«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1997, ТОМ 28, ВЫП.1

УДК 530.145

ДРОЖАЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИРАКА

С.В.Вонсовский

Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург

М.С.Свирский

Государственный педагогический университет, Челябинск

Обзор посвящен рассмотрению результатов, полученных авторами на основе теории Дирака, в которых главную роль играют неопределенности скорости и ускорения свободно движущейся частицы. Показано, что эти неопределенности являются неотъемлемым свойством релятивистской квантовой механики частицы со спином $1/2$. Обсуждается магнитная аналогия дрожащего движения.

The review is devoted to the description of results, obtained by the authors on the basis of Dirac theory, in which the main role play the velocity and acceleration uncertainities of a free moving particle. It is shown that these uncertainities are an inseparable property of relativistic quantum mechanics of a particle with spin $1/2$. The magnetic analogy of «Zitterbewegung» is discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Применение уравнения Дирака [1] привело к результатам, которые определили развитие релятивистской квантовой теории. Вместе с тем изучение гамильтониана Дирака приводит к выводу, который обычно квалифицируется как «довольно неожиданный» [2, с.361], «физически несостоятельный» [3, с.60], «недочет теории Дирака» [4, с.311]. Этот вывод заключается в том, что, в отличие от классической теории, а также нерелятивистской квантовой механики, скорость не пропорциональна импульсу. Оператор скорости $\mathbf{u}$ оказывается связанным не с импульсом, а с матрицами Дирака $\boldsymbol{\alpha}$ равенством

$$\mathbf{u} = c\boldsymbol{\alpha}, \tag{1}$$

где c — скорость света. Из (1) следует, что проекция скорости на любое направление имеет значение $\pm c$. Это, на первый взгляд, противоречит тому, что наблюдаемые электроны имеют скорость меньше скорости света.

По мнению Дирака [2, с.361—362], указанное противоречие является кажущимся, так как собственные значения оператора $\mathbf{u}$ из (1) являются «теоретическими» для фиксированного момента времени. В отличие от них наблюдаемые значения скорости являются средними величинами, которые определяются путем деления изменения координаты в течение малого промежутка времени на этот интервал. Чтобы получить хорошее приближение к мгновенному значению скорости, следует взять бесконечно малое изменение координаты. Это приводит, согласно соотношению неопределенностей, к полной неопределенности импульса и, следовательно, к возможности бесконечного импульса. Согласно СТО, это возможно при $u = c$. Поэтому мгновенные значения скорости в соответствии с (1) равны по величине c.

Это мнение было подвергнуто критике Фоком (см. [2, прим. на с.362]). В [2] отмечено, что в отсутствие обычной связи между скоростью частицы и ее импульсом нельзя применять для определения скорости соотношение неопределенностей между импульсом и координатой. Кроме того, если применить рассуждение Дирака к теории Шредингера, то оно привело бы к неправильному выводу о том, что скорость электрона всегда является бесконечной.

Другой подход был предложен Шредингером [5] в 1930 г. Проинтегрировав по времени уравнение движения для u_z (ось z направлена вдоль импульса), Шредингер показал, что оператор продольной импульсу скорости может быть представлен в виде суммы

$$u_z = \frac{1}{2}\, i\hbar (a_z)_0\, e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} H^{-1} + c^2 p_z H^{-1}, \tag{2}$$

где первое слагаемое в правой части осциллирует с течением времени. В (2) $(a_z)_0$ — оператор продольной импульсу проекции ускорения частицы при $t = 0$, $\hbar$ — постоянная Планка, H — гамильтониан, p — импульс частицы. Шредингер ввел понятие о дрожащем движении (Zitterbewegung).

Согласно (2) в стационарном состоянии среднее значение осциллирующей части u_z равно нулю, а среднее значение постоянной части u_z определяется выражением

$$\bar{u}_z = \frac{c^2 p_z}{E}, \tag{3}$$

где энергия частицы

$$E = \pm [m_0^2 c^4 + c^2 p^2]^{1/2}, \tag{4}$$

m_0 — масса покоя частицы.

Выражение (3) согласуется с равенством

$$u_z = \frac{c^2 p_z}{E}, \tag{5}$$

к которому приводит СТО.

В нестационарном состоянии, представляющем собой суперпозицию состояний с $E > 0$ и $E < 0$, среднее значение осциллирующей части u_z из (2) отлично от нуля и содержит $\exp\left[\pm \frac{i2|E|t}{\hbar}\right]$ (см., например, [6, с.547]). Это соответствует дрожащему движению с частотой

$$\omega_D = \frac{2|E|}{\hbar}, \tag{6}$$

которое накладывается на постоянную часть u_z.

Следует отметить, что, как указал Паули [6, с.548], в состояниях, в которых содержатся собственные функции, соответствующие только одному знаку энергии, это «дрожание» отсутствует.

Тем не менее предлагались различные пути исключения дрожащего движения, рассматриваемого как нежелательное следствие теории Дирака.

Было, например, выдвинуто требование представления всех физических величин только четной частью соответствующих им операторов (см., например, [6,7] и др.). При этом было учтено, что оператор L физической величины можно представить в виде суммы его четной части $[L]$ (превращающей состояние с данным знаком энергии в состояние с тем же знаком энергии) и нечетной части $\{L\}$ (превращающей состояние с данным знаком энергии в состояние с противоположным знаком энергии). Так как состояния с противоположными знаками энергии взаимно ортогональны, то для всех состояний с данным знаком энергии среднее значение $\{L\}$ обращается в нуль.

Привлекательность такого подхода определяется тем, что при этом в релятивистской квантовой теории соотношения между операторами физических величин оказываются аналогичными соотношениям между соответствующими физическими величинами в классической теории.

Этот подход обладает, однако, как нам представляется, следующими недостатками. При вычислении среднего значения $\bar{L}$ в состоянии с определенным знаком энергии действительно дает вклад только $[L]$. Если же необходимо определить среднее значение $\overline{L^2}$ (например, при вычислении среднеквадратичной неопределенности $[\overline{(\Delta L)^2}]^{1/2}$, что важно для квантовой механики), то, поскольку $\{L\}^2$ является четным оператором, выполняется равенство

$$\overline{L^2} = \overline{[L]^2} + \overline{\{L\}^2}. \tag{7}$$

Таким образом, в $\overline{L^2}$ появляется вклад не только от четной части $[L]$ оператора L, но также вклад от его нечетной части $\{L\}$. Это приводит к выводу о том, что требование оставить в операторах всех физических величин только их четные части не всегда является правомерным.

Существует также мнение, что дрожащее движение можно устранить из теории Дирака путем унитарного преобразования. Так, например, в [8] было предложено каноническое преобразование, целью которого является исключение из гамильтониана Дирака матриц α, связывающих две «верхние» и две «нижние» компоненты волновой функции ψ, и обращение в нуль двух ее компонент (см., например, [3,7,9] и др.). При этом гамильтониан Дирака принял вид

$$H_{FW} = K\beta, \tag{8}$$

где модуль энергии

$$K = [m_0^2 c^4 + c^2 p^2]^{1/2}, \tag{9}$$

β — четвертая матрица Дирака. Исключение матриц α из (8) интерпретируется как «устранение шредингеровского дрожания» (см., например, [3, с.160] или [10, с.256]).

Следует, однако, учесть, что при переходе к представлению FW из [8] меняется вид не только гамильтониана Дирака, но также оператора скорости, который, в отличие от (1), принимает согласно табл.1 [8] следующий вид:

$$u_{z,FW} = \frac{c^2 p_z}{K}\beta + \frac{m_0 c^3}{K}\alpha_z . \tag{10}$$

Соответственно в представлении [8] в операторе скорости содержится осциллирующая часть

$$\frac{m_0 c^3}{K}(\alpha_z)_0\, e^{-\frac{i\,2H_{FW}t}{\hbar}} .$$

Таким образом, в представлении [8] дрожащее движение не устраняется. Это согласуется с тем, что физические следствия не должны зависеть от представления (см. [13, с.246]).

Учитывая изложенное выше, представляется, что дрожащее движение следует рассматривать как, может быть, необычное с точки зрения классических представлений, но все же неотъемлемое свойство теории Дирака.

В данном обзоре приводятся результаты исследований, проведенных с такой точки зрения. Основой этих исследований явилась наша работа [11], в которой показано, что вытекающее из (1), на первый взгляд, парадоксальное равенство модулей собственных значений операторов проекций скорости частицы и скорости света не следует рассматривать изолированно от характерной для теории Дирака неопределенности скорости частицы с $s = 1/2$. В стационарном состоянии частицы с $m_0 \neq 0$ волновая функция представляет собой, согласно [11], суперпозицию двух состояний, в одном из которых продольная импульсу проекция скорости равна c, а в другом $-c$. При этом среднее значение $\overline{u}_z$ определяется равенством вида (3), а неопределенность продольной импульсу проекции скорости — равенством

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}} = \frac{m_0 c^3}{K}. \tag{11}$$

Таким образом, в отличие от импульса, который является в стационарном состоянии свободной частицы определенным, скорость частицы в таком состоянии является неопределенной. Отмеченная выше трудность, связанная с равенством (1), разрешается в том смысле, что квадрат собственного значения оператора проекции скорости, равный квадрату скорости света, определяется в соответствии с (7) суммой квадрата среднего значения проекции скорости и квадрата ее неопределенности. При этом наблюдаемая скорость, равная среднему значению скорости, имеет при $m_0 \neq 0$ значение, меньшее скорости света.

2. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ПРОЕКЦИЙ СКОРОСТИ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧЕТВЕРТОЙ МАТРИЦЫ ДИРАКА

Гамильтониан Дирака в случае свободного движения имеет следующий вид:

$$H = c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) + \beta m_0 c^2. \tag{12}$$

Согласно теореме Гельмана — Фейнмана [12] выполняются равенства

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_x} = \frac{\partial E}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_y} = \frac{\partial E}{\partial p_y}, \quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_z} = \frac{\partial E}{\partial p_z}, \quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial m_0} = \frac{\partial E}{\partial m_0}. \tag{13}$$

Из (13), с учетом (12) и (4), следует

$$\overline{\alpha}_x = \frac{cp_x}{E}, \quad \overline{\alpha}_y = \frac{cp_y}{E}, \quad \overline{\alpha}_z = \frac{cp_z}{E}, \tag{14}$$

$$\overline{\beta} = \frac{m_0 c^2}{E}. \tag{15}$$

Средние значения проекции скорости определяются, согласно (1) и (14), равенствами

$$\overline{u}_x = \frac{c^2 p_x}{E}, \quad \overline{u}_y = \frac{c^2 p_y}{E}, \quad \overline{u}_z = \frac{c^2 p_z}{E}. \tag{16}$$

Так как $\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1$, то из (1) следует

$$u_x^2 = u_y^2 = u_z^2 = c^2. \tag{17}$$

Из (17) и (16) получаем выражения для среднеквадратичных неопределенностей проекций скорости:

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_x)^2}} = \frac{c^2}{K}\,[m_0^2 c^2 + p_y^2 + p_z^2]^{1/2},$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_y)^2}} = \frac{c^2}{K}\,[m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_z^2]^{1/2},$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}} = \frac{c^2}{K}\,[m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2]^{1/2}. \tag{18}$$

В частном случае, когда импульс направлен вдоль оси z (т.е. $p_x = p_y = 0$, $p_z = p$), из (18) следуют равенства

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_x)^2}} = \sqrt{\overline{(\Delta u_y)^2}} = c \tag{19}$$

и равенство (11). Из (19) видно, что неопределенности поперечных импульсу проекций скорости являются лоренц-инвариантными.

В системе покоя (СП), в которой $p = 0$, из (19) и (11) следует

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_x)^2}}\,|_{\text{СП}} = \sqrt{\overline{(\Delta u_y)^2}}\,|_{\text{СП}} = \sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}}\,|_{\text{СП}} = c. \tag{20}$$

При переходе в инерциальную систему отсчета (ИСО), движущуюся относительно СП, с увеличением p (следовательно, согласно (4), с увеличением модуля энергии) неопределенность продольной импульсу проекции скорости, согласно (11), уменьшается.

Согласно (1) средние значения первых трех матриц Дирака α_x, α_y, α_z определяют в стационарном состоянии средние значения трех проекций скорости u_x, u_y, u_z. Физический смысл четвертой матрицы Дирака β остается при этом неясным (см., например, [13, с.256]). Из (15) и (11) следует

$$\overline{\beta} = \pm\sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}}. \tag{21}$$

Это проясняет физический смысл четвертой матрицы Дирака. Среднее значение четвертой матрицы определяет относительную (по отношению к c) среднеквадратичную неопределенность продольной импульсу проекции скорости. Так как $\beta^2 = 1$, то с учетом (15) среднеквадратичная неопределенность β равна

$$\sqrt{\overline{(\Delta\beta)^2}} = c\left|\frac{p_z}{E}\right|. \tag{22}$$

По третьему равенству из (16) можно представить (22) в виде

$$\sqrt{\overline{(\Delta\beta)^2}} = \frac{1}{c}\,|\overline{u}_z|\,. \tag{22'}$$

Таким образом, среднеквадратичная неопределенность β равна модулю относительного (в указанном выше смысле) среднего значения продольной импульсу проекции скорости. В связи с установленными неопределенностями (11) и (19) следует отметить, что они обусловлены нечетными частями операторов $\boldsymbol{\alpha}$ и β. Действительно, четная часть оператора L определяется равенством $[L] = \frac{1}{2}(L + \Lambda L \Lambda)$, где $\Lambda = \frac{H}{K}$ — знаковый оператор (см., например, [27, ф-ла (62)]). При этом $[\boldsymbol{\alpha}] = \frac{c\mathbf{p}}{K}\Lambda$ и $[\beta] = \frac{m_0 c^2}{K}\Lambda$. Так как $\Lambda^2 = 1$ (см., например, [6, ф-ла (20.22)]) и $\Lambda = \pm 1$ [7, с.268]), то среднеквадратичные неопределенности $[\boldsymbol{\alpha}]$ и $[\beta]$ равны нулю. Нечетная часть оператора L определяется равенством $\{L\} = \frac{1}{2}(L - \Lambda L \Lambda)$ [27, ф-ла (63)]. При этом $\{\boldsymbol{\alpha}\} = \boldsymbol{\alpha} - \frac{c\mathbf{p}}{K}\Lambda$ и $\{\beta\} = \beta - \frac{m_0 c^2}{K}\Lambda$. Поэтому выполняются равенства

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = \frac{1}{K^2}[K^2\boldsymbol{\alpha} - c^2\,\mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) - m_0 c^3\,\mathbf{p}\beta],$$

$$\{\beta\} = \frac{c^2}{K^2}[p^2\beta - m_0 c(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})]. \qquad (23)$$

Соответственно среднеквадратичные неопределенности нечетных частей $\boldsymbol{\alpha}$ и β определяются выражениями

$$\sqrt{\overline{(\Delta\{\alpha_x\})^2}} = \frac{1}{K}\sqrt{E^2 - c^2 p_x^2}, \quad \sqrt{\overline{(\Delta\{\alpha_y\})^2}} = \frac{1}{K}\sqrt{E^2 - c^2 p_y^2},$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta\{\alpha_z\})^2}} = \frac{1}{K}\sqrt{E^2 - c^2 p_z^2}, \quad \sqrt{\overline{(\Delta\{\beta\})^2}} = \frac{cp}{K}, \qquad (24)$$

что и согласуется с (18) и (22).

Нечетная часть $\{L\}$ оператора L осциллирует [27, с.49] с течением времени с частотой (6). Это приводит к выводу, что установленные нами неопределенности $\mathbf{u}$ и β и дрожащее движение соответствующих им операторов обусловлены одной и той же причиной — наличием у этих операторов нечетной части.

С учетом (1), (7), (14) и (23) выполняются равенства

$$(\bar{u}_x)^2 + \overline{(\Delta u_x)^2} = c^2, \quad (\bar{u}_y)^2 + \overline{(\Delta u_y)^2} = c^2, \quad (\bar{u}_z)^2 + \overline{(\Delta u_z)^2} = c^2. \qquad (7')$$

Эти же равенства следуют из (16) и (18). Согласно (7′) и (17) квадрат собственного значения оператора проекции скорости, равный квадрату скорости света, представляет собой сумму квадратов среднего значения проекции скорости, определяемого четной частью оператора проекции скорости, и квадрата неопределенности проекции скорости. Таким образом, в собственные значения оператора скорости (1), равные по величине c, дают вклад как среднее значение проекции скорости, так и ее неопределенность.

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭНЕРГИЕЙ ЧАСТИЦЫ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ПРОДОЛЬНОЙ ИМПУЛЬСУ ПРОЕКЦИИ СКОРОСТИ

Из (11) с учетом (21) получаем следующую связь между энергией частицы и среднеквадратичной неопределенностью продольной ее импульсу проекции скорости, а также средним значением четвертой матрицы Дирака β:

$$|E| = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}}} = \frac{m_0 c^2}{|\overline{\beta}|}. \qquad (25)$$

Согласно (25) в СП, в которой выполняется (20), энергия частицы имеет наименьшее по модулю значение $|E_0| = m_0 c^2$. При переходе в другую ИСО, движущуюся относительно СП, с увеличением p неопределенность продольной импульсу проекции скорости (см. разд.2) уменьшается, и согласно (25) модуль энергии увеличивается.

Сопоставление (25) с известной из СТО связью между энергией частицы, ее массой покоя и скоростью

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (26)$$

показыват, что (25) можно рассматривать как квантово-механический аналог (26). При этом выполняется равенство

$$\frac{1}{c}\sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}} = \overline{\beta} = \sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (27)$$

Это согласуется с сопоставлением скаляра $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, характеризующего лоренцево сокращение, и четвертой матрицы Дирака β [3, с.139].

Согласно (12), (1) и (21) энергия частицы в стационарном состоянии может быть представлена в виде суммы

$$E = \overline{u}_z p \pm m_0 c \sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}}. \qquad (4')$$

Это равенство также указывает на важность учета в теории Дирака не только среднего значения скорости, но и ее среднеквадратичной неопределенности.

4. ОПЕРАТОР УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦЫ И ЕГО СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Наличие в осциллирующей части полученного Шредингером [5] выражения (2) оператора ускорения указывает на целесообразность более детального рассмотрения этого оператора. Согласно (1) и выражения для $d\alpha/dt$, приведенного в [7, ф-ла (60.30)], оператор ускорения **a** определяется равенством

$$\mathbf{a} = \frac{2c^2}{\hbar}[\mathbf{p}\mathbf{\Sigma}] + \frac{i\,2m_0c^3}{\hbar}\gamma, \tag{28}$$

где $\mathbf{\Sigma}$ — оператор спина, а

$$\gamma = \beta\alpha. \tag{29}$$

В случае, когда ось z направлена вдоль импульса, из (28) следует

$$a_x = -\frac{2c^2p}{\hbar}\Sigma_y + \frac{i\,2m_0c^3}{\hbar}\gamma_x, \quad a_z = \frac{i\,2m_0c^3}{\hbar}\gamma_z,$$

$$a_y = \frac{2c^2p}{\hbar}\Sigma_x + \frac{i\,2m_0c^3}{\hbar}\gamma_y, \quad a_xa_y - a_ya_x = i\,2c^2\omega_D^2\Sigma_z. \tag{30}$$

Так как $\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1$ и

$$\Sigma_x\gamma_y + \gamma_y\Sigma_x = \Sigma_y\gamma_x + \gamma_x\Sigma_y = 0,$$

то из (29) следуют равенства

$$a_x^2 = a_y^2 = \left(\frac{2cE}{\hbar}\right)^2, \tag{31}$$

$$a_z^2 = \left(\frac{2m_0c^3}{\hbar}\right)^2. \tag{32}$$

Согласно (31) и (32) операторы проекций ускорения имеют собственные значения

$$a_x = \pm\frac{2c|E|}{\hbar}, \quad a_y = \pm\frac{2c|E|}{\hbar}, \tag{33}$$

$$a_z = \pm\frac{2m_0c^3}{\hbar}. \tag{34}$$

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что удвоение состояний, характерное для частиц со спином $1/2$, распространяется в теории Дирака не только на собственные значения проекции скорости, но также на таковые для операторов проекций ускорения.

Количественно собственные значения (33) поперечных импульсу проекций ускорения отличаются от собственных значений поперечных импульсу проекций скорости u_x и u_y множителем, равным частоте ω_D из (6). Собственные значения (34) оператора продольной импульсу проекции ускорения отличаются от таковых для оператора продольной импульсу проекции скорости u_z множителем, равным частоте

$$\omega_0 = \frac{2m_0c^2}{\hbar}. \tag{35}$$

Согласно (34) и (35) выполняются равенства

$$a_z = \pm\, \omega_0 c. \tag{36}$$

Качественное отличие собственных значений операторов проекций ускорения от таковых для проекций скорости заключается в том, что в правые части (33) и (34) входит постоянная Планка. Таким образом, мы приходим к выводу: собственные значения операторов проекции ускорения являются не только релятивистскими, но и квантовыми величинами. В этой связи отметим, что перестановочное соотношение для проекций ускорения, поперечных импульсу из (30), также зависит, в отличие от перестановочного соотношения для поперечных импульсу проекций скорости (см., например, [10, ф-ла (4.197)]

$$u_x u_y - u_y u_x = \mathrm{i}2c^2\,\Sigma_z, \tag{37}$$

не только от c и Σ_z, но и от постоянной Планка.

Согласно (34) собственные значения a_z увеличиваются по модулю прямо пропорционально массе покоя частицы. Так, например, для электрона $|a_z| \sim 5 \cdot 10^{31}$ см/с^2, для мюона $|a_z| \sim 10^{34}$ см/с^2, для протона $|a_z| \sim$ $\sim 10^{35}$ см/с^2. Модуль собственных значений a_z из (34) связан с критической напряженностью электрического поля

$$\mathcal{E}_k = \frac{m_0c^3}{e\hbar}$$

(см. [27, с.6], [40, гл.6], [41, с.382]), при которой вакуум становится нестабильным по отношению к рождению электрон-позитронных пар, равенством

$$2e\mathcal{E}_k = m_0 \, | a_z | . \tag{38}$$

На первый взгляд, выражения (33) и (34) противоречат первому закону динамики Ньютона, согласно которому свободная частица движется по инерции без ускорения. Следует, однако, учесть, что оператор ускорения **a**, определенный в (28), является нечетным. Действительно, нетрудно убедиться, что в случае $p_z = p$ выполняются равенства

$$\Lambda \gamma_x \Lambda = \frac{1}{K^2} [(c^2p^2 - m_0^2c^4)\, \gamma_x - 2im_0c^3p\, \Sigma_y],$$

$$\Lambda \gamma_y \Lambda = \frac{1}{K^2} [(c^2p^2 - m_0^2c^4)\, \gamma_y + 2im_0c^3p\, \Sigma_x],$$

$$\Lambda \gamma_z \Lambda = - \gamma_z ,$$

$$\Lambda \Sigma_x \Lambda = \frac{1}{K^2} [(- c^2p^2 + m_0^2c^4)\, \Sigma_x - 2im_0c^3\, \gamma_y],$$

$$\Lambda \Sigma_y \Lambda = \frac{1}{K^2} [(- c^2p^2 + m_0^2c^4)\, \Sigma_y + 2im_0c^3\, \gamma_x]. \tag{39}$$

Так как $[\gamma_z] = \frac{1}{2} (\gamma_z + \Lambda\, \gamma_z\, \Lambda)$ (см. разд.2), то с учетом третьего из равенств (39) выполняется условие $[\gamma_z] = 0$. Следовательно, согласно (30),

$$a_z = \{a_z\}. \tag{40}$$

Аналогично из (39) и (30) следуют равенства

$$a_x = \{a_x\}, \quad a_y = \{a_y\}. \tag{40$'$}$$

Таким образом, оператор ускорения является нечетным.

Так как в стационарном состоянии с определенным знаком энергии среднее значение нечетной части $\{L\}$ оператора L обращается в нуль (см. разд.1), то с учетом (40) и (40′) выполняются равенства

$$\bar{a}_x = \bar{a}_y = \bar{a}_z = 0. \tag{41}$$

Из этих равенств следует, что в теории Дирака первый закон динамики Ньютона выполняется в среднем.

С учетом четвертого и пятого равенств (39) нечетные части операторов Σ_x и Σ_y определяются выражениями

$$\{\Sigma_x\} = \frac{p}{K^2}(c^2 p\,\Sigma_x + \mathrm{i} m_0 c^3\,\gamma_y), \quad \{\Sigma_y\} = \frac{p}{K^2}(c^2 p\,\Sigma_y - \mathrm{i} m_0 c^3\,\gamma_x). \tag{42}$$

Нетрудно убедиться, что эти выражения удовлетворяют уравнению (64) из [27] для дрожащего движения спина.

Согласно (42) и (30) a_x, a_y и $\{\Sigma_x\}$, $\{\Sigma_y\}$ связаны равенствами

$$\{\Sigma_x\} = \frac{\hbar p}{2K^2}a_y, \quad \{\Sigma_y\} = -\frac{\hbar p}{2K^2}a_x. \tag{43}$$

Из (33), (34) и (41) следует, что среднеквадратичные неопределенности проекций ускорения определяются равенствами

$$\sqrt{\overline{(\Delta a_x)^2}} = \sqrt{\overline{(\Delta a_y)^2}} = \frac{2cK}{\hbar}, \quad \sqrt{\overline{(\Delta a_z)^2}} = \frac{2m_0c^3}{\hbar}. \tag{44}$$

Это приводит к выводу о том, что, хотя в стационарном состоянии ускорение свободной частицы в среднем отсутствует, среднеквадратичная неопределенность ускорения отлична от нуля. Согласно (44) в СП имеем

$$m_0 = \frac{\hbar}{2c^3}\sqrt{\overline{(\Delta a_x)^2}}\,\Big|_{\text{СП}} = \frac{\hbar}{2c^3}\sqrt{\overline{(\Delta a_y)^2}}\,\Big|_{\text{СП}} = \frac{\hbar}{2c^3}\sqrt{\overline{(\Delta a_z)^2}}\,\Big|_{\text{СП}}. \tag{45}$$

Эти равенства отражают, как нам представляется, связь массы покоя частицы с ее внутренним движением.

Как известно, начиная с первых работ [1] по релятивистской квантовой механике, Дирак неоднократно высказывал мнение, что матрицы α и β описывают некоторое внутреннее движение точечного заряженного электрона, связанное с его спином, существование которого постулировалось прежними теориями (см., например, [28, с.113 и 129], [2, с.351]). Фейнман отметил [38], что Дирак сначала предполагал ключевую роль спина (или внутреннего углового момента), вытекающего из его уравнения, однако самым существенным оказалось наличие отрицательных энергий и существование античастиц. Вопрос о внутренних степенях свободы электрона, связанных с его спином и отрицательными энергиями, обсуждался также в ряде других работ [4, §12, гл.1, ч.V], [36, §7, гл,14]. Установленные нами неопределенности скорости и ускорения позволяют сопоставить внутреннему движению точечного электрона виртуальные переходы из начального состояния в промежуточное и обратно, сопровождаемые изменением знака энергии покоя. Действительно, согласно (12), в СП стационарные состояния являются собственными состояниями матрицы β. Им соответствуют собственные значения энергии, равные $\pm m_0 c^2$. В СП четная часть оператора α, равная $\frac{c\mathbf{p}}{K}\Lambda$ [27, с.49], обращается в нуль. Поэтому в СП оператор $\boldsymbol{\alpha}$ является нечетным и переводит собственную функцию оператора β, соответствующую определенному знаку энергии покоя, в другую собственную функцию оператора β, соответствующую противоположному знаку энергии покоя. При этом, например, для неопределенности u_z выполняется равенство

$$\overline{(\Delta u_z)^2}\,|_n = c\,\langle n\,|\,\alpha_z\,|\,k\,\rangle\,\langle k\,|\,\alpha_z\,|\,n\,\rangle,$$

где в промежуточном состоянии $|\,k\,\rangle$ знак энергии покоя противоположен знаку энергии покоя в конечном и начальном стационарном состоянии $|\,n\,\rangle$. Для неопределенностей u_x и u_y в промежуточном состоянии $|\,k\,\rangle$ и начальном состоянии $|\,n\,\rangle$ противоположны не только знаки энергии, но также проекции спинов. Отметим, что аналогичные матричные элементы, описывающие виртуальные переходы, при которых импульс сохраняется, а знак энергии меняется, рассматриваются, например, при выводе формулы Клейна — Нишины [39, §49].

Согласно (28) и (29), в СП оператор ускорения пропорционален $\beta\alpha$. Поэтому такое же «внутреннее движение» соответствует среднеквадратичной неопределенности ускорения в СП. Из (45) с учетом (20) и (35) следуют равенства

$$\sqrt{\overline{(\Delta a_x)^2}}\,|_{\text{СП}} = \omega_0 \sqrt{\overline{(\Delta u_x)^2}}\,|_{\text{СП}},$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta a_y)^2}}\,|_{\text{СП}} = \omega_0 \sqrt{\overline{(\Delta u_y)^2}}, \quad \sqrt{\overline{(\Delta a_z)^2}}\,|_{\text{СП}} = \omega_0 \sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}}. \tag{46}$$

Таким образом, среднеквадратичные неопределенности проекций скорости, ускорения и частота дрожащего движения в СП оказываются взаимосвязанными.

5. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦЫ С МАССОЙ ПОКОЯ, РАВНОЙ НУЛЮ

При $m_0 = 0$ получаем из (16), (19), (20), (30) и (44)

$$\bar{u}_x = \bar{u}_y = 0, \quad \bar{u}_z = \pm c,$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_\perp)^2}} = c, \quad \sqrt{\overline{(\Delta u_\parallel)^2}} = 0,$$

и

$$a_x = -\frac{2c^2 p}{\hbar}\Sigma_y, \quad a_y = \frac{2c^2 p}{\hbar}\Sigma_x, \quad a_z = 0,$$

$$(a_x)_{c.3} = \pm\frac{2c^2 p}{\hbar}, \quad (a_y)_{c.3} = \pm\frac{2c^2 p}{\hbar}, \quad (a_z)_{c.3} = 0,$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta a_x)^2}} = \frac{2c^2 p}{\hbar}, \quad \sqrt{\overline{(\Delta a_y)^2}} = \frac{2c^2 p}{\hbar}, \quad \sqrt{\overline{(\Delta a_z)^2}} = 0, \tag{47}$$

где учтено, что, согласно (4), при $m_0 = 0$ выполняется равенство

$$|E| = cp.$$

Из (47) видно, что при $m_0 = 0$ в стационарном состоянии неопределенности скорости и ускорения полностью не исчезают. Поперечные импульсу проекции скорости флуктуируют около нулевого среднего значения. При этом среднеквадратичные их неопределенности равны скорости света. Согласно (47) флуктуируют также поперечные импульсу проекции ускорения. Здесь выполняется аналогичное (46) равенство

$$\sqrt{\overline{(\Delta a_\perp)^2}} = \omega_D \sqrt{\overline{(\Delta u_\perp)^2}}\,. \tag{46$'$}$$

Это позволяет считать, что неопределенности скорости и ускорения имеются в стационарном состоянии по теории Дирака не только у электрона или других частиц со спином 1/2 и отличной от нуля массой покоя, но и у частиц с $m_0 = 0$ и спином 1/2, в частности, у нейтрино и антинейтрино.

6. СВЯЗЬ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СКОРОСТИ С ПОЛЯРИЗАЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ ЧАСТИЦ В ТЕОРИИ ДИРАКА

Как известно, поляризационные состояния частицы характеризуются в теории Дирака [4] псевдовектором поляризации с компонентами [14, ф-ла (29,8)]

$$a_0 = \frac{p}{m_0 c}\zeta_{\|}, \quad a_{\perp} = \zeta_{\perp}, \quad a_{\|} = \frac{E}{m_0 c^2}\zeta_{\|}, \tag{48}$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ — трехмерный вектор поляризации в СП, индексы $\|$ и $\perp$ означают слагаемые векторов, параллельных и перпендикулярных импульсу **p**. Из (48) с учетом (11) получаем

$$a_{\|} = \frac{c}{\sqrt{\overline{(\Delta u_{\|})^2}}}\zeta_{\|} = \frac{\zeta_{\|}}{\bar{\beta}}. \tag{49}$$

Согласно (49), соотношение между $a_{\|}$ и $\zeta_{\|}$ определяется относительной среднеквадратичной неопределенностью продольной импульсу проекции скорости или средним значением четвертой матрицы Дирака. В этом проявляется связь поляризационных свойств движущейся частицы с неопределенностью ее скорости.

При кулоновском рассеянии первоначально полностью правополяризованных электронов после рассеяния поляризация определяется, как известно, равенством [9, ф-ла (7.97)]

$$p_R = 1 - \frac{2m_0^2 c^4}{E^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} + m_0^2 c^4}. \tag{50}$$

С учетом (11) его можно преобразовать к виду

$$p_R = 1 - \frac{2\overline{(\Delta u_{\|})^2}}{\overline{(\Delta u_{\|})^2} + c^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}}. \tag{51}$$

Таким образом, и в этом случае поляризационные свойства оказываются связанными с неопределенностью продольной импульсу проекции скорости. Из (49) и (51) следует, что неопределенность скорости может быть вычислена путем исследования поляризационных свойств.

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ СКОРОСТЕЙ И ИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ТЕОРИИ ДИРАКА

Релятивистское преобразование четырехмерного вектора плотности тока-заряда [29, с.300], вытекающее из лоренц-ковариантности уравнения непрерывности, приводит к следующей теореме сложения средних значений проекций скорости в теории Дирака:

$$u_x = \frac{u_{x,0}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_{z,0}}, \quad u_y = \frac{u_{y,0}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_{z,0}}, \tag{52}$$

$$u_z = \frac{u_{z,0} + v}{1 + \frac{v}{c^2}u_{z,0}}, \tag{53}$$

где индексом 0 отмечены значения проекций скорости в ИСО K_0, движущейся относительно ИСО K с постоянной скоростью v вдоль оси z. Равенства (52) и (53) согласуются с (1), (14) и релятивистским преобразованием четырехмерного вектора импульса-энергии.

Согласно (52), (53) и (17) неопределенности проекций скорости преобразуются следующим образом:

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_x)^2}} = \sqrt{\overline{(\Delta u_{x,0})^2}} = c, \quad \sqrt{\overline{(\Delta u_y)^2}} = \sqrt{\overline{(\Delta u_{y,0})^2}} = c, \tag{54}$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2}\bar{u}_{z,0}}\sqrt{\overline{(\Delta u_{z,0})^2}}\,. \tag{55}$$

Таким образом, неопределенности поперечных импульсу проекций скорости являются лоренц-инвариантными. Неопределенность продольной импульсу проекции скорости преобразуется как среднее значение поперечной импульсу проекции скорости.

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ С ПРОДОЛЬНОЙ ИМПУЛЬСУ ПРОЕКЦИЕЙ СКОРОСТИ, РАВНОЙ ПО ВЕЛИЧИНЕ СКОРОСТИ СВЕТА

Вероятностная интерпретация, характерная для современной квантовой механики, приводит к целесообразности рассмотрения преобразований вероятностей $W(c)$ и $W(-c)$ состояний с продольной импульсу проекцией скорости, равной c и, соответственно, $-c$.

Согласно (9) и (10) из [11] следуют равенства

$$W(\pm c)=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{cp_z}{E}\right). \tag{56}$$

С учетом (16) равенство (56) можно представить в виде

$$W(\pm c)=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\bar{u}_z}{c}\right). \tag{57}$$

Из (57) с учетом (53) получаем для преобразования вероятностей

$$W_k(\pm c)=\frac{1\pm\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c^2}\bar{u}_{z,0}}W_{K_0}(\pm c), \tag{58}$$

где, согласно (57), индексы K_0 и K соответствуют системам отсчета СП и ИСО:

$$W_{K_0}(\pm c)=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\bar{u}_{z,0}}{c}\right). \tag{59}$$

Вероятности $W_{K_0}(c)$ и $W_{K_0}(-c)$ удовлетворяют по (59) условию нормировки

$$W_{K_0}(c)+W_{K_0}(-c)=1. \tag{60}$$

При выполнении (60) вероятности $W_K(c)$ и $W_K(-c)$ из (58) также удовлетворяют в ИСО K-условию нормировки

$$W_K(c)+W_K(-c)=1. \tag{61}$$

Согласно (58) и (59), при $v=c$ выполняются равенства $W_K(c)=1$ и $W_K(-c)=0$, а при $v=-c$ —равенства $W_K(c)=0$ и $W_K(-c)=1$. Равенства $W_K(c)=1$ и $W_K(-c)=0$ выполняются также при $\bar{u}_{z,0}=c$, а равенства $W_K(c)=0$ и $W_K(-c)=1$ при $\bar{u}_{z,0}=-c$. Это является квантово-механическим вероятностным выражением, вытекающим из ТСС СТО равенства $u_z = c$ при $v = c$ или $u_{z,0} = c$ и равенства $u_z = -c$ при $v = -c$ или $u_{z,0} = -c$.

Таким образом, преобразования вероятностей (58) согласуются с предельным характером скорости света.

9. СВЯЗЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ПРОЕКЦИЙ СКОРОСТИ В ТЕОРИИ ДИРАКА С ГЕОМЕТРИЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО

При учете предельного характера скорости света удобно использовать не скорость, а быстроту (см. [15, с.249], [16, с.105], [17, с.82; 18], [37, с.32] и др.). Полагая

$$u_z = c \operatorname{th} \varphi, \quad u_{z,0} = c \operatorname{th} \varphi_0, \quad v = c \operatorname{th} \psi, \tag{62}$$

где φ, φ_0 и ψ — быстроты, определяющие u_z, $u_{z,0}$ и v, можно, как известно, представить ТСС из СТО в виде прямого сложения быстрот

$$\varphi = \varphi_0 + \psi. \tag{63}$$

Аналогично, полагая в теории Дирака

$$\bar{u}_z = c \operatorname{th} \varphi, \quad \bar{u}_{z,0} = c \operatorname{th} \varphi_0, \quad v = c \operatorname{th} \psi, \tag{64}$$

получаем из (52) и (53) преобразования средних значений проекций скорости в виде

$$\operatorname{th} \varphi \cdot \cos \alpha = \frac{\operatorname{th} \varphi_0 \cos \alpha_0 + \operatorname{th} \psi}{1 + \operatorname{th} \psi \operatorname{th} \varphi_0 \cos \alpha_0}, \tag{65}$$

$$\operatorname{th} \varphi \cdot \sin \alpha = \frac{\operatorname{th} \varphi_0 \sin \alpha_0}{\operatorname{ch} \psi + \operatorname{sh} \psi \operatorname{th} \varphi_0 \cos \alpha_0}, \tag{66}$$

где α — угол между $\mathbf{p}$ и осью z. Используя (65) и (66), нетрудно убедиться, что лоренц-преобразование средних значений проекций скорости (52) и (53) согласуется (так же, как теорема сложения скоростей в СТО) с теоремами [19, с.1162] синуса и косинуса в плоскости Лобачевского.

10. СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ И СПИНОМ

Как известно, в случае частиц с массой покоя, равной нулю, уравнение Дирака для четырехкомпонентной волновой функции может быть представлено в виде двух уравнений Вейля [20]:

$$H_L \psi_L = E \psi_L, \quad H_R \psi_R = E \psi_R \tag{67}$$

для двухкомпонентных волновых функций ψ_L и ψ_R, где

$$H_L = -c(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}), \quad H_R = c(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}), \tag{68}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ — спиновые матрицы Паули [21, ф-лы (7.140), (7.141)]. В двухкомпонентной теории нейтрино [22—24] гамильтонианы нейтрино H_ν и антинейтрино $H_{\tilde{\nu}}$ определяются равенствами

$$H_\nu = H_L, \quad H_{\tilde{\nu}} = H_R. \tag{69}$$

С учетом уравнения движения

$$\mathbf{u} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{r}H]_-, \tag{69'}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, получаем в случае H_L из (68) следующее выражение для оператора скорости:

$$\mathbf{u} = -c\boldsymbol{\sigma}. \tag{70}$$

В случае H_R из (68) оператор скорости определяется по (69′) так:

$$\mathbf{u} = c\boldsymbol{\sigma}. \tag{71}$$

Из (70) и (71) видно, что в случае частиц с $m_0 = 0$, так же, как в случае частиц с $m_0 \neq 0$ (см. (1)), оператор скорости $\mathbf{u}$ (в отличие от скорости в СТО) не связан с импульсом. При этом в случае частиц с $m_0 = 0$ оператор скорости, в отличие от (1), прямо пропорционален оператору спина. Отсюда следует, что свойства проекций скорости u_x, u_y, u_z определяются свойствами спиновых операторов σ_x, σ_y, σ_z. Так, например, из равенств $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$ следует, что в случае частиц с $m_0 = 0$ также выполняются равенства (17), по которым u_x, u_y и u_z имеют собственные значения, равные $\pm c$. Из перестановочных соотношений для σ_x, σ_y, σ_z следуют аналогичные перестановочные соотношения для u_x, u_y, u_z. При этом неопределенности (см. (47)) поперечных импульсу проекций скорости оказываются непосредственно связанными с неопределенностями σ_x и σ_y в случае определенного собственного значения σ_z.

Из уравнения движения

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[\boldsymbol{\sigma}H]_- \tag{72}$$

и (68) следует

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}=\pm\frac{2c}{\hbar}[\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}], \tag{73}$$

где верхний знак для гамильтониана H_L, нижний — для гамильтониана H_R. Уравнение (73), с учетом вытекающего из (71) равенства

$$\mathbf{a}=c\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}, \tag{74}$$

согласуется с уравнением (28) при $m_0=0$.

Если ось z направить вдоль $\mathbf{p}$, то из (73) получим

$$\frac{d\sigma_x}{dt}=\pm\frac{2}{\hbar}cp\sigma_y,$$

$$\frac{d\sigma_y}{dt}=\mp\frac{2}{\hbar}cp\sigma_x,$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt}=0. \tag{75}$$

Тогда по (75) проекция σ_z имеет определенное значение (что соответствует определенной спиральности частиц с $m_0=0$, в частности, для нейтрино и антинейтрино). При этом из перестановочных соотношений для спиновых матриц Паули получаются равенства $\overline{\sigma}_x=\overline{\sigma}_y=0$. Поэтому по первым двум равенствам (75) имеем

$$\frac{\overline{d\sigma}_x}{dt}=\frac{\overline{d\sigma}_y}{dt}=0, \tag{76}$$

$$\left(\frac{d\sigma_{\perp}}{dt}\right)^2 = \frac{4c^2}{\hbar^2} p^2. \tag{77}$$

Из (76) и (77) следует

$$\sqrt{\overline{\left(\Delta \frac{d\sigma_{\perp}}{dt}\right)^2}} = \frac{2c}{\hbar} p, \tag{78}$$

что с учетом (74) согласуется с (47). Таким образом, при $m_0 = 0$ неопределенность поперечной импульсу проекции ускорения оказывается непосредственно связанной с неопределенностью производной по времени от поперечной импульсу проекции спина.

Это позволяет считать, что в случае частиц с $m_0 = 0$ необычные с точки зрения классических представлений неопределенности скоростей и ускорений связаны с описанием в теории Дирака частиц, обладающих спином.

В случае частиц с $m_0 \neq 0$ вместо (70) и (71) выполняется равенство [2, ф-лы (24) из §69 и (9) из §67]:

$$\mathbf{u} = c\rho_1 \mathbf{\Sigma}, \tag{79}$$

где

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{80}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{81}$$

Таким образом, здесь оператор скорости $\mathbf{u}$ связан не только с оператором спина $\mathbf{\Sigma}$, но также с матрицей ρ_1. Так как ρ_1 коммутирует с четырехмерной матрицей спина $\mathbf{\Sigma}$ и, кроме того, $\rho_1^2 = 1$, то перестановочные соотношения проекций скорости u_x, u_y, u_z определяются, так же, как и для частиц с $m_0 = 0$, перестановочными соотношениями для Σ_x, Σ_y, Σ_z. Собственные значения u_x, u_y, u_z остаются, так же, как в случае с $m_0 = 0$, равными по величине скорости света c. Однако, так как матрица ρ_1 антикоммутирует с четвертой матрицей Дирака β, то для частиц с $m_0 \neq 0$

возникают, в соответствии с (11), (30) и (44), зависящие от m_0 члены в неопределенности продольной импульсу проекции скорости, операторах ускорения и их неопределенностях.

11. МАГНИТНАЯ АНАЛОГИЯ ДРОЖАЩЕГО ДВИЖЕНИЯ

Операторы Паули были впервые применены в микроскопической теории сверхпроводимости Н.Н.Боголюбовым [30] в 1958 г. Эти операторы связаны, как известно, со спиновыми матрицами Паули. Метод псевдоспина и псевдомагнитного поля был затем использован при рассмотрении теории сверхпроводимости БКШ [26] — Боголюбова [31,32] в ряде других работ (см., например, [25,33—36]). В [11] нами отмечено, что этот метод применим также в теории Дирака.

В этом случае состоянию псевдоспина $|\uparrow\rangle$ следует сопоставить волновую функцию $f_\uparrow(c)$ состояния с $u_z = c$, а состоянию псевдоспина $|\downarrow\rangle$ — волновую функцию состояния $f_\downarrow(-c)$ с $u_z = -c$. Эти функции определяются, согласно [11], следующим образом:

$$f_\uparrow(c) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_\downarrow(-c) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Движение магнитного момента $\boldsymbol{\mu} = g\boldsymbol{\sigma}$ в магнитном поле с напряженностью $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{k}B_z$, где B_x и B_z не зависят от времени, определяется гамильтонианом

$$H = -g(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}) \tag{83}$$

в плоскости (x, z).

В стационарном состоянии собственные функции и собственные значения гамильтониана (83) имеют вид

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_1}{K_1}}\,|\uparrow\rangle + \sqrt{1 - \frac{\omega_1}{K_1}}\,|\downarrow\rangle\right), \quad E_- = -gB,$$

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 - \frac{\omega_1}{K_1}}\,|\uparrow\rangle - \sqrt{1 + \frac{\omega_1}{K_1}}\,|\downarrow\rangle\right), \quad E_+ = gB,$$

$$\omega_1 = gB_z, \quad \omega_2 = gB_x, \quad K_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \tag{84}$$

Используя знаковый оператор $\Lambda = \frac{H}{gB}$, где H — гамильтониан из (83), нетрудно убедиться, что четные и нечетные части σ_x, σ_y, σ_z определяются равенствами

$$[\sigma_x] = -\frac{B_x}{B}\Lambda, \quad \{\sigma_x\} = \frac{B_z}{B^2}[\mathbf{B}\sigma]_y,$$

$$[\sigma_y] = 0, \quad \{\sigma_y\} = \sigma_y,$$

$$[\sigma_z] = -\frac{B_z}{B}\Lambda, \quad \{\sigma_z\} = -\frac{B_x}{B^2}[\mathbf{B}\sigma]_y. \tag{85}$$

Соответственно средние значения σ_x, σ_y, σ_z и их среднеквадратичные неопределенности даются выражениями

$$\bar{\sigma}_x\Big|_{\mp} = \pm\frac{\omega_2}{k_1}, \quad \bar{\sigma}_y = 0, \quad \bar{\sigma}_x\Big|_{\mp} = \pm\frac{\omega_1}{K_1}.$$

$$\sqrt{\overline{(\Delta\sigma_x)^2}} = \frac{\omega_1}{K_1}, \quad \sqrt{\overline{(\Delta\sigma_y)^2}} = 1, \quad \sqrt{\overline{(\Delta\sigma_z)^2}} = \frac{\omega_2}{K_1}. \tag{86}$$

Согласно (86) в стационарном состоянии прецессия («дрожащее движение») магнитного момента отсутствует. В этом состоянии имеются неопределенности проекций спина, обусловленные нечетными частями соответствующих им операторов, обладающих отличными от нуля недиагональными матричными элементами между стационарными состояниями ψ_+ и ψ_- из (84), с равными по величине и противоположными по знаку энергиями.

Сравнение (83) и (12) показывает, что переход к теории Дирака можно осуществить путем следующего сопоставления:

$$gB_z \to -cp, \quad gB_x \to -m_0c^2,$$

$$\sigma_z \to \alpha_z, \quad \sigma_x \to \beta. \tag{87}$$

При этом волновые функции (84) переходят в волновые функции (7) из [11], нечетные выражения из (85) $\{\sigma_x\}$ и $\{\sigma_z\}$ в $\{\beta\}$ и $\{\alpha_z\}$ из (23) при

$p_z = p$, а (86) — в выражения (15), (41) и (16) для $\overline{\beta}$, $\overline{a}_z$, $\overline{u}_z$ и в выражения (22), (44) и (11) для $\sqrt{\overline{(\Delta\beta)^2}}$, $\sqrt{\overline{(\Delta a_z)^2}}$ и $\sqrt{\overline{(\Delta u_z)^2}}$.

В нестационарных состояниях возникает, как известно, прецессия («дрожащее движение») магнитного момента вокруг результирующей напряженности B магнитного поля. Если для определенности принять начальное условие $\psi|_{t=0} = |\uparrow\rangle$, то волновая функция будет равна [42]:

$$\psi = \left(\cos K_1 t + \mathrm{i}\,\frac{\omega_1}{K_1} \sin K_1 t \right) |\uparrow\rangle + \frac{\mathrm{i}\omega_2}{K_1} \sin K_1 t\,|\downarrow\rangle. \tag{88}$$

В состоянии (88) средние значения проекции спина даются выражениями

$$\sigma_z = 1 - \frac{2\omega_2^2}{K_1^2} \sin^2 K_1 t,$$
$$\sigma_x = \frac{2\omega_1\omega_2}{K_1^2} \sin^2 K_1 t, \tag{89}$$
$$\sigma_y = \frac{\omega_2}{K_1} \sin 2K_1 t.$$

По аналогии с (89) с учетом (87) волновая функция нестационарного состояния определяется, согласно теории Дирака, выражением (с K из (9)):

$$\psi_\uparrow = \left(\cos \frac{K}{\hbar} t - \frac{\mathrm{i}cp}{K} \sin \frac{Kt}{\hbar} \right) f_\uparrow(c) - \mathrm{i} \left(\frac{m_0 c^2}{K} \sin \frac{K}{\hbar} t \right) f_\uparrow(-c). \tag{90}$$

В этом состоянии выполняются равенства

$$u_z = c \left(1 - \frac{2m_0^2 c^4}{K^2} \sin^2 \frac{K}{\hbar} t \right),$$
$$\beta = \frac{2m_0 c^3 p}{K^2} \sin^2 \frac{K}{\hbar} t,$$
$$\overline{a}_z = -\frac{2m_0^2 c^5}{\hbar K} \sin \frac{2Kt}{\hbar}, \tag{91}$$

$$\bar{u}_x = \bar{u}_y = 0, \quad \sqrt{\overline{(\Delta u_x)^2}} = \sqrt{\overline{(\Delta u_y)^2}} = c,$$

$$\bar{a}_x = \bar{a}_y = 0, \quad \sqrt{\overline{(\Delta a_x)^2}} = \sqrt{\overline{(\Delta a_y)^2}} = \frac{2cK}{\hbar}.$$

Таким образом, дрожащему движению в нестационарном состоянии соответствует, согласно теории Дирака, прецессия вектора $\mathbf{i}\bar{\beta} + \mathbf{j}\bar{a}_z + \mathbf{k}\bar{u}_z$ в пространстве $(\bar{\beta}, \bar{a}_z, \bar{u}_z)$.

В нестационарном состоянии $\psi_\uparrow$ из (90) среднее значение оператора $c^2 p_z H^{-1}$ определяется выражением

$$\overline{c^2 p_z H^{-1}} = \frac{1}{c}\left(\frac{c^2 p}{E}\right)^2. \tag{92}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в нестационарном состоянии, в котором имеется дрожащее движение [5], сходство неосциллирующей части оператора скорости u_z из (2) с соответствующим выражением (5) из СТО является только внешним и для среднего значения этого оператора не выполняется.

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все изложенное выше приводит к выводу о том, что неопределенности скорости и ускорения являются неотъемлемыми свойствами теории Дирака, описывающей частицы со спином 1/2. Неопределенности величин α и β и дрожащее движение соответствующих им операторов обусловлены одной и той же причиной — наличием у этих операторов нечетной части, превращающей состояние с данным знаком энергии в состояние с противоположным знаком энергии. В собственные значения операторов проекций скорости, равные по величине скорости света, дают вклад как среднее значение проекции скорости, обусловленное четной частью оператора проекции скорости, так и неопределенность проекции скорости, обусловленная нечетной частью оператора проекции скорости.

Средние значения первых трех матриц Дирака в стационарном состоянии определяют средние значения продольной и поперечной импульсу проекций скорости. Среднее значение четвертой матрицы Дирака определяет относительную среднеквадратичную неопределенность продольной импульсу проекции скорости частицы со спином $1/2$ и отличной от нуля массой покоя. Она же определяет связь энергии такой частицы с ее энергией покоя.

Удвоение состояний, характерное для частиц со спином $1/2$, распространяется в теории Дирака не только на собственные значения проекций скорости, которые равны либо c, либо $-c$, но также на собственные значения проекций оператора ускорения. При этом собственные значения операторов проекций ускорения оказываются не только релятивистскими, но и квантовыми величинами.

В стационарном состоянии средние значения проекций ускорения равны нулю. Соответственно первый закон динамики Ньютона выполняется в теории Дирака в случае свободного движения в среднем. При этом в стационарном состоянии среднеквадратичные неопределенности проекций ускорения отличны от нуля. Они связаны с массой покоя частиц. Таким образом, выявляется связь массы покоя частицы с ее внутренним движением, характеризуемым неопределенностью ее ускорения в СП. Модуль собственных значений оператора продольной импульсу проекции ускорения связан с критической напряженностью электрического поля, при которой вакуум становится неустойчивым по отношению к рождению электрон-позитронной пары.

Лоренц-преобразование средних значений проекций скорости имеет в теории Дирака внешне такой же вид, как теорема сложения скоростей в СТО. Соответственно указанное преобразование обладает такими же свойствами, как сложение определенных значений проекции скорости в СТО.

Неопределенности поперечных импульсу проекций скорости являются лоренц-инвариантными. Неопределенность продольной импульсу проекции скорости преобразуется как среднее значение поперечной импульсу проекции скорости.

Неопределенности поперечных импульсу проекций скорости и ускорения имеются также у частиц со спином 1/2 и массой покоя, равной нулю. Это связано с тем, что такие частицы обладают аксиальной симметрией относительно направления импульса (см., например, [14, с.138]). При этом проекция спина на направление импульса имеет определенное значение, а поперечные импульсу проекции спина являются (в соответствии с переста-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dirac P.A.M.** — Proc. Roy. Soc. A. 1928, vol.117, p.610; 1928, vol.118, p.351.
2. **Дирак П.А.М.** — Принципы квантовой механики. М.: ГИФМЛ, 1960.
3. **Соколов А.А., Тернов И.М.** — Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983.
4. **Фок В.А.** — Начала квантовой механики. М.: Мир, 1976.
5. **Schrodinger E.** — Sitzungsb. d. Berlin Akad., 1930, p.418.
6. **Паули В.** — Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1975.
7. **Давыдов А.С.** — Квантовая механика. М.: Наука, 1973.
8. **Foldy L.L., Wouthuysen S.A.** — Phys. Rev., 1950, vol.78, p.29.
9. **Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д.** — Релятивистская квантовая теория. М.: ИИЛ, 1978.
10. **Швебер С.** — Введение в релятивистскую квантовую теорию. М.: ИИЛ, 1962.
11. **Вонсовский С.В., Свирский М.С.** — Проблемы теоретической физики. Сб. памяти И.Е.Тамма. М.: Наука, 1972, с.389.
12. **Feynman R.P.** — Phys. Rev., 1939, vol.56, p.340.
13. **Бете Г.** — Квантовая механика. М.: Мир, 1965.
14. **Берестецкий Б.В., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** — Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
15. **Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П.** — Электродинамика. М.: Высшая школа, 1990.
16. **Гибсон У., Поллард Б.** — Принципы симметрии в физике элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979.
17. **Эллиот Дж., Добер П.** — Симметрия в физике. М.: Мир, 1983, т.2.
18. **Вонсовский С.В., Свирский М.С., Свирская Л.Н.** — ФММ, №1, 1992, с.51.
19. **Черников Н.А.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23, вып.5, с.1155.
20. **Weyl H.** — Zs. f. Phys., 1929, bd.56, s.330.
21. **Нишиджима К.** — Фундаментальные частицы. М.: Мир, 1951.
22. **Lee T.D., Yang C.N.** — Phys. Rev., 1957, vol.105, p.1671.
23. **Salam A.** — Nuovo Cimento, 1957, vol.5, p.209.
24. **Ландау Л.Д.** — ЖЭТФ, 1957, т.32, с.405.
25. **Anderson P.W.** — Phys. Rev., 1959, vol.112, p.1900.
26. **Bardeen J., Cooper L.N., Schriefer** — Phys. Rev., 1957, vol.108, p.1175.
27. **Тернов И.М., Дорофеев О.Ф.** — ЭЧАЯ, 1994, т.25, вып.1, с.5.
28. **Дирак П.А.М.** — К созданию квантовой теории поля. М.: Наука, 1990.
29. **Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч.** — Квантовая механика. М.: Наука, 1979.
30. **Боголюбов Н.Н.** — ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.73.
31. **Боголюбов Н.Н.** — ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.58.
32. **Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.** — Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Наука, 1958.
33. **Koppe H., Mülschlegel B.** — Zs. f. Phys., 1958, bd.151, s.613.
34. **Таулес Д.** — Квантовая механика систем многих частиц. М.: ИИЛ, 1963.
35. **Vonsovskii S.V., Svirskii M.S.** — phys. stat. sol. (b), 1976, vol.77, p.403.
36. **Липкин Г.** — Квантовая механика. М.: Мир, 1977.
37. **Фейнман Р.** — Теория фундаментальных процессов. М.: Наука, 1978.
38. **Фейнман Р.** — УФН, 1989, т.157, вып.1, с.163.
39. **Мак Коннел Дж.** — Квантовая динамика частиц. М.: ИИЛ, 1962.
40. **Вонсовский С.В.** — Магнетизм микрочастиц. М.: Наука, 1973.
41. **Зоммерфельд А.** — Строение атома и спектры. М.: ГИТТЛ, 1956, т.2.
42. **Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Когден В.И.** — Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1981.