_3-x_4)+y(p_3+p_4+e\mathbf{p}T\mathbf{x})+\dot{y}\pi, \qquad (3.21)$$

т.е. вторичная связь есть

$$\sigma=\{\pi, H\}=-(p_3+p_4+e\mathbf{p}T\mathbf{x})=0. \qquad (3.22)$$

Модель позволяет прояснить вопрос о том, к каким физическим последствиям может привести исключение той или иной степени свободы. В модели (3.1) переменные x_1 и x_2 переводятся друг в друга калибровочным преобразованием, поэтому безразлично, какую из этих переменных исключать. В данной модели условие (3.22) связывает три импульса (p_3, p_4 и p_θ). Возникают вопросы: какой из них исключать, эквивалентны ли (физически) альтернативные варианты?

Нетрудно построить инвариантные переменные. Это

$$|\mathbf{x}|, \quad \mathbf{z}_+=\mathrm{e}^{-y_+eT}\mathbf{x}, \quad \mathbf{z}_{3,4}=\mathrm{e}^{-x_{3,4}eT}\mathbf{x},$$

$$y_-=\frac{x_3-x_4}{2}, \quad y_{3,4}=x_{3,4}-\mathrm{e}^{-1}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}. \qquad (3.23)$$

Переменные $\mathbf{z}_{3,4,+}$ аналогичны нелокальному полю Ψ' (2.36). Экспонента в нем описывает кулоновское поле заряженной частицы, т.е. квант этого поля соответствует заряженной частице вместе с окружающим его электростатическим полем. Инвариантность переменных (3.23) очевидна — она вытекает из законов преобразования

$$\mathbf{x}'=\mathrm{e}^{eT\Lambda}\mathbf{x}, \quad x'_{3,4}=x_{3,4}+\Lambda, \qquad (3.24)$$

где Λ есть произвольная функция времени. Руководствуясь аналогией с электродинамикой, заключаем, что с вектором $\mathbf{x}$ могут ассоциироваться три переменные: x_3, x_4 или y_+. Соответствующие наборы инвариантных переменных таковы:

$$\{y_3, y_4, |\mathbf{x}|\}, \quad \{y_4, \mathbf{z}_3\}, \quad \{y_3, \mathbf{z}_4\}, \quad \{y_-, \mathbf{z}_+\}. \qquad (3.25)$$

Перечисленные возможности априори равноправны. Надо полагать, что в реальном мире за счет тех или иных причин реализовывалась бы лишь одна из них. Из (3.23) видно, что «физические частицы», описываемые переменными $\mathbf{z}_{3,4,+}$, обладают «сопутствующими полями» $\exp(-x_{3,4}eT)$, $\exp(-y_+eT)$, причем все они разные. Поучительно выписать исключаемые переменные и соответствующие гамильтонианы:

$$
\begin{array}{ll}
\theta & \dfrac{1}{2}\left[p_r^2+\dfrac{1}{2}\dfrac{(p_3+p_4)^2}{e^2r^2}+p_3^2+p_4^2\right]+V(r^2,x_3-x_4) \\
x_{3,4} & \dfrac{1}{2}[\mathbf{p}^2+(p_{4,3}^2+ep_\theta)^2]+V(\mathbf{x}^2,\mp y_{4,3}) \\
x_3+x_4 & \dfrac{1}{2}\left[\mathbf{p}^2+\dfrac{1}{2}(p_3-p_4)^2+\dfrac{e^2p_\theta^2}{2}\right]+V(\mathbf{x}^2,2y_-).
\end{array}
\tag{3.26}
$$

Переход к квантовому описанию не представляет труда. Векторы из физического гильбертова подпространства выделяются условиями исчезновения на них связей. Операторы Гамильтона получаются из (3.26) переходом к каноническим операторам (за исключением первого — в нем к p_r^2 необходимо добавить оператор $(i/r)\hat{p}_r$), а физические волновые функции будут зависеть от соответствующих наборов физических переменных: r, y_3, y_4; $\mathbf{z}_{3,4,+}$, $y_{3,4,-}$. Таким образом, в данной модели все возможности равноправны. В реальном мире вопрос решается физикой дела. В качестве примера можно взять фотоны в сверхпроводнике выше и ниже критической точки [40], когда или продольная компонента $\mathbf{A}_\parallel$ ассоциируется с заряженным полем, формируя кулоновский фактор (см. (2.36)), или фаза заряженного поля вместе с компонентой $\mathbf{A}_\parallel$ образуют массивное продольное векторное поле.

Замечание. Очевидно, модель легко обобщается на любую полупростую группу G. Рассмотрим лагранжиан

$$
L=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\dot{x}-yx)^2+\frac{1}{2}\sum_{a,k}(\dot{z}_k^a-y^a)^2+\sum_{i>k}V(\operatorname{Tr}x^2,(z_i^a-z_k^a)^2),
\tag{3.27}
$$

где $\operatorname{Tr}x^2=\sum x_a^2$, $\operatorname{Tr}y^2=\sum y_a^2$, $\operatorname{Tr}z_k^2=\sum(z_k^a)^2$, $a=1,2,\ldots,\dim G$, т.е. x, y, z — элементы алгебры Ли группы G в фундаментальном представлении, k — натуральные числа, $0<k<\infty$. Он инвариантен относительно инфинитезимальных преобразований:

$$
\delta x=\omega x,\qquad \delta z_k=\omega,\qquad \delta y=\dot{\omega},\qquad \omega\to 0.
\tag{3.28}
$$

Модель (3.19) с $e=0$ рассматривалась Бурнелем [108,109].

Проблема ненормируемости физических состояний. Одной из проблем квантовой электродинамики (КЭД) была проблема ненормируемости физических состояний. Хотя логически безупречную формулировку основ КЭД можно найти уже в основополагающих статьях Гейзенберга и Паули [32,33] (см. также [34—37]), именно эта проблема была причиной появления работ Гупты и Блейлера [110—112], допустивших в физический сектор нефизические состояния (векторы с нулевой нормой). Данная модель позволяет разобраться в этом вопросе. Рассмотрим ее частный случай:

$$L=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2-V(\mathbf{x})+\frac{1}{2}(\dot{z}-y)^2. \tag{3.29}$$

Варьируемыми переменными являются $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, y и z. Переменная y — нефизическая, так как L не зависит от скорости $\dot{y}$, $\pi=\partial L/\partial\dot{y}=0$. Гамильтониан таков ($p_z=\partial L/\partial\dot{z}=\dot{z}-y$):

$$H=h+\frac{1}{2}p_z^2+yp_z; \tag{3.30}$$

из условия самосогласованности находим $\dot{\pi}=\{\pi,H\}=-p_z=0$, т.е. z также является нефизической переменной. В квантовой теории все переменные, входящие в лагранжиан (3.29), становятся операторами. Согласно (2.49) связи первого рода должны исчезать на физических векторах Φ:

$$\hat{\pi}\Phi=-i\frac{d\Phi}{dy}=0,\qquad \hat{p}_z\Phi=-i\frac{d\Phi}{dz}=0, \tag{3.31}$$

т.е. все физические волновые функции не зависят от y и z. Между тем при нормировании физических состояний необходимо интегрировать по всем переменным $\mathbf{x}, y, z$, и так как каждая из двух последних пробегает всю вещественную ось, физические волновые функции оказываются ненормируемыми:

$$\int d^2x\,dy\,dz\,|\Phi(\mathbf{x})|^2=\infty. \tag{3.32}$$

Ясно, что эта ненормируемость не имеет никакого отношения к физическим процессам в плоскости (x_1,x_2), поэтому нет смысла требовать нормируемости Φ в подпространстве y, z. В данном случае задача решается просто — эти переменные нужно игнорировать: от них не зависят волновые функции, поэтому и не нужно по ним интегрировать в нормировочных условиях. После выяснения гамильтоновой структуры теории о них можно забыть. Подчеркнем, однако, что так просто дело обстоит лишь в рассматриваемой модели. В полевых калибровочных теориях имеет место лоренцевская инвариантность, физические и нефизические компоненты вектор-потенциалов перемешиваются, что и вынуждает прибегать к ухищрениям.

Инвариантные по форме калибровки. В модели (3.19) рассмотрим калибровки (см. (3.24), $\theta=e\Lambda$):

$$x_2' = x_2 \cos\theta - x_1 \sin\theta = 0 \tag{3.33}$$

и

$$x_4' = x_4 + \Lambda = 0. \tag{3.34}$$

Для переменных x_1', x_3' имеем равенства

$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta, \qquad x_3' = x_3 + \Lambda. \tag{3.35}$$

Подставляя в первое из них решение уравнения (3.33) $\theta = \operatorname{arctg} x_2/x_1$, а во второе — решение (3.34) $\Lambda = -x_4$, находим

$$x_1' = x_1 \cos \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + x_2 \sin \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\mathbf{x}|\,, \tag{3.36}$$

$$x_3' = x_3 - x_4 = 2y_-\,. \tag{3.37}$$

Но переменные $|\mathbf{x}|$ и y_- есть калибровочные инварианты. С аналогичным фактом мы уже сталкивались в электродинамике: переменная ψ' (2.36) была получена переходом к кулоновской калибровке (см. [23]).

4. КАЛИБРОВОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

4.1. Нединамические калибровки. *Калибровки Вейля* ($A_0 = 0$), *Максвелла* ($\partial\mathbf{A} = 0$) *и Лоренца* ($\partial_\mu A_\mu = 0$). Проанализируем роль, которая отводится физическим степеням свободы при том или ином выборе калибровки. Будут рассмотрены не все калибровки. Некоторые из них редко используются, в отношении других отсутствует полная ясность. С точки зрения физического содержания теории естественной является калибровка Вейля (1.10). Скорость $\dot{A}_0$ не входит в лагранжиан (2.2), поэтому переменная A_0 заведомо нефизическая. Это верно и для неабелевых теорий — лагранжиан Янга — Миллса также не зависит от $\dot{A}_0^a$. Полный гамильтониан (2.14) (или (2.33) с учетом (2.28)) дает $\dot{A}_0 = u(x)$, где u — произвольная функция, т.е. A_0 есть произвольная функция и ее можно положить равной нулю. Далее, в свободной теории $\partial\mathbf{E} = 0$, следовательно, $\mathbf{A}_{\|}$ — также нефизическая переменная и ее тоже можно положить равной нулю: $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, т.е. поле $\mathbf{A}$ поперечно. В свободной теории анализ на этом и заканчивался бы, если бы лоренцевское преобразование не перемешивало физические и нефизические компоненты. Но здесь приходит на помощь требование слабой калибровочной инвариантности физического сектора относительно расширенной группы калибровочных преобразований (2.16): надлежащий выбор функций u и v

позволяет обратить в нуль A_0 и $\mathbf{A}_{||}$ в любой системе отсчета. Этим достигается релятивистская инвариантность и локальность теории (см. также [102,113]). Именно с этой целью и допускались в формализм нефизические степени свободы.

Ситуация несколько меняется при включении взаимодействия. Теперь вторичная связь есть $\sigma = \partial\mathbf{E} - j_0 = 0$. Это условие утверждает, что бессмысленно рассматривать отдельно электрический заряд и продольное электрическое поле — достаточно ограничиться чем-то одним. Обычно выбирают заряд (заряженное поле). Может показаться, что здесь, наряду с $A_0 = 0$, нельзя требовать $\mathbf{A}_{||} = 0$ (т.е. $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$), поскольку в этом случае имеем $j_0 = \partial\mathbf{E} = \partial(\dot{\mathbf{A}} - \partial\mathbf{A}_0) = 0$ [114]. В действительности аналогичная проблема существует и в свободной теории: если u и v произвольны, то, вообще говоря, $\delta\partial\mathbf{E} = \Delta(u - \dot{v}) \neq 0$, т.е. нарушается вторичная связь. Обсуждение этих вопросов см. ниже.

Совершим теперь калибровочное преобразование $A_\mu \to A'_\mu$ (1.1), потребовав $\partial\mathbf{A}' = 0$, т.е. $\partial\mathbf{A} + \Delta\Lambda = 0$; отсюда находим

$$\Lambda = -\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}. \tag{4.1}$$

Ясно, что теперь Λ содержит информацию о продольном электромагнитном поле $\mathbf{A}_{||}$. Но $A'_0 = A_0 + \Lambda$, т.е. эта информация переносится в нулевую компоненту A'_μ. Полагая $A_0 = 0$ и обозначая $A'_0 = \phi$, имеем: $\phi = -\Delta^{-1}\partial\mathbf{A} = -\Delta^{-1}\partial\mathbf{E}$. Фактически мы перешли от калибровки Вейля к радиационной калибровке. Учитывая закон Гаусса, получаем привычное выражение для кулоновского потенциала:

$$\phi = -\Delta^{-1} j_0. \tag{4.2}$$

Заряженное поле ψ также меняется — оно приобретает фактор $\exp(-ie\Delta^{-1}\partial\mathbf{A})$, отвечающий кулоновскому полю. Приведенная выкладка демонстрирует, каким образом нефизическая переменная ($A'_0 = \phi$) может содержать физическую информацию: калибровочным преобразованием она передается нефизической компоненте. Сказанное поясняет, почему A_0 обычно ассоциируется с кулоновским потенциалом.

Лоренцева калибровка, как правило, используется в классической электродинамике. Ее достоинства — релятивистская инвариантность и полнота (остающийся произвол сводится к произволу начальных условий, см. п.7.1). Согласно (2.2), (2.6), (2.8) уравнения движения

$$\Box A_\mu + \partial_\mu(\partial_\nu A_\nu) = -j_\mu \tag{4.3}$$

сводятся в этой калибровке к уравнениям Л.Лоренца [24]:

$$\Box A_\mu = -j_\mu . \tag{4.4}$$

Нефизическая степень свободы исключается из теории релятивистски-инвариантным образом. Совершая разбиение

$$A_\mu = A^{tr}_\mu + A^l_\mu, \qquad \partial_\mu A^{tr}_\mu = 0, \tag{4.5}$$

имеем: $\partial_\mu A_\mu = \partial_\mu A^l_\mu$. Очевидно, $A^l_\mu = -\Box^{-1}\partial_\mu(\partial_\nu A_\nu)$, т.е. A^l_μ есть чисто градиентное поле и его можно устранить калибровочным преобразованием. Из (4.4) следует, что оно не взаимодействует с заряженными полями: $\Box A^l_\mu = 0$, поскольку $\partial_\mu j_\mu = 0$. Следовательно, оно не излучается и не поглощается. Пропагатор электромагнитного поля в этой калибровке

$$\Delta^c_{\mu\nu} = \frac{-i}{q^2 + i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \tag{4.6}$$

имеет дополнительный полюс, который, однако, не доставляет хлопот ввиду сохранения тока. В статическом случае ($\dot{A}^{tr}_0 = 0$) поле A^{tr}_0 удовлетворяет уравнению Пуассона, решение которого (4.2) есть кулоновский потенциал.

Переход к лоренцевской калибровке сопровождается изменением фазы заряженного поля: $\partial_\mu A'_\mu = \partial_\mu A_\mu - \Box\Lambda = 0$, т.е. $\Lambda = \Box^{-1}\partial_\mu A_\mu$, $\psi \to \psi' = \exp(ie\Box^{-1}\partial_\mu A_\mu)\,\psi$. Итак, калибровочным условием из динамики исключается поле $\partial_\mu A_\mu$, присутствующее в лагранжиане (2.2). Оно ассоциируется с заряженным полем ψ, т.е. теперь его динамика определяется динамикой ψ'. При переходе к статическим полям ($\dot{A}_\mu = 0$) экспонента в ψ' превращается в кулоновскую экспоненту (2.36).

Теперь мы готовы к тому, чтобы подробнее обсудить вопрос об одновременном устранении полей A_0 и $\mathbf{A}_{\|}$ с помощью преобразований из расширенной калибровочной группы. Он тесно связан с другим вопросом: вполне ли произвольны калибровочные параметры u и v? Этот последний эквивалентен вопросу о допустимости нарушения связей первого рода (до перехода в физический сектор), в частности, преобразованиями из расширенной калибровочной группы, поскольку $\delta(\partial\mathrm{E} - j_0) = \Delta(u - \dot{v}) \neq 0$. В лагранжиан входят все компоненты A_μ, физические и нефизические, и все они, как мы видели в разд.3, существенны для физики. Известно, что теория допускает формулировку в терминах лишь физических величин, инвариантных относительно преобразований из расширенной калибровочной группы, именно величин ψ' (2.36) и $\mathbf{A}_\perp$: $\delta_{u,v}\,\psi' = \delta_{u,v}\,\mathbf{A}_\perp = 0$. Соответствующий гамильтониан скалярной электродинамики таков [95]:

$$H_{ph} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\,[\mathbf{E}_\perp^2 + \mathbf{H}^2 - j_0\Delta^{-1}j_0] + \frac{1}{2}\,\Pi^2 + \frac{1}{2}\,[(\partial + e\mathbf{A}_\perp T)\,\Phi']^2 \right\}, \quad (4.7)$$

где компоненты двумерного вектора Φ есть вещественная и мнимая части скалярного комплексного поля $\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$, Π — канонический импульс скалярного поля, матрица T выписана в (3.1), а штрихованное поле Φ' отличается от Φ кулоновской экспонентой:

$$\Phi'(x) = \exp\left(- e \int \frac{d^3y}{4\pi}\, \frac{\partial \mathbf{A}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\, T \right) \Phi(x). \quad (4.8)$$

Таким образом, в физическом секторе, т.е. с учетом всех связей первого рода, теория формулируется в терминах лишь поперечных полей:

$$A_0 = \mathbf{A}_\parallel = 0. \quad (4.9)$$

Ее отличительная черта — нелокальность всех физических полей (Φ' дается (4.9), ψ' — (2.36), $\mathbf{A}_\perp = -\Delta^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$). В гамильтониане (4.7) уже учтены связи, поэтому, несмотря на условия (4.9), нельзя говорить о нарушении закона Гаусса, т.е. о противоречии требований (4.9) связям. Подчеркнем, впрочем, что поле $\mathbf{A}_\parallel$ исчезает лишь в данном представлении. С точки зрения исходных (локальных) переменных Φ, A_μ оно не исчезло — продольное поле перешло в экспоненту (4.8). Это означает: для того, чтобы проследить за судьбой $\mathbf{A}_\parallel$, необходимо решить уравнения движения для поля Φ'.

Итак, нефизическими степенями свободы являются величины, канонически сопряженные всем связям первого рода (их скобки Пуассона со всеми остальными каноническими переменными должны равняться нулю). С помощью калибровочных преобразований можно фиксировать нефизические переменные: или положить их равными нулю, или перенести в них информацию, содержащуюся в физических степенях свободы. Пользуясь тем, что физический сектор не зависит от нефизических переменных, последние можно произвольно менять. В частности, можно менять генераторы калибровочных преобразований (связи), что и происходит, например, в калибровке Фейнмана: $\pi_0 = \partial_\mu A_\mu \neq 0$. Здесь важно лишь, чтобы в физическом секторе $\pi_0 = 0$. Используя в полном объеме калибровочную свободу, т.е. переходя к расширенной группе преобразований, мы оперируем в пространстве, включающем как физические, так и нефизические переменные. Поэтому на данном этапе нельзя говорить о нарушении каких-либо условий (уравнений движения, связей) — важно лишь, чтобы эти операции не затрагивали физического сектора, переход в который возможен в любой момент и осуществляется учетом связей.

Резюмируем: до перехода в физический сектор можно пользоваться преобразованиями из расширенной калибровочной группы с произвольными параметрами u и v.

Аксиальная калибровка $A_3 = 0$. Аксиальные калибровки вызвали особый интерес в связи с тем, что при их использовании отпадает необходимость прибегать к фиктивным полям: матрица в (2.54) не зависит от полей, вследствие чего не возникает и проблемы копий. Фиксацией третьей компоненты A_μ

$$A'_3 = A_3 + \partial_3\Lambda = 0 \tag{4.10}$$

содержащаяся в ней информация переносится в другие компоненты, поскольку

$$\Lambda = \int\limits_{x_3} A_3 dx^3. \tag{4.11}$$

Обращают на себя внимание следующие обстоятельства. Нарушается явным образом не только релятивистская инвариантность, но и изотропность 3-мерного пространства. Далее, даже при убывающих на бесконечности полях $A_\mu(A_3 \sim 1/x_3,\ |x_3| \to \infty)$ функция Λ не убывает: $\Lambda \sim \ln|x_3|$, $|x_3| \to \infty$. Очевидно, применение этой калибровки корректно лишь в задачах с быстро убывающими потенциалами. Наконец, параметры остаточной калибровочной группы Λ', $\partial_3\Lambda' = 0$ зависят от времени. Следовательно, калибровочный произвол устранен не полностью — остались нефизические степени свободы, которые могут произвольно меняться со временем. Правда, $\Lambda' = \Lambda'(x_1, x_2, t)$ зависит лишь от двух координат, т.е. множество нефизических переменных двухпараметрическое, и с точки зрения исходного (трехмерного) множества имеет меру нуль. В рамках расширенной калибровочной группы преобразование (4.10) генерируется вторичной связью, т.е. $\Lambda = v$.

Пропагатор электромагнитного поля в аксиальной калибровке [31]

$$\Delta^c_{\mu\nu} = \frac{-i}{q^2 + i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{qn} + \frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2} n^2 \right) \tag{4.12}$$

имеет полюс при $qn = 0$, т.е. поля, распространяющиеся в плоскости, нормальной к n, полностью коррелированы.

Причинная функция может выглядеть довольно сложно при использовании вычурных калибровок. Существует простой критерий, которому должен удовлетворять пропагатор электромагнитного поля (он естествен для динамических калибровок, но пригоден и для нединамических, за исключением вейлевской): обмен фотоном статическими источниками должен воспроизводить кулоновский потенциал. Рассмотрим электродинамику со статическими источниками J_μ [115]:

$$S = -\int dx \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + A_\mu J_\mu \right]. \tag{4.13}$$

Подстановка этого действия в (2.50) дает

$$W[J] = \frac{i}{2} J_\mu \Delta^c_{\mu\nu} J_\nu, \tag{4.14}$$

где $\Delta^c_{\mu\nu}$ — пропагатор фотона. Включение токов меняет энергию «вакуума» (теперь это основное состояние в присутствии токов). В случае статических источников имеем

$$\Delta E_{\text{vac}} T = -W[J], \tag{4.15}$$

ΔE_{vac} — сдвиг энергии вакуума, T — временной интервал, $T = t_2 - t_1 \to \infty$. Поскольку $J_\mu(x) \to J_0(x)$, $\dot{J}_0 = 0$ и в импульсном пространстве $\tilde{J}_0(q) = 2\pi\delta(q_0)\tilde{J}_0(\mathbf{q})$, находим

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{vac}} T &= -\frac{i}{2} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \tilde{J}_0(q) \Delta^c_{00}(q) \tilde{J}_0(-q) = \\ &= \frac{2\pi\delta(0)}{2i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{J}_0(\mathbf{q}) \Delta^c_{00}(\mathbf{q}) \tilde{J}_0(-\mathbf{q}), \end{aligned} \tag{4.16}$$

т.е., ввиду замены $2\pi\delta(0) \to T$,

$$\Delta E_{\text{vac}} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{J}_0(\mathbf{q}) \Delta^c_{00}(\mathbf{q}) \tilde{J}_0(-\mathbf{q}). \tag{4.17}$$

С другой стороны, переход к гамильтониану в физическом секторе (2.35) дает

$$\Delta E_{\text{vac}} = -\frac{1}{2} J_0 \Delta^{-1} J_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{J}_0(\mathbf{q}) \frac{1}{\mathbf{q}^2} \tilde{J}_0(-\mathbf{q}). \tag{4.18}$$

Сравнивая (4.17) и (4.18), получаем искомый критерий

$$-i\Delta^c_{00}(q)\big|_{q_0=0} = \frac{1}{\mathbf{q}^2}. \tag{4.19}$$

Данный пример еще раз демонстрирует специфику нефизических степеней свободы. Казалось бы, выбирая в случае $\mathbf{J} = 0$ калибровку $A_0 = 0$, мы избавляемся от взаимодействия в (4.13). Но в лагранжиане нельзя полагать равными нулю переменные, даже нефизические. Роль A_0 заключается в генерации вторичной связи (закона Гаусса), свидетельствующей о появлении в окрестности покоящегося заряда статического электрического (т.е. продольного) поля. Продольные поля не могут распространяться в отрыве от зарядов — при желании можно говорить об их пленении. Впрочем, можно так распорядиться произволом (например, выбрать калибровку Фейнмана, см. ниже), что A_0 и $\mathbf{A}_{\parallel}$ удовлетворяют уравнениям движения Л.Лоренца (4.4), а совокупный эффект обмена квантами этих полей дает кулоновский потенциал.

Калибровка Фока. К калибровке (1.15) Фок пришел, изучая движение заряженной релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. Действие

$$S = -\frac{m}{2}\int\left[\dot{x}^2 + 1 + \frac{e}{m}A_\mu \dot{x}^\mu\right]d\tau, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \tag{4.20}$$

где τ — инвариантный параметр, ведет к тем же самым уравнениям движения, что и стандартное с лагранжианом

$$L_0 = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} - A_\mu J_\mu, \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \tag{4.21}$$

если $\dot{x}^2 = 1$, т.е. если τ — «собственное время». Взаимодействие классической частицы с током $J_\mu = edx_\mu/dt$ в (4.21) есть результат перехода к массивным полям в лагранжиане (2.2): $m \to \infty$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to dx^\mu/dt\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t))$.

Применение этой идеи к релятивистскому электрону позволило найти решение уравнения Дирака при наличии внешнего поля [28,29]. Совершая калибровочное преобразование с функцией

$$\Lambda = \int_x^{x_0} A_\mu dx^\mu, \tag{4.22}$$

обнаруживаем, что новые потенциалы $A' = A + \partial\Lambda$ удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^\mu A'_\mu(x) = 0, \tag{4.23}$$

если в (4.22) интегрируется по прямой, соединяющей точки x и x_0. Эта калибровка удобна в случае массивных частиц или частиц высоких энергий, когда излучение не слишком жестких фотонов мало меняет их импульс, т.е. когда применимо «инфракрасное приближение». Именно поэтому она применяется при изучении жестких процессов, в частности, при изучении процессов глубоконеупругого рассеяния [60,116]. Отсюда же ее связь с контурными калибровками [60]. Калибровка Фока замечательна тем, что позволяет выразить потенциалы через напряженности

$$A_\mu(x) = x_\nu \int_0^1 sF_{\mu\nu}(sx)\, ds. \tag{4.24}$$

Подробное доказательство этого можно найти в [30]. Формула (4.24) справедлива и в неабелевых теориях. Отметим попутно, что калибровочная инвариантность потенциалов в (4.24) иллюзорна — к A_μ можно добавить $\partial_\mu \Lambda$, сохранив $F_{\mu\nu}$, но нарушив калибровку; по существу (4.24) — частный случай (именуемый калибровкой Фока), когда неинвариантный объект принимает инвариантный вид. Относительно связи представления (4.24) с внешними дифференциальными формами см. приложение 7.3.

Связь калибровки Фока с другими калибровками. Калибровка Фока является как бы центром, объединяющим многие физически важные калибровки.

Калибровка Максвелла. В [117,99] было показано, что экспоненциальный фактор в (2.36), описывающий кулоновское поле, представляется бесконечным произведением линейных экспонент:

$$\prod_{i,j}^{N} \exp\left(-ie \int_{-\infty}^{x} A_\mu(y_{ij})\, dy_{ij}^{\mu}\right) \to e^{-ie\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}}, \qquad N \to \infty. \tag{4.25}$$

Индексы i, j нумеруют площадки на окружающей заряд единичной сфере, через которые проходят исходящие из заряда прямые (контуры интегрирования (4.25)). Ясно, что в случае статического источника калибровка Фока (1.14) эквивалентна калибровке Максвелла (1.9), ассоциирующей продольное поле $\mathbf{A}_{\|}$ с полем материи. Независимо от представления (4.25) это можно увидеть непосредственно из формулы (4.8). Интегрируя в показателе экспоненты по частям, записываем ее в виде

$$\exp\left(e \int \frac{d^3y(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathbf{A}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} T \right). \tag{4.26}$$

Очевидно, как и в случае радиационной калибровки, в задаче с фиксированным источником требование (1.15) ассоциирует продольное поле $\mathbf{A}_{\|}$ с зарядом.

Другие калибровки. Калибровка Фока тесно связана с калибровками, использующими линейные экспоненты. Она полезна в задачах, где встречаются линейные интегралы от вектор-потенциалов, т.е. интегралы 1-форм. Характерный пример дает физика инфракрасного излучения. Инфракрасные фотоны генерируются классическим током [118,119], и для их учета достаточно рассмотреть задачу с действием (4.13). Движение точечного заряда связано с током

$$J_\mu(p,x)=\frac{ep_\mu}{E_p}\,\delta\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{E_p}t\right),\qquad p_\mu=\frac{dx_\mu}{ds}m=\frac{dx_\mu}{dt}E_p, \tag{4.27}$$

где p_μ — импульс частицы, E_p — ее энергия, $p^2=m^2$. Типичный фактор, описывающий поле излученных фотонов в калибровке Фейнмана, дается экспонентами

$$\exp\left(i\int_0^\infty dt\int d^3xA^\Delta_\mu J_\mu\right)=\exp\left(ie\int_0^\infty dtA^\Delta_\mu(n_p^\mu t)\,n_p^\mu\right)=\exp\left(ie\int_{n_p}A^\Delta_\mu(x)dx^\mu\right). \tag{4.28}$$

Здесь $n_p^\mu=p^\mu/E_p=dx^\mu/dt$; интегрирование в последнем члене (4.28) ведется по прямой, задаваемой вектором n_p. Значок Δ при A_μ означает, что учитываются нерегистрируемые фотоны в интервале энергий $\Delta=E-\varepsilon$, где E — разрешающая способность аппаратуры (регистрируются лишь фотоны с энергией $\omega_q>E$); ε^{-1} характеризует минимальный размер области, в которой находится излучающая частица и полный заряд которой равен нулю (фотоны с длиной волны $\lambda_q>\varepsilon^{-1}$ не излучаются). Экспоненты (4.28) описывают поле инфракрасных фотонов рассеянной частицы; переход к полю налетающей частицы достигается изменением знака показателя экспоненты. Эти формулы справедливы и в том случае, когда энергии излученных фотонов не малы. Для их применимости необходимо лишь, чтобы излучение квантов пренебрежимо мало влияло на импульс заряженной частицы, т.е. при $|\mathbf{p}|\to\infty$. Отсюда становится ясной причина, по которой калибровка Фока оказывается связанной с калибровками, употребляемыми при описании жестких процессов. Так как $n_p^2=m^2/E_p^2$, то $n_p^2\to 0$ при $E_p\to\infty$, и мы приходим к калибровке светового конуса. Ей близка калибровка Липатова [45] (см. ниже (4.39)). Импульсы фотона q и протона p, участвующих в процессе глубоконеупругого рассеяния, представляются в виде $q=q'+p'q^2/s'$, $p=p'+q'm^2/s'$, где $q'^2=p'^2=0$, $s'=2p'q'$; произвольный импульс k представляется суммой $k=\alpha q'+\beta p'+k_\perp$, $q'k_\perp=$ $=p'k_\perp=0$. Пропагатор векторной частицы (глюона) с импульсом k в этом подходе

$$\Delta^c_{\mu\nu}=\frac{-i}{k^2+i0}\left(g_{\mu\nu}-\frac{q'_\mu k_\nu+k_\mu q'_\mu}{q'k}\right). \tag{4.29}$$

идентичен пропагатору в калибровке светового конуса ((4.12) при $n^2=0$); роль вектора n играет компонента q' налетающего фотона ($q'^2=0$). В данной калибровке вклад диаграмм с тормозными квантами пренебрежим в главном логарифмическом приближении. В неабелевых теориях формулы (4.28) сохраняют смысл, если считать, что поля принимают значения из алгебры Ли калибровочной группы, и ввести упорядочение операторов вдоль пути интегрирования.

Итак, калибровка Фока связана с целой группой физически важных калибровок, имеющих разный физический смысл. Суть любого калибровочного условия заключается в указании поля (степени свободы), не содержащегося или исключаемого из уравнений движения. В случае калибровки Максвелла это продольное поле $\mathbf{A}_{\parallel}$. Оно ассоциируется с заряженным полем материи и не может излучаться (кулоновская экспонента (2.36)), поэтому изучается динамика лишь заряженных полей и поперечных полей $\mathbf{A}_{\perp}$, которые распространяются свободно. Эти последние удовлетворяют условию $\partial \mathbf{A}_{\perp}=0$; по существу, совершено калибровочное преобразование $\mathbf{A}\to\mathbf{A}'=\mathbf{A}_{\perp}$. Связь с калибровкой Фока (1.14) выясняется из возможности представления кулоновского фактора в (2.36) бесконечным произведением линейных экспонент (4.25), (4.26).

Калибровки, используемые в физике частиц высоких энергий, также связаны с линейными интегралами от вектор-потенциалов. При $|\mathbf{p}|\to\infty$ применимо квазиклассическое приближение, когда траектории частиц аппроксимируются прямыми, и поле нерегистрируемых («мягких») квантов, сопровождающее частицу, дается экспонентами (4.28). Отсюда появление калибровки Фока — «инфракрасные поля», сопутствующие частице, исключаются из динамики, т.е. фактически совершается калибровочное преобразование $A_{\mu}\to A'_{\mu}$, $(x-x_0)_{\mu}A'_{\mu}=0$. Теперь для того, чтобы проследить за их судьбой, достаточно проследить за излучающей частицей. При $|\mathbf{p}|\to\infty$ вектор $n_p\sim x-x_0$ становится светоподобным и калибровка Фока превращается в калибровку светового конуса.

Хотя условия (1.14), (1.15) лежат в основе и калибровки Максвелла, и светового конуса, физически они совершенно различны. Как мы выяснили, нединамические калибровочные условия выделяют поля, ассоциируемые с зарядами и не фигурирующие явным образом в уравнениях движения. В случае радиационной калибровки — это кулоновское поле, описываемое $\mathbf{A}_{\parallel}$. Оно связано с зарядами и может распространяться лишь вместе с ними, тогда как поля $\mathbf{A}_{\perp}$ — динамические, т.е. могут поглощаться, излучаться и распространяться независимо от зарядов. В случае же аксиальных калибровок, связанных с введением факторов (4.28), поле n_pA^{Δ} — поле нерегистрируемого излучения, т.е. это скрытые, пассивные степени свободы. Активно проявляют себя остающиеся компоненты A_μ, которые могут наблюдаться. Разумеется, применение более совершенной аппаратуры позволит наблюдать и эти, в данных обстоятельствах исключаемые из динамики поля. Сказанное означает, что разделение полей на пассивные и активные условно. Наконец, еще одно отличие калибровок, используемых при изучении реальных процессов, связано с тем, что в калибровке светового конуса (1.12) исключаются все поля, тогда как согласно (4.28) в жестких процессах следует исключать лишь кванты с энергией из интервала Δ.

Отметим в заключение, что линейные экспоненты имеют глубокий геометрический смысл: с точки зрения расслоенных пространств поля A_μ есть связности, а линейные экспоненты — операторы параллельного переноса [22,121]. Учитывая, что калибровка Фока естественно интерпретируется и на языке внешних дифференциальных форм (см. приложение 7.3), становится ясным, что ее появление — это результат глубокого проникновения в существо калибровочных теорий.

4.2. Динамические калибровки. *Калибровка Фейнмана* $\mathcal{L}' = -(\partial_\mu A_\mu)^2/2$. Прежде всего покажем, что классические уравнения движения в калибровках Лоренца и Фейнмана совпадают. Действительно, из представления (2.6), (2.8) следует, что за вычетом четырехмерной дивергенции лагранжиан свободного электромагнитного поля $\mathcal{L}_0$ записывается в виде

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} A_\mu \Box A_\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2. \tag{4.30}$$

Фиксация калибровки по Гейзенбергу — Паули — Фейнману [32,33] заключается в добавлении к $\mathcal{L}_0$ члена $\mathcal{L}' = -(\partial_\mu A_\mu)^2/2$, поэтому в обоих калибровках второе слагаемое в лагранжиане (4.30) исчезает, и мы приходим к (4.4). Разница между ними в том, что в калибровке Лоренца поле $\partial_\mu A_\mu = 0$, а в калибровке Фейнмана оно, согласно (4.4), удовлетворяет уравнению Даламбера $\Box \partial_\mu A_\mu = 0$.

Калибровка Фейнмана по существу является стандартной. Тому по крайней мере две причины: 1) ее явная релятивистская инвариантность; 2) возможность проследить судьбу физических степеней свободы. Действительно, пропагатор фотона в этой калибровке пропорционален метрическому тензору

$$\Delta^c_{\mu\nu} = \frac{-i}{q^2 + i0} g_{\mu\nu}, \tag{4.31}$$

т.е. заряженные частицы обмениваются не только поперечными квантами $\mathbf{A}_\perp$, но и квантами полей A_0, $\mathbf{A}_\parallel$. Совокупный эффект последних должен сводиться к кулоновскому взаимодействию. Каким же образом здесь сосуществуют физические и нефизические степени свободы? Ответ на этот вопрос дал Фейнман [122—124]. В импульсном представлении эффект от обмена квантами A_μ пропорционален M:

$$iM = \frac{j_\mu j_\mu}{q^2 + i0}. \tag{4.32}$$

Учитывая сохранение тока $q_\mu j_\mu = q_0 j_0 - \mathbf{q}\mathbf{j}_\parallel = 0$, подставляем в сумму $j_\mu j_\mu = j_0^2 - \mathbf{j}_\parallel^2 - \mathbf{j}_\perp^2$ выражение для продольной компоненты:

$$\mathbf{j}_\parallel = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2} q_0 j_0. \tag{4.33}$$

Получаем

$$iM = \frac{1}{q^2 + i0}\left[j_0^2 - \frac{q_0^2}{\mathbf{q}^2} j_0^2 - \mathbf{j}_\perp^2 \right] = -\frac{j_0 j_0}{\mathbf{q}^2} - \frac{\mathbf{j}_\perp \mathbf{j}_\perp}{q^2 + i0}. \tag{4.34}$$

Представление (4.34) имеет ясный физический смысл: обмен квантами полей A_0 и $\mathbf{A}_\parallel$ дает кулоновское взаимодействие $-j_0^2/\mathbf{q}^2$, тогда как эффект обмена поперечными (калибровочно-инвариантными) компонентами $\mathbf{A}_\perp$ определяется магнитными характеристиками частиц. Зная пропагатор в калибровке Фейнмана, легко получить пропагаторы в лоренцевской и аксиальной калибровках. Исходной является формула

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \tag{4.35}$$

Переходя, например, к калибровке Лоренца $\partial_\mu A'_\mu = 0$, имеем $\Lambda = = \Box^{-1}\, \partial_\mu A_\mu$, т.е. $A'_\mu = A_\mu + \Box^{-1}\partial_\mu \partial_\nu A_\nu$ и, учитывая, что пропагатор A_μ дается (4.31), получаем (4.6). В случае аксиальных калибровок имеем $nA' = 0$, т.е. $\Lambda = -(n\partial)^{-1} nA$ и $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu (n\partial)^{-1} nA$. Снова пользуясь (4.31), получаем пропагатор (4.12) в аксиальных калибровках: Вейля ($n^2 = 1$), светового конуса ($n^2 = 0$) и Арновита — Фиклера ($n^2 = -1$). Наконец, для перехода к радиационной калибровке (1.9) необходимо взять $\Lambda = -\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}$. С помощью матрицы T (2.7) и операторов $\Box_T = T^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \Delta$, $\partial^T_\mu = g_{\mu\nu} T^{\nu\rho}\partial_\rho$, $\partial\partial_T = \partial_T^2 = -\Box_T$, $\partial^T_\mu A_\mu = -\partial\mathbf{A}$ записываем A'_μ в калибровке Максвелла в инвариантной форме: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Box_T^{-1}\, \partial^T_\nu A_\nu$. Искомый пропагатор фотона имеет вид

$$\Delta^{M}_{\mu\nu}=\frac{-i}{q^2+i0}\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q^T_\nu+q^T_\mu q_\nu}{q_T^2}+\frac{q_\mu q_\nu}{q_T^2}\right). \tag{4.36}$$

В силу сохранения тока производная в (4.35) не меняет амплитуды вероятности процесса, т.е. во всех этих калибровках будут иметь место разбиение (4.34) и критерий (4.19). Для полной ясности приведем все же детали вычислений для какой-нибудь одной калибровки. Например, в калибровке Вейля $\Delta^W_{00}=0$ (см. (4.12)), следовательно,

$$iM^W=\frac{1}{q^2+i0}\left(-\mathbf{j}^2+\frac{(\mathbf{qj})^2}{q_0^2}\right). \tag{4.37}$$

Но $\mathbf{j}^2=\mathbf{j}^2_{\|}+\mathbf{j}^2_{\perp}$, $(\mathbf{qj})^2=\mathbf{q}^2\mathbf{j}^2_{\|}$, и, учитывая (4.33), приходим к представлению (4.34) для M^W. Соответствующие выкладки для других калибровок отличаются лишь непринципиальными деталями.

Другие калибровки. Обсудим вкратце некоторые другие калибровки, связанные с добавлением в лагранжиан калибровочно-неинвариантных членов. Добавление $\mathcal{L}'$ (1.21) (планарная калибровка) меняет матрицу K (2.8) в лагранжиане (2.6):

$$K_{\mu\nu}\to K'_{\mu\nu}=-\,\Box\left(g_{\mu\nu}+\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}-\frac{n_\mu n_\nu}{\alpha n^2}\right). \tag{4.38}$$

Пропагатор векторной частицы имеет вид

$$\Delta^{Pl}_{\mu\nu}=\frac{-i}{q^2+i0}\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu n_\nu+n_\mu q_\nu}{qn}+\frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2}(1-\alpha)n^2\right). \tag{4.39}$$

При $\alpha\to 1$ получается планарная калибровка работы [46] ($n^2\neq 0$), а при $n^2\to 0$ приходим к калибровке Липатова [45], $\Box nA=0$. Последняя относится к калибровке светового конуса $nA=0$ так же, как калибровка Фейнмана ($\Box\partial A=0$) к калибровке Лоренца ($\partial A=0$). Названием «планарная калибровка» [46] термин обязан плоскости, в которой лежит вектор $n=\alpha q'+\beta p'$, $n^2\neq 0$ (см. (4.29)). Таким образом, термин, связываемый с фиксатором (1.21), охватывает разные калибровки.

Калибровка (1.22) для $n^2=0{,}1$ — динамическая ($\mathcal{L}'$ квадратичен по скоростям $\dot{A}_0$), а при $n^2=-1$ фиксатор $\mathcal{L}'$ меняет динамику компоненты nA.

Фоновая калибровка (1.23) важна не только для получения результатов общего характера, но и для конкретных вычислений [49]. В этом подходе помимо выбора $\mathcal{L}'$ важной находкой является идея разбиения связности на тензор и связность (условие (1.24)).

Иногда в качестве фиксаторов предлагают брать [44]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial \mathbf{A})^2 \tag{4.40}$$

или

$$\mathcal{L}' = -\frac{\beta^2}{2}(nA)^2. \tag{4.41}$$

Прежде всего отметим, что эти калибровки не относятся к классу динамических — в них не входит скорость $\dot{A}_0$. Далее, добавление к $\mathcal{L}$ (4.40) эквивалентно радиационной калибровке лишь при $\alpha \to 0$, а добавление (4.41) [31] сводится к наделению массой поля nA и при $n^2 < 0$ меняет динамику физического сектора. Псевдоаксиальная калибровка (4.41) сводится к аксиальной при $\beta \to \infty$.

4.3. Квантование. Принципиальная роль динамических калибровок проявляется при квантовании. Нединамические калибровочные условия, например, $A_0 = 0$, не могут трактоваться как операторные равенства. Как операторные равенства не могут трактоваться и связи: скажем, равенство $\pi^0 = 0$ противоречит перестановочным соотношениям (2.48). Связи следует понимать в слабом смысле, т.е. как условия на физические векторы состояний (2.49). Но тогда калибровочное условие Вейля нельзя понимать даже в слабом смысле (как условие на волновую функцию), ибо это противоречило бы соотношению неопределенностей. Поэтому с точки зрения канонической квантовой теории единственный допустимый способ устранения произвола — использование динамических калибровок. Так и поступают в КЭД. Новые калибровки начали появляться при изучении неабелевых теорий, а также в связи с использованием аппарата континуальных интегралов. В интеграл (2.50) подставляют $\delta(A_0)$, а в соответствующий гамильтонов континуальный интеграл — $\delta(A_0)\delta(\pi^0)$ [71]. Оба эти способа устранения произвола противоречат постулатам квантовой механики. Но даже в классике, как мы видели в разд.3, устранение переменной y (т.е. A_0) из лагранжиана ($y \to 0$) ведет к потере вторичной связи. Удалять нефизические переменные с помощью δ-функций можно лишь после выявления всех связей. Как показано в п.3.2, после того, как все нефизические переменные установлены, их, в принципе, можно считать равными нулю, точнее, игнорировать их существование. Другими словами, считать, что волновые функции от них не зависят, поскольку они не влияют на физический сектор. Но так просто дело обстоит лишь в случае, когда нефизические переменные не связаны с криволинейными координатами. В противном случае правила канонического квантования неприменимы [100]. Корректная процедура квантования предполагает переход к декартовым координатам [100] или специальный набор правил при квантовании в рамках метода континуального интегрирования [107]. Между тем связь нефизических переменных в калибровочных теориях с криволинейными координатами является скорее правилом, чем исключением. Как мы видели на модели (3.1), даже в электродинамике нефизическая переменная θ есть угол в полярных координатах. Именно по этой причине операции квантования и устранения нефизических переменных неперестановочны [107, с.1137]. Необходимо соблюдение правил квантования систем со связями, сформулированных Дираком [96]. В случае модели (3.1) учет указанных обстоятельств приводит к появлению дополнительного члена $(-1/2r)\partial_r$ в физическом гамильтониане (3.15). Анализ данного вопроса в теории полей Янга — Миллса сделан в [125,126]. Показано, что учет криволинейности координат и в этом случае ведет к модификации физического оператора Гамильтона.

5. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1. Локальные и глобальные калибровочные преобразования. Хотя относительно принципиального различия локальных и глобальных калибровочных преобразований уже писалось [63,127], этот важный вопрос до сих пор не нашел отражения на страницах учебников и монографий (в [63] речь идет лишь об ОТО, а в [127] он обсуждается в общем плане). Между тем и сегодня приходится сталкиваться с отсутствием ясного понимания физики, стоящей за свойствами инвариантности относительно упомянутых преобразований. Обсудим вкратце эту проблему.

1. Глобальная калибровочная инвариантность формально сводится к инвариантности действия (плотности лагранжиана) относительно преобразований полей и координат с постоянными параметрами ω ($\partial_\mu\omega = 0$). Следствием такой инвариантности являются законы сохранения (первая теорема Нетер [128]). Утверждение становится тривиальным, если обратиться к одномерному движению. Лагранжиан L, вообще говоря, зависит от координаты и скорости, однако требование инвариантности относительно сдвига $x \to x+a$, $a = \text{const}$, исключает зависимость L от x: $\partial L/\partial x = 0$. Физически это означает, что все точки оси равноправны, т.е. состояние и физические условия, в которых частица находится, скажем, в окрестности начала координат, неотличимы от состояния и условий в окрестности точки $x = a$. Но если на частицу ничто не воздействует, то ее импульс сохраняется. Формально это следует из уравнения движения: $p = \partial L/\partial\dot{x}$, поэтому $dp/dt = 0$. Другими словами, p есть циклическая переменная [129]. Ситуация не меняется в более общем случае — утверждение о глобальной симметрии эквивалентно утверждению о наличии циклических переменных, от которых не зависит лагранжиан, и о сохранении канонически сопряженных им импульсов, являющихся генераторами преобразований данной симметрии.

2. *Локальная калибровочная инвариантность,* как уже говорилось, сводится к утверждению, что действие (лагранжиан, лагранжева плотность) не меняется при преобразовании полей и координат с параметрами, зависящими от времени (в полевых теориях параметры обычно зависят еще и от пространственных координат **x**). Следствия данной симметрии формулируются во второй теореме Нетер [128]: локальная симметрия действия влечет тождественные соотношения между эйлерианами $\mathcal{E}$ и производными от них по координатам, если в законы преобразования полей входят производные от параметров (как это имеет место, например, в электродинамике, см. (1.1); $\mathcal{E} = \partial\mathcal{L}/\partial\varphi - \partial[\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu\varphi]/\partial x^\mu$, где φ — поля, т.е. равенства $\mathcal{E} = 0$ и есть уравнения движения). В случае одномерного движения требование инвариантности лагранжиана относительно замены

$$x \to x + a(t) \tag{5.1}$$

приводит к условию $L = 0$, что означает отсутствие какого-либо физического процесса, т.е. отсутствие движения. Это легко понять, если учесть произвольность функции $a(t)$. Роль уравнения движения заключается в фиксации закона изменения x со временем. Возможность замены (5.1) означает, что ничто не изменится, если в момент времени t заменить x на $x + a(t)$. Но тогда, пользуясь произвольностью $a(t)$, можно, например, выбрать $a(t) = -x$. В этом случае частица все время будет находиться в начале координат независимо от выбора начальных условий, т.е. в действительности движения нет. Это и означает, что переменная x — нефизическая (чисто калибровочная степень свободы). Импульс частицы равен нулю, следовательно, мы имеем связь. В случае более сложной калибровочной группы нефизических переменных будет больше, но существо дела останется прежним.

В этом и заключается разница между локальными и глобальными симметриями: первая означает наличие законов сохранения, т.е. наличие циклических переменных с тривиальной динамикой, вторая — отсутствие динамики, т.е. полную произвольность переменных, входящих в лагранжиан. Таким образом, это принципиально разные свойства инвариантности физически совершенно разных систем.

В заключение отметим следующее. Ничто не мешает включению в группу локальных преобразований и глобальных, тогда как расширение группы глобальных преобразований до локальной радикально меняет физическую систему. Действительно, в теориях с глобальной симметрией обобщенные импульсы (генераторы преобразований) сохраняются, а в теориях с локальной симметрией они равны нулю. Но одновременно это значит и то, что они сохраняются — остаются равными нулю в процессе движения. Следовательно, включение в калибровочную группу глобальных преобразований представляется естественным; более того, неестественным было бы их исключать. Несколько видоизменяя аргументацию, можно сказать: если допускаются произвольные независимые сдвиги координат в любые моменты времени, то сдвиги на одну и ту же произвольную величину независимо от времени являются частным случаем этого допущения. Мы так подробно останавливаемся на этом вопросе потому, что его положительное решение имеет важные физические следствия: во-первых, равенство нулю полного электрического заряда Вселенной, во-вторых, правила суперотбора для электрического заряда [99,130,131].

5.2. Большие калибровочные преобразования. Во введении отмечалось, что произвольные параметры (функция Λ, матрицы U в (1.1)) не могут быть вполне произвольны. Самое очевидное ограничение — они не должны выводить поля из заданного класса, определяемого при формулировании теории (поля не могут менять геометрическую и алгебраическую природу и т.п.; исключение — преобразования БРСТ, превращающие вектор-потенциалы в четные элементы грассмановой алгебры). Однако помимо этих очевидных ограничений существуют более тонкие, затрагивающие вопросы непрерывности полей, топологию пространства и т.п. Так, переходя от евклидова пространства R^3 к трехмерной сфере S^3 (т.е. компактифицируя пространство), мы получаем совершенно другую теорию. Матрицы $U(x)$ в (1.2), реализующие в каждой точке пространства представление калибровочной группы G, осуществляют отображение S^3 на группу. Из топологии известно [121], что множество матриц $U(x)$ разбивается на классы (1.40), причем элементы разных классов нельзя перевести друг в друга непрерывным преобразованием. Это ставит серьезные вопросы и имеет важные физические следствия, касающиеся структуры вакуума (θ-вакуум, кирально-неинвариантный вакуум и т.д. [26]). Показать существо возникающих проблем лучше всего на примере электродинамики в пространстве-времени $(1+1)$. Однако, прежде чем переходить к этой модели, поясним, почему в полевых теориях применимы топологические методы.

Топология изучает непрерывные отображения множеств и их свойства, не меняющиеся при таких отображениях. Но в классической теории поля допускаются лишь непрерывные поля, поскольку их конфигурации с разрывами обладают бесконечной энергией. Проще всего это можно увидеть из лагранжиана (2.2). Скалярное поле φ (точнее, одна из его компонент) дает вклад в потенциальную энергию $\int d^3x(\nabla\varphi)^2/2$. Так как производная от разрывной функции имеет δ-образную особенность, под интегралом оказывается квадрат δ-функции, что и ведет к расходимости интеграла энергии. Поэтому в теории допустимы лишь непрерывные конфигурации полей, и именно поэтому топологические методы оказываются столь эффективными. В классике конфигурации полей, разделенные бесконечным потенциальным барьером, не могут переходить друг в друга, и можно ограничиться изучением лишь непрерывных полей одного класса. В квантовой теории вопрос о переходах одной конфигурации полей в другие решается подсчетом соответствующих вероятностей.

Для иллюстрации некоторых топологических аспектов калибровочных преобразований обратимся к электродинамике в двумерном пространстве-времени с компактифицированной пространственной осью (цилиндр с псевдоевклидовой метрикой). В этом случае у тензора $F_{\mu\nu}$ отлична от нуля лишь компонента F_{01}. Из свойства непрерывности полей вытекает их периодичность: $A(x+L,t)=A(x,t)$, $\psi(x+L,t)=\psi(x,t)$, где L — длина окружности цилиндра. Лагранжиан и гамильтониан получаются непосредственно из (2.2), (2.35) переходом к двумерному пространству. Из закона преобразований для ψ, F вытекает непрерывность матриц $U(x,t)$ в (1.1); в случае электродинамики $U(x,t)=\exp(ief(x,t))$ (в данной модели вместо Λ используем f). Так как преобразованные поля также должны обладать свойством периодичности, имеем

$$f(x+L,t)=f(x,t)+\frac{2\pi n}{e}. \tag{5.2}$$

При фиксированном заряде e параметр f меняется в интервале $0\le f\le 2\pi/e$, т.е. калибровочная группа изоморфна окружности. С точки зрения теории расслоенных пространств [21,22] мы пришли к следующей структуре: каждой точке окружности S^1, $x\in S^1$, сопоставлена группа $G=U(1)$, $U\in G$, т.е. окружность радиуса $1/e$. В итоге получаем тор (см. рис.2). Экспонента U (функция $f(x,t)$) в каждый момент времени задает некоторую линию на торе (сечение). Топологическая характеристика преобразования U (аналог (1.40)) в данном случае есть

$$n=\frac{i}{2\pi}\int_0^L dxU\partial U^{-1}=\frac{e}{2\pi}\int_0^L dx\partial f/\partial x=\frac{e}{2\pi}[f(L,t)-(f(0,t)]. \tag{5.3}$$

В случае $U=1$ $(f=0,2\pi/e)$ — это окружность S^1, тривиальное отображение, $n=0$. Этому же классу принадлежит и любое другое отображение, «траектория» которого на торе может быть переведена без разрывов в окружность S^1 (на рис.2 — линия *1*). Как видно из (5.3), если

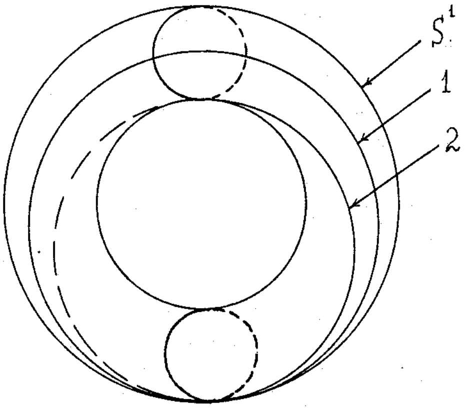

Рис.2

$f(L,t) - f(0,t) = 2\pi n/e$, т.е. если функция f разрывна в точке $x = 0$ окружности S^1, то соответствующее преобразование принадлежит классу, характеризуемому числом n. На рис.2 пример преобразования с $n = 1$ дает траектория *2*. Из рисунка видно, что траектория *1* не может быть переведена в траекторию *2* без разрывов.

Как упоминалось во введении, вакуумными значениями полей можно считать $A_\mu^{\text{vac}} = U\partial_\mu U^{-1}$, поскольку для них $F_{\mu\nu} = 0$. Но матрицы (экспоненты) характеризуются числом n $(U \equiv U^{(1)} \to U^{(n)} = U^n)$, т.е. связности также распадаются на классы. В данном случае они различаются инвариантом Чженя — Саймонса

$$C(t) = \int dx A_1. \tag{5.4}$$

Преобразования $U^{(n)}$ с $n \neq 0$ называются большими [26]. Из (1.1), (5.3) заключаем, что большие преобразования меняют индекс Чженя — Саймонса. Индекс Понтрягина в этой модели

$$Q = \frac{1}{2}\int dx\, dt\, \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \int dx\, dt\, \partial_t A_1 = C(\infty) - C(-\infty) \tag{5.5}$$

есть изменение C в процессе движения. Пример обобщается на неабелевы группы и пространства больших размерностей [26].

5.3. Сингулярные калибровочные преобразования. Сингулярные преобразования лучше всего иллюстрировать на примере монополя Дирака [82,83,40]. Так как в электродинамике фундаментальным полем является вектор-потенциал A_μ, и дивергенция магнитного поля $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ по определению равна нулю, единственной возможностью сконструировать магнитный монополь в пространстве R^3 — это снабдить магнитный заряд нитью, заключающей в себе магнитный поток заряда и обеспечивающей выполнение условия $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ во всем пространстве. Данная конструкция действительно являла бы собой модель магнитного заряда, если бы нить была ненаблюдаемой [82]. Ненаблюдаемость нити открывает следующую возможность: поскольку теперь ее перемещение в пространстве не есть физическая операция, оно должно сводиться к калибровочному преобразованию. Покажем, что такое преобразование действительно существует [84].

Пусть L_1 на рис.3 — исходное положение нити Дирака, а L_2 — конечное (магнитные силовые линии, исходящие из магнитного заряда в точке O, не показаны). Это последнее получается добавлением к L_1 замкнутого контура $C(L_1 + L_2)$ с циркулирующим в нем магнитным полем, направление которого определяется его направлением на отрезке L_2. Построим соответствующую функцию Λ. Определим: $\Lambda = g\Omega(\mathbf{x})/4\pi$, где $\Omega(\mathbf{x})$ — телесный угол, под которым контур C виден из точки $\mathbf{x}$, g — магнитный заряд. Эта функция не зависит от времени, так как задача стационарная. Главные особенности $\Lambda(\mathbf{x})$: 1) многозначность — при обходе вокруг нити, образующей контур C, она меняется на g; 2) сингулярность — она не определена на контуре C; 3) применение этого преобразования к $\mathbf{A}$ сводится к сдвигу нити $L_1 \to L_2$.

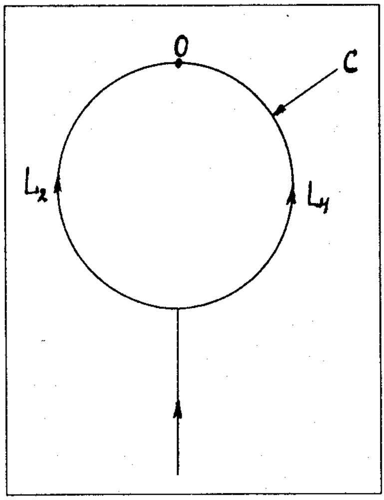

Рис.3

Первые два утверждения очевидны, доказательство последнего — элементарно. Пусть $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \partial\Lambda$, причем

$$\oint_{L_1} A_l\, dx^l = g$$

(с контуром интегрирования вокруг L_1). (5.6)

Но по определению

$$\oint_{L_1} \partial\Lambda d\mathbf{x} = \frac{g}{4\pi}\Delta\Omega = -g, \tag{5.7}$$

т.е. интеграл (5.6) от $\mathbf{A}'$ есть ноль. Напротив, вычисление аналогичного интеграла с контуром, охватывающим отрезок L_2, дает g. Это и означает перемещение нити. Переход к общему случаю, когда Λ произвольным образом зависит от времени, не встречает трудностей. Зависимость Λ от времени означает, что нить Дирака со временем может произвольным образом менять свою кинфигурацию. Это не влияет на динамику магнитного заряда и вообще на физику, если нить ненаблюдаема. В действительности она не может быть ненаблюдаемой — ее магнитный поток отличен от нуля, она должна гравитировать и т.п. Отсюда становится ясной разница между обычными локальными калибровочными преобразованиями и большими или сингулярными: последние меняют физические характеристики системы (топологические числа, магнитные потоки и др.).

Относительно суперсимметричных калибровочных преобразований см. [88]. Здесь, как отмечалось, также имеются глобальные и локальные преобразования. По-видимому, это единственное, что о них можно сказать с полной достоверностью. Неизвестна природа суперсимметрии, недостаточно разработана теория суперсимметричных пространств [132].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ калибровочных систем показывает, что присутствие нефизических степеней свободы в лагранжиане оказывает решающее влияние на структуру физического сектора теории. В этой связи их нельзя признать вполне нефизическими. Очевидно, их смысл станет ясен лишь в будущей единой теории всех калибровочных полей. Во всяком случае, калибровочный принцип, лежащий в основе всех фундаментальных взаимодействий, свидетельствует в пользу такой возможности. В заключение коротко остановимся на некоторых, отчасти уже обсуждавшихся выше вопросах.

Представляется принципиально важным различие между динамическими и нединамическими калибровками. Лишь первые допускают последовательное квантование в рамках исходной теории, когда во внимание принимаются все присутствующие в лагранжиане степени свободы. Во втором случае приходится модифицировать формализм — исключать нефизические переменные, что ведет к осложнениям в неабелевых теориях. Правда, динамические калибровки сводятся к изменению исходного лагранжиана, поэтому и здесь приходится модифицировать динамический принцип, хотя не столь радикально. Следующие два условия должны с необходимостью выполняться при добавлении к лагранжиану фиксирующих членов:

— непротиворечивость модифицированной теории,

— неприкосновенность физического сектора.

То, что эти условия не надуманные, показывает пример противоречивой калибровки в разд.3. Помимо этих очевидных условий имеются и другие, связанные с требованиями, традиционно предъявляемыми к лагранжианам: это релятивистская инвариантность, локальность, перенормируемость, отсутствие производных от полей старше первых [95]. Перечисленные требования представляются естественными, особенно в теории возмущений. Они практически однозначно ведут к фиксатору Гейзенберга — Паули (1.16).

Следует подчеркнуть важность введенной Дираком [96] расширенной группы калибровочных преобразований, генераторами которой являются все связи первого рода (и первичные, и вторичные). В согласии с требованием слабой калибровочной инвариантности физических величин она дает естественное обобщение калибровочной группы исходного лагранжиана.

Непротиворечивость итоговой картины гарантирует анализ в рамках гамильтонова формализма [96].

Обращает на себя внимание особая роль калибровки Фока (1.14). Если калибровка Фейнмана удобна при вычислениях по теории возмущений, то калибровка Фока выдвигается на первый план при непертурбативном подходе. Замечательным образом она оказывается основой многих популярных калибровок. Она отражает глубокую связь калибровочных теорий с геометрией расслоенных пространств и с теорией внешних дифференциальных форм (разд.4,7).

В случае компактифицированных пространств имеется теорема [133], утверждающая, что для теорий с компактной неабелевой группой Ли в S^4 нельзя однозначно фиксировать калибровку.

Важным инструментом при изучении калибровочных теорий является калибровка фонового поля [47—49], точнее, идея разбиения калибровочного поля на квантовое поле (тензор) и классическое фоновое (связность), позволяющая не только доказывать общие утверждения (например, калибровочную инвариантность эффективного действия), но и упрощать конкретные вычисления [49].

В калибровочных теориях бросается в глаза сочетание локальности и нелокальности. Все теории формулируются в терминах локальных полей с локальными взаимодействиями. Вместе с тем физические объекты нелокальны. Электрон немыслим без окружающего его электрического поля. Калибровочные теории просто формулируются в координатном пространстве, тогда как в импульсном пространстве даже простейшее калибровочное преобразование заряженного поля (1.1) оказывается интегральным. Это, в частности, означает, что нельзя калибровочно-инвариантным образом отделить область низких энергий от области высоких. Запишем закон Гаусса в импульсном представлении

$$i\mathbf{q}\mathbf{E}(q) = e\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\psi^*(q-k)\,\psi(k). \tag{6.1}$$

Интегрирование здесь затрагивает весь спектр импульсов, и пренебрежение, например, квантами малых длин волн нарушает вторичную связь, т.е. нарушает калибровочную инвариантность теории.

Весьма важен вопрос относительно области значений, принимаемых параметром Λ в (1.1). Он может меняться как в конечных ($\Lambda \in [0, 2\pi/e]$), так и в бесконечных ($\Lambda \in (-\infty, \infty)$) областях. Физически это принципиально разные возможности. Переходя к глобальным преобразованиям и замечая, что они генерируются электрическим зарядом [131], обнаруживаем: в первом случае спектр оператора заряда дискретный (квантование заряда), а во втором — непрерывный. Поскольку электрический заряд квантован, область значений, принимаемых параметром Λ, ограничена.

Тождества Уорда, наряду с тождествами Нетер, являются очевидными проявлениями нефизических степеней свободы. Будучи формально допущены в теорию, они остаются произвольными, что и выражается в виде тождеств Уорда в квантовой теории и тождеств Нетер — в классической. Первые свидетельствуют об их отщеплении от физического сектора, вторые — об отсутствии для них уравнений движения (п.7.5).

Особенности фиксации калибровки при стохастическом квантовании обсуждаются в работе [134].

7. ПРИЛОЖЕНИЕ

7.1. Остаточный калибровочный произвол. Нединамические калибровки обычно не полностью устраняют произвол. Как правило, теория все еще допускает преобразования из более узкой группы, не меняющей динамики в физическом секторе. Например, калибровка Вейля $A_0 = 0$ допускает преобразования вектор-потенциалов с параметрами Λ, не зависящими от времени, $\dot{\Lambda} = 0$. Между тем принципиальное различие между глобальными и локальными калибровочными преобразованиями связано с зависимостью параметров преобразования от времени. Поэтому говорить здесь об остаточном произволе как о калибровочном, не указывая типа, к которому относится соответствующее преобразование (см., например, [121, с.77]), — это недоразумение. В действительности остающаяся симметрия с параметрами $\nu = \nu(\mathbf{x})$ не является динамической (т.е. локальной, см. ниже п.7.5) и должна приводить к бесконечному числу законов сохранения. Рассмотрим пример: $\mathcal{L} = \dot{\varphi}^2(\mathbf{x}, t)/2$. Лагранжиан инвариантен относительно группы преобразований $\varphi \to \varphi + \nu(\mathbf{x})$, и хотя группа здесь бесконечномерная, а поля преобразуются локально (с точки зрения 3-мерного пространства), следствием является бесконечное число сохраняющихся величин

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \qquad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}. \tag{7.1}$$

Возникает вопрос: почему этого нет в электродинамике? Дело в том, что здесь речь идет о сильной (точной) локальной симметрии лагранжиана. Физически же важна лишь слабая калибровочная инвариантность относительно расширенной группы преобразований. Именно вторичные связи генерируют преобразования с параметрами $\nu(\mathbf{x}, t)$. Расширение симметрии как раз и заключается в переходе $\nu(\mathbf{x}) \to \nu(\mathbf{x}, t)$. Поэтому и не возникает новых законов — имеются вторичные связи и отвечающие им нефизические степени свободы. Можно сказать, что существует бесконечное число сохраняющихся тривиальных величин, которые могут принимать лишь нулевые значения (см. разд.5).

Ситуация несколько меняется при переходе к калибровке Лоренца (1.8). Остаточный калибровочный произвол связан теперь с функциями, удовлетворяющими уравнению Даламбера $\square\Lambda = 0$, что также нередко интерпретируется как неполное устранение калибровочного произвола. В действительности, хотя теперь параметр Λ и может зависеть от времени, функция Λ не произвольна — она удовлетворяет уравнению движения, и ее произвол сводится к произволу начальных условий $(\Lambda_{t=0}, \dot{\Lambda}_{t=0})$. Ясно, что это не есть калибровочный произвол (локальная калибровочная инвариантность). В рассмотренной выше модели одномерного движения (разд.5) уравнение Даламбера свелось бы к условию на калибровочный параметр $\ddot{a} = 0$, т.е. $a(t) = a + bt$, $\dot{a} = \dot{b} = 0$. Подобная инвариантность не ограничивает динамику переменной x и не лишает ее смысла, поскольку уравнение Ньютона $\ddot{x} = 0$ инвариантно относительно преобразования (5.1) с таким параметром a — это есть преобразование Галилея. Сказанное относится и к теории тяготения. Гармонические координаты удовлетворяют уравнению (1.34) $\square x = 0$. При надлежащих граничных условиях произвол сводится к преобразованиям из группы Лоренца [63], также линейным по времени.

7.2. О «нарушении» локальной симметрии. Принципиальное различие между локальной и глобальной калибровочными симметриями ярко проявляется при изучении систем с «нарушенной симметрией». Под нарушением глобальной симметрии понимается наличие неинвариантных решений уравнений движения; в квантовой теории поля — наличие неинвариантного вакуума. Но в случае локальной калибровочной симметрии физический сектор во всяком случае должен быть инвариантен относительно расширенной группы калибровочных преобразований. Вакуумный вектор состояния во всяком случае не может нарушать локальную симметрию — это противоречит исходным постулатам теории (калибровочной инвариантности лагранжиана). Применительно к конкретному механизму нарушения симметрии — появлению неинвариантного вакуумного среднего у поля Хиггса, которое при калибровочных преобразованиях меняется нетривиально, имеет место теорема Елизура [135] (см. также [136]), утверждающая, что подобные средние должны равняться нулю.

7.3. Калибровка Фока и внешние дифференциальные формы. В [28] Фок не только формулировал калибровочное условие (1.14), но и дал его решение

$$A_\mu(x) = \int_0^1 s x^\nu F_{\mu\nu}(sx) ds. \tag{7.2}$$

Поле A_μ (7.2) удовлетворяет калибровочному условию (1.14). В теории внешних дифференциальных форм [137] важную роль играет оператор

Пуанкаре I. Если ω — дифференциальная m-форма в пространстве R^n, то имеет место тождество

$$\omega = d(I\omega) + I(d\omega), \tag{7.3}$$

где

$$I\omega \equiv \sum_{\{i\}} \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \int_0^1 dt t^{m-1} \omega_{i_1 \ldots i_m}(tx) x^{i_r} [dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}]_r . \tag{7.4}$$

Здесь символ $\{i\}$ означает суммирование по всем $i_k, k = 1,\ldots,m$ в пределах $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$, а индекс r у квадратных скобок означает отсутствие дифференциала с номером i_r. Если форма ω замкнутая ($d\omega = 0$), то она является точной ($\omega = d\Omega$). Все это справедливо для так называемой звездной области $S \subset R^n$: если $x \in S$, то и $tx \in S$, $0 \le t \le 1$, и заведомо справедливо для R^n.

В электродинамике $F_{\mu\nu}$ — 2-форма ($F = F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$); F — замкнутая форма ($dF = 0$; это однородное уравнение Максвелла $\partial_{\mu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$). Формула (7.2) есть результат применения оператора Пуанкаре I к 2-форме F, в результате чего получается 1-форма $A = A_{\mu} dx^{\mu}$.

Связь калибровки Фока с оператором Пуанкаре и с теорией внешних дифференциальных форм свидетельствует о глубине проникновения ее автора в существо дела. В [28] эта калибровка естественно появилась из физических соображений. Была ли формула (7.2) получена независимо или при ее выводе сыграла роль лемма Пуанкаре?

7.4. Метод фонового поля. Метод фонового поля позволяет получать эффективные лагранжианы вычислением лишь вакуумных диаграмм. Фоновое поле является варьируемой переменной и по определению равно вакуумному среднему от квантового поля. Метод весьма удобен не только для вычисления эффективных лагранжианов, но и для доказательства их калибровочной инвариантности. Определим

$$e^{i\tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}]} \equiv \int DQ e^{i[S[Q + \mathcal{F}] + \mathcal{J}Q]}. \tag{7.5}$$

Как и в разд.2, Q символизирует все квантовые поля ($A, \bar{\psi}, \psi, \ldots$), $\mathcal{F}$ — соответствующие классические (внешние, фоновые) поля, т.е. в действии под интегралом (2.50) произведена замена $Q \to Q + \mathcal{F}$. Теперь вместо (2.51) имеем

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}, \mathcal{F}] = \tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}] - \mathcal{J}\tilde{\phi}, \qquad \frac{\delta \tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}]}{\delta \mathcal{J}} = \tilde{\phi}. \tag{7.6}$$

В первое равенство (7.6) вместо $\mathcal{J}$ подставлено решение второго. Совершая в (7.5) замену переменных $Q \to Q - \mathcal{F}$ и используя определение W (2.50), имеем

$$\tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}] = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\mathcal{F}, \qquad \tilde{\phi} = \phi - \mathcal{F}, \tag{7.7}$$

т.е.

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}, \mathcal{F}] = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\mathcal{F} - \mathcal{J}\tilde{\phi} = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\phi = \Gamma[\phi]. \tag{7.8}$$

Пользуясь вторым равенством (7.7), находим

$$\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}] = \Gamma[\mathcal{F}]. \tag{7.9}$$

Это и есть основная формула метода — эффективное действие $\Gamma[\mathcal{F}]$ равно действию $\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}, \mathcal{F}]$, вычисленному при нулевых вакуумных средних $\tilde{\phi} = 0$, т.е. первому члену в разложении функционала $\tilde{\Gamma}$ по степеням $\tilde{\phi}$. (Напомним, что $\Gamma[\tilde{\phi}, \mathcal{F}]$ есть производящий функционал 1-неприводимых функций Грина на фоне внешних полей $\mathcal{F}$; при $\tilde{\phi} = 0$ функционал $\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}]$ есть совокупность 1-неприводимых вакуумных диаграмм на фоне $\mathcal{F}$).

В калибровочных теориях метод формулируется следующим образом. Как уже говорилось (разд.1), калибровочное поле A_μ разбивается на сумму

$$A_\mu \to q_\mu + A_\mu, \tag{7.10}$$

где q_μ — квантовое поле, по которому интегрируется в континуальном интеграле, A_μ — классическое поле. Выбирается специфическая для данного метода калибровка фонового поля (1.23)

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(D_\mu q_\mu)^2, \qquad D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{acb}A_\mu^c, \tag{7.11}$$

т.е. $F = D_\mu q_\mu$. Поле q_μ преобразуется как тензор (однородно)

$$\delta q_\mu = igT\omega q_\mu \tag{7.12}$$

($T\omega = T^a\omega^a$, T^a — генераторы группы в присоединенном представлении, ω^a — инфинитезимальные параметры преобразования), а поле A_μ — как связность (неоднородно)

$$\delta A_\mu = D_\mu \omega. \tag{7.13}$$

Согласно общему равенству (7.9) и в данном случае $\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}] = \Gamma[\mathcal{F}]$, поэтому для доказательства калибровочной инвариантности $\Gamma[\mathcal{F}]$ достаточно доказать инвариантность $\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}]$. Но это почти очевидным образом следует из явного выражения для $\tilde{W}$:

$$e^{i\tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}]} = \int d[q, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] e^{i[S[Q+\mathcal{F}] - \frac{1}{2\alpha}F^2 + \bar{c}F'c + \mathcal{J}Q]}. \tag{7.14}$$

Здесь $Q = (q_\mu, \overline{\psi}, \psi)$, $\mathcal{F} = (A_\mu, \overline{\zeta}, \zeta)$ $(\psi \to \psi + \zeta)$, $F' = \delta F(A^\omega)/\delta\omega$, $\overline{c}, c$ — скалярные антикоммутирующие поля, а в качестве плотности действия можно взять лагранжиан (2.1); предполагаем, что внешние токи преобразуются однородно:

$$\delta\mathcal{J} = gT_\mathcal{J}\omega\mathcal{J}. \tag{7.15}$$

В (7.15) $T_\mathcal{J}$ — генераторы группы в представлении, реализуемом током $\mathcal{J}$. Поскольку сумма $q_\mu + A_\mu$ преобразуется как связность, а $\overline{\psi}, \psi, \overline{\zeta}, \zeta$ и $\mathcal{J}$ — как тензоры, показатель экспоненты в (7.14) есть калибровочный инвариант, если фиктивные поля преобразуются по присоединенному представлению. Следовательно, и $\widetilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}]$ есть калибровочный инвариант, а ϕ (7.6) преобразуется, ввиду (7.15), как тензор. Но тогда $\widetilde{\Gamma}[\widetilde{\phi}, \mathcal{F}]$ (7.6) также есть калибровочный инвариант, а ввиду тензорной природы ϕ таковым является и $\widetilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}] = \Gamma[\mathcal{F}]$. Поле A_μ в наборе $\mathcal{F} = (A_\mu, \overline{\zeta}, \zeta)$ преобразуется неоднородно (как связность), поэтому эффективное действие $\Gamma[\mathcal{F}]$ удовлетворяет тождествам

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\mathcal{F}}\delta\mathcal{F} \equiv \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} D_\mu\omega + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} ig\hat{\omega}\psi - ig\overline{\psi}\hat{\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} = 0, \tag{7.16}$$

где $\hat{\omega} \equiv T\omega$, T — генераторы в представлении, реализуемом полями материи.

Отметим, что эти условия калибровочной инвариантности $\Gamma[\mathcal{F}]$ есть не что иное, как тождества Нетер [128] для эффективного действия $\Gamma \equiv S_{\text{eff}}$.

7.5. Условия локальной инвариантности эффективного действия и тождества Нетер. Прежде чем доказывать сделанное выше утверждение, напомним вкратце вывод тождеств Нетер. При изучении свойств инвариантности динамических систем обычно рассматривают общие преобразования полей, включающие в себя и преобразования координат:

$$\delta\varphi = \varphi'(x') - \varphi(x), \qquad \delta x = x' - x \tag{7.17}$$

(тензорные и прочие индексы опущены). Вводя локальные вариации полей [138]

$$\overline{\delta}\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x), \tag{7.18}$$

после некоторых преобразований можно получить следующие условия инвариантности действия:

$$\delta S \equiv \int dx \left[\mathcal{E}\,\overline{\delta}\varphi + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\overline{\delta}\varphi + \mathcal{L}\,\delta x^\mu \right)\right] = 0. \tag{7.19}$$

Здесь

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \tag{7.20}$$

есть «эйлерово выражение» (эйлериан) — приравнивание его нулю дает уравнения движения. Общая формула (7.19) позволяет получить все важнейшие соотношения лагранжева формализма:

— из условия стационарности относительно вариации полей, исчезающих на границе, получаем уравнения движения ($\mathcal{E} = 0$);

— из условия инвариантности относительно глобальных калибровочных преобразований получаем законы сохранения (первая теорема Нетер [128] — речь идет о величинах, сохраняющихся в процессе движения, т.е. когда $\mathcal{E} = 0$);

— из условия инвариантности относительно локальных калибровочных преобразований получаем вторую теорему Нетер [128] — тождественные соотношения между эйлеровыми выражениями $\mathcal{E}$ и производными от них, если в преобразования полей входят производные от параметров (как в (1.1)). Записывая локальные вариации полей в виде

$$\bar{\delta}\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=0}^{m} V_k^{\mu_1 \ldots \mu_r}(\varphi, x)\partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} \omega_k(x), \qquad N = \dim X, \tag{7.21}$$

приходим к следующему выражению для тождеств Нетер:

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_r} (\mathcal{E}\, V_k^{\mu_1 \ldots \mu_r}) \equiv 0. \tag{7.22}$$

Поскольку $\mathcal{E} = \delta S / \bar{\delta}\varphi$ (или $\mathcal{E} = \delta S / \delta \mathcal{F}$ в обозначениях (7.14)), идентичность получающихся тождеств соотношениям (7.16) становится очевидной. Разница лишь в том, что плотностью действия в S является локальный лагранжиан, тогда как его аналог в S_{eff} существенно нелокален [51—53].

7.6. Пропагатор фотона в различных калибровках. Приведем выражения для пропагатора фотона в некоторых часто встречающихся калибровках. Ограничимся выписыванием лишь матриц при общем множителе $1/i(q^2 + i0)$.

1) Класс калибровок Гейзенберга — Паули — Ферми:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2; \qquad g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \tag{7.23}$$

2) Калибровка Лоренца:

$$\partial_\mu A_\mu = 0; \qquad g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \tag{7.24}$$

3) Калибровка Максвелла:

$$\partial \mathbf{A}=0; \qquad g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu^T+q_\mu^T q_\nu}{q_T^2}+\frac{q_\mu q_\nu}{q_T^2}, \tag{7.25}$$

где $q_T^\mu = T^{\mu\nu}q_\nu$, $T^{\mu\nu}=g^{0\mu}g^{0\nu}-g^{00}g^{\mu\nu}$.

4) Аксиальные калибровки:

$$nA=0; \qquad g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu n_\nu+n_\mu q_\nu}{qn}+\frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2}n^2. \tag{7.26}$$

5) Псевдоаксиальные калибровки:

$$\mathcal{L}'=-\frac{\beta^2}{2}(nA)^2; \qquad g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu n_\nu+n_\mu q_\nu}{qn}+\frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2}\left(n^2+\frac{q^2}{\beta^2}\right). \tag{7.27}$$

6) Планарная калибровка:

$$\mathcal{L}'=-\frac{1}{2\alpha n^2}nA\Box nA; \qquad g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu n_\nu+n_\mu q_\nu}{qn}+\frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2}n^2(1-\alpha). \tag{7.28}$$

В зависимости от параметра α $\mathcal{L}'$ (7.23) фиксирует следующие калибровки: $\alpha\to 0$ — Лоренца, $\alpha=1$ — Фейнмана, $\alpha=1/3$ — Фрида — Йенни.

В (7.28) при $n^2\to 0$ получаем калибровку Липатова [45], а при $\alpha\to 1$ — планарную калибровку [46], в которой $n^2\neq 0$.

Для получения пропагаторов полезна следующая формула. Матрица

$$K^{-1}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+c(q_\mu n_\nu+n_\mu q_\nu)+dq_\mu q_\nu \tag{7.29}$$

является обратной матрице

$$K_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+aq_\mu q_\nu+bn_\mu n_\nu \tag{7.30}$$

при $a=-1/q^2$, $c=-1/qn$, $d=(1+bn^2)/b(qn)^2$.

Пропагаторы глюонов отличаются от приведенных фактором δ^{ab}.

7.7. Замечания исторического плана

1. Впервые калибровка (1.8) появилась в работе Л.В.Лоренца (L.V.Lorenz, 1867). Х.А.Лоренцу (H.A.Lorentz) в это время было 14 лет. Максвелл [1,т.2,с.347] так комментировал работу [24]: «...Лоренц вывел ... путем добавления некоторых членов, не влияющих ни на какие экспериментальные результаты, новую систему уравнений... Эти выводы сходны с выводами настоящей главы [гл.XX], хотя они получены совсем другим методом. Приведенная в этой главе теория впервые была опубликована в ...1865 г.». Между прочим, Л.Лоренц не только выписывает уравнения

Приведенная в этой главе теория впервые была опубликована в ...1865 г.». Между прочим, Л.Лоренц не только выписывает уравнения

$$\Box A_{\mu} = -j_{\mu}, \tag{7.31}$$

т.е. уравнения движения в калибровке Лоренца, но и приводит их запаздывающие решения, ссылаясь на свою более раннюю работу. Любопытно, что в [24] совсем не упоминаются работы Максвелла. Краткие сведения о жизни и научной деятельности Людвига Лоренца в [139,с.169] заканчиваются фразой: «Независимо от Дж.Максвелла и не зная его теории, построил (1867) электромагнитную теорию света».

2. Хотя общепринятые названия калибровки (1.9) представляются удачными, они отступают от традиции называть их именами авторов. Признание авторства Максвелла было бы актом исторической справедливости.

3. Общепринятые названия калибровки (1.10) неудачны, поэтому предложение Джакива [26] связать ее с именем Г.Вейля можно только приветствовать.

4. Впервые аксиальная калибровка появилась в работе Куммера [140], посвященной квантованию свободного электромагнитного поля. При этом, однако, требование (1.13) сопровождалось условием $nq = \text{const}$, где q — импульс фотона.

5. Больше всего «повезло» калибровке Фока. Похоже, что название «калибровка Фока — Швингера» приживается, хотя иногда она именуется калибровкой Швингера — Фока, и даже калибровкой Швингера [116, с.115]. Швингер, конечно, знал об авторстве Фока. В статье [141], применяя метод собственного времени Фока, он ссылается на работу [28]. Позднее эта калибровка неоднократно переоткрывалась [142,143] (работы написаны после выхода в свет книги Швингера [30] (1970), и даже после ее перевода на русский язык). В статье [144] она именуется «калибровкой фиксированной точки», авторы [143] называют ее «калибровкой Пуанкаре» (что, впрочем, имеет некоторый резон, см. п.7.3). В обзоре [31] условие (1.15) именуется калибровкой Фока — Швингера, а (1.14) — калибровкой Пуанкаре.

Но и это не все. Еще раньше калибровка Фока была переоткрыта в статьях [145,146]. В последовавшем цикле работ (см. литературу в [147]) она именуется «мультиполярной калибровкой», а работы [143,144] квалифицируются как «пионерские». Обращает на себя внимание то, что даже публикации первостепенной важности выдающихся физиков оказываются незамеченными, а также то постоянство, с которым эта калибровка воспроизводилась на страницах авторитетных журналов, — верный признак ее важности. Калибровка Фока не применяется в стандартных вычислениях теории возмущений, но она естественно появляется при выходе за ее рамки.

6. Фиктивные скалярные поля с аномальным знаком для петель (добавочный фактор для каждой петли) впервые появились в работе Фейнмана [77].

7. Калибровочная инвариантность эффективного действия Г свидетельствует о фундаментальном характере этой величины. Точная S-матрица при использовании S_{eff} получается в низшем порядке теории возмущений, т.е. без учета квантовых поправок [53]. Данный факт можно также интерпретировать как сокращение всех поправок к Г от диаграмм с петлями, в которые входят точные пропагаторы и точные вершины. В [148] выписаны уравнения для Г, явным образом учитывающие это свойство эффективных вершин.

8. По-видимому, первым, кто обратил внимание на принципиальное различие локальных и глобальных преобразований в общей теории относительности, был Фок [63]. Физики довольно сдержанно отнеслись к этим выводам. Однако Фока решительно поддержал Вигнер [127], который рассматривал не только ОТО, но и электродинамику. Локальные и глобальные калибровочные преобразования он называл, соответственно, динамическими и геометрическими.

9. Модель с калибровочной группой лишь трансляций (с тривиальным первым слагаемым в лагранжиане (3.19) — $e = 0$) впервые была предложена Бурнелем [108,109]. Модель (3.19) изучалась автором независимо (1988, не опубликовано).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Максвелл Дж.К.** — Трактат об электричестве и магнетизме. Пер. с англ. М.: Наука, 1989, т.1,2.
2. **Паули В.** — Труды по квантовой теории. Статьи 1928—1958. М.: Наука, 1977.
3. **Klein O.** — New Theories in Physics. Conference in Warsaw. 1938, p.66.
4. **Yang C.N., Mills R.L.** — Phys. Rev., 1954, vol.96, p.191.
5. **Shaw R.** — Ph.D. Thesis, Cambridge University, 1954.
6. **Weinberg S.** — Phys. Rev. Lett., 1973, vol.31, p.494.
7. **Pati J., Salam A.** — Phys. Rev., 1973, vol.D8, p.1240.
8. **Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H.** — Phys.Lett., 1973, vol.47B, p.365.
9. **Weinberg S.** — Phys. Rev. Lett., 1967, vol.19, p.1264.
10. **Salam A.** — Elementary Particle Theory (Ed. N.Svartholm). Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968, p.367.
11. **Einstein A.** — Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss., 1915, vol.48, p.844.
12. **Hilbert D.** — Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1915, vol.3, p.395.
13. **Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.** — Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
14. **Lüst D., Theisen S.** — Lectures on String Theory. Lecture Notes in Physics, No.346. Springer Verlag, Berlin, 1989.
15. **Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.** — Теория суперструн. Пер. с англ. М.: Мир, 1990, т.1,2.

16. **Кафиев Ю.Н.** — Аномалии и теория струн. Новосибирск: Наука, 1991.
17. **Nambu Y.** — Lectures at the Copenhagen symposium, 1970.
18. **Goto T.** — Progr. Theor. Phys., 1971, vol.46, p.1560.
19. **Hara O.** — Progr. Theor. Phys., 1971, vol.46, p.1549.
20. **Барбашов Б.М., Черников Н.А.** — ЖЭТФ, 1966, т.50, с.1296; т.51, с.658.
21. **Daniel M., Viallet C.M.** — Rev. Mod. Phys., 1980, vol.52, p.175.
22. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** — Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
23. **Прохоров Л.В., Шабанов С.В.** — УФН, 1991, т.161, с.13.
24. **Lorenz L.** — Phil. Mag., 1867, vol.34, p.287.
25. **Weyl H.** — Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1930.
26. **Jackiw R.** — Rev. Mod. Phys., 1980, vol.52, p.661.
27. **Arnowitt R., Fickler S.** — Phys. Rev., 1962, vol.127, p.1821.
28. **Fock V.** — Sow. Phys., 1937, vol.12, p.404. Перевод: [29].
29. **Фок В.А.** — Работы по квантовой теории поля. Изд-во Ленинградского ун-та, 1957.
30. **Швингер Ю.** — Частицы, источники, поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
31. **Leibbrandt G.** — Rev. Mod. Phys., 1987, vol.59, p.1067.
32. **Heisenberg W., Pauli W.** — Zeit. Phys., 1929, vol.56, p.1.
33. **Heisenberg W., Pauli W.** — Zeit. Phys., 1930, vol.59, p.168. Перевод [32,33]: [2,c.30,c.89].
34. **Fermi E.** — Rend. Acad. Lincei, 1929, vol.9, p.881.
35. **Fermi E.** — Rend. Acad. Lincei, 1930, vol.12, p.431.
36. **Fermi E.** — Rev. Mod. Phys., 1932, vol.4, p.87. Перевод [34—36]: [37, c.302, c.359, c.375].
37. **Ферми Э.** — Научные труды. М.: Наука, 1971, т.1.
38. **'t Hooft G.** — Nucl. Phys., 1971, vol.B35, p.167.
39. **Higgs P.W.** — Phys. Lett., 1964, vol.12, p.132.
40. **Райдер Л.** — Квантовая теория поля. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
41. **'t Hooft G.** — Nucl. Phys., 1981, vol.B190, p.455.
42. **Min H., Lee T., Pac P.Y.** — Phys. Rev., 1985, vol.D32, p.440.
43. **'t Hooft G., Veltman M.** — Nucl. Phys., 1972, vol.B50, p.318.
44. **Kummer W.** — Acta Phys. Austriaca, Suppl., 1976, vol.XV, p.423.
45. **Липатов Л.Н.** — ЯФ, 1974, т.20, с.181.
46. **Dokshitzer Yu.L., Dyakonov D.I., Troyan S.I.** — Phys. Rep., 1980, vol.58, p.269.
47. **De Witt B.S.** — Phys. Rev., 1967, vol.162, p.1195.
48. **Девитт Б.С.** — Динамическая теория групп и полей. Пер. с англ. М.: Наука, 1987.
49. **Abbott L.F.** — Acta Phys. Polonica, 1982, vol.B13, p.33.
50. **Iona-Lasinio G.** — Nuovo Cim., 1964, vol.34, p.1790.
51. **Prokhorov L.V.** — Nuovo Cim., 1968, vol.57A, p.245.
52. **Prokhorov L.V.** — Phys. Rev., 1969, vol.183, p.1515.
53. **Ильичев Н.А., Прохоров Л.В.** — ТМФ, 1971, т.6, с.305.
54. **'t Hooft G.** — Nucl. Phys., 1973, vol.B62, p.444.
55. **Deser S., Kay J., Stelle K.** — Phys. Rev. Lett., 1977, vol.38, p.527.
56. **Chan H.S., Halpern M.B.** — Phys. Rev., 1985, vol.D33, p.540.
57. **Urrutia F.** — Lett. Nuovo Cim., 1972, vol.5, p.788.

58. **Каршенбойм С.Г.** — ЯФ, 1989, т.50, с.1374.
59. **Fried H.M., Yennie D.R.** — Phys. Rev., 1958, vol.112, p.1391.
60. **Иванов С.В.** — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.75.
61. **De Donder** — La gravitique einstenienne. Paris: Gauthier-Villars, 1931.
62. **Lanczos K.** — Phys. Zs., 1922, vol.23, p.537.
63. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955.
64. **Логунов А.А., Мествиришвили М.А.** — Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
65. **Scherk J., Schwarz J.H.** — Gen. Rel. Grav., 1975, vol.6, p.537.
66. **Kaku M.** — Nucl. Phys., 1975, vol.B91, p.99.
67. **Dirac P.A.M.** — Phys. Rev., 1959, vol.114, p.924.
68. **Becchi C., Rouet A., Stora R.** — Phys. Lett., 1974, vol.52B, p.344.
69. **Becchi C., Rouet A., Stora R.** — Ann. Phys., 1976, vol.98, p.287.
70. **Тютин И.В.** — Препринт ФИАН, №39, 1975.
71. **Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.** — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988, 2-е изд.
72. **Zinn-Justin J.** — Nucl. Phys., 1984, vol.B246, p.246.
73. **Gribov V.N.** — Nucl. Phys., 1978, vol.B139, p.1.
74. **Логачев М.Ю.** — ТМФ, 1987, т.70, с.412.
75. **Соловьев М.А.** — ТМФ, 1989, т.78, с.163.
76. **Prokhorov L.V., Shabanov S.V.** — Phys. Lett., 1989, vol.216B, p.341.
77. **Feynman R.P.** — Acta Phys. Polonica, 1963, vol.24, p.697.
78. **Faddeev L.D., Popov V.N.** — Phys. Lett., 1967, vol.25B, p.29.
79. **Bassetto A., Nardelli G., Soldati R.** — Yang-Mills Theories in Algebraic Noncovariant Gauges. Singapore: World Scientific, 1991.
80. **Pauli W.** — Phys. Rev., 1940, vol.58, p.716.
81. **Coleman S.** — In: The Whys of Subnuclear Physics. Ed. A.Zichichi, Plenum Press, N.-Y., 1979.
82. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc., 1931, vol.A133, p.60. Перевод: [83].
83. **Монополь Дирака.** — Сб. Пер. с англ. под ред. Б.М.Болотовского и Ю.Д.Усачева. М.: Мир, 1970.
84. **Goddard P., Olive D.I.** — Repts. Progr. Phys., 1978, vol.41, p.1357.
85. **Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П.** — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452.
86. **Волков Д.В., Акулов В.П.** — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.621.
87. **Wess J., Zumino B.** — Phys. Lett., 1974, vol.49B, p.52.
88. **Wess J., Zumino B.** — Nucl. Phys., 1974, vol.B70, p.39.
89. **Neveu A., Schwartz J.H.** — Nucl. Phys., 1971, vol.B31, p.86.
90. **Gervais J.L., Sakita D.** — Nucl. Phys., 1971, vol.B34, p.632.
91. **Zumino B.** — Relativistic Strings and Supergauges. CERN Preprint, Th-1779, 1973.
92. **Aharonov Y., Casher A., Susskind L.** — Phys. Lett., 1971, vol.35B, p.512.
93. **Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.** — Phys. Rev., 1976, vol.D13, p.3214.
94. **Deser S., Zumino B.** — Phys. Lett., 1976, vol.62B, p.355.
95. **Прохоров Л.В.** — УФН, 1988, т.154, с.299.
96. **Дирак П.А.М.** — Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
97. **Dirac P.A.M.** — Can. J. Math., 1950, vol.2, p.129.

98. **Bergmann P.** — Rev. Mod. Phys., 1961, vol.33, p.510.
99. **Прохоров Л.В.** — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.559.
100. **Дирак П.А.М.** — Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960; Наука, 1974, 1979.
101. **Goldstone J., Jackiw R.** — Phys. Lett., 1978, vol.74B, p.81.
102. **Weinberg S.** — Phys. Rev., 1964, vol.B135, p.1049.
103. **Прохоров Л.В., Шабанов С.В.** — Гамильтонова механика калибровочных систем. ОИЯИ Б1-2-93-312, Дубна, 1993; изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996.
104. **Прохоров Л.В.** — ЯФ, 1982, т.35, с.229.
105. **Желобенко Д.П.** — Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
106. **Лоос О.** — Симметрические пространства. М.: Мир, 1985.
107. **Прохоров Л.В.** — ЭЧАЯ, 1982, т.13, с.1094.
108. **Burnel A.** — Phys. Rev., 1982, vol.D26, p.442.
109. **Burnel A.** — Phys. Rev., 1985, vol.D32, p.450.
110. **Gupta S.N.** — Proc. Phys. Soc. Ser.A, 1950, vol.63, p.681.
111. **Bleuler K.** — Helv. Phys. Acta, 1950, vol.23, p.567.
112. **Gupta S.N.** — Can. J. Phys., 1957, vol.35, p.961.
113. **Weinberg S.** — Phys. Rev., 1964, vol.B134, p.882.
114. **Гитман Д.Н., Тютин И.В.** — Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.
115. **Прохоров Л.В., Фурсаев Д.В., Шабанов С.В.** — ТМФ, 1993, т.97, с.373.
116. **Радюшкин А.В.** — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.58.
117. **Прохоров Л.В.** — Вестн. ЛГУ, 1990, №18, с.3.
118. **Bloch F., Nordsieck A.** — Phys. Rev., 1937, vol.52, p.54.
119. **Murota T.** — Progr. Theor. Phys., 1960, vol.24, p.1109.
120. **Ivanov S.V., Korchemsky G.P.** — Phys. Lett., 1985, vol.154B, p.197.
121. **Шварц А.С.** — Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.
122. **Feynman R.P.** — Phys. Rev., 1949, vol.76, p.769. Перевод: [123].
123. **Фейнман Р.П.** — В сб.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М.: ИЛ, 1954, с.184.
124. **Фейнман Р.П.** — Теория фундаментальных процессов. М.: Наука, 1978, с.110.
125. **Christ N.H., Lee T.D.** — Phys. Rev., 1980, vol.D22, p.939.
126. **Малышев Ю.П., Прохоров Л.В.** — Вестн. ЛГУ, 1986, №18, с.99.
127. **Вигнер Е.** — Этюды о симметрии. Пер. англ. М.: Мир, 1971, с.20.
128. **Нетер Э.** — В кн.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959.
129. **Голдстейн Г.** — Классическая механика. Пер. с англ. М.: ГИТТЛ, 1957.
130. **Prokhorov L.V.** — Lett. Math. Phys., 1990, vol.19, p.245.
131. **Прохоров Л.В.** — Вестн. СПбУ, 1994, №18, с.87.
132. **Лейтес Д.А.** — Теория супермногообразий. Петрозаводск, 1983.
133. **Singer I.M.** — Commun. Math. Phys., 1978, vol.60, p.7.
134. **Zwanziger D.** — Nucl. Phys., 1981, vol.B192, p.259.
135. **Elitzur S.** — Phys. Rev., 1975, vol.D12, p.3978.
136. **Прохоров Л.В., Шабанов С.В.** — Вестн. ЛГУ, 1990, №4, с.3.
137. **Картан А.** — Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы: Пер. с фр. М.: Мир, 1971.

138. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1985, 4-е изд.
139. **Храмов Ю.А.** — Физики. Биографический справочник. М.: Наука, 1983, 2-е изд.
140. **Kummer W.** — Acta Phys. Austriaca, 1961, vol.14, p.149.
141. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1951, vol.82, p.664. Перевод: в сб. [123].
142. **Fateev V.A., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S.** — Lebedev Phys. Inst. Preprint No.155, 1976.
143. **Brittin W.E., Smythe W.R., Wyss W.** — Am. J. Phys., 1982, vol.50, p.693.
144. **Dubovikov M.S., Smilga A.V.** — Nucl. Phys., 1981, vol.B185, p.109.
145. **Power E.A., Zienau S.** — Nuovo Cim., 1957, vol.6, p.7.
146. **Power E.A., Zienau S.** — Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1959, vol.A251, p.427.
147. **Yang K.-H.** — Ann. Phys., 1988, vol.186, p.209.
148. **Прохоров Л.В.** — ЯФ, 1972, т.16, с.854.