«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1997, ТОМ 28, ВЫП.4

УДК 535.3:551.51

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.Г.Багров, Б.Ф.Самсонов

Томский государственный университет
Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск

Обсуждаются последние достижения в области генерации потенциалов, для которых уравнение Шредингера имеет точное решение. Подробно рассмотрено обобщение преобразования Дарбу на нестационарное уравнение Шредингера. Сформулировано суперсимметричное обобщение нестационарного уравнения Шредингера. Рассмотрены варианты, соответствующие точной и спонтанно нарушенной суперсимметрии. В качестве примеров получены новые точно решаемые нестационарные потенциалы. Стационарное преобразование Дарбу рассматривается как частный случай введенного преобразования. Получены семейства изоспектральных потенциалов со спектрами гармонического осциллятора и водородоподобного атома. Показана эффективность предлагаемых методов для описания когерентных состояний преобразованных гамильтонианов.

One discuss recent developments in the domain of the generation of potentials for which the Schrödinger equation has an exact solution. Detailed consideration of the generalisation of the Darboux transformation for the case of the time-dependent Schrödinger equation is given. The supersymmetric generalisation of the nonstationary Schrödinger equation is formulated. As an example new time-dependent exactly solvable potentials are generated. Stationary Darboux transformation is treated as a particular case of new transformation. Families of isospectral potentials with the spectra of harmonic oscillator and hydrogenlike atom are obtained. The effectiveness of elaborated methods for the investigation of the coherent states of transformed Hamiltonians is demonstrated.

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из основных способов решения дифференциальных уравнений, основанный на их приведении к уравнениям, решения которых известны, имеет длительную историю. Началом ее, по-видимому, можно считать работы Куммера [1] и Лиувилля [2], где была решена задача о приведении дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами к уравнению наперед заданного вида. Использованное ими преобразование, известное с тех пор как преобразование Куммера — Лиувилля, является наиболее общим преобразованием, сохраняющим линейность и порядок уравнения [3] (см. также [4]). Современное систематическое изложение имеющихся здесь результатов можно найти в [4]. Применение этого преобразования к уравнению Шредингера имеет свою специфику. Наиболее полное исследование уравнений Шредингера, сводящихся к уравнению для гипергеометрических функций, содержится в работах [5].

Преобразования, при которых возрастает порядок уравнения, исследовались Мутардом [6] и Имшенецким [7]. Систематическое их исследование впервые предпринял Дарбу [8], после чего эти преобразования стали носить его имя. Впоследствии они неоднократно переоткрывались. Так, известный после работ Шредингера [9] и систематически изученный Инфельдом и Холлом [10,11] метод факторизации является, по сути, другой формулировкой преобразования Дарбу (обсуждение см. в [12]). Суперсимметричная квантовая механика, впервые введенная Виттеном [13], использует преобразования, сплетающие отдельные компоненты супергамильтониана, являющиеся преобразованиями Дарбу исходного уравнения Шредингера [14]. Отметим также интегральные преобразования Абрагама — Мозеса — Пюрсея [15—17], применяющие методы обратной задачи квантовой теории рассеяния [18] для генерации точно решаемых потенциалов одномерного стационарного уравнения Шредингера. В наиболее важном и практически единственном случае, когда можно получить решение уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко [19,20] в замкнутом виде (случай вырожденного ядра), эти преобразования эквивалентны частному случаю обобщенных преобразований Дарбу [12,21,22].

Этот факт приводит, в частности, к тому, что ряд результатов, получаемых методом обратной задачи рассеяния, можно воспроизвести при помощи преобразования Дарбу. Такой подход имеет определенные преимущества вследствие дифференциального характера данного преобразования. Особенно перспективным может оказаться совместное использование качественных методов управления спектрами, развитых в [23] на основе методов обратной задачи рассеяния, с преобразованием Дарбу, позволяющим достаточно просто получать решения преобразованного уравнения Шредингера.

Отметим, что метод преобразования Дарбу активно развивается в последнее время. В работе [24] рассмотрено гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными, в [25,26] подробно рассмотрено преобразование Дарбу второго порядка для одномерного и двумерного стационарных уравнений Шредингера, а работы [27—29] посвящены исследованию преобразования Дарбу в связи с проблемой рассеяния в квантовой механике. Работы [30—32] посвящены развитию этого метода для нестационарного одномерного уравнения Шредингера, впервые введенного в [33] в связи с решением уравнения Кадомцева — Петвиашвили (см. также [34]). Рассмотрим эти вопросы более подробно.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим уравнение Шредингера для частицы с потенциальной энергией $-V_0(x,t)$:

$$(i\partial_t - h_0)\,\psi(x,t) = 0, \qquad h_0 = -\partial_x^2 - V_0(x,t), \qquad \partial_t = \partial/\partial t,$$
$$\partial_x^2 = \partial_x \cdot \partial_x, \qquad x \in [a,b]. \tag{1}$$

Будем говорить, что оператор $\hat{L}$, определенный на решениях уравнения (1), является оператором преобразования для этого уравнения, если он удовлетворяет операторному уравнению

$$\hat{L}(i\partial_t - h_0) = (i\partial_t - h_1)\,\hat{L}, \tag{2}$$

где $h_1 = -\partial_x^2 - V_1(x,t)$ — преобразованный гамильтониан. Оператор $\hat{L}$, определяемый уравнением (2), преобразует всякое решение $\psi(x,t)$ уравнения (1) в решение $\varphi(x,t) = \hat{L}\psi(x,t)$ преобразованного уравнения Шредингера:

$$(i\partial_t - h_1)\,\varphi(x,t) = 0, \qquad x \in [a,b]. \tag{3}$$

Обозначим T_0 и T_1 — линейные пространства решений уравнений (1) и (3) соответственно. Если для операторов, действующих в пространствах T_0 и T_1, определена операция сопряжения (мы ее будем обозначать знаком $(+)$), обладающая свойством $(AB)^+ = B^+A^+$, относительно которой операторы Шредингера $i\partial_t - h_{0,1}$ самосопряжены: $(i\partial_t - h_{0,1})^+ = i\partial_t - h_{0,1}$, то из (2) следует, что

$$(i\partial_t - h_0)\,\hat{L}^+ = \hat{L}^+(i\partial_t - h_1). \tag{4}$$

Оператор $\hat{L}^+$ осуществляет в этом случае преобразование в обратном направлении, то есть от решений уравнения (3) к решениям уравнения (1). Произведение операторов $\hat{L}^+\hat{L}$ будет, очевидно, преобразовывать решения уравнения (1) в другие его решения и, следовательно, будет являться оператором симметрии этого уравнения. Совершенно аналогично $\hat{L}\hat{L}^+$ будет оператором симметрии уравнения (3).

Если $\hat{L}$ является дифференциальным относительно переменных x и t оператором, то, решая уравнение (2) на пространстве T_0, можно в нем заменить $i\partial_t$ на h_0. Оператор $\hat{L}$, следовательно, можно без ущерба считать дифференциальным оператором по переменной x, коэффициенты которого являются функциями переменных x и t.

Дифференциальный оператор N-го порядка по переменной x с коэффициентами, зависящими от x и t, удовлетворяющий уравнению (2), будем называть *оператором преобразования Дарбу N-го порядка*. При $N = 1$ будем называть его просто *оператором преобразования Дарбу*.

Отметим, что класс операторов, определяемых только соотношением (2), шире класса операторов, преобразующих одно решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$\partial_x(V_t + 6VV_x + V_{xxx}) = 3V_{yy} \tag{5}$$

в другое его решение и рассмотренных ранее в работах [33,34]. Этот факт можно пояснить следующими соображениями. Уравнение (5) представляет собой условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений (так называемое представление Лакса, см., например, [35]):

$$B^{(0)}\psi(x, y, t) = 0, \qquad B^{(0)} = i\partial_y + \partial_x^2 + V^{(0)},$$

$$A^{(0)}\psi(x, y, t) = 0, \qquad A^{(0)} = \partial_t + 4\partial_x^3 + 6V^{(0)}\partial_x + 3V^{(0)} + 3iw^{(0)}, \tag{6}$$

наложенное на функцию $V^{(0)} = V^{(0)}(x, y, t)$. Уравнение (6) является нестационарным уравнением Шредингера, в котором роль времени играет переменная y. Если теперь, следуя Захарову и Шабату [36], найти оператор L, который участвует одновременно в двух соотношениях сплетения:

$$LB^{(0)} = B^{(1)}L, \qquad LA^{(0)} = A^{(1)}L, \tag{7}$$

где $B^{(1)}$ и $A^{(1)}$ отличаются от $B^{(0)}$ и $A^{(0)}$ лишь заменой $V^{(0)}$ на $V^{(1)}$ и $w^{(0)}$ на $w^{(1)}$, то система уравнений

$$B^{(1)}\varphi = 0, \qquad A^{(1)}\varphi = 0, \qquad \varphi = L\psi$$

будет совместной, и функция $V = V^{(1)}(x, y, t)$ будет решением уравнения (5). Отсюда ясно, что, отказавшись от условия (7), мы расширяем класс операторов L.

2.1. Преобразование первого порядка. Рассмотрим вначале случай $N = 1$: $\hat{L} = L_0(x, t) + L_1(x, t)\,\partial_x$. Считая операторы дифференцирования различных порядков линейно независимыми, из уравнения (2) получим систему уравнений на функции L_0, L_1 и разность потенциалов $A(x, t) = V_1(x, t) - V_0(x, t)$:

$$L_{1x} = 0, \quad iL_{1t} + 2L_{0x} = -AL_1, \quad L_1V_{0x} - iL_{0t} - L_{0xx} = AL_0. \tag{8}$$

Если это не вызовет недоразумений, аргументы у функций с целью облегчения записи указывать не будем.

Вводя новую функцию $u(x, t)$ при помощи равенства $u_x/u = -L_0/L_1$, можно один раз проинтегрировать систему (8). При этом для функции u получим уравнение

$$iu_t + u_{xx} + (V_0 - C(t))\, u = 0.$$

Функция $L_1 = L_1(t)$ остается произвольной, а отношение $r = L_0/L_1$ не зависит от $C(t)$ и, следовательно, может быть вычислено при $C(t) \equiv 0$. Функция u будет в этом случае каким-либо решением уравнения (1). Для разности потенциалов система (8) приводит к выражению $A = i(\ln L_1)_t + 2(\ln u)_{xx}$. Произволом в выборе функции $L_1(t)$ можно воспользоваться так, чтобы обеспечить вещественность разности потенциалов A. Условие ее вещественности, записанное в виде $i(\ln |L_1|^2)_t = (2\bar{r}_x - r_x)$ (чертой обозначаем комплексное сопряжение), приводит к следующему условию для функции u:

$$(\ln u/\bar{u})_{xxx} = 0. \tag{9}$$

Если функцию L_1 выбрать вещественной, то она определяется функцией u:

$$L_1 = \exp\, [2 \int dt\, \mathrm{Im}\, (\ln u)_{xx}], \tag{10}$$

а для разности потенциалов получается обычное для преобразования Дарбу выражение

$$A = (\ln |u|^2)_{xx}. \tag{11}$$

Для оператора преобразования Дарбу имеем окончательное выражение

$$\hat{L} = L_1(-u_x/u + \partial_x) = L_1 u^{-1} \begin{vmatrix} u & 1 \\ u_x & \partial_x \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Операторные определители здесь и далее будем считать дифференциальными операторами, которые получаются при разложении определителя по последнему столбцу с функциональными коэффициентами, записанными перед операторами дифференцирования. Подчеркнем, что функция u, удовлетворяющая исходному уравнению Шредингера, полностью определяет оператор преобразования (12) и разность потенциалов (11). Будем называть систему функций, полностью определяющую оператор преобразования и преобразованное уравнение Шредингера, *функциями преобразования*. Функция u является, таким образом, функцией преобразования для оператора преобразования Дарбу первого порядка.

Из формулы (12) следует, что $\hat{L}u = 0$. Тем не менее, решению $\psi = u$ исходного уравнения Шредингера можно сопоставить нетривиальное решение нового уравнения. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при выполнении условия (9) и выборе функции $L_1(t)$ в виде (10) решением уравнения (3) будет функция

$$v = 1/[L_1(t)\bar{u}]. \tag{13}$$

Условие (9) является дополнительным условием на решение $\psi = u$ уравнения Шредингера (1). Поэтому в общем случае могут существовать такие потенциалы $V^{(0)}(x, t)$, для которых уравнение Шредингера не имеет ни одного решения, удовлетворяющего этому условию. Однако можно установить общий вид потенциала $V = V^{(0)}$, уравнение Шредингера для которого имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию (9). Для этого будем искать функцию u в виде $u = R \exp(i\Phi)$, $\Phi = x^2\dot{f}/(2f) + x\ddot{s}/(2f^2) + \alpha$, где произвольные вещественнозначные функции f, s и α не зависят от переменной x и точкой обозначена производная по t. Подставляя $\psi = u$ в исходное уравнение (1), получим систему уравнений на функции R и Φ. Первое из них определяет общий вид функции R: $R = fP(\xi)$, $\xi = f^2x + s$, где $P(\xi)$ — произвольная вещественнозначная функция одной переменной, а второе является определяющим для потенциала V:

$$V = \frac{3\dot{f}^2 - f\ddot{f}}{2f^2}x^2 + \frac{4\dot{f}\dot{s} - f\ddot{s}}{2f^3}x + \frac{\dot{s}^2}{4f^4} - \dot{\alpha} - f^4\frac{P''}{P}, \tag{14}$$

где $P'' = d^2P/d\xi^2$.

В частном случае, когда произвольные функции выбраны следующим образом:

$$s = -x_0f^2, \qquad f^2 = [\gamma_0^2(t - t_0)^2 + 1]^{-1/2}, \qquad \dot{\alpha} = (\log f)_{tt}x_0^2/2,$$

где x_0, t_0 и γ_0 — произвольные вещественные постоянные, и в качестве функции P выбрано вещественное решение уравнения

$$P'' + (U(\xi) - \gamma_0^2\xi^2/4)\,P = 0,$$

где $U(\xi)$ — произвольная вещественнозначная функция одной переменной, потенциал V принимает вид

$$V = \frac{1}{\gamma^2(t - t_0)^2 + 1}\,U\left(\frac{x - x_0}{[\gamma^2(t - t_0)^2 + 1]^{1/2}}\right). \tag{15}$$

Именно такой потенциал получен в работе [37] как потенциал, допускающий существование новых вещественных решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили (5). Подчеркнем здесь, что уравнение Шредингера с потенциалом вида (14) или (15) может иметь решения, не удовлетворяющие условию (9).

2.2. Преобразование высших порядков. Для оператора преобразования Дарбу второго порядка соответствующая система уравнений имеет более сложный вид. В отличие от предыдущего случая здесь не удалось ее проинтегрировать в полной мере. В работе [30] установлено, что уравнения для коэффициентов оператора преобразования допускают решение, которое в компактном виде записывается следующим образом:

$$\hat{L}_{02} = L_{02}(t)W^{-1}(u_1, u_2)\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 1 \\ u_{1x} & u_{2x} & \partial_x \\ u_{1xx} & u_{2xx} & \partial_x^2 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

где u_1, u_2 — произвольные линейно независимые решения исходного уравнения Шредингера. Через $W(u_1, u_2,\ldots, u_N)$ мы будем обозначать определитель Вронского (вронскиан) функций $u_1, u_2,\ldots, u_N$.

При выполнении условия

$$\left[\ln \frac{W(u_1, u_2)}{\overline{W}(u_1, u_2)}\right]_{xxx} = 0 \tag{17}$$

функцию $L_{02}(t)$ можно выбрать вещественной

$$L_{02}(t) = \exp\,(2\int dt\ \mathrm{Im}\ [(\ln W(u_1, u_2)]_{xx}), \tag{18}$$

а разность потенциалов нового и исходного уравнений Шредингера будет вещественнозначной функцией

$$A_{02} = [\ln |W(u_1, u_2)|^2]_{xx}. \tag{19}$$

Используя функции преобразования u_1 и u_2, мы можем совершить два последовательных преобразования Дарбу, определяемых операторами $\hat{L}_{01}$ и $\hat{L}_{12}$. Функцией преобразования при втором преобразовании будет та функция, в которую перейдет u_2 после первого преобразования, то есть

$$v_2 = \hat{L}_{01}u_2 = L_{01}(t)(-u_2u_{1x}/u_1 + u_{2x}). \tag{20}$$

Через v_1 обозначим решение нового уравнения Шредингера, соответствующее функции преобразования u_1: $v_1 = 1/[L_{01}(t)\,\overline{u_1}]$. Предполагаем, что функция преобразования u_1 удовлетворяет условию (9), а функция $L_{01}(t)$ вычисляется по формуле (10). Решения промежуточного уравнения Шредингера, $\chi(x, t)$, с потенциалом, отличающимся от потенциала уравнения (1) на функцию A_{01}, вычисляемую по формуле (11), в которой u следует заменить на u_1, находим при помощи оператора преобразования (12):

$$\chi = \hat{L}_{01}\psi = L_{01}(t)(-\,\psi u_{1x}/u_1 + \psi_x). \tag{21}$$

Повторное преобразование Дарбу $\hat{L}_{12}$ решений χ (21) имеет тот же вид (12). При этом получим

$$\varphi = \hat{L}_{12}\,\chi = L_{12}(t)\,(-\,\chi v_{2x}/v_2 + \chi_x). \tag{22}$$

Функция (22) является решением уравнения Шредингера с потенциалом, отличающимся от потенциала предыдущего уравнения на функцию

$$A_{12} = -\,i(\ln L_{12})_t + 2(\ln v_2)_{xx}.$$

Используя тот факт, что решения v_2 и χ выражаются через решения u_2 и ψ исходного уравнения по формулам (20) и (21), можно полностью избавиться от решений промежуточного уравнения Шредингера и выразить решения φ (22) нового уравнения через решения уравнения (1). При этом получим для φ следующее выражение:

$$\varphi = \hat{L}_{02}\psi = \hat{L}_{12}\hat{L}_{01}\psi = L_{02}(T)\;W(u_1, u_2, \psi)/W(u_1, u_2); \tag{23}$$

где $L_{02}(t) = L_{01}(t)L_{12}(t)$. Разность потенциалов для полученного и исходного уравнений будет иметь вид

$$A_{02} = A_{01} + A_{12} = -\,i(\ln L_{02})_t + 2[\ln W(u_1, u_2)]_{xx}. \tag{24}$$

Произволом в выборе функции $L_{02}(t)$ можно воспользоваться, чтобы потребовать вещественности функции A_{02}. Условие ее вещественности имеет вид (17), и если функция L_{02} выбрана согласно формуле (18), то выражение для разности потенциалов (24) совпадет с (19), а функция φ (23) получится путем применения оператора (16) к решению ψ уравнения (1). Отсюда ясно, что формулы (16) и (19) дают реализацию оператора преобразования Дарбу второго порядка в виде произведения операторов преобразования Дарбу первого порядка.

Из (23) следует, что при $\psi = u_1, u_2$ функция φ обращается в нуль. Однако непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что если функция L_{02} вычисляется по формуле (18), то имеются два линейно независимых решения φ_1 и φ_2 уравнений Шредингера с потенциалом

$$V_2 = V_0 + A_{02} = V_0 + i(\ln L_{02})_t + 2[\ln \overline{W}(u_1, u_2)]_{xx} =$$

$$= V_0 + [\ln |W(u_1, u_2)|^2]_{xx},$$

$$\varphi_1 = \frac{\bar{u}_1}{L_{02}\overline{W}(u_1, u_2)}, \qquad \varphi_2 = \frac{\bar{u}_2}{L_{02}\overline{W}(u_1, u_2)}. \tag{25}$$

Отметим, что решения u_1 и u_2 исходного уравнения (1) полностью определяют оператор преобразования (16) и разность потенциалов A_{02} и являются, таким образом, функциями преобразования для оператора преобразования Дарбу второго порядка $\hat{L}_{02} = \hat{L}_{12}\hat{L}_{01}$.

Если нас не интересует промежуточное уравнение Шредингера, то требовать вещественности его потенциала не имеет смысла. Единственным ограничением на функции преобразования u_1 и u_2 будет условие (17). Если нам необходимо также и промежуточное уравнение Шредингера, определяемое функцией преобразования u_1, то эта функция должна удовлетворять условию (9).

Необходимо отметить, что, поскольку найденное решение для коэффициентов оператора преобразования второго порядка не является общим решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, остается открытым вопрос о том, всякий ли дифференциальный оператор преобразования второго порядка допускает факторизацию операторами преобразования первого порядка. Аналогичный вопрос для стационарного уравнения Шредингера может быть полностью решен. Мы отложим его рассмотрение до п.3.1 данной работы.

Формулы (16)—(19) очевидным образом обобщаются на цепочку N преобразований Дарбу. Для этого достаточно иметь N линейно независимых решений уравнения (1), $u_1, u_2, \ldots, u_N$, и заменить вронскиан второго порядка на вронскиан N-го порядка $W(u_1, u_2) \to W(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, а в формуле (16) операторный определитель третьего порядка — на соответствующий определитель $N + 1$-го порядка. Если, кроме того, необходимо знать все промежуточные уравнения Шредингера и их решения, то условие (17) необходимо наложить на все вронскианы $W(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, считая $W(u) \equiv u$.

Отметим также, что, кроме вещественности, на разности потенциалов $A_{pq}(x)$, $p < q \le N$ разумно наложить условие регулярности на интервале $R = [a, b]$, на котором потенциал $V_0(x, t)$ исходного уравнения (1) непрерывен по переменной x. Потенциал преобразованного уравнения (3) в этом случае будет непрерывной функцией на том же интервале R. Из формулы (19) ясно, что для этого достаточно потребовать сохранения знака вронскиана $W(u_1, u_2,\ldots, u_N)$, а для цепочки преобразований это условие нужно наложить на все вронскианы $W(u_{p+1}, u_{p+2},\ldots, u_q)$, $p < q \le N$. Для некоторых частных случаев в дальнейшем мы проанализируем это условие подробнее.

2.3. Связь с алгеброй симметрии. Вернемся вновь к рассмотрению оператора преобразования $\hat{L}$ первого порядка. Оператор вида (12) с функцией $L_1(t)$, вычисляемой согласно (10), можно построить, только если функция преобразования u удовлетворяет условию (9). Кроме того, оператор $\hat{L} + \hat{L}$ второго порядка по ∂_x является оператором симметрии уравнения (1). Операторы симметрии первого порядка по ∂_x и ∂_t для уравнения (1) хорошо известны. Они образуют (вещественную) алгебру Ли. Максимальная вещественная алгебра $sch(1.1)$ соответствует потенциалу, являющемуся полиномом второго порядка по x с произвольными постоянными коэффициентами. Если этот полином имеет отличный от нуля коэффициент перед x^2, то мы будем иметь дело с линейным гармоническим осциллятором с постоянной частотой. Случай, когда этот коэффициент равен нулю, но отличен от нуля коэффициент при x, соответствует частице в однородном внешнем поле. Если оба эти коэффициента равны нулю, то рассматриваемая частица будет свободной. Во всех случаях алгеброй симметрии уравнения Шредингера является шестимерная вещественная алгебра $sch(1.1)$ [38]. Для других потенциалов алгеброй симметрии уравнения Шредингера может быть подалгебра этой алгебры. Поэтому мы рассмотрим более подробно алгебру $sch(1.1)$ и, в частности, ее представление, соответствующее свободной частице [38].

Базис алгебры $sch(1.1)$ составляют следующие операторы:

$$K_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x - t/2 + ix^2/4, \qquad K^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + 1/2,$$

$$K_{-2} = \partial_t, \quad K_1 = -t\partial_x + ix/2, \quad K_0 = i, \quad K_{-1} = \partial_x. \tag{26}$$

Всякий нетривиальный оператор симметрии второго порядка уравнения (1) с $V_0(x, t) = 0$ принадлежит пространству операторов второго порядка обертывающей алгебры алгебры $sch(1.1)$ (то есть уравнение (1) является уравнением класса I по терминологии [38]).

Алгебра $sch(1.1)$ является полупрямой суммой алгебры Вейля $w_1 = \mathrm{span}\,(K_1, K_0, K_{-1})$ (через span обозначим линейную оболочку над полем $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ в зависимости от того, хотим ли мы получить комплексное или вещественное линейное пространство, что обычно ясно из контекста) и алгебры $sl(2, R)$, изоморфной алгебре $su(1.1) = \mathrm{span}\,(K_2, K^0, K_{-2})$. Отметим, что на решениях уравнения (1) (то есть в пространстве T_0) имеет место равенство $\partial_t = i\partial_{xx}$. Алгебра $su(1.1)$, следовательно, может быть реализована дифференциальными операторами второго порядка по переменной x, в то время как алгебра w_1 по-прежнему остается алгеброй операторов порядка не выше первого. Кроме того, базис операторов второго порядка по ∂_x обертывающей алгебры алгебры w_1 (то есть операторы вида K_1^2, K_{-1}^2 и $K_1K_{-1} + K_{-1}K_1$) принадлежит алгебре $su(1.1)$, в чем не сложно убедиться непосредственными вычислениями. Отсюда ясно, что все операторы симметрии второго порядка по ∂_x, действующие в пространстве T_0, ограничиваются элементами алгебры $su(1.1)$.

Представление группы Вейля W_1 в пространстве аналитических на всей оси функций дается выражением [38]:

$$T(u, v, \rho)\,\Phi(t, x) = \exp\,[i\rho + i(uv + 2ux - u^2t)/4]\,\Phi(t, x + v - ut). \qquad (27)$$

Соответствующее представление группы $SL(2, R)$ имеет вид

$$T(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\,\Phi(t, x) =$$

$$= (\delta + t\beta)^{-1/2} \exp\left[\frac{ix^2\beta}{4(\delta + t\beta)}\right] \Phi\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}, \frac{x}{\delta + t\beta}\right), \qquad (28)$$

где u, v, ρ и α, β, γ, δ $(\alpha\delta - \gamma\beta = 1)$ — групповые параметры.

Из этих выражений следует, что если функция $\Phi(t, x)$ удовлетворяет условию (9), то этому условию также удовлетворяют и преобразованные функции (27) и (28). Иными словами, соотношение (9) инвариантно относительно групповых преобразований из группы Шредингера $SCH(1.1)$. Этим свойством можно воспользоваться и классифицировать пространство $sch(1.1)$ относительно присоединенного представления Ad группы $SCH(1.1)$. Пространство $sch(1.1)$ разбивается при этом на пять орбит с представителями [38] $O_1 = K_{-2} - K_2$, $O_2 = K^0$, $O_3 = K_{-2} - K_1$, $O_4 = K_{-2}$, $O_5 = K_{-1}$. Представитель O_5 является оператором первого порядка по ∂_x, и, кроме того, в T_0 выполняется равенство $iK_{-1}^2 = K_2$. Поэтому мы этот представитель рассматривать не будем.

Собственные функции операторов $O_1,\dots, O_4$ находим методом R-разделения переменных [38]. Решением уравнения

$$(K_{-2} - K_2)\,\psi_\lambda = i\lambda\psi_\lambda$$

является функция

$$\psi_\lambda(x, t) = (1 + t^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i}{4}x^2t(1 + t^2)^{-1} + i\lambda \operatorname{arctg} t\right] Q_\lambda(z),$$

$$z = x/\sqrt{1 + t^2}, \tag{29}$$

где $Q_\lambda(z)$ — функция параболического цилиндра, удовлетворяющая уравнению $Q_\lambda''(z) - (z^2/4 + \lambda)\, Q_\lambda(z) = 0$. Отметим, что функция (29) удовлетворяет условию (9) при всех вещественных λ. Кроме того, выбрав функцию преобразования в виде

$$u = \psi_{-1/2}(x, t) = (1 + t^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{x^2(it - 1)}{4(1 + t^2)} - \frac{i}{2}\operatorname{arctg} t\right],$$

найдем

$$\hat{L} = L_1(t)[x(1 - it)\,(2 + 2t^2)^{-1} + \partial_x], \qquad L_1(t) = (1 + t^2)^{1/2}$$

и $O_1 = i(\hat{L}^+\hat{L} - 1/2)$.

Собственные функции оператора K^0:

$$\psi_\lambda(x, t) = t^{i\lambda/2 - 1/4} \exp\left(\frac{i}{8t}x^2\right) Q_{i\lambda}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\,e^{-i\pi/4}\right), \qquad K^0\psi_\lambda = i\lambda\psi_\lambda$$

не при всех значениях λ удовлетворяют условию (9). Отметим, что в тех частных случаях, когда эта функция удовлетворяет условию (9), она также является собственной функцией некоторого другого оператора симметрии, который и факторизуется операторами преобразования, построенными при помощи этой функции. Например, взяв функцию преобразования в виде $u = t^{-1/2}\exp(ix^2/(4t))$, $K^0u = 0$, найдем $\hat{L} = ix/2 + t\partial_x$. Откуда $\hat{L}^+\hat{L} = iK_2$ и $K_2u = 0$. Собственные же функции оператора K_2, $\psi_\alpha(x, t) = t^{-1/2} \times$ $\times \exp\left[\frac{i}{4t}(x^2 - \alpha^2) - \frac{\alpha x}{2t}\right]$ удовлетворяют условию (9) при всех вещественных значениях α. Операторы преобразования, построенные при помощи этих функций, факторизуют оператор $K_2 = -i(\hat{L}^+\hat{L} + \alpha^2/4)$ и являются его собственными функциями $K_2\psi_\alpha(x, t) = -i\alpha^2/4 \cdot \psi_\alpha(x, t)$.

Рассмотрим теперь оператор O_3. Его собственные функции

$$\psi_\lambda(x, t) = \exp\,[it(x/2 - t^2/6 - \lambda)]\; Ai(2^{-1/3}x - 2^{-4/3}t^2 - 2^{2/3}\lambda),$$

где $Ai(z)$ — функция Эйри, удовлетворяющая уравнению $Ai''(z) = zAi(z)$, также удовлетворяет условию (9) при всех вещественных λ. Оператор преобразования Дарбу, построенный при помощи этой функции, осуществляет факторизацию оператора $O_3 = K_{-2} - K_1 = -i(\hat{L}^+\hat{L} + \lambda)$.

Последний оператор $K_{-2} = \partial_t = i\partial_x^2$ имеет собственные функции

$$\psi_\lambda(x, t) = \exp\,(i\lambda^2 t + \lambda x), \qquad K_{-2}\psi_\lambda = i\lambda^2\psi_\lambda,$$

которые также удовлетворяют условию (9) при всех значениях параметра λ и факторизуют этот оператор $K_{-2} = -i(\hat{L}^+\hat{L} - \lambda^2)$.

Таким образом, путем непосредственных вычислений нами установлена справедливость следующего утверждения. Всякий оператор $g \in sch(1.1)$, ограничением которого на пространство T_0 является оператор второго порядка по ∂_x (∂_t исключено), все собственные функции которого, соответствующие чисто мнимым собственным значениям, удовлетворяют условию (9), допускает факторизацию операторами преобразования Дарбу $\hat{L}$ вида $g = -i(\hat{L}^+\hat{L} + \alpha)$ с функцией преобразования u, удовлетворяющей уравнению $igu = \alpha u$, $\alpha \in \mathbb{R}$; оператор L определяется соотношениями (12) и (10).

Кроме того, поскольку в каждом из рассмотренных случаев мы имели дело с решениями уравнения (1) в R-разделенных переменных, то можно утверждать, что в качестве функций преобразования могут выступать только такие решения. Аналогичный результат для стационарного уравнения Шредингера в двумерном пространстве получен в работах [24,43,39].

Отметим также работу [40], в которой рассмотрена возможность факторизации операторов симметрии для гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой. Как мы видим, такой подход практически эквивалентен нестационарному преобразованию Дарбу. Преимуществом развиваемого нами подхода является то, что соотношения (9)—(12) дают ясный конструктивный способ нахождения операторов, осуществляющих факторизацию.

2.4. Вопросы обратимости. Если мы ограничиваемся лишь такими операторами преобразования высших порядков, которые являются произведениями операторов первого порядка, то достаточно рассмотреть обратимость операторов первого порядка.

Оператор первого порядка $\hat{L}$ (12) имеет нетривиальное ядро $\ker \hat{L} = \mathrm{span}\,(u)$. Поэтому для определения обратного ему оператора необходимо ограничить действие оператора $\hat{L}$ некоторым подпространством. Кроме того, будем искать обратный оператор в классе линейных операторов, не зависящих от функций, на которые они действуют. Это условие также может привести к ограничению пространства, на котором следует рассматривать действие оператора $\hat{L}$.

Интуитивно ясно, что оператор, обратный дифференциальному, должен быть интегральным. Рассматривая действие оператора $\hat{L}$ (12) на некоторую произвольную функцию $f(x)$ (положим временно $L_1(t) = 1$) как дифференциальное уравнение относительно $f(x)$,

$$F(x) = \hat{L}f(x) = -f(x)u_x/u + f_x(x),$$

определяем эту функцию

$$f(x) = u\left(C + \int\limits_{x_0}^{x} u^{-1}F(x)\,dx \right). \tag{30}$$

Функция u, фигурирующая в этом соотношении, должна быть решением уравнения (1), а функция F, желательно, должна удовлетворять уравнению (3). Чтобы правая часть соотношения (30) была выражена через решения одного и того же уравнения (3), необходимо, согласно равенству (13), произвести в нем замену $u \to v = (L_1\bar{u})^{-1}$. Отметим, что производная по x от выражения, стоящего в скобках равенства (30), пропорциональна в этом случае произведению vF. Кроме того, при определении обратного оператора необходимо учесть зависимость всех функций от времени.

Для каждых v и $\varphi \in T_1$ определим функцию $w = w(\bar{v}, \varphi) = w(x, t)$ при помощи равенств

$$w_x(\bar{v}, \varphi) = \bar{v}\varphi,$$

$$w_t(\bar{v}, \varphi) = i(\bar{v}\varphi_x - \bar{v}_x\varphi).$$

Используя уравнение (3), устанавливаем непротиворечивость этих равенств $w_{xt} = w_{tx}$. Функция w, следовательно, может быть вычислена двумя различными способами:

$$w = i\int\limits_{t_0}^{t} (\bar{v}\varphi_x - \bar{v}_x\varphi)\,dt + C_1(x), \tag{31}$$

$$w = \int_{x_0}^{x} \bar{v}\,\varphi\, dx + C_2(t), \tag{32}$$

где функции C_1 и C_2 определяются условиями

$$C_1'(x) = (\bar{v}\varphi)_{t = t_0},$$

$$C_2'(t) = i(\bar{v}\varphi_x - \bar{v}_x\varphi)_{x = x_0}.$$

Здесь штрихом обозначена производная функции по ее аргументу. Зафиксируем функцию $v \in T_1$ и, считая, что она удовлетворяет условию (9), назовем *функцией преобразования*.

Ясно, что множество функций φ, для которых $C_1'(x) = 0$ (или $C_2'(t) = 0$), образует линейное пространство. Обозначим $T_{11} = \{\varphi : C_1'(x) = 0\}$ и $T_{12} = \{\varphi : C_2'(t) = 0\}$. Определим теперь линейный оператор M при помощи равенства

$$\psi(x, t) = M\varphi(x, t) = [L_1(t)\bar{v}]^{-1}\, w(\bar{v}, \varphi), \tag{33}$$

в котором функция w определена соотношением (31), когда $\varphi \in T_{11}$, и (32) при $\varphi \in T_{12}$, а функция $L_1(t)$ вычисляется по формуле (10), в которой нужно произвести замену $u \to \bar{v}^{-1}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция (33) при этих условиях удовлетворяет уравнению (1). Решением этого уравнения будет также функция $u = (L_1\bar{v})^{-1}$.

Если функции преобразования u и v уравнений (1) и (3), используемые в формулах (12) и (33), подчинить условию $v = (L_1\bar{u})^{-1}$, то функция $L_1(t)$, фигурирующая в этих соотношениях, будет одной и той же. Кроме того, очевидно, что образ T_{01} пространства T_{11} (или T_{12}), индуцированный оператором M, то есть $T_{01} = \{\psi : \psi = M\varphi,\ \varphi \in T_{11}\}$ (или $T_{02} = \{\psi : \psi = M\varphi,\ \varphi \in T_{12}\}$), будет, в силу линейности оператора M, линейным подпространством в T_0. Ограничив действие оператора $\hat{L}$ на это подпространство, можно установить, что $M\hat{L}\psi = \psi,\ \forall \psi \in T_{01}$. Кроме того, устанавливаем также справедливость равенства $\hat{L}M\varphi = \varphi,\ \forall \varphi \in T_{11}$ (или T_{12}). Операторы $\hat{L}$ и M являются, таким образом, взаимно обратными.

2.5. Преобразование гильбертовых пространств. Если в пространстве T_0 существует подпространство $H_0(R)$ функций, интегрируемых по Лебегу (модуль в квадрате на интервале $R = [a, b]$ по переменной x), то в $H_0(R)$ скалярное произведение можно определить обычным образом:

$$\langle\psi_1 | \psi_2\rangle = \int_a^b \overline{\psi}_1(x, t)\, \psi_2(x, t)\, dx. \tag{34}$$

На пространстве T_0, таким образом, определяется структура сепарабельного гильбертова пространства [38]. Ограничение оператора $\hat{L}$ на пространство $H_0(R)$ будем обозначать тем же символом $\hat{L}$.

Поскольку мы считаем, что $H_0(R) \subset T_0$, то в операторах $g \in al$ (в частности, $g \in sch(1.1)$) можно заменить $i\partial_t$ на h_0. Полученные в результате операторы будут кососимметрическими на пространстве бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, а операторы ig будут существенно самосопряженными [38]. Будем предполагать, что в al существует полуограниченный оператор g_0 с чисто дискретным спектром, и его собственные функции, принадлежащие $H_0(R)$, будем нумеровать количеством их нулей $n = 0, 1, 2, \ldots$ Мы не обсуждаем здесь точную область определения операторов g, отсылая заинтересованного в этом читателя к монографии [38], в которой указаны соответствующие ссылки. Если, кроме того, g_0 удовлетворяет условию факторизации, обсуждавшемуся в п.1.3, то его собственные функции можно использовать в качестве функций преобразования. Единственной (с точностью до постоянного множителя) функцией преобразования из пространства $H_0(R)$, приводящей к регулярной разности потенциалов (11), будет $u = \psi_0(x, t)$. За пределами пространства $H_0(R)$ существуют более богатые возможности для выбора функций преобразования. При этом, считая спектр оператора ig_0 ограниченным, например, снизу значением ε_0, мы должны выбирать в качестве функций преобразования собственные функции ψ_α оператора ig_0 $(ig_0\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha)$ с $\alpha < \varepsilon_0$. Функция $[\psi_\alpha(x, t)]$ будет обращаться в бесконечность на одном или обоих концах интервала R.

Выберем $u = \psi_\alpha(x, t)$ в качестве функции преобразования. Тогда, согласно свойству факторизации, $g_0 = -i(\hat{L}^+\hat{L} - \alpha)$ или $\hat{L}^+\hat{L} = ig_0 + \alpha$. Если мы теперь рассмотрим скалярное произведение векторов ψ и $\hat{L}^+\hat{L}\psi' \neq 0$ из $H_0(R)$, то, используя косоэрмитовость оператора $\partial_x[(\partial_x)^\dagger = -\partial_x]$ относительно скалярного произведения (34), приводящую к тому, что введенная ранее операция сопряжения для оператора $\hat{L}$ совпадает с операцией эрмитова сопряжения относительно скалярного произведения (34), то есть $\hat{L}^+ = \hat{L}^\dagger$, можем записать $\langle\psi | \hat{L}^+\hat{L}\psi'\rangle = \langle\hat{L}\psi | \hat{L}\psi'\rangle = \langle\varphi | \varphi'\rangle$. Отсюда видно, что если в качестве ψ и ψ' выбираются собственные функции оператора ig_0, являющиеся также собственными функциями оператора $\hat{L}^+\hat{L}$, то система функций $\varphi = \hat{L}\psi$ будет ортогональной и нормируемой, а пространство $H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi,\ \psi \in H_0(R)\}$ будет являться подпространством функций, интегрируемых по модулю в квадрате на R. Определив на нем скалярное произведение таким же образом, как и в $H_0(R)$ (то есть по формуле (34)), мы получим некоторое гильбертово пространство, включенное в T_1.

Весьма важным является вопрос о полноте пространства $H_1(R)$, то есть вопрос о том, всякое ли квадратично интегрируемое решение уравнения (3) можно получить действием оператора $\hat{L}$ на некоторое квадратично интегрируемое решение уравнения (1). Этот вопрос тесно связан с проблемой взаимно однозначного соответствия векторов из T_0 и T_1.

Функция преобразования $u \in T_0$ является решением дифференциального уравнения второго порядка по x $\hat{L}^+\hat{L}u = 0$, а функция $v = (L_1\bar{u})^{-1} \in T_1$ удовлетворяет аналогичному уравнению $\hat{L}\hat{L}^+v = 0$. Каждое из этих уравнений имеет еще одно линейно независимое решение. В частности, функция

$$v' = \frac{1}{L_1\bar{u}} \int u\bar{u}\,dx = vL_1^{-2} \int \frac{dx}{v\bar{v}}\,, \tag{35}$$

обладающая свойством $\hat{L}^+v' = u$, также, очевидно, удовлетворяет уравнению (3).

Для уравнения (1) аналогичным свойством обладает функция

$$u' = uL_1^{-2} \int \frac{dx}{u\bar{u}}\,, \tag{36}$$

$\hat{L}u' = v$ и $\hat{L}^+\hat{L}u' = 0$. Несколько сложнее убедиться в том, что она является решением уравнения (1). Для этого нужно воспользоваться свойством $i(u\bar{u})_t = W_x(u, \bar{u})$ и выражением для функции $L_1(t) : i(\ln L_1)_t \doteq [\ln (u/\bar{u})]_{xx}$. Отсюда получаем выражение для интеграла

$$i \int \frac{(u\bar{u})_t}{(u\bar{u})^2}\,dx = -\frac{W(u, \bar{u})}{(u\bar{u})^2} - \frac{2iL_{1t}}{L_1} \int \frac{dx}{u\bar{u}}\,. \tag{37}$$

Используя выражение (37), прямой проверкой убеждаемся, что функция (36) является решением уравнения (1).

Представим теперь каждое из пространств T_0 и T_1 в виде прямой суммы $T_{0,1} = T_{0,1}^0 \oplus T_{0,1}^1$, где $T_0^1 = \text{span}\,(u, u') = \ker\,(\hat{L}^+\hat{L})$ и $T_1^1 = \text{span}\,(v, v') = \ker\,(\hat{L}\hat{L}^+)$. Функции u, u' и v, v' образуют базисы пространств T_0^1 и T_1^1. Из этого построения ясно, что операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}^{+}$ осуществляют взаимно однозначное соответствие между пространствами T_0^0 и T_1^0, и с их помощью мы устанавливаем соответствие между базисами пространств T_0^1 и T_1^1: $u' \to v$, $v' \to u$.

Вернемся вновь к гильбертову пространству $H_0(R)$. Пусть функция преобразования $u = \psi_0 \in H_0(R)$. Тогда, очевидно, $u' \notin H_0(R)$. Поскольку u в этом случае обращается в нуль на границах R, то u^{-1} обращается в бесконечность на границах R и, следовательно, неизмерима на R. Поэтому ни v, ни v' не принадлежат гильбертову пространству $H_1(R) \subset T_1$. Отсюда ясно, что оператор $\hat{L}$ отображает пространство $H_0^0(R) = \operatorname{span}\{\psi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ на все пространство $H_1(R)$ и, следовательно, совокупность векторов $\{\varphi_n = \hat{L}\psi_n$, $n = 1, 2, \ldots\}$ образует базис пространства $H_1(R)$. Функция $u = \psi_0$ не имеет образа в $H_1(R)$.

Пусть теперь $u \notin H_0(R)$ и обращается в бесконечность только на одном из концов интервала R, обращаясь в нуль на другом его конце. В этом случае u' также не принадлежит $H_0(R)$, поскольку ее поведение на границах интервала R совпадет с точностью до перестановки граничных точек $a \leftrightarrow b$ с поведением функции u. Очевидно, что функция u^{-1} при этом также будет неизмеримой на R, так что v, $v' \notin H_1(R)$. Операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}^{+}$ осуществляют взаимно однозначное соответствие между пространствами $H_0(R)$ и $H_1(R)$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $u \notin H_0(R)$ и обращается в бесконечность на обоих концах интервала R, так что u^{-1} будет измеримой функцией. Тогда $v = (L_1\bar{u})^{-1} \in H_1(R)$, а $v' \notin H_1(R)$. Оператор $\hat{L}$ отображает в этом случае прямую сумму $H_0(R) \oplus \operatorname{span}(u')$ в $H_1(R)$, а оператор $\hat{L}^{+}$ отображает пространство $H_1(R)$ в $H_0(R)$. Очевидно, что этот случай эквивалентен первому, если за исходное уравнение Шредингера взять (3), а за преобразованное — (1).

Подчеркнем еще раз, что мы всюду предполагали сохранение знака функции u на R.

Остановимся теперь на особенностях, которые могут возникнуть при рассмотрении преобразований высших порядков.

До настоящего времени авторам не известны преобразования N-го ($N > 1$) порядка, которые нельзя было бы представить в виде произведения

N преобразований первого порядка. Доказательств невозможности таких преобразований также нет. Фактически всякое известное преобразование N-го порядка можно рассматривать как некоторую цепочку преобразований первого порядка. Замечательным свойством такой цепочки является то, что некоторые промежуточные уравнения Шредингера могут не иметь физического смысла (потенциал становится комплекснозначной функцией или может иметь сингулярности внутри интервала R), в то время как конечное уравнение остается вполне приемлемым с физической точки зрения. Если промежуточное уравнение Шредингера нас не интересует, то мы можем допустить такого типа преобразования.

Рассмотрим некоторое решение уравнения (1) с R-разделенными переменными [38] $u_\lambda = R(x, t)u_{1\lambda}u_{2\lambda}$, полагая, что функция $u_{2\lambda}$ является собственной функцией некоторого оператора симметрии $igu_{2\lambda} = \lambda u_{2\lambda}$. Из условия $(ig)^+ = ig$ получаем $u_{2\lambda} = \bar{u}_{2\lambda}$. Использование функций u_λ и $u_{\bar{\lambda}}$ при комплексных значениях λ в качестве функций преобразования в некоторых преобразованиях приводит к комплексным потенциалам. Однако можно сформулировать условия на функции R и $u_{1\lambda}$, при которых результирующий потенциал цепочки таких преобразований будет вещественным. Для этого необходимо вычислить вронскиан $W(u_\lambda, u_{\bar{\lambda}})$ и воспользоваться соотношением (17). После чего достаточно потребовать, чтобы функции $u_{1\lambda}$ и $R(x, t)$ удовлетворяли следующим условиям:

$$u_{1\lambda x} = 0, \qquad [\ln (R(x, t)/\bar{R}(x, t))]_{xxx} = 0. \tag{38}$$

Используя решения, рассмотренные в п.1.3, соответствующие операторам $K_2 - K_{-2}$, K^0 и $K_{-2} - K_1$ алгебры $sch(1.1)$, убеждаемся, что все они удовлетворяют условиям (38).

Однократное преобразование с функцией $u_k \neq \psi_0$, $u_k \in H_0(R)$ приводит к сингулярной на R разности потенциалов, поскольку функция u в этом случае имеет нули внутри R. При повторном преобразовании возникает дополнительная возможность использования функции преобразования $u_{k+1} \in H_0(R)$, приводящей к регулярной результирующей разности потенциалов. Такая возможность связана с тем, что вронскиан $W(u_{k_1}, u_{k_2}, \dots, u_{k_N})$, определяющий результирующую разность потенциалов цепочки N преобразований Дарбу, сохраняет знак на R, если функции $u_{k_i} \in H_0(R)$, где k_i совпадает с числом нулей этих функций, выбраны так, что неравенство $(k - k_1)(k - k_2) \dots (k - k_N) > 0$ выполняется при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Это свойство для стационарных функций преобразования впервые сформулировано Крейном [41]. Оно, в частности, выполняется, если функции u_{k_i} попарно соседние. Для стационарного уравнения Шредингера последнее условие недавно обсуждалось в работах [42,12]. В этом случае $\ker \hat{L}_{0N} = \mathrm{span}\,\{u_{k_i},\ i = 1, 2,\ldots, N\}$, а пространство $H_1(R)$ полностью определяется оператором $\hat{L}_{0N}$: $H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}_{0N}\,\psi,\ \psi \in H_0(R)\}$.

2.6. Суперсимметрия нестационарного уравнения Шредингера. Суперсимметричная квантовая механика впервые появилась в работах Виттена [12] в качестве модели, иллюстрирующей спонтанное нарушение суперсимметрии на квантовом уровне. Подавляющее большинство работ в этой области (см. обзоры [43,44]) следует отнести к так называемой стационарной суперсимметричной квантовой механике. Ее нестационарное обобщение практически не развито. Авторам известна всего одна работа [32], посвященная суперсимметрии нестационарного уравнения Шредингера.

Связь суперсимметричной квантовой механики Виттена с преобразованием Дарбу отмечена в [14]. Преобразование Дарбу нестационарного уравнения Шредингера можно использовать, чтобы сконструировать его суперсимметричное обобщение.

Пусть два уравнения Шредингера с гамильтонианами h_0 и h_1 связаны между собой операторами $\hat{L}$ и $\hat{L}^+$. Рассмотрим матричный гамильтониан (супергамильтониан) $\mathcal{H} = \mathrm{diag}\,(h_0, h_1)$ и матрицы взаимно сопряженных суперзарядов

$$\mathcal{Q}_0 = \hat{L}^+\sigma^+, \qquad \mathcal{Q}_0^+ = \hat{L}\sigma^-, \qquad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Уравнения Шредингера (1) и (3) можно теперь переписать в виде одного матричного уравнения

$$(iI\partial_t - \mathcal{H})\,\Psi(x, t) = 0, \tag{40}$$

где I — единичная матрица второго порядка, и пространство столбцовых функций $\Psi(x, t)$ для каждой функции $\psi(x, t)$ определено следующим образом:

$$\Psi(x, t) = \mathrm{span}\,(\Psi_+, \Psi_-), \qquad \Psi_+(x, t) = \psi(x, t)\, e_+,$$
$$\Psi_-(x, t) = \varphi(x, t) e_-, \qquad \varphi(x, t) = \hat{L}\psi(x, t),$$

$e_\pm$ — одностолбцовые матрицы: $e_+ = (1, 0)^t$, $e_- = (0, 1)^t$ (t означает транспонирование).

Условие коммутации суперзарядов (39) с супероператором Шредингера $iI\partial_t - \mathcal{H}$ эквивалентно соотношениям сплетания (2) и (4). Используя операторы симметрии $g_0^0 = -i(\hat{L}^+\hat{L} + \alpha)$ и $g_0^1 = -i(\hat{L}\hat{L}^+ + \alpha) = g_0^0 + iL_1^2(t)A$ уравнений (1) и (3), строим оператор симметрии уравнения (40) $\mathcal{G}_0 = \mathrm{diag}\,(g_0^0, g_0^1)$. Операторы $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{Q}_0^+$ и $\mathcal{Q}_0$ образуют простейшую супералгебру $[\mathcal{Q}_0, \mathcal{G}_0] = [\mathcal{Q}_0^+, \mathcal{G}_0] = 0$, $\{\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_0^+\} = i\mathcal{G}_0 - \alpha I$, $\mathcal{Q}_0^2 = (\mathcal{Q}_0^+)^2 = 0$ и переводят одно решение уравнения (40) в другое.

Используя оператор $M = \hat{L}^{-1}$, можно построить операторы симметрии уравнения (3): $g^1 = \hat{L}g^0M$, $g^0 \in al$. Ясно, что они образуют алгебру, изоморфную алгебре al уравнения (1), и с их помощью можно построить матричные операторы симметрии $\mathcal{G}_g = \mathrm{diag}\,(g^0, g^1)$ уравнения (40), также образующие алгебру, изоморфную al.

Нечетный сектор супералгебры можно расширить нильпотентными операторами $\mathcal{Q}_g = g^0M\sigma^+$, поскольку они удовлетворяют следующим соотношениям: $\{\mathcal{Q}_g, \mathcal{Q}_0^+\} = \mathcal{G}_g$, $[\mathcal{G}_{g1}, \mathcal{Q}_{g2}] = \mathcal{Q}_{g12}$, где $g_{12} = [g_1^0, g_2^0]$ и $\{\mathcal{Q}_{g1}, \mathcal{Q}_{g2}\} = 0$, $[\mathcal{G}_g, \mathcal{Q}_0^+] = \dot{0}$. При этом элемент $\mathcal{Q}_0$, определенный в (39), будет равен $\mathcal{Q}_0 = (ig_0^0 - \alpha)\,M\sigma^+$. Кроме того, для системы нечетных ($\mathcal{Q}_g$, $\mathcal{Q}_0^+$) и четных ($\mathcal{G}_g$) элементов можно установить справедливость обобщенных тождеств Якоби, то есть эти элементы образуют супералгебру Ли.

Отметим, что при таком подходе не вполне ясно, как следует определить супергильбертово пространство, чтобы экспоненциируя эти операторы, получить представление супергруппы. Такой трудности не возникает, если ограничиться подалгеброй, образованной операторами $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_0^+$, $\mathcal{G}_0$.

Рассмотрим теперь цепочку преобразований, порожденных системой N линейно независимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_N$ уравнения (1) с регулярным на R потенциалом V_0, таких, что $ig^0u_k = \alpha_k u_k$, и вронскианы $W(u_q, u_{q+1}, \ldots, u_p)$, $q \le p = 1, \ldots, N$ сохраняют знак на R и удовлетворяют условию вещественности (17). Эти преобразования порождают цепочку эрмитовых гамильтонианов $h_0 \to h_1 \to \ldots \to h_N$, потенциалы которых регулярны на R, и цепочку операторов симметрии $g^0 \to g^1 \to \ldots \to g^N$. Каждые два соседних уравнения Шредингера и два соседних оператора симметрии g^p, g^{p+1} сплетаются операторами преобразования Дарбу первого порядка $\hat{L}_{p,\,p+1}$, $\hat{L}^+_{p,\,p+1}$ $p = 0, 1, \ldots, N-1$, вычисляемыми согласно уравнениям (10) и (12). Операторы преобразования n-го ($\le N$) порядка $\hat{L}_{p,\,p+n} = \hat{L}_{p+n-1,\,p+n,\ldots}$,

$\hat{L}_{p+1,\,p+2}\hat{L}_{p,\,p+1}$ и ему сопряженный сплетают операторы симметрии g^p, g^{p+n} и уравнения Шредингера с гамильтонианами h_p, h_{p+n} и участвуют в следующей факторизации: $\hat{L}^+_{p,\,p+n}\hat{L}_{p,\,p+n} = \prod\limits_{k=1}^{n}(ig^p - \alpha_{p+k})$, $\hat{L}_{p,\,p+n}\hat{L}^+_{p,\,p+n} = \prod\limits_{k=1}^{n}(ig^{p+n} - \alpha_{p+k})$. Такую цепочку преобразований будем называть *полностью приводимой*. Понятие приводимости цепочки преобразований Дарбу стационарного уравнения Шредингера впервые введено в работе [45]. Отметим, что преобразование Дарбу второго порядка, называемое в [45] неприводимым, соответствует комплекснозначному промежуточному потенциалу и вещественнозначному конечному потенциалу.

Мы полагаем, что неприводимыми можно также назвать преобразования, дающие сингулярные промежуточные потенциалы, но регулярный на данном интервале R конечный потенциал. Поэтому вполне естественно назвать цепочку преобразований, в которой каждый гамильтониан эрмитов, а потенциал регулярен на R, полностью приводимой.

С рассматриваемой цепочкой можно связать супергамильтониан $\mathcal{H} = i\,\mathrm{diag}\,(h_0, h_1, \ldots, h_N)$, оператор симметрии $\mathcal{G}_0 = i\,\mathrm{diag}\,(g^0, g^1, \ldots, g^N)$ и суперзаряды $\mathcal{Q}^+_{p,\,q} = \hat{L}_{p,\,q}e_{p,\,q}$, $\mathcal{Q}_{p,\,q} = \hat{L}^+_{p,\,q}e_{q,\,p}$, где $e_{q,\,p}$ — матрица размерности $N+1$, у которой единственный отличный от нуля и равный единице элемент стоит на пересечении p-го столбца и q-й строки. Цепочка $N+1$ уравнений Шредингера сводится к одному матричному уравнению (40), в котором I — единичная матрица размерности $N+1$. Соотношения сплетания операторов Шредингера $iI\partial_t - h_p$ и $iI\partial_t - h_q$ операторами $\hat{L}_{pq}$ и $\hat{L}^+_{pq}$ эквивалентны коммутации суперзарядов $\mathcal{Q}_{pq}$ с супероператором Шредингера $iI\partial_t - \mathcal{H}$. Следовательно, все операторы $\mathcal{Q}_{pq}$ являются интегралами движения системы с супергамильтонианом $\mathcal{H}$. Условие полной приводимости цепочки преобразований приводит к следующей нелинейной алгебре:

$$\mathcal{Q}_{s,\,p}\mathcal{Q}_{p,\,q} = \mathcal{Q}_{s,\,q}, \qquad N+1 \geq q > p > s,$$

$$\mathcal{Q}^+_{p,\,p+n}\mathcal{Q}_{p,\,p+n+m} = \prod_{i=1}^{n}(\mathcal{G}_0 - \alpha_{p+i})\,\mathcal{Q}_{p+n,\,p+n+m}, \quad p+n+m \leq N+1,$$

$$\mathcal{Q}_{p-n-m,\,p}\mathcal{Q}^+_{p-n,\,p} = \prod_{i=1}^{n}(\mathcal{G}_0 - \alpha_{p+i-1})\,\mathcal{Q}_{p-n-m,\,p-n},$$

$$p - n - m \geq 0,\ p \leq N + 1,$$

$$\mathcal{Q}_{p,p+n}\mathcal{Q}^{+}_{p,p+n}\mathcal{Q}_{p,p+n} = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{G}_0 - \alpha_{p+i})\mathcal{Q}_{p,p+n},$$

$$p + n \leq N + 1, \qquad n, m = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

и соотношения, эрмитово-сопряженные этим. Все остальные произведения любых двух суперзарядов равны нулю. Соотношения (41) характерны для парасуперaлгебр (см., например, [46,47]), которые известны для стационарных преобразований Дарбу [48].

2.7. Нестационарные точно решаемые потенциалы. Мы приведем здесь простейшие применения развиваемой нами методики, иллюстрирующие возможность генерации нестационарных точно решаемых потенциалов.

Рассмотрим свободную частицу: $V_0(x, t) = 0$, $R = (-\infty, +\infty)$. Дискретный базис пространства $H_0(R)$ образован функциями (29) при $\lambda = \lambda_n = -n - 1/2$, $n = 0, 1, 2\ldots$, $\psi_n \equiv \psi_{\lambda_n}$. Кроме того, при $\lambda = \lambda_m = m + 1/2$, $m = 0, 2, 4, \ldots$ эти функции сохраняют знак на R при всех t и могут быть выбраны в качестве функций преобразования $u_1^{(m)} = \psi_{\lambda_m}$. Оператор преобразования $\hat{L}$ находим согласно (10) и (12):

$$\hat{L} = \hat{L}_{0,1} = L_1(t)\partial_x - \frac{x}{2}\frac{\sqrt{1 + it}}{\sqrt{1 - it}} - im\frac{He_{m-1}(iz)}{He_m(iz)}, \quad L_1(t) = \sqrt{1 + t^2}, \tag{42}$$

где $He_m(z) = 2^{-m/2}H_m(z/\sqrt{2})$ — многочлены Эрмита. Потенциал нового уравнения Шредингера находим по формуле (11):

$$V_1 = A_{0,1} = (1 + t^2)^{-1}\left[1 - 2m(m-1)\frac{He_{m-2}(iz)}{He_m(iz)} + 2m^2\frac{He^2_{m-1}(iz)}{He^2_m(iz)}\right]. \tag{43}$$

Эта же разность потенциалов определяет оператор симметрии $g^1 = g^0 - iL_1^2(t)A_{0,1}$. Ортонормированный базис пространства $H_1(R)$ получаем при помощи оператора $\hat{L}$ (42) и решения (13):

$$\varphi_{-1} = \sqrt{m!}(2\pi)^{-1/4}[L_1(t)\bar{u}_m(x, t)]^{-1}, \qquad g^1\varphi_{-1} = i(m + 1/2)\,\varphi_{-1},$$

$$\varphi_n = [n!(n + m + 1)\,(1 + it)\sqrt{2\pi}]^{-1/2}\exp\left[-x^2/(4 + 4it) - in\,\mathrm{arctg}\,t\right] \times$$

$$\times\left[He_{n+1}(z) + im\, He_n(z) \frac{He_{m-1}(iz)}{He_m(iz)} \right],$$

$$ig^1 \varphi_n = (n + 1/2)\, \varphi_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Действуя оператором (42) на функцию (29) с $\lambda = \lambda_l = l + 1/2$, $l = m + 1,\ m + 3, \ldots$, получим всюду отличные от нуля решения уравнения Шредингера с потенциалом (43):

$$v^{(l)}(x, t) = \hat{L}_{0,1}\varphi_{\lambda_l}(x, t) = (1 - it)^{-1/2} \exp\,[x^2/(4 - 4it) + il \operatorname{arctg} t]\, \frac{f_{m,l}(z)}{He_m(iz)},$$

$$f_{m,l}(z) = i[He_l(iz)\, He_{m+1}(iz) - He_m(iz)\, He_{l+1}(iz)],$$

пригодные для повторного преобразования. Оператор преобразования вновь конструируется по формулам (10) и (12) с функцией преобразования $u = v^{(l)}(x, t)$. Получается следующий результирующий потенциал:

$$V_{0,2} = 2(1 + t^2)^{-1} \left[1 + \frac{f''_{ml}(z)}{f_{ml}(z)} - \left(\frac{f'_{ml}(z)}{f_{ml}(z)} \right)^2 \right]. \tag{44}$$

Соответствующий ему оператор симметрии имеет вид $g^{(2)} = g^{(0)} - iL_1^2(t)V_{0,2}$. Дискретный базис пространства $H_2(R)$ находим при помощи оператора $\hat{L}_{0,2} = \hat{L}_{1,2}\hat{L}_{0,1}$ и формул (25):

$$\chi_{-2} = [(2\pi)^{-1/2} l!(l - m)\,(1 - it)^{-1}]^{1/2} \exp\,[-x^2/(4 + 4it) + il \operatorname{arctg} t]\, \frac{He_m(iz)}{f_{ml}(z)},$$

$$\chi_{-1} = [(2\pi)^{-1/2} m!(l - m)\,(1 - it)^{-1}]^{1/2} \exp\,[-x^2/(4 + 4it) + im \operatorname{arctg} t]\, \frac{He_l(iz)}{f_{ml}(z)},$$

$$\chi_n = L_{1,2}\varphi_n = L_{1,2}L_{0,1}\psi_n = [(n + l + 1)\,(n + m + 1)]^{-1/2} \times$$

$$\times\left[-(l + n + 1)\,\psi_n + (l - m)\, u_m \frac{W(\psi_n, u_l)}{W(u_m, u_l)} \right], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$W(\psi_n, u_l) = -(n!\sqrt{2\pi})^{-1/2}(1 + t^2)^{-1} \exp\,[itx^2/(2 + 2t^2) + i(l - n) \arctan t] \times$$

$$\times\,[nHe_{n-1}(z)\,He_l(iz) + iHe_n(z)\,He_{l+1}(iz)]$$

и

$$W(u_m, u_l) = ((1 - it)\sqrt{1 + t^2})^{-1} f_{ml}(z) \exp\,[x^2/(2 - 2it) + i(m + l) \arctan t].$$

Операторы преобразования $\hat{L}_{0,2}$ и $\hat{L}^+_{0,2}$ сплетают исходное и конечное уравнения Шредингера и участвуют в следующей факторизации $\hat{L}^+_{0,2}\hat{L}_{0,2} = (ig^0 + m + 1/2)\,(ig^0 + l + 1/2)$ и $\hat{L}_{0,2}\hat{L}^+_{0,2} = (ig^2 + m + 1/2)\,(ig^2 + l + 1/2)$. При помощи операторов преобразования $\hat{L}_{p,q}$, $p, q = 0, 1, 2$ $(p < q)$ конструируем операторы суперзарядов $\mathcal{Q}_{p,q} = \hat{L}_{p,q}\,e_{p,q}$ и $\mathcal{Q}^+_{p,q} = (\mathcal{Q}_{p,q})^\dagger$ и суперонератор симметрии $\mathcal{G}_0 = i$ diag $\{g^0, g^1, g^2\}$, которые образуют нелинейную алгебру парасуперсимметричной структуры [49]:

$$[\mathcal{G}_0, \mathcal{Q}_{p,q}] = 0, \qquad \mathcal{Q}_{1,2}\mathcal{Q}_{0,1} = \mathcal{Q}_{0,2},$$

$$\mathcal{Q}_{0,1}\mathcal{Q}^+_{0,1}\mathcal{Q}_{0,1} = (\mathcal{G}_0 + m + 1/2)\,\mathcal{Q}_{0,1}, \qquad \mathcal{Q}_{1,2}\mathcal{Q}^+_{1,2}\mathcal{Q}_{1,2} = (S + l + 1/2)\,\mathcal{Q}_{1,2},$$

$$\mathcal{Q}_{0,1}\mathcal{Q}^+_{0,2} = (\mathcal{G}_0 + m + 1/2)\,\mathcal{Q}^+_{1,2}, \qquad \mathcal{Q}^+_{0,2}\mathcal{Q}_{1,2} = (\mathcal{G}_0 + l + 1/2)\,\mathcal{Q}^+_{0,1},$$

$$\mathcal{Q}_{0,2}\mathcal{Q}^+_{0,2}\mathcal{Q}_{0,2} = (\mathcal{G}_0 + m + 1/2)\,(\mathcal{G}_0 + l + 1/2)\,\mathcal{Q}_{0,2},$$

и соотношения, эрмитово-сопряженные этим. Все остальные произведения любых двух суперзарядов равны нулю. Наинизшее собственное значение супероператора $\mathcal{G}_0$, равное $-l - 1/2$, невырождено. Ему соответствует функция $\Psi_{-2} = (0, 0, \chi_{-2})^t$. Следующее его собственное значение, равное $-m - 1/2$, дважды вырождено, и ему соответствуют две собственные функции $\Psi^1_{-1} = (0, \varphi_{-1}, 0)^t$ и $\Psi^2_{-1} = (0, 0, \chi_{-1})^t$. Остальной дискретный спектр супероператора $\mathcal{G}_0$ совпадает со спектром гармонического осциллятора и является трехкратно вырожденным. Соответствующие собственные функции строятся при помощи функций ψ_n, φ_n и χ_n.

Однократное преобразование с функцией $u_1 = \psi_n$ дает разность потенциалов с n особенностями. Однако повторное преобразование с функцией $u_2 = \psi_{n+1}$ устраняет все особенности и приводит к регулярной разности потенциалов

$$V^{(n,\,n+1)} = \frac{2}{1 + t^2}\left[\frac{J''_n(z)}{J_n(z)} - \left(\frac{J'_n(z)}{J_n(z)}\right)^2 - 1\right],$$

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+1)} He_s^2(z) = nJ_{n-1}(z) + He_n^2(z),$$

$$J_0(z) = 1, \quad J_1(z) = z^2 + 1, \quad J_2(z) = z^4 + 3, \ldots . \tag{45}$$

Оператор второго порядка $\hat{L}_{0,2}$ и ему сопряженный $\hat{L}^+_{0,2}$ участвуют в факторизации оператора $\mathcal{G}_0$: $\hat{L}^+_{0,2}\hat{L}_{0,2} = (i\mathcal{G}_0 - n - 1/2)\,(i\mathcal{G}_0 - n - 3/2)$. Построенные с его помощью суперзаряды $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^+$ и оператор $\mathcal{G}_0 = i\,\mathrm{diag}\,\{g^0, g^1\}$, $g^1 = g^0 - i(1 + t^2)V^{(n,\, n+1)}$ образуют квадратичную супералгебру $[\mathcal{G}_0, \mathcal{Q}] = [\mathcal{G}_0, \mathcal{Q}^+] = 0$, $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^+)^2 = 0$, $\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^+\} = (\mathcal{G}_0 - n - 1/2) \times (\mathcal{G}_0 - n - 3/2)$. Основное состояние оператора $\mathcal{G}_0$ двукратно вырождено, и соответствующие собственные функции $\Psi_0^+ = (\psi_0, 0)^t$ и $\Psi_0^- = (0, \hat{L}_{0,2}\psi_0)^t$ преобразуются друг в друга операторами суперзарядов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^+$. Состояния $\Psi_n = (\psi_n, 0)^t$ и $\Psi_{n+1} = (\psi_{n+1}, 0)^t$, аннигилируемые обоими суперзарядами, являются невырожденными и соответствуют собственным значениям $n + 1/2$ и $n + 3/2$ оператора $\mathcal{G}_0$. Мы получаем, таким образом, суперсимметричную квантово-механическую модель, в которой наинизшее состояние оператора симметрии не аннигилируется обоими суперзарядами, а состояния, аннигилируемые ими, находятся внутри дискретного спектра. Такая ситуация впервые обсуждалась для стационарного уравнения Шредингера в работе [50]. Она может возникнуть только в суперсимметричных моделях с суперзарядами, содержащими высшие производные по x.

В качестве следующего примера рассмотрим гармонический осциллятор с переменной частотой

$$h_0 = -\partial_x^2 + \omega^2(t)\, x^2, \tag{46}$$

где $\omega(t)$ — произвольная вещественная функция. Решение уравнения Шредингера с таким гамильтонианом хорошо известно (см., например, [51,52]). Для наших целей понадобятся не только функции пространства $H_0(R)$, но и решения $\psi(x, t) \notin H_0(R)$. Поэтому рассмотрим эту задачу подробнее.

Рассмотрим операторы уничтожения и рождения следующего вида [53]:

$$a = \varepsilon\partial_x - \frac{i}{2}\,\dot{\varepsilon}x, \qquad a^+ = -\bar{\varepsilon}\,\partial_x + \frac{i}{2}\,\dot{\bar{\varepsilon}}x, \qquad \varepsilon = \varepsilon(t). \tag{47}$$

Точкой обозначаем производную по t. Требование, чтобы операторы (47) являлись интегралами движения системы с гамильтонианом (46), приводит к следующему уравнению на параметр ε:

$$\ddot{\varepsilon} + 4\omega^2\varepsilon = 0. \tag{48}$$

В силу вещественности функции ω^2 из уравнения (48) следует, что $(\dot{\varepsilon}\bar{\varepsilon} - \varepsilon\dot{\bar{\varepsilon}})_t = 0$. Уравнение (48) определяет функцию ε с точностью до постоянного множителя. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы выполнить условие $[a, a^+] = 1$. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\dot{\varepsilon}\bar{\varepsilon} - \varepsilon\dot{\bar{\varepsilon}} = 2i.$$

Операторы (47) реализуют в этом случае представление алгебры Гейзенберга — Вейля w_1, а их квадратичные комбинации

$$K_- = \frac{1}{2}\, a^2, \qquad K_+ = \frac{1}{2}\, (a^+)^2, \qquad K_0 = \frac{1}{4}\, \{a, a^+\} \tag{49}$$

— представление алгебры $su(1.1)$:

$$[K_0, K_\pm] = \pm\, K_\pm, \qquad [K_-, K_+] = 2K_0.$$

Полупрямая сумма этих представлений дает представление алгебры Шредингера $sch(1.1)$, отличное от рассмотренного в п.2.3, а совокупность операторов a, a^+, I, K_0 и $K_\pm$ реализуют базис Картана — Вейля этой алгебры

$$[a, K_0] = \frac{1}{2}\, a, \qquad [a^+, K_0] = -\frac{1}{2}\, a^+.$$

Подалгеброй Картана является $\mathrm{span}\,(K_0, I)$. Представление дискретной серии определяется, следовательно, уравнением квантования для оператора K_0, которое можно получить, также действуя оператором рождения a^+ на вакуумное состояние $\psi_0(x, t)$. Последнее, в свою очередь, определяется условием $a\psi_0 = 0$, $\psi_0 \in H_0(R)$.

Поскольку нас будут интересовать не только решения уравнения (1) из пространства $H_0(R)$, то мы используем метод R-разделения переменных [38] для их нахождения. Решения уравнения (1) в R-разделенных переменных

$$\psi(x, t) = R(x, t)\, P(\tau)\, Q(\xi) \tag{50}$$

определяются как совместные решения уравнения Шредингера (1) и уравнения на собственные функции оператора K_0. Подставив явный вид операторов a и a^+ (47) в выражение для K_0 (49), получим

$$4K_0 = -\,2\gamma\partial_x^2 + i\dot{\gamma}x\partial_x + \frac{i}{2}\,\dot{\gamma} + \frac{1}{4}\,\ddot{\gamma}x^2 + 2\omega^2\gamma x^2, \tag{51}$$

где $\gamma = \varepsilon\bar{\varepsilon}$. Поскольку на пространстве T_0 выполняется равенство $i\partial_t + \partial x^2 - \omega^2(t)x^2 = 0$, то оператор (51) можно переписать в виде оператора первого порядка по ∂_x и ∂_t:

$$4K_0 = 2i\gamma\partial_t + i\dot{\gamma}x\partial_x + \frac{i}{2}\dot{\gamma} + \frac{1}{4}\ddot{\gamma}x^2. \tag{52}$$

Уравнения на собственные значения операторов (51) и (52) в координатах $\xi = x/\sqrt{\gamma}$ и $\tau = t$, при выборе функции $R(x, t)$ в виде

$$R(x, t) = \exp\left(i\,\frac{\dot{\gamma}x^2}{8\gamma} \right), \tag{53}$$

являются уравнениями на функции $Q(\xi)$ и $P(\tau)$ в разделенных переменных. Первое из этих уравнений имеет вид

$$Q_{\xi\xi}(\xi) - (\xi^2/4 + \lambda)\,Q(\xi) = 0, \tag{54}$$

а второе легко интегрируется:

$$P(t) = \gamma^{-1/4} \exp\,(i\lambda \int \gamma^{-1} dt), \tag{55}$$

где λ — постоянная разделения, выражается через фазу функции $\varepsilon(t)$ [52].

Дискретный базис $\psi_n(x, t)$ пространства $H_0(R)$ соответствует выбору $\lambda = \lambda_n = -n - 1/2$:

$$\psi_n(x, t) = N_n\,\gamma^{-1/4} \exp\left(\frac{(i\dot{\gamma} - 2)\,x^2}{8\gamma} + i\gamma \int \frac{dt}{\gamma} \right) He_n(x/\sqrt{\gamma}), \tag{56}$$

где N_n — нормировочный коэффициент.

Из формул (53)—(55) следует, что функция (50) удовлетворяет условию вещественности (9) при всех вещественных λ. В полной аналогии с предыдущим случаем мы можем использовать попарно соседние функции (56) в качестве функции преобразования для преобразования Дарбу N-го порядка, либо при $N = 1$ функции $u = \psi_\lambda$ при $\lambda > 0$, в частности, значениям $\lambda = n + 1/2$ соответствуют функции преобразования элементарного вида. Получающиеся в результате точно решаемые потенциалы выражаются формулами (43)—(45) с заменой $1 + t^2 \to \gamma$.

Отметим в заключение этого раздела, что использование других представителей орбит в алгебре Шредингера для получения решений уравнения Шредингера с гамильтонианом (46) позволяет получить другие точно решаемые нестационарные гамильтонианы.

3. СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

В случае, когда исходный потенциал V_0 не зависит от времени, можно интересоваться только стационарными решениями уравнения Шредингера (1). Как хорошо известно, такие решения строятся при помощи решений стационарного уравнения Шредингера

$$h_0\psi(x) = E\psi(x), \qquad h_0 = -\,\partial_x^2 + V_0(x). \tag{57}$$

Для стационарных потенциалов мы используем общепринятый знак у потенциальной энергии $V_0(x)$. Временную часть волновой функции будем обозначать тем же символом, что и всю функцию $\psi(x, t) = \exp(-\,iEt)\,\psi(x)$. Условие вещественности (9) выполняется для всех вещественных функций $\psi(x)$, поэтому будем рассматривать решения уравнения (57) при вещественных E. Нестационарное преобразование, введенное в п.2.1, переходит при этих условиях в хорошо известное преобразование Дарбу [8]. Многие свойства этого преобразования известны как частный случай полученных нами свойств нестационарного преобразования. С другой стороны, в стационарном случае можно установить свойства, которые не удается доказать для более общего нестационарного уравнения. Рассмотрим эти вопросы более подробно.

3.1. Факторизация преобразования Дарбу N-го порядка

1. Результирующее действие цепочки N преобразований Дарбу эквивалентно одному преобразованию N-го порядка. Вопрос же о том, всякое ли преобразование порядка N можно представить в виде некоторой цепочки преобразований Дарбу первого порядка, на наш взгляд, требует дополнительного обсуждения. В работе [24] рассмотрено преобразование Дарбу второго порядка и установлено, что существуют два типа таких преобразований — приводимые и неприводимые. Оба типа сводятся к суперпозиции преобразований первого порядка, однако в первом случае промежуточный гамильтониан эрмитов, а во втором — нет. (На наш взгляд, можно лишь утверждать, что, вообще говоря, в первом случае промежуточный потенциал является вещественнозначной функцией, а во втором — комплекснозначной; результирующий потенциал в обоих случаях есть функция вещественнозначная). В работе [54] (теорема 5) для частного случая потенциалов, преобразование Дарбу которых приводит к новому потенциалу, отличающемуся от исходного на постоянное слагаемое, утверждается, что преобразование N-го порядка всегда можно представить в виде суперпозиции N преобразований первого порядка. В работе [12] это утверждение обобщено на произвольные потенциалы, но приведенное там доказательство туманно. На наш взгляд, это утверждение можно строго доказать для произвольного

потенциала и уточнить, исключив из цепочки преобразования, композиция которых является оператором симметрии исходного уравнения Шредингера.

2. Рассмотрим уравнение Шредингера (57). Пусть в данном случае T_0 — функциональное (при необходимости топологическое) пространство решений уравнения (57). Для оператора дифференцирования будем в этом разделе использовать обозначение $\partial_x \equiv D$.

Определение. *Линейный, дифференциальный порядка N оператор* $\hat{L}^{(N)}$ *с коэффициентом при* D^N, *равным единице, действующий из* T_0 *в* $T_{N1} = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi,\ \psi \in T_0\}$, *назовем оператором преобразования Дарбу порядка N, если*

$$\hat{L}^{(N)}h_0 - h_0\hat{L}^{(N)} = A_N(x)\hat{L}^{(N)}, \tag{58}$$

где $A_N(x)$ — *некоторая достаточно гладкая функция. При* $A_N(x) \equiv 0$ *оператор* $\hat{L}^{(N)}$ *назовем тривиальным.*

Из этого определения непосредственно следует, что функция $\varphi = \hat{L}^{(N)}\psi$ удовлетворяет уравнению Шредингера с потенциалом $V_N(x) = V_0(x) + A_N(x)$, а пространство $T_{N1} \subset T_N$, где T_N — функциональное пространство решений уравнения Шредингера с потенциалом $V_N(x)$.

При $N = 1$ уравнение (58) определяет обычное преобразование Дарбу первого порядка (см. ф-лы (11), (12) при $L_1 = 1$). Функция u_α, входящая в эти выражения, называется функцией преобразования и определяется исходным гамильтонианом h_0: $h_0u_\alpha = \alpha u_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}\, u_\alpha = 0$. Оператор $\hat{L}$ имеет нетривиальное ядро $\ker \hat{L} = \mathrm{span}\,\{u_\alpha\}$, где span означает линейную оболочку над полем $\mathbb{C}$.

Если $\tilde{u}_\alpha$ выбрано так, что $W(u_\alpha, \tilde{u}_\alpha) = 1$, где через W мы обозначаем вронскиан, то $\hat{L}\tilde{u}_\alpha = u_\alpha^{-1} = v_\alpha$ и $h_1v_\alpha = \alpha v_\alpha$, $h_1 = h_0 + A_1(x)$. Кроме того, путем непосредственных вычислений убеждаемся, что $\lim\limits_{E \to \alpha} R^{-1}(E)\,\hat{L}\psi_E(x) = \tilde{v}_\alpha(x)$, $R(E) = E - \alpha$ при условии, что $\psi_E(x) \to u_\alpha(x)$ при $E \to \alpha$. В этом случае $h_1\tilde{v}_\alpha = \alpha\tilde{v}_\alpha$ и $W(v_\alpha, \tilde{v}_\alpha) = W(u_\alpha, \tilde{u}_\alpha) = 1$. Поэтому на пространстве T_0 всегда можно определить линейный оператор L, положив $\varphi_E = L\psi_E = R^{-1/2}(E)\hat{L}\psi_E$, $\forall\, E \neq \alpha$, $L\tilde{u}_\alpha = \hat{L}\tilde{u}_\alpha = v_\alpha = u_\alpha^{-1}$ и $Lu_\alpha = \tilde{v}_\alpha$. Оператор L каждому элементу $\psi \in T_0$ ставит в соответствие единственный элемент $\varphi \in T_1$, где T_1 — функциональное пространство решений уравнения Шредингера с гамильтонианом h_1, причем $W(\varphi_E, \tilde{\varphi}_E) = W(\psi_E, \tilde{\psi}_E)$, $\forall\, \psi_E, \tilde{\psi}_E \in T_0$.

Из (58) следует, что если $A_N(x)$ — функция вещественнозначная, то $\hat{L}^{(N)^+}\hat{L}^{(N)}$, где $\hat{L}^{(N)^+}$ — формально сопряженный к $\hat{L}^{(N)}$ оператор, будет дифференциальным (порядка $2N$) оператором симметрии уравнения (57) и, следовательно, многочленом порядка N от h_0.

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы, рассмотрим три леммы.

Лемма 1. *Оператор $\hat{L} \equiv \hat{L}^{(1)}$ тогда и только тогда является оператором преобразования Дарбу, когда $\hat{L}^+\hat{L} = h_0 - \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Лемма достаточно просто доказывается путем непосредственных вычислений, и мы на этом не останавливаемся. Отметим только, что это утверждение представляет собой основу известного метода факторизации в квантовой механике (см., например, [11]).

Поскольку $\ker \hat{L}^+ = \operatorname{span}\{v_\alpha = u_\alpha^{-1}\}$, то на пространстве T_1 можно определить оператор L^+, положив $L^+\varphi_E = R^{-1/2}(E)\hat{L}^+\varphi_E$, $\forall E \neq \alpha$ и $L^+\tilde{v}_\alpha = \hat{L}^+\tilde{v}_\alpha = u_\alpha = v_\alpha^{-1}$, $L^+v_\alpha = \tilde{u}_\alpha$. Операторы L и L^+ осуществляют взаимно однозначное отображение пространств T_0 и T_1. Кроме того, $T_0 = T_{01} \cup \operatorname{span}\{\tilde{u}_\alpha\}$, $T_1 = T_{11} \cup \operatorname{span}\{\tilde{v}_\alpha\}$, $T_{01} = \{\psi : \psi = \hat{L}^+\varphi,\ \varphi \in T_1\}$.

Лемма 2. *Оператор $\hat{L} \equiv \hat{L}^{(2)}$ всегда можно представить в виде $\hat{L} = \hat{L}_2\hat{L}_1$, где $\hat{L}_1 = -u_1'/u_1 + D$, $\hat{L}_2 = -v'/v + D$ — операторы преобразования Дарбу первого порядка, u_1 — функция преобразования, удовлетворяющая уравнению (57) при некотором собственном значении C_1, v — функция преобразования для повторного преобразования Дарбу первого порядка, удовлетворяющая уравнению Шредингера с промежуточным потенциалом V_1, полученным из V_0 в результате преобразования Дарбу с оператором $\hat{L}_1$, и соответствующая собственному значению C_2. Если C_1 и $C_2 \in \mathbb{R}$, то они произвольны, а функции u_1 и v — вещественнозначные. Если C_1 и $C_2 \in \mathbb{C}$, то $C_2 = \overline{C}_1$ и $v = \hat{L}_1\overline{u}_1$. Разность потенциалов $A_2(x)$ является вещественнозначной функцией.*

Отметим прежде всего, что аналогичное утверждение содержится в работе [24], однако для дальнейшего будут полезны некоторые детали доказательства, и мы приведем его полностью.

Рассмотрим $\hat{L} = a_0(x) + a_1(x)D + a_2(x)D^2$. Из (58) получаем систему уравнений на функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ и $A(x) \equiv A_2(x)$. Из этой системы следует, что $a_2 = \text{const}$, и без ущерба можно положить $a_2 = 1$. Кроме того,

$A = 2a_1'$. Исключив из системы a_0 и A, получим дифференциальное уравнение для функции a_1, которое без труда может быть дважды проинтегрировано с постоянными $2\alpha_1$ и $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. В результате получим следующее дифференциальное уравнение для a_1:

$$a_1^2 V_0 + a_1^2 a_1' - \frac{1}{2} a_1 a_1'' + \frac{1}{4} a_1'^2 - \frac{1}{4} a_1^4 - \alpha_1 a_1^2 - \alpha_2 = 0. \tag{59}$$

Введем новую переменную u_1, положив

$$u_1'/u_1 = \frac{1}{2} a_1'/a_1 - \frac{1}{2} a_1 - \sqrt{\alpha_2}/a_1. \tag{60}$$

Уравнение (59) при этом примет вид $-D^2 u_1 + (V_0 - C_1) u_1 = 0$, где $C_1 = \alpha_1 - \sqrt{\alpha_2}$, то есть функция u_1 является решением исходного уравнения Шредингера. Определив эту функцию, решаем уравнение (60). Введем новую функцию v, положив $a_1 = -[\ln(vu_1)]'$. Из уравнения (60) получим уравнение для функции v:

$$-D^2 v + (V_1 - C_2) v = 0,$$

где $C_2 = \alpha_1 + \sqrt{\alpha_2}$, $V_1 = V_0 - 2(\ln u_1)_{xx}$. Отсюда ясно, что функция v является решением уравнения Шредингера, полученного из уравнения (57) при помощи оператора преобразования $\hat{L}_1$ с функцией преобразования u_1. Учитывая, что $a_1 = -[\ln(vu_1)]'$ и $a_0 = u_1'v'/(u_1 v) - (\ln u_1)''$, получаем устанавливаемое леммой выражение для оператора $\hat{L}$. Кроме того, при $C_2 \neq C_1$ имеем $v = \hat{L}_1 u_2 = u_1^{-1} W(u_1, u_2)$, где $h_0 u_2 = C_2 u_2$. Для разности потенциалов получаем выражение

$$A = -2[\ln W(u_1, u_2)]''. \tag{61}$$

При $C_2 = C_1 = C$ имеем $v = \beta_1 u_1^{-1} + \beta_2 \tilde{v}$, где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ и u_1^{-1}, $\tilde{v}$ линейно независимые решения уравнения Шредингера с потенциалом V_1 при $E = C$. Вронскиан W в формуле (61) необходимо заменить в этом случае на $W \to \beta_1 + \beta_2 u_1 \tilde{v}$.

Следствие 1. *Из лемм 1 и 2 сразу же следует, что* $\hat{L}^+\hat{L} = (h_0 - C_1)(h_0 - C_2)$.

Замечание 1. *При* $C_1 = C_2 = C \in \mathbb{R}$ *и* $v = u_1^{-1}$ $(\beta_2 = 0)$ *оператор* $\hat{L} = -\hat{L}_1^+\hat{L}_1 = C - h_0$ — *тривиальный оператор преобразования.*

Замечание 2. *В случае* $C_2 \neq C_1$ *промежуточную функцию* v *можно исключить. При этом получим для* $\hat{L}$ *известное [41] выражение, которое для цепочки* N *преобразований имеет вид*

$$\hat{L}^{(N)} = \hat{L}_N\hat{L}_{N-1}\ldots\hat{L}_1 = W^{-1}(u_1,\ldots,u_N)\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & 1 \\ u_1' & u_2' & \ldots & D \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} & \ldots & D^N \end{vmatrix}. \qquad (62)$$

Кроме того, $\hat{L}^{(N)^+}\hat{L}^{(N)} = P(h_0) = \prod_{i=1}^{N}(h_0 - C_i)$, *где* $h_0 u_i = C_i u_i$, *и все* C_i *различны. Если коэффициенты многочлена* $P(x)$ *принадлежат полю* $\mathbb{R}$, *то промежуточные потенциалы (при наличии комплексных нулей у* $P(x)$*) могут быть комплекснозначными, но результирующий потенциал при соответствующем выборе функций преобразования будет вещественнозначной функцией.*

Обозначим через Q следующий многочлен степени N с вещественными коэффициентами: $Q(h_0) = \hat{L}^{(N)^+}\hat{L}^{(N)}$. Пусть $C_1,\ldots, C_N$ — нули многочлена $Q(x)$ произвольной кратности.

Лемма 3. *Если* $\hat{L}^{(N)}$ — *оператор преобразования Дарбу N-го порядка, то* $\ker \hat{L}^{(N)} \cap \bigcup_{i=1}^{N} \ker(h_0 - C_i) \neq \emptyset$.

Рассмотрим один из нулей многочлена $Q(x)$, например, C_1. Если $\ker \hat{L}^{(N)} \cap \ker(h_0 - C_1) \neq \emptyset$, то лемма доказана. Пусть

$$\ker \hat{L}^{(N)} \cap \ker(h_0 - C_1) = \emptyset. \qquad (63)$$

Обозначим $v_1 = \hat{L}^{(N)}u_1$, $\tilde{v}_1 = \hat{L}^{(N)}\tilde{u}_1$, где $u_1, \tilde{u}_1$ — некоторый базис в пространстве $\ker(h_0 - C_1)$. В силу линейности оператора $\hat{L}^{(N)}$ и предположения (63), $\operatorname{span}\{v_1, \tilde{v}_1\}$ не может быть одномерным пространством. Тогда

$$\operatorname{span}\{v_1, \tilde{v}_1\} = \ker(h_N - C_1) \subset \ker \hat{L}^{(N)^+}.$$

Используя предложение 2.1 работы [4], оператор $\hat{L}^{(N)^+}$ можно записать в виде $\hat{L}^{(N)^+} = \hat{L}^{(N-2)^+}\hat{L}_2^+\hat{L}_1^+$, где $\hat{L}_1^+ = \frac{d}{dx}\ln v_1 - D$, $\hat{L}_2^+ = \frac{d}{dx}\ln\frac{W(v_1, \tilde{v}_1)}{v_1} - D$. Учитывая то, что функции v_1 и $\tilde{v}_1$ являются линейно независимыми решениями уравнения Шредингера при данном значении E, получаем

$$\hat{L}^{(N)^+} = -\hat{L}^{(N-2)^+}(h_N - C_1).$$

Здесь $\hat{L}^{(N-2)^+}$ — оператор преобразования Дарбу $N-2$-го порядка от решений уравнения Шредингера с гамильтонианом h_N к решениям этого же уравнения с гамильтонианом h_0. Но тогда $\hat{L}^{(N)} = -\hat{L}^{(N-2)}(h_0 - \overline{C}_1)$, что при $C_1 \in \mathbb{R}$ противоречит (63), а при $C_1 \in \mathbb{C}$ приводит к утверждению леммы, поскольку в этом случае $\overline{C}_1$ есть также нуль многочлена $Q(x)$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема. *Действие всякого нетривиального оператора* $\hat{L}^{(N)}$ *эквивалентно результирующему действию некоторой цепочки* $k(\leq N)$ *преобразований Дарбу первого порядка.*

Используя леммы 2 и 3 и соображения индукции, оператор $\hat{L}^{(N)}$ всегда можно представить в виде $\hat{L}^{(N)} = \hat{L}_N\hat{L}_{N-1}\ldots\hat{L}_1$, что соответствует цепочке N преобразований Дарбу первого порядка. Если выполняются условия замечания 1, то отдельные произведения операторов цепочки будут являться тривиальными операторами преобразования. В этом случае $\hat{L}^{(N)} = \hat{L}^{(k)}P(h_0)$, где $\hat{L}^{(k)} = \hat{L}_{t+k}\hat{L}_{t+k-1}\ldots\hat{L}_t$ и $P(x)$ — некоторый многочлен. Операторы преобразования $\hat{L}^{(N)}$ и $\hat{L}^{(k)}$ приводят к одной и той же разности потенциалов $A_N(x)$, что и доказывает теорему.

Замечание 3. *Нами отмечена возможность тривиальных операторов преобразования, которая может реализоваться для произвольного потенциала* $V_0(x)$. *Известны такие примеры потенциалов [54], для которых цепочки большей длины приводят к тривиальному оператору преобразования.*

3. В заключение отметим, что оператор $\hat{L}^{(k)^+}$, осуществляющий преобразование от решений уравнения Шредингера с потенциалом V_N к решениям уравнения (57), может быть использован для конструирования оператора $\hat{L}^{(k)^{-1}}$. Кроме того, если $C_1,\ldots, C_q$ — различные нули многочлена $P(h_0) = \hat{L}^{(k)^+}\hat{L}^{(k)}$, то для пространства T_0 выполняется разложение

$T_0 = T_{01} \cup \bigcup_{i=1}^{q} \operatorname{span}\{\tilde{u}_i\}$, $\ker(h_0 - C_i) = \operatorname{span}\{u_i, \tilde{u}_i\}$, $i = 1, \ldots, q$. Функции u_i являются функциями преобразования для промежуточного оператора преобразования $\hat{L}^{(q)} = \hat{L}_q \hat{L}_{q-1} \ldots \hat{L}_1$. Аналогичное разложение можно записать для пространства T_N.

3.2. Одевающие цепочки. Рассмотрим, какие конструкции приводят к так называемым «одевающим цепочкам», введенным в работах [55,56] и подробно изученным в [54]. Пусть цепочка гамильтонианов $h_0, h_1, \ldots, h_i = -\partial_x^2 + V_i(x)$ порождается последовательным применением преобразований Дарбу первого порядка. Тогда, согласно (58), они сплетаются операторами преобразования Дарбу $\hat{L}_i = -L_{0i}(x) + \partial_x$:

$$h_{i+1}\hat{L}_i = \hat{L}_i h_i. \tag{64}$$

Из (64) следует, что $V_{i+1} - V_i = -2L'_{0i}(x)$ и $L''_{0i} + (L^2_{0i})' - V_i{}' = -L''_{0i} + (L^2_{0i})' - V'_{i+1} = 0$.

Отсюда ясно, что

$$L'_{0i} + L^2_{0i} - V_i = -L'_{0i} + L^2_{0i} - V_{i+1} = -\alpha_i, \tag{65}$$

где α_i — постоянная интегрирования. Именно отсюда следуют обычные для преобразований Дарбу соотношения

$$L_{0i} = \ln u_i, \quad A_i = V_{i+1} - V_i = -2(\ln u_i)'', \quad h_i u_i = \alpha_i u_i. \tag{66}$$

Рассмотрим разность двух последовательных соотношений (65):

$$(L_{0i} + L_{0i+1})' - L^2_{0i} + L^2_{0i+1} = \beta_i, \quad \beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}. \tag{67}$$

Система уравнений (67) и названа в [54] «одевающей цепочкой». Ясно также, что в основе свойства гамильтоновости такой цепочки, подробно рассмотренного в [54], лежат соотношения (66) и, в частности, возможность ее проинтегрировать при помощи функций преобразования u_i, удовлетворяющих уравнению Шредингера с гамильтонианом h_i.

В работе [54] подробно изучены свойства замкнутых цепочек. Условие замыкания в терминах цепочки гамильтонианов выглядит следующим образом: $h_N = h_0 + \alpha$, где α — произвольная вещественная постоянная. Оператор N-го порядка $\hat{L}^{(N)} = \hat{L}_{N-1}\hat{L}_{N-1} \ldots \hat{L}_0$ будет осуществлять преобразование от гамильтониана h_0 непосредственно к h_N. Согласно (58) он определяется соотношением

$$[\hat{L}^{(N)}, h_0] = \alpha\hat{L}^{(N)}. \tag{68}$$

Соотношение (68) можно рассматривать как уравнение для определения операторов h_0 и $\hat{L}^{(N)}$. Оказывается [54], что свойства оператора h_0 сильно зависят от того, равняется ли α нулю. При $\alpha = 0$ оператор $\hat{L}^{(N)}$ является оператором симметрии для уравнения Шредингера с гамильтонианом h_0. Если $N = 2n + 1$ — нечетное число, то оператор h_0 имеет в своем спектре не более n зон, и все операторы цепочки h_0, h_1, h_{N-1} являются конечнозонными. Такие операторы исследовались, в частности, в [57]. В простейшем нетривиальном случае $N = 3$ получаем однозонный потенциал вида $V_0(x) = 2\wp(x - x_0) + \mathrm{const}$, где $\wp$ — эллиптическая $\wp$-функция Вейерштрасса, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$

где e_i — параметры потенциала. Решения уравнения Шредингера с таким потенциалом выражаются через эллиптические функции. Случай с четным N сводится к предыдущему. Все элементы теории конечнозонных потенциалов можно воспроизвести, используя свойства одевающей цепочки [54].

При $\alpha \neq 0$ соотношение (68) дает переопределенную систему уравнений для коэффициентов оператора $\hat{L}^{(N)}$. Условие ее разрешимости приводит к нелинейному уравнению для потенциала $V_0(x)$ [58]. В работах [58] и [59] получены некоторые элементарные решения этого уравнения, приводящие к потенциалам, спектр которых состоит из эквидистантной части и отдельно расположенного уровня основного состояния. В работе [12] установлено, что эти решения можно получить путем обычного преобразования Дарбу из потенциала гармонического осциллятора. В дальнейшем мы приведем и другие потенциалы элементарного вида, которые можно получить таким способом.

В работе [54] установлено, что спектр оператора h_0, удовлетворяющего уравнению (68) при нечетных N, состоит из N арифметических прогрессий с первыми членами 0, ε_1, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{N-1}$ и разностью $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N$, где $\varepsilon_i = -\beta_i > 0$. В частности, при $N = 3$ общее решение цепочки и явный вид потенциала $V_0(x)$ выражаются через решения четвертого уравнения Пенлеве (PIV). Для $V_0(x)$ в [54] получено следующее выражение:

$$V_0(x) = -2Z' + \alpha^2 x^2/4 + \mathrm{const}, \tag{69}$$

где функция Z является решением уравнения

$$(Z'')^2 - \alpha^2(Z - xZ')^2 + 4P(Z') = 0, \quad P(t) = t(t+\beta_2)(t-\beta_3).$$

Функция $L_{01}(x)$, определяющая первый из операторов цепочки преобразований, выражается через решения уравнения PIV:

$$y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2-\alpha)y + \frac{b}{y}, \qquad L_{01} = y - x.$$

Отметим, что вид потенциала $V_0(x)$ наталкивает на мысль, что этот потенциал можно получить из потенциала гармонического осциллятора $\alpha^2 x^2/4$ при помощи преобразования Дарбу или цепочки таких преобразований при надлежащем выборе функций преобразования. Такой подход мог бы установить связь уравнения PIV с уравнением Шредингера для гармонического осциллятора. В частности, элементарное решение уравнения (68), полученное в [58], соответствует одному из рациональных решений уравнения PIV [60]. Мы полагаем, что, используя результаты работы [12], можно установить аналогичное соответствие между другими известными полиномиальными решениями уравнения PIV [61] и решениями уравнения Шредингера для гармонического осциллятора.

3.3. Примеры точно решаемых потенциалов. ***3.3.1. Потенциалы с эквидистантным и квазиэквидистантным спектрами.*** Пусть $h_0 = -\partial_x^2 + + x^2/4 - 1/2$. Рассмотрим вначале случай, когда функция преобразования $u(x) \notin H_0(R)$. В этом случае существует серия элементарных решений уравнения Шредингера вида

$$u_m(x) = \psi_{-m}(x) = \exp(x^2/4)\, H_m(ix/\sqrt{2}),$$
$$h_0 u_m = -(m+1)u_m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{70}$$

где $H_m(z)$ — полиномы Эрмита [62]. Однократное преобразование Дарбу с функциями (70) при четных $m = 2k$ генерирует семейство регулярных на всей оси потенциалов

$$V_1^{(2k)} = x^2/4 - 3/2 + 8k^2[q_{2k-1}(x)/q_{2k}(x)]^2 - 4k(2k-1)q_{2k-2}(x)/q_{2k}(x),$$
$$q_k(x) = (-i)^k He_k(ix), \qquad He_k(x) = 2^{-k/2}H_k(x/\sqrt{2}),$$
$$q_{k+1}(x) = xq_k(x) + kq_{k-1}(x), \qquad q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x. \tag{71}$$

Потенциал (71) при $k = 1$ подробно изучен в работе [59]. Согласно результатам работы [54] эти потенциалы можно интерпретировать как потенциалы, спектр которых складывается из $2k + 1$ участков с эквидистантным спектром. Дискретный спектр новых гамильтонианов $h_1^{(m)} = -\partial_x^2 + V_1^{(m)}(x)$ имеет один дополнительный уровень основного состояния $E_0 = -(m + 1)$ по сравнению с эквидистантным спектром исходного гамильтониана h_0. Все потенциалы (71) имеют острый минимум вблизи $x = 0$, и с ростом x их поведение все больше приближается к параболическому закону $x^2/4$. Волновые функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi_0(x) = \sqrt{(2k)!}\,(2\pi)^{-1/4}\exp(-x^2/4)/q_{2k}(x),$$

$$\varphi_{n+1}(x) = (2\pi)^{-1/4}(n!)^{-1/2}(n + 2k + 1)^{-1/2}\times$$

$$\times\,[He_n(x)q_{2k+1}(x)/q_{2k}(x) - nHe_{n-1}(x)]\exp(-x^2/4),$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{72}$$

При нечетных $m = 2k + 1$ фукнции (70) обращаются в нуль только при $x = 0$ и могут быть использованы в качестве функций преобразования для спектральной задачи на полуоси $x \geq 0$. При этом получим следующее семейство новых потенциалов:

$$V_1^{(2k+1)}(x) = x^2/4 - 3/2 + 2(2k + 1)^2[q_{2k}(x)/q_{2k+1}(x)]^2 -$$

$$- 4k(2k + 1)q_{2k-1}(x)/q_{2k+1}(x).$$

В качестве решений нового уравнения Шредингера при $E = n$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$) мы получим следующие функции:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}(2\pi)^{-1/4}(n!)^{-1/2}(n + 2k + 2)^{-1/2}\times$$

$$\times\,[He_n(x)q_{2k+2}(x)/q_{2k+1}(x) - nHe_{n-1}(x)]\exp(-x^2/4). \tag{73}$$

При нечетных n функции (73) обращаются в нуль при $x = 0,\ \infty$, а при четных n они сингулярны в начале координат. Поэтому дискретному спектру новых потенциалов соответствуют нечетные значения n. Функции (73) нормированы на единицу на полуоси. При $n = 1$ мы получаем функцию основного состояния.

Используем теперь две функции дискретного спектра: $\psi_k(x) = \exp(-x^2/4)\,He_k(x)$ и $\psi_{k+1}(x)$ в качестве функций преобразования при двукратном преобразовании Дарбу. В результате получим другое семейство потенциалов:

$$V_2^{(k,\,k+1)}(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2} - 2\,\frac{J_k''(x)}{J_k(x)} + 2\left[\frac{J_k'(x)}{J_k(x)}\right]^2,$$

$$J_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+1)}\, He_i^2(x).$$

Эти потенциалы являются четными функциями x, подобными параболе $x^2/4$, на дне которой находятся k небольших минимумов одной и той же глубины. На рис.1 построены графики смещенных для удобства сравнения потенциалов $V = V_2^{(k,\,k+1)} + 5k$, где k совпадает с номером кривой. Дискретный спектр этих потенциалов отличается от спектра гармонического осциллятора отсутствием уровней $E = k$ и $E = k + 1$. Нормированные на единицу функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi_n(x) = (2\pi)^{-1/4}(n!)^{-1/2}[(n-k)(n-k-1)]^{-1/2}\exp(-x^2/4)\times$$
$$\times\,[(n-k)\,He_n(x) + (He_k(x)\,He_{n+1}(x) - He_n(x)\,He_{k+1}(x))\,He_{k+1}/J_k(x)],$$
$$n \neq k,\ k+1.$$

Рассмотрим теперь свойства вронскиана второго порядка, сконструированного из функций (70), не принадлежащих дискретному спектру исходной задачи:

$$W_{m,\,l}(x) \equiv W(u_m,\,u_l) = f_{m,\,l}(x)\exp(x^2/2),$$

$$f_{m,\,l}(x) = q_m(x)\,q_{l+1}(x) - q_l(x)\,q_{m+1}(x).$$

Используя выражение для производной этого вронскиана $W'_{m,\,l}(x) = (l-m)q_m(x)\,q_l(x)\exp(x^2/2)$ и определение многочленов $q_m(x)$ (71), можно установить свойство монотонности функции $W_{m,\,l}(x)$. Четность многочленов $q_m(x)$ совпадает с четностью их номера m. Коэффициенты перед всеми степенями x целочисленные. При четных m $q_m(x) > 0$, а при нечетных $q_m(x) = 0$ только при $x = 0$ и нуль — простой. Кроме того, $W_{m,\,l}(0) = l!(m-1)! > 0$. Отсюда следует, что при положительных m и l разной четности функция $W_{m,\,l}(x)$ при $l > m$ убывает при $x < 0$, возрастает

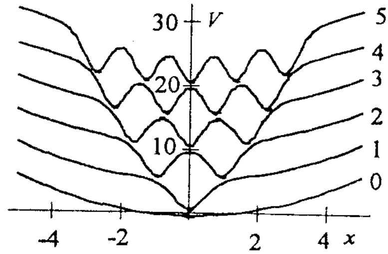


Рис.1. k-ямные потенциалы с квазиэквидистантным спектром

при $x > 0$ и имеет единственный минимум при $x = 0$, оставаясь все время положительной. При $m > l$ $W_{m,\,l}(x)$ возрастает при $x < 0$, убывает при $x > 0$ и имеет два симметрично расположенных простых нуля. Когда m и l имеют одинаковую четность, полагая для определенности $l > m$, получаем, что при четных m, l $W'_{m,\,l}(x) \geq 0$ и равенство имеет место только при $x = 0$ и нуль имеет второй порядок; при нечетных m, l $W'_{m,\,l}(x) > 0$ и в обоих случаях $W'_{m,\,l}(x) = W'_{m,\,l}(-x)$. Функция $W_{m,\,l}(x)$ при этом является монотонно возрастающей и имеет при $x = 0$ единственный простой нуль при четных m и l и тройной при нечетных m и l. Отсюда следует, что при $m = 0, 2, 4, \ldots$ и $l = m + 1, m + 3, m + 5, \ldots$ функции (70) пригодны для двукратного преобразования Дарбу.

Для нового потенциала получаем следующее выражение:

$$V_2^{(m,\,l)}(x) = x^2/4 - 5/2 - 2f''_{m,\,l}(x)/f_{m,\,l}(x) + 2[f_{m,\,l}(x)/f_{m,\,l}(x)]^2. \tag{74}$$

Потенциал (74) является регулярной функцией на всей вещественной оси. Гамильтонианы $h_2^{(m,\,l)}$ имеют два дополнительных уровня в дискретном спектре $E_0 = -l-1$ и $E_1 = -m-1$ по отношению к h_0. Первый уровень соответствует основному состоянию, а второй — первому возбужденному. Нормированные на единицу волновые функции этих состояний имеют вид

$$\varphi_0^{(m,\,l)}(x) = (2\pi)^{-1/4}\sqrt{l!(l-m)}\exp(-x^2/4)\, q_m(x)/f_{m,\,l}(x),$$

$$\varphi_1^{(m,\,l)}(x) = (2\pi)^{-1/4}\sqrt{m!(l-m)}\exp(-x^2/4)\, q_l(x)/f_{m,\,l}(x).$$

Для остальных функций дискретного спектра получаем выражение

$$\varphi_{n+2}(x) = (2\pi)^{-1/4}(n!)^{-1/2}[(n+l+1)(n+m+1)]^{-1/2}\exp(-x^2/4)\times$$

$$\times[(n+1)\,He_n(x) + ((m-l)q_m(x)\,q_l(x)\,He_{n+1}(x) - mlHe_n(x)f_{m-1,\,l-1}(x))/f_{m,\,l}(x)],$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Совершенно аналогично можно рассмотреть преобразования более высоких порядков. Например, преобразование Дарбу четвертого порядка с двумя функциями дискретного спектра с $n = 2$ и $n = 3$ и двумя функциями (70) с $m = 2$ и $m = 3$ генерирует потенциал следующего вида:

$$V_4(x) = x^2/4 - 1/2 - 24(1467x^2 + 6x^6 - x^{10})\,Q^{-1}(x) +$$

$$+ 82944(105x^2 + 140x^6 + 3x^{10})\,Q^{-2}(x),$$

$$Q(x) = 315 + 315x^4 + 9x^8 + x^{12}.$$

Рассмотрим еще один интересный потенциал, получающийся при однократном преобразовании Дарбу. Функцию преобразования выберем в виде $u = \psi_{-1/2}(x) = {}_0F_1(3/4, x^4/64)$ (${}_0F_1$ — гипергеометрическая функция ${}_pF_q$). Эта функция является решением уравнения Шредингера для гармонического осциллятора при $E = -1/2$. В результате получим двухъямный потенциал. Минимумы расположены симметрично в точках $x = \pm 1{,}68$. Соответствующее минимальное значение потенциальной энергии равно $V_1(x_{\min}) = -0{,}94$. Потенциальная энергия достигает локального максимума при $x = 0$ и $V_1(0) = -1/2$. Дополнительный уровень дискретного спектра расположен при $E = -1/2$, то есть энергетический уровень касается потенциальной кривой в ее максимуме. Волновая функция основного состояния с точностью до нормировочного множителя определяется функцией преобразования $\varphi_0(x) = \psi_{-1/2}^{-1}(x)$.

Рассмотрим теперь семейства изоспектральных потенциалов. Простейший из них генерируется при помощи следующего решения исходного уравнения Шредингера:

$$u(x) = \exp(x^2/4)\,(C + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}), \qquad h_0 u(x) = -u(x). \tag{75}$$

Получающийся здесь потенциал

$$V_1(x) = x^2/4 - 3/2 + 2xQ_1^{-1}(x)\exp(-x^2/2) + 2Q_1^{-2}(x)\exp(-x^2),$$

$$Q_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(C + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})) \tag{76}$$

был сгенерирован при помощи интегрального преобразования в работе [15] и впоследствии при помощи преобразования Дарбу в [63]. Однако полные выражения для волновых функций, включающие нормировочные коэффициенты, авторам не встречались в доступной литературе. При $|C| > 1$ мы получаем следующую систему нормированных на единицу волновых функций:

$$\varphi_0(x) = (2\pi)^{-1/4}\sqrt{C^2 - 1}\,u^{-1}(x),$$

$$\varphi_{n+1}(x) = (2\pi)^{-1/4}\,[(n+1)!]^{-1/2}\times$$

$$\times\,(He_{n+1}(x)\exp(-x^2/4) + He_n(x)\,Q_1^{-1}(x)\exp(-3x^2/4)),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{77}$$

Используя общее решение исходного уравнения Шредингера при $E = -2$

$$u(x) = \exp(-x^2/4) + x\exp(x^2/4)\left(-C + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erf}\,(x/\sqrt{2})\right),$$

получаем при $|C| < \sqrt{\pi/2}$ другой изоспектральный потенциал

$$V_1(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x + (2 + x^2)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erf}\,(x/\sqrt{2}) - C\right)\exp(x^2/2)}{1 - x\left(C - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erf}\,(x/\sqrt{2})\right)\exp(x^2/2)}\right)^2.$$

3.3.2. Эффективный кулоновский потенциал. В качестве следующего примера рассмотрим эффективный кулоновский потенциал

$$V_0(x) = -2z/x + l(l+1)/x^2, \quad E_n = -z^2/n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\psi_{nl}(x) = N^0_{nl}\, x^{l+1}\exp(-zx/l)\, L^{2l+1}_{n-l-1}(2zx/n),$$

$$N^0_{nl} = (2/n^2)\,(2/n)^l z^{l+3/2}\sqrt{(n-l-1)!/(n+l)!}\,.$$

Здесь $L^{\alpha}_n(x)$ — обобщенные многочлены Лагерра [62], и функции ψ_{nl} нормированы условием $\int\limits_0^{\infty}\psi^2_{nl}(x)\,dx = 1$.

Двукратное преобразование Дарбу с функциями дискретного спектра при $n = k$ и $n = k + 1$ в качестве фукнций преобразования генерирует следующий точно решаемый потенциал:

$$V_2^{(l,\,k,\,k+1)}(x) =$$

$$= -2z/x + (l+1)\,(l+4)/x^2 - 2u_0''(x)/w_0(x) + 2[w_0'(x)/w_0(x)]^2,$$

где

$$w_0(x) = 2(k+1)\, L^{2l+2}_{k-l-2}(2zx/k)\, L^{2l+1}_{k-l}(2zx/(k+1)) + L^{2l+1}_{k-l-1}(2zx/k)\,\times$$

$$\times\,[L^{2l+1}_{k-l}(2zx/(k+1)) - 2kL^{2l+2}_{k-l-1}(2zx/(k+1))].$$

Нормированные на единицу функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi^{(k)}_{nl}(x) = N_{nk}\left[\left(\frac{1}{n^2} + \frac{w_1(x)}{nk(k+1)\,w_0(x)}\right)\psi_{nl}(x) - N^0_{nl}\,\frac{2(2k+1)}{nk(k+1)\,w_0(x)}\,\times\right.$$

$$\left.\times\, L^{2l+1}_{k-l-1}(2zx/k)\, L^{2l+1}_{k-l}(2zx/(k+1))\, x^{l+1} L^{2l+2}_{n-l-2}(2zx/n)\exp(-zx/n)\right],$$

где

$$w_1(x) = 2n(k+1)\, L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k)\, L_{k-l-1}^{2l+2}(2zx/(k+1)) + L_{k-l}^{2l+1}(2zx/(k+1)) \times$$

$$\times \left[(n-1)\, L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k) - 2k(nL_{k-l-2}^{2l+2}(2xz/k) + L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k))\right],$$

и

$$N_{nk} = n^2 k(k+1)\, [(k^2 - n^2)\, ((k+1)^2 - n^2)]^{-1/2}.$$

Простейший нетривиальный потенциал соответствует случаю $l = 0$, $k = 2$:

$$V_2^{(0,2,3)}(x) = -2z/x + 10/x^2 + 40Q_0^{-1}(xz)(2 - xz)/x^2 - 100Q_0^{-2}(xz)(2xz - 3)/x^2,$$

$$Q_0(x) = -15 + 10x - 2x^2.$$

Уровни с $n = 2$ и $n = 3$ отсутствуют в его дискретном спектре. Нормированные на единицу функции дискретного спектра определяются системой новых, ортогональных на интервале $(0, \infty)$ многочленов $P_n(x)$:

$$\varphi_{nl}(x) = \frac{1}{6} N_{nl}^0 N_{n2} n^{-2} z^2 x^3 P_n(xz) Q_0^{-1}(xz) \exp(-xz/n).$$

Эти многочлены определяются через многочлены Лагерра следующим образом:

$$x^3 P_n(x) = 10n(-54 + 63x - 22x^2 + 2x^3)\, L_{n-2}^2(2x/n) + L_{n-1}^1(2x/n) \times$$

$$\times [270n(n-1) - 45(2 - 7n + 5n^2)x + 10(6 - 11n + 5n^2)x^2 - 2(6 - 5n + n^2)x^3].$$

Первые пять многочленов имеют вид

$$P_1(x) = -4, \qquad P_2(x) = P_3(x) = 0, \qquad P_4(x) = \frac{1}{24}(-84 + 63x - 18x^2 + 2x^3),$$

$$P_5(x) = \frac{8}{625}(-875 + 700x - 220x^2 + 30x^3 - x^4).$$

Приведем также выражение для потенциала, получающегося при четырехкратном преобразовании Дарбу с функциями преобразования с $l = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 5$ и $n_4 = 6$:

$$V_4^{(0,3,4,5,6)}(x) = -2z/x + 38/x^2 - 144x^{-2} Q_2^{-1}(xz)(492 - 228xz + 27x^2z^2 - x^3z^3) -$$

$$- 31104x^{-2} Q_2^{-2}(xz)\,(9240 - 2640xz + 255x^2z^2 - 8x^3z^3),$$

$$Q_2(x) = 11880 - 3960x + 540x^2 - 36x^3 + x^4.$$

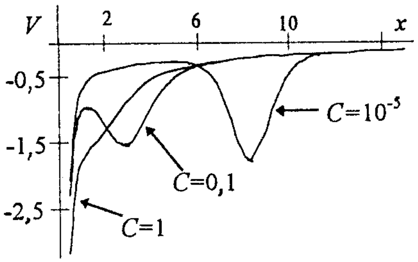


Рис.2. Изоспектральные потенциалы со спектром атома водорода

В противоположность гармоническому осциллятору здесь можно получить семейства изоспектральных потенциалов элементарного вида. Для этого нужно использовать в качестве функций преобразования сингулярные при $x = 0, \infty$ решения исходного уравнения. Мы конструируем элементарные решения с необходимыми свойствами при помощи функций

$$u_{nl}(x) = x^{-l} L_n^{-2l-1}(2zx/(n-l)) \exp(-zx/(n-l)),$$

$$h_0 u_{nl}(x) = -z^2/(n-l)^2 u_{nl}(x).$$

При $l = 1$ и $n = 2$ общее решение исходного уравнения Шредингера имеет вид

$$u(x) = x^{-1} \exp(-xz) Q_3(xz), \qquad Q_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + C \exp(2x),$$

$$h_0 u(x) = -z^2 u(x).$$

С помощью этой функции преобразования получаем семейство потенциалов, спектр которых совпадает со спектром водородоподобного атома:

$$V_1(x) = -2z/x - 16z^3 x(xz-1)\, Q_3^{-1}(xz) + 32 z^6 x^4 Q_3^{-2}(xz),$$

$$C \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty).$$

Эти потенциалы при $z = 1$ и некоторых значениях C приведены на рис.2. Нормированные на единицу функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi_1(x) = 2\sqrt{z^3 C(C+1)}\, u^{-1}(x),$$

$$\varphi_n(x) = N_{nl}^0\, n z^{-1}(n^2-1)^{-1/2} \exp(-xz/n) \times$$

$$\times [x(2 - xz/n) L_{n-2}^3(2xz/n) - 2x^2 (z/n)\, L_{n-3}^4(2xz/n) +$$

$$+ x(1 + xz + C\exp(2xz)(1-xz) + 2x^3 z^3)\, L_{n-2}^3(2xz/n)\, Q_3^{-1}(xz)],$$

$$n = 2, 3, \ldots .$$

Следующие по сложности потенциалы генерируются при $n = 4$ и $l = 2$ при помощи функции преобразования

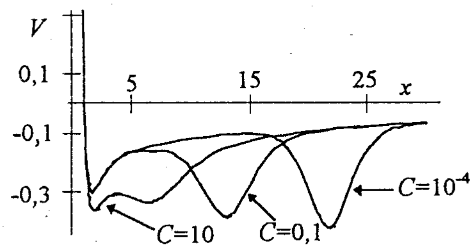


Рис.3. Изоспектральные центрально-симметричные потенциалы с центробежным членом

$$u(x) = x^{-2} \exp(-xz/2)\, Q_4(xz),$$

$$Q_4(x) = 24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 + x^4 + C \exp(x).$$

Получающиеся при этом потенциалы имеют центробежный член

$$V_1(x) = -2z/x + 2/x^2 + 2z^5x^3(4 - xz)\, Q_4^{-1}(xz) + 2z^{10}x^8 Q_4^{-2}(xz).$$

Ход этих потенциалов при $z = 1$ приведен на рис.3. Нормированные на единицу функции дискретного спектра вычисляются следующим образом:

$$\varphi_2(x) = z^{5/2}\sqrt{C(C/4! + 1)}\; u^{-1}(x), \qquad C \in (-\infty, -4!) \cup (0, \infty),$$

$$\varphi_n(x) = 2N^0_{n2}(n/z) \cdot (n^2 - 4)^{-1/2} \exp(-xz/n) \times$$

$$\times [x^2(3 - xz/n)\, L^5_{n-3}(2xz/n) - 2zx^3/n \cdot L^6_{n-4}(2xz/n) + \frac{1}{2} x^2 Q_4^{-1}(xz) \times$$

$$\times (96 + 72xz + 24x^2z^2 + 4x^3z^3 + x^5z^5 + (4 - xz)\, C \exp(xz))\, L^5_{n-3}(2xz/n)],$$

$$n = 3, 4, 5, \ldots .$$

Интересно отметить, что, как это видно из рис.2 и 3, график кулоноподобных потенциалов похож на график движущегося солитона, особенно если изменить знак $V \to -V$.

3.3.3. Потенциал Морса. Рассмотрим в качестве исходного потенциал Морса

$$V_0(x) = \exp(-2\alpha x) - A \exp(-\alpha x), \qquad A = \mathrm{const},$$

$$E_n = -\frac{1}{4}[A - \alpha(2n + 1)]^2, \qquad \psi_n = z^{\mu} \exp(-z/2)\, L^{2\mu}_n(z),$$

$$z = \frac{2}{\alpha} \exp(-\alpha x), \quad \mu = \sqrt{|E_n|}/\alpha, \quad n \le (A/\alpha - 1)/2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Будем считать, что переменная x принимает все вещественные значения. Преобразование Дарбу второго порядка с функциями ψ_1 и ψ_2 приводит к следующему точно решаемому потенциалу:

$$V_2^{1,2}(x) = \exp(-2\alpha x) - \exp(-\alpha x)(a - 4\alpha) +$$
$$+ 128(2\alpha - A)^{-1}\alpha^3 Q_4^{-2}(x)\,[(A - 3\alpha)\exp(\alpha x) - 1] +$$
$$+ 8(2\alpha - A)^{-1}\alpha^2 Q_4^{-1}(x)\,[4\alpha - (A - 2\alpha)(A - 3\alpha)\exp(\alpha x)],$$
$$Q_4(x) = 4 - 4(A - 3\alpha)\exp(\alpha x) + (A - 2\alpha)(A - 3\alpha)\exp(2\alpha x), \quad A \neq 2\alpha.$$

В его дискретном спектре отсутствуют уровни с $n = 1$ и $n = 2$.

На основе потенциала Морса можно построить семейство изоспектральных потенциалов элементарного вида с одним уровнем дискретного спектра. Эта возможность основана на том, что при полуцелых μ оба частных решения уравнения Шредингера имеют элементарный вид.

Пусть μ равно некоторому фиксированному значению: $\mu = -(k + 1)/2$ и $A = -k\alpha$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В этом случае потенциал Морса

$$V_0(x) = \alpha^2 z^2/4 + \alpha^2 kz/2$$

совсем не имеет дискретного спектра. Однако при $E_0 = -\dfrac{1}{4}(k + 1)^2\alpha^2$ общее решение уравнения Шредингера имеет элементарный вид:

$$u(x) = \exp(-z/2)\, z^{-(k+1)/2} Q_5(z),$$

$$Q_5(z) = 1 + C\exp(z)\left(z^k + k!\sum_{i=1}^{k}(-1)^i z^{k-i}/(k-i)! \right).$$

Используя эту функцию в качестве функции преобразования, получим семейство потенциалов с одним уровнем дискретного спектра

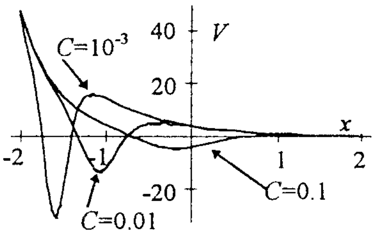
$$V_1(x) = \alpha^2 z^2/4 + \alpha^2(k/2 + 1)\,z - 2\alpha^2 z d\ln Q_5(z)/dz - 2\alpha^2 z^2 d^2\ln Q_5(z)/dz^2,$$

с энергией $E = E_0$ и нормированной на единицу волновой функцией вида

$$\varphi_0(x) = [\alpha C((-1)^k k!C + 1)]^{1/2}\, u^{-1}(x).$$

Из этого соотношения ясно, что при четных n постоянная C должна удовлетворять условию $C \in (-\infty, -1/k!) \cup (0, \infty)$, а при нечетных — лежать внутри интервала $C \in (0, 1/k!)$.

Рис.4. Изоспектральные одноуровневые потенциалы, построенные на основе потенциала Морса



Простейший из этих потенциалов соответствует $k = 0$:

$$V_1(x) = \exp(-2\alpha x) +$$

$$+ 2\alpha[1 - C\exp(2e^{-\alpha x}/\alpha)]\, Q_6^{-1}(x) - 8C\exp(2e^{-\alpha x}/\alpha)\, Q_6^{-2}(x),$$

$$Q_6(x) = \exp(\alpha x)\,[1 + C\exp(2e^{-\alpha x}/\alpha)].$$

Для $k = 2$ поведение этих потенциалов представлено на рис.4.

3.3.4. Сингулярный осциллятор. Под сингулярным осциллятором мы понимаем квантово-механическую систему с гамильтонианом

$$h_0 = -\partial_x^2 + x^2/4 + b/x^2, \qquad b \in \mathbb{R}, \qquad x \in R = [0, \infty). \tag{78}$$

Многие квантово-механические задачи и ряд задач квантовой теории поля сводятся к решению уравнения Шредингера с гамильтонианом (78). К ним, в частности, относятся известная задача о движении частицы в кулоновском поле и задача о парном взаимодействии трех частиц в одномерном пространстве, впервые решенная Калоджеро [65]. Интерес к данному гамильтониану в последнее время вновь возрос в связи с его использованием при описании спиновых цепочек [66], квантового эффекта Холла [67], дробных статистик и анионов [68].

Дискретный базис пространства $H_0(R)$ определяется представлением дискретной серии алгебры $su(1.1)$, характеризуемым значением $k = 1/2 + (1/4)\sqrt{1+4b} = E_0/2$, определяющим собственное значение оператора Казимира:

$$C = \frac{1}{2}\{K_+, K_-\} - K_0 = 3/16 - b/4 = k(k+1),$$

где

$$K_+ = \frac{1}{2}[(a^+)^2 - b/x^2], \qquad K_- = \frac{1}{2}[a^2 - b/x^2], \qquad K_0 = \frac{1}{2}h_0,$$

$$a = \partial_x + x/2, \qquad a^+ = -\partial_x + x/2,$$

$K_\pm$ и K_0 — генераторы алгебры $su(1.1)$. Вектор основного состояния (вектор младшего веса) определяется условиями

$$K_0 |0\rangle = k |0\rangle, \qquad K_- |0\rangle = 0.$$

Остальные базисные векторы данного представления определяются при помощи повышающего оператора K_+:

$$|n\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma(2k)}{n!\Gamma(2k+n)}}\,(K_+)^n |0\rangle, \qquad K_0 |n\rangle = (k+n)|n\rangle$$

и в координатном представлении выражаются через многочлены Лагерра L_n^{α}:

$$\psi_n(x) = [n!2^{1-2k}\Gamma^{-1}(n+2k)]^{1/2} x^{2k-1/2} L_n^{2k-1}(x^2/2)\exp(-x^2/4). \tag{79}$$

Кроме решений $\psi_n(x) \in H_0(R)$, уравнение Шредингера с гамильтонианом (78) имеет и другие решения элементарного вида, пригодные в качестве функций преобразования. В частности, функции вида

$$u_p(x) = x^{-2k+3/2}\exp(x^2/4)\, L_p^{1-2k}(y), \quad y = -x^2/2 \tag{80}$$

на границах интервала $[0, \infty)$ будут сингулярными решениями исходного уравнения Шредингера

$$h_0 u_p(x) = 2(k-p-1)\, u_p(x), \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Эти функции генерируют следующий точно решаемый потенциал:

$$V_1^{(p)}(x) = V_0(x) + A_p(x),$$

$$A_p(x) = -1 + \frac{3-4k}{x^2} + 2\left(\frac{xL_{p-1}^{2-2k}(y)}{L_p^{1-2k}(y)}\right)^2 - 2\,\frac{x^2L_{p-2}^{3-2k}(y) + L_{p-1}^{2-2k}(y)}{L_p^{1-2k}(y)}\,.$$

Оператор преобразования от решений уравнения Шредингера с гамильтонианом (78) к решениям уравнения с гамильтонианом $h_1^{(p)} = -\partial_x^2 + V_1^{(p)}(x)$ имеет вид

$$\hat{L} = \frac{4k-3}{2x} - \frac{x}{2} - \frac{xL_{p-1}^{2-2k}(y)}{L_p^{1-2k}(y)} - \partial_x\,.$$

Функция $u_p^{-1}(x)$, определяющая ядро оператора $\hat{L}^+$, нормируема только при четных p, поскольку

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{u_p^2(x)} = (-1)^p 2^{2k-2} p!\,\Gamma(2k-p-1).$$

При нечетных p разность потенциалов $A_p(x)$ имеет сингулярность на полуоси $(0, \infty)$. Только при четных p функции (80) пригодны в качестве функций преобразования. Количество различных значений p ограничено условием $p < 2k - 1$. Поскольку $k \geq 1$, то всегда можно выбрать $p = 0$. Этому случаю соответствует форм-инвариантный потенциал, отличающийся от исходного только значением параметра b, $A_1 = -1 + (3 - 4k)/x^2$. Понятие форм-инвариантности введено в работе [69]. Совершенно ясно, что все форм-инвариантные потенциалы, классифицированные в этой работе, имеют среди решений уравнения Шредингера такие, которые после взятия второй логарифмической производной дают функциональную зависимость, отличающуюся от исходного потенциала только значениями параметров. Преобразование Дарбу для них, при соответствующем выборе функции преобразования, не изменяет вид функциональной зависимости.

Функции (80) порождают при четных p суперсимметричную квантово-механическую модель, в которой суперсимметрия точная. Невырожденное вакуумное состояние супергамильтониана строится при помощи функции

$$\varphi_0(x) = 2^{k-1}\sqrt{p!\Gamma(2k - p - 1)}\; u_p^{-1}(x).$$

Для конструирования модели со спонтанно нарушенной суперсимметрией рассмотрим решение исходного уравнения Шредингера, обращающееся в нуль в начале координат и в бесконечность — при $x \to \infty$:

$$u_p(x) = \psi_p(ix), \qquad h_0 u_p = -2(k + p)\, u_p, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots .$$

Интеграл нормировки функции u_p^{-1} имеет вид

$$\int\limits_0^\infty u_p^{-2}(x)\, dx = (-1)^p 2^{-2k} p!\Gamma(1 - p - 2k).$$

Отсюда следует, что функция u_p^{-1} ненормируема при всех p, но генерируемая с ее помощью разность потенциалов

$$A_p(x) = -1 + \frac{4k-1}{x^2} - 2\,\frac{x^2 L_{p-2}^{2k+1}(y) + L_{p-1}^{2k}(y)}{L_p^{2k-1}(y)} + 2x^2\left[\frac{L_{p-1}^{2k}(y)}{L_p^{2k-1}(y)}\right]^2$$

является регулярной функцией на полуоси $(0, \infty)$. Решения нового уравнения Шредингера, образующие базис пространства $H_0(R)$, получаем при помощи оператора преобразования

$$\hat{L} = \frac{1-4k}{2x} - \frac{x}{2} - \frac{xL_{p-1}^{2k}(y)}{L_p^{2k-1}(y)} - \partial_x .$$

В простейших случаях $p = 0, 1$ для разностей потенциалов получаем выражения

$$A_0(x) = \frac{4k-1}{x^2} - 1, \quad A_1(x) = A_0(x) + \frac{4}{4k+x^2} - \frac{32k}{(4k-x^2)^2} .$$

3.4. Когерентные состояния преобразованных гамильтонианов. Когерентные состояния, как нерасплывающиеся волновые пакеты, были впервые введены для гармонического осциллятора Шредингера [70]. Затем их свойства изучались Клаудером [71] и Глаубером [72]. К настоящему времени они нашли весьма широкое применение в самых разных областях физики и математики [41], [73]. Можно отметить, в частности, их применение в квантовой оптике [72,74,75], радиофизике [76], математической физике [77,78]. Существуют различные определения когерентных состояний [79], приводящие к одинаковому результату для гармонического осциллятора и, как правило, к различным результатам для других систем.

К настоящему времени накоплено значительное количество точно решаемых потенциалов (см. обзор [44] и п.3.3 данного обзора). Однако практически отсутствуют работы, посвященные построению и исследованию систем когерентных состояний для новых гамильтонианов. Исключая гармонический осциллятор, когда при обычном суперсимметричном подходе новый потенциал отличается от исходного на аддитивную постоянную, и, следовательно, имеет ту же систему когерентных состояний, что и исходный потенциал, авторам известны только три работы на данную тему. Две из них [80,81] посвящены исследованию когерентных состояний изоспектральных гамильтонианов с эквидистантным спектром и одна [60] — исследованию систем когерентных состояний q-деформированных потенциалов гармонического осциллятора и одного класса автодуальных потенциалов.

Метод операторов преобразования Дарбу является мощным инструментом для построения и исследования систем когерентных состояний преобразованных гамильтонианов.

Определим когерентное состояние как собственное состояние оператора уничтожения, являющегося интегралом движения рассматриваемой системы. Под операторами уничтожения и рождения $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ будем понимать любые два интеграла движения, образующие алгебру Гейзенберга — Вейля w_1^0: $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$. Будем предполагать, что представление этой алгебры в гильбертовом пространстве $H_0(R)$ неприводимо.

Как отмечалось в п.2.5, у нас могут возникнуть три возможности. В первом случае функция преобразования $u = \psi_0 \in H_0(R)$ и $H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi,$ $\psi \in H_0^0(R)\}$. Во втором случае $u \notin H_0(R)$ и $H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi,$ $\psi \in H_0(R)\}$. В третьем $u \notin H_0(R)$, $H_1^1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi, \psi \in H_0(R)\}$ и $H_1(R) =$ $= H_1^1(R) \oplus \ker \hat{L}^+$.

Будем предполагать, что оператор $M = \hat{L}^{-1}$ определен на всем пространстве $H_1(R)$ в первом и втором случаях. В третьем случае пространство $H_0(R)$ отображается не на все гильбертово пространство $H_1(R)$, а лишь на его подпространство $H_1^1(R)$. Поэтому обратный оператор M определен на пространстве $H_1^1(R)$.

При этих предположениях на пространстве $H_1(R)$ (а в третьем случае на $H_1^1(R)$) можно определить операторы $\tilde{a} = \hat{L}\tilde{a}M$ и $\tilde{a}^+ = \hat{L}\hat{a}^+M$, которые реализуют представление алгебры Гейзенберга — Вейля w_1^1. Кроме того, если для исходного гамильтониана h_0 известна система когерентных состояний ψ_α, $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$, $\psi_\alpha \in H_0(R)$, то функция $\varphi_\alpha = \hat{L}\psi_\alpha$ будет собственной для оператора уничтожения $\tilde{a}$ и ее можно интерпретировать как когерентное состояние преобразованного гамильтониана h_1. В силу неприводимости представления алгебры Гейзенберга — Вейля w_1^1 эти состояния образуют полную (а точнее, переполненную) систему состояний в соответствующих неприводимых пространствах.

Пусть теперь в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ изменения переменной α для состояний ψ_α известна мера $\mu(\alpha)$, реализующая разложение единицы в пространстве $H_0(R)$:

$$1 = \int_D |\psi_\alpha\rangle \langle\psi_\alpha\rangle \, d\mu(\alpha).$$

Тогда соответствующее разложение для пространства $H_1(R)$ (или $H_1^1(R)$) примет вид

$$1 = (h_1 - C)^{-1} \int_D |\varphi_\alpha\rangle \langle\varphi_\alpha| \, d\mu(\alpha),$$

где C является собственным значением оператора h_1, соответствующим функции преобразования $v = [L_1(t)\bar{u}]^{-1}$ и по построению $h_1\varphi \neq C\varphi$, $\forall\, \varphi \in H_1(R)$ (или $H_1^1(R)$).

3.4.1. Когерентные состояния простых квантовых систем. Здесь мы приведем необходимые для дальнейшего изложения хорошо известные системы когерентных состояний квантовых систем, для которых нами построены точно решаемые преобразованные гамильтонианы.

1. Рассмотрим когерентные состояния гармонического осциллятора: $V_0(x) = x^2/4$. Операторы уничтожения и рождения, являющиеся интегралами движения для рассматриваемой системы и образующие алгебру Гейзенберга — Вейля w_1^0, имеют вид

$$\hat{a}(t) = \exp(it)(\partial_x + x/2), \qquad \hat{a}^+(t) = \exp(-it)(-\partial_x + x/2).$$

Когерентные состояния $|z, t\rangle$, являющиеся собственными состояниями оператора уничтожения, соответствуют решению уравнения Шредингера в разделенных переменных

$$\psi_z(x, t) = (2\pi)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}it + zx - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z\bar{z}\right),$$
$$\hat{a}\psi_z(x, t) = \zeta\psi_z(x, t), \qquad z = \zeta \exp(-it), \qquad \zeta \in \mathbb{C}. \tag{81}$$

Вектор $|z, t\rangle$ можно разложить по ортонормированной системе стационарных состояний $|n, t\rangle = \exp(-i(n + 1/2)t)\,|n\rangle$, полной в $H_0(R)$:

$$|z, t\rangle = \exp(-z\bar{z}/2 - it/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n, t\rangle. \tag{82}$$

Нам понадобится также координатное представление стационарных состояний

$$\psi_n(x, t) = (2\pi)^{-1/4}(n!)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{4}x^2 - i\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)He_n(x). \tag{83}$$

2. Рассмотрим когерентные состояния свободной частицы. Операторы уничтожения и рождения для такой системы определяются следующим образом:

$$\hat{a}(t) = (i - t)\,\partial_x + ix/2, \qquad \hat{a}^+(t) = (i + t)\,\partial_x - ix/2.$$

Когерентные состояния определяем из уравнения $\hat{a}\psi_z = z\psi_z$, $\psi_z \in H_0(R)$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\psi_z(x, t) = (2\pi)^{-1/4}(1 + it)^{-1/2}\exp\big(-(z + \bar{z})^2/4 -$$
$$-(1 + it)^{-1}(x/2 + iz)^2\big). \tag{84}$$

Функции дискретного базиса пространства $H_0(R)$ являются собственными для оператора $K_{-2} - K_2$ (см. [38]):

$$\psi_n(x, t) = (-i)^n (n! 2^n \sqrt{2\pi})^{-1/2} (1 + it)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp(-in \operatorname{arctg} t - (1 + it)^{-1} x^2/4) \, H_n(x/\sqrt{2 + 2t^2}). \tag{85}$$

Операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ являются лестничными для этих функций $\hat{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_n$, $\hat{a}^+\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}$. Разложение функции (84) по базису (85) выглядит следующим образом:

$$|z, t\rangle = \exp\left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \, |n, t\rangle. \tag{86}$$

3.4.2. Когерентные состояния ангармонических осцилляторов с квазиэквидистантным спектром. Под квазиэквидистантным спектром мы понимаем эквидистантный спектр с конечным числом лакун, то есть эквидистантный спектр, из которого вычеркнуто конечное число уровней. Такой спектр получается, в частности, из спектра гармонического осциллятора при преобразованиях Дарбу. Когерентные состояния таких систем рассмотрены в [31].

Рассмотрим в качестве функций преобразования функции (70) при $m = 2k$. Остановимся более подробно на интегральном операторе преобразования M, определяемом формулами (31), (33). Выбор $t_0 = -i\infty$ приводит к условию $C_1'(x) = 0$, и мы положим в (31) $C_1 = (0)$. Действие оператора M на стационарные состояния (83) дает с точностью до постоянного множителя те же функции (72) стационарных состояний гамильтониана $h_1^{(2k)} = -\partial_x^2 + V_1^{(2k)}(x) + 1/2$, $\varphi_{n+1}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, что и дифференциальный оператор преобразования (12). Подействуем оператором M на когерентное состояние (81). В результате получим функцию

$$\varphi_z(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{z\bar{z}}{2} - i\left(2k + \frac{1}{2}\right)t\right)\left[\frac{P_{2k}'(x)}{P_{2k}(x)} + x - \frac{\partial}{\partial_x}\right]\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} I(z, x),$$

$$I(z, x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z - x}{\sqrt{2}}\right), \tag{87}$$

описывающую когерентные состояния гамильтониана $h_1^{(2k)}$. Разложение (82) позволяет получить разложение функций (87) по системе стационарных состояний $\{\varphi_n(x, t) = \varphi_n(x) \exp(-i(n + 1/2)\, t),\ n = 1, 2, \ldots\}$:

$$\varphi_z(x,t) = (2\pi)^{1/4} \exp(-z\bar{z}/2) \times$$
$$\times \left[\sqrt{(2k)!}\, \psi_0 + \exp(-it/2)\, \zeta^{2k+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\sqrt{2k+s+1)s!}}\, \psi_{s+1} \right], \quad \zeta \in \mathbb{C}. \qquad (88)$$

Коэффициент разложения при функции $\psi_0(x, t) = \psi_0(x) \exp(i(2k + 1/2)\, t)$ необходимо вычислить непосредственным интегрированием.

Отметим, что при $\zeta = 0$ функция (88) совпадает с функцией основного состояния φ_0. Разложение (88) полезно при вычислении интегралов с функциями (87), например, для нормировочного коэффициента этих функций и среднего значения энергии находим

$$\langle z, t \,|\, z, t \rangle = \sqrt{2\pi}\, (2k)! \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!} (z\bar{z})^s, \qquad (89)$$

$$\langle h_1^{(2k)} \rangle = \left[(2k)! \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!} (z\bar{z})^{s-2k-1} \right]^{-1} - 2k - \frac{1}{2}. \qquad (90)$$

Функция (87) выражена через интеграл вероятностей erfc (z). Однако явные выражения для функции $\varphi_z(x, t)$ содержат только элементарные функции. В частности, при $k = 0$ мы получаем гармонический осциллятор со сдвинутым на единицу вверх началом отсчета энергии. Формулы (71), (72) и (87)—(90) переходят в соответствующие осцилляторные формулы. Например, из (90) получаем $\langle h_1^{(0)} \rangle = z\bar{z} - 1/2$.

При $k = 1$ функция (87) имеет вид

$$\varphi_z(x,t) = N_z \left[z^2 + 2\, \frac{1 - xz}{1 + x^2} \right] \exp\left(\frac{x^2}{4} + xz - \frac{z^2}{2} - \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{5}{2}\, it \right), \qquad (91)$$

где $N_z = [(2\pi)^{1/2} (1 + (1 - z\bar{z})^2)]^{-1/2}$.

Среднее значение координаты и импульса в состояниях (91) выражается через интеграл вероятностей erfc (z), в частности,

$$\langle x \rangle = z + \bar{z} + \frac{\sqrt{2\pi}}{1 + (1 - z\bar{z})^2} \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (z + \bar{z})^2 \right) \times$$
$$\times \operatorname{Re} \left[(i - z - \bar{z} - iz\bar{z}) \exp(-iz - i\bar{z})\, \operatorname{erfc} \frac{1 - iz - i\bar{z}}{\sqrt{2}} \right].$$

Дифференциальное преобразование приводит к другой системе когерентных состояний; например, при $k = 1$ получим состояния

$$\tilde{\varphi}_z(x,\, t) = \hat{L}\psi_z(x,\, t) =$$

$$= (2\pi)^{-1/4}\left(z - x - \frac{2x}{1 + x^2} \right)\exp\left(-\frac{1}{4}x^2 + zx - \frac{1}{2}z\bar{z} - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}it \right),$$

которые при $\zeta = 0$ совпадают с функцией первого возбужденного состояния гамильтониана $h_1^{(2)}$, обладающей свойством $\tilde{a}\varphi_1 = 0$.

3.4.3. Ангармонические изоспектральные гамильтонианы с эквидистантным спектром. Когерентные состояния изоспектральных ангармонических гамильтонианов с эквидистантным спектром рассмотрены в работах [80—82]. Мы в своем изложении будем следовать работе [82].

Рассмотрим гамильтониан $h_1 = -\partial_x^2 + V_1(x) + 1/2$, где потенциал $V_1(x)$ получен при помощи функции преобразования (75) и определен соотношением (76). На самом деле, мы имеем семейство потенциалов, зависящих от параметра C, спектр собственных значений которых совпадает со спектром гармонического потенциала. Собственные функции этих потенциалов могут быть получены действием как интегрального оператора преобразования (31), (33), так и дифференциального (12) на стационарные состояния (83), и они определяются соотношениями (77):

$$\varphi_0(x,\, t) = \varphi_0(x)\exp\,(it/2),$$

$$\varphi_n(x,\, t) = \varphi_n(x)\exp\,(-i(n + 1/2)\,t), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Рассмотрим вновь более подробно действие интегрального оператора (31), (33) на когерентные состояния гармонического осциллятора (81). При этом получим когерентные состояния преобразованных гамильтонианов

$$\varphi_z(x,\, t) = M\psi_z(x,\, t) = (2\pi)^{-1/4}(z\zeta)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}z\bar{z} - \frac{1}{4}x^2 \right)\times$$

$$\times\left[\exp\left(xz - \frac{1}{2}z^2 \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{z - x}{\sqrt{2}} \right)Q_1^{-1}(x) \right], \qquad \zeta \neq 0.$$

Прямое вычисление нормировочного коэффициента этой функции приводит к следующему результату:

$$\langle\varphi_z\,|\,\varphi_z\rangle = (z\bar{z})^{-1}\left(\frac{\exp\,(-z\bar{z})}{C^2 - 1} + 1 \right).$$

Эту функцию можно разложить по системе функций $\{\varphi_i\,(x,\, t)\}$. Коэффициент разложения при функции $\varphi_0(x,\, t)$ должен быть вычислен непосредственным интегрированием:

$$\langle\varphi_0|\varphi_z\rangle = (2\pi)^{-1/4}\zeta^{-1}C(C^2-1)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}z\bar{z}\right),$$

в то время как для вычисления остальных коэффициентов мы используем разложение (82):

$$\varphi_z(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}z\bar{z}\right)\left[\frac{C}{\sqrt{C^2-1}}\varphi_0(x,t)+\sqrt{z\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{(n+1)!}}\varphi_{n+1}(x,t)\right].$$

Принимая во внимание значение нормировочного коэффициента, получаем окончательное выражение для когерентных состояний ангармонических осцилляторов с эквидистантным спектром

$$\Theta_z(x,t) = C[1+(C^2-1)\exp(z\bar{z})]^{-1/2}\times$$
$$\times\left[\psi_0(x,t)+\frac{\sqrt{C^2-1}}{C}\sqrt{\frac{\zeta}{z}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\psi_n(x,t)\right]. \tag{92}$$

Отметим, что функция (92) допускает значение $\zeta = 0$ и совпадает в этом случае с функцией основного состояния нового гамильтониана. Другой предельный случай, $C \to \infty$, соответствует гармоническому осциллятору со сдвинутым началом отсчета энергии. Нетрудно видеть, что функция $\Theta_z(x, t)$ стремится в этом случае к когерентному состоянию гармонического осциллятора (82).

Используя разложение (92), вычисляем среднее значение энергии в когерентном состоянии $\Theta_z(x, t)$:

$$\langle E\rangle = \frac{z\bar{z}(C^2-1)}{\exp(-z\bar{z})+C^2-1}-\frac{1}{2}.$$

Дифференциальный оператор преобразования $\hat{L}$ приводит к другой системе когерентных состояний:

$$\tilde{\varphi}_z(x,t) = (2\pi)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}z\bar{z}-\frac{1}{2}z^2+zx-\frac{1}{4}x^2-\frac{i}{2}t\right)\times$$
$$\times\left(z-x-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp(-x^2/2)}{C+\operatorname{erf}(x/\sqrt{2})}\right). \tag{93}$$

При $\zeta = 0$ эта функция совпадает с функцией первого возбужденного состояния нового гамильтониана, которая обладает свойством $\tilde{a}\psi_1 = 0$.

В работе [81] с использованием w-деформированной алгебры Гейзенберга — Вейля получены когерентные состояния рассматриваемой системы, которые при значении параметра деформации $w = 2$ совпадают с состояниями (93). Подход, развиваемый в цитированной работе, не позволяет получить когерентные состояния (92) ни при каких значениях параметра деформации.

3.4.4. Когерентные состояния односолитонного потенциала. Когерентные состояния односолитонного потенциала рассмотрены в работе [83]. Односолитонный потенциал уравнения KDF $V_1(x) = -2a^2 \operatorname{sech}(ax + b)$, $a > 0$, имеющий единственный уровень дискретного спектра $E = -a^2$, положение которого не зависит от значения параметра b, получается однократным преобразованием Дарбу из уравнения Шредингера для свободной частицы, если в качестве функции преобразования взять

$$u(x, t) = \operatorname{ch}(ax + b) \exp(ia^2 t). \tag{94}$$

Параметр b, осуществляющий изоспектральную деформацию потенциала, для нас несуществен, и мы положим $b = 0$. Волновая функция дискретного спектра имеет вид

$$\varphi_0(x) = \sqrt{a/2}\, \operatorname{sech}(ax),$$

$$h_1\varphi_0 = -a^2\varphi_0, \qquad h_1 = -\partial_x^2 - 2a^2 \operatorname{sech}^2(ax). \tag{95}$$

Оператор преобразования Дарбу от решений уравнения Шредингера с нулевым потенциалом к решениям с потенциалом $V_1(x)$ имеет вид

$$\hat{L} = -a \operatorname{th}(ax) + \partial_x. \tag{96}$$

Действуя им на базисные функции (85) пространства $H_0(R)$, найдем

$$\varphi_{n+1}(x, t) = \frac{(-i)^n}{2}(2^n \sqrt{2\pi}\, n!)^{-1/2}(1 + it)^{-3/2}\exp(-(1 + it)^{-1}x^2/4 - in \operatorname{arctg} t)\times$$
$$\times [2\sqrt{2}n(1 + it)(1 + t^2)^{-1/2}H_{n-1}(x/\sqrt{2 + 2t^2}) -$$
$$-(x + 2a(1 + it)\operatorname{th}(ax)\, H_n(x/\sqrt{2 + 2t^2}))], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{97}$$

Система функций (95), (97) образует базис пространства $H_1(R)$.

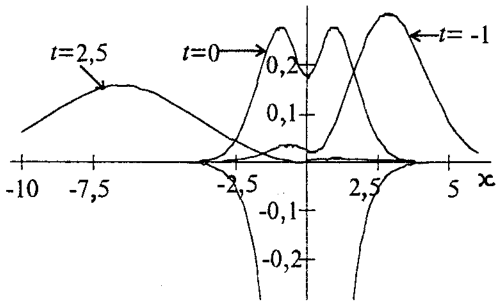


Рис.5. Плотность вероятности когерентного состояния односолитонного потенциала

Оператор симметрии $\hat{L}^{+}\hat{L}$ выражается через гамильтониан свободной частицы $h_0 = -\partial_x^2$: $\hat{L}^{+}\hat{L} = h_0 + a^2 = (1/4)(\hat{a} + \hat{a}^{+})^2 + a^2$. Это свойство позволяет вычислить интеграл нормировки базисных функций $\langle\varphi_{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle = \langle\psi_n|h_0 + a^2|\psi_n\rangle = n/2 + 1/4 + a^2$. Каждая базисная функция (97), кроме $n = 1, 2$, неортогональна двум другим: $\langle\varphi_{n+1}|\varphi_{n+3}\rangle = (1/4)\sqrt{(n+1)(n+2)}$.

Действуя оператором (96) на функцию когерентного состояния свободной частицы (84), найдем функцию когерентного состояния односолитонного потенциала

$$\varphi_z(x, t) = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-1/4}(1 + it)^{-3/2}[x + 2iz + 2a(1 + it)\,\mathrm{th}\,(ax)] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{4}(z + \bar{z})^2 - (1 + it)^{-1}(x/2 + iz)^2\right). \tag{98}$$

Интеграл нормировки для этой функции имеет вид $\langle\varphi_z|\varphi_z\rangle = 1/4 + (1/4)(z + \bar{z})^2 + a^2$.

Если через Θ_n обозначить нормированные на единицу функции дискретного базиса пространства $H_1(R)$, то, используя формулу (86), можно записать разложение нормированной на единицу функции когерентного состояния по этому базису:

$$|z, t\rangle = [1 + 4a^2 + (z + \bar{z})^2]^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{1 + 4a^2 + 2n}\;|\Theta_{n+1}\rangle.$$

Непосредственным интегрированием можно установить следующее свойство ортогональности: $\langle\Theta_0|z, t\rangle = 0$.

Вследствие безотражательности потенциала выполняется равенство $|\varphi_z(x, t)|^2 = |\varphi_z(-x, -t)|$. На рис.5 приведен график функции плотности вероятности $|\varphi_z(x, t)|^2$ при $a = 1$ и $z = 1$ для моментов времени $t = -1, 0, 2{,}5$. В нижней части графика приведена часть потенциальной ямы, глубина которой равна -2. Уровень дискретного спектра $E_0 = -1$ расположен точно посередине ямы. В моменты времени, соответствующие $t = \pm\infty$, частица максимально делокализована. При $t < 0$ частица более локализована в области $x > 0$, при $t = 0$ частица локализована симметрично в области ямы, при $t > 0$ частица более локализована в области $x < 0$, то есть частица движется справа налево, максимально локализуясь при $t = 0$ в области ямы. Действие интегрального оператора M, определенного формулами (31) и (33) при $C_1 = 0$, приводит к другой системе когерентных состояний:

$$\tilde{\varphi}_z(x, t) = M\psi_z(x, t) = \frac{-i}{4}\sqrt{\pi}(2\pi)^{-1/4}\,\mathrm{ch}^{-1}(ax)\exp\left(-\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2 + a^2(1+it)\right)\times$$

$$\times\left[\exp(2iaz)\,\mathrm{erfc}\left(a\sqrt{1+it} + \frac{x/2+iz}{\sqrt{1+it}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp(-2iaz)\,\mathrm{erfc}\left(a\sqrt{1+it} + \frac{x/2+iz}{\sqrt{1+it}}\right)\right].$$

Отметим, что, производя повторное преобразование Дарбу, можно получить многосолитонные потенциалы и когерентные состояния для них.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-02-16279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kummer E.F.** — J. Reine Angew. Math., 1887, v.100, p.1.
2. **Liouville J.** — J. Math. Pures et Appl., 1837, v.2, p.16.
3. **Stäckel P.** — J. Reine Angew. Math., 1893, v.111, p.290.
4. **Беркович Л.М.** — Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений. Саратов: изд-во СГУ, 1989.
5. **Натанзон Г.А.** — Вестник ЛГУ, 1971, №10, с.22; ТМФ, 1979, т.38, с.219.
6. **Moutard T.F.** — Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1875, v.80, p.729.
7. **Имшенецкий В.Г.** — Зап. Имп. Акад. Наук, 1882, т.42, с.1.
8. **Darboux G.** — Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1882, v.94, p.1456; Leçons sur la théorie générale des surfaces et les application géométriques du calcul infinitésimale. Deuxiem partie. Paris, 1889.
9. **Schrödinger E.** — Proc. Roy. Irish. Acad., 1940, v.A46, p.9; v.A47, p.53.

10. **Hull H., Infeld T.E.** — Phys. Rev., 1948, v.74, p.905.
11. **Infeld T.E., Hull H.** — Rev. Mod. Phys., 1951, v.53, p.21.
12. **Багров В.Г., Самсонов Б.Ф.** — ТМФ, 1995, т.104, с.356.
13. **Witten E.** — Nucl. Phys., 1981, v.B185, p.513; 1982, v.B202, p.253.
14. **Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В., Эйдес М.И.** — ТМФ, 1984, т.61, с.17.
15. **Abraham P.B., Moses H.A.** — Phys. Rev., 1980, v.A22, p.1333.
16. **Pursey D.L.** — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.431.
17. **Luban M., Pursey D.L.** — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.431.
18. **Фаддеев Л.Д.** — УМН, 1959, т.105, с.57.
19. **Левитан Б.М.** — Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
20. **Агранович З.С., Марченко В.А.** — Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд-во ХГУ, 1969.
21. **Schnizer W.A., Leeb H.** — J. Phys. A: Math. Gen., 1994, v.27, p.2605.
22. **Samsonov B.F.** — J. Phys. A: Math. Gen., 1995, v.28, p.6989.
23. **Захарьев Б.Н., Чабанов В.М.** — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.1561.
24. **Шабат А.Б.** — ТМФ, 1995, т.103, с.170.
25. **Andrianov A.A., Ioffe M.V., Cannata F.** — Mod. Phys. Lett., 1996, v.17, p.1417.
26. **Андрианов А.А., Иоффе М.В., Нишнианидзе Д.Н.** — ТМФ, 1995, т.104, с.463.
27. **Cannata F., Ioffe M.V.** — Phys. Lett. B, 1992, v.278, p.399.
28. **Cannata F., Ioffe M.V.** — J. Phys. A: Math. Gen., 1993, v.26, p.L89.
29. **Andrianov A.A., Ioffe M.V., Cannata F., Dedonder J.-P.** — Int. J. Mod. Phys., 1995, v.10, p.2683.
30. **Багров В.Г., Самсонов Б.Ф., Шекоян Л.А.** — Изв. вузов. Физика, 1995, №7, с.59.
31. **Багров В.Г., Самсонов Б.Ф.** — ЖЭТФ, 1996, т.109, вып.4, с.1105.
32. **Bagrov V.G., Samsonov B.F.** — Phys. Lett., 1996, vol.A210, p.60.
33. **Matveev V.B.** — Lett. Math. Phys., 1979, v.3, p.213.
34. **Matveev V.B., Salle M.A.** — Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer, 1990.
35. **Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.** — Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
36. **Захаров В.Е., Шабат А.Б.** — Функциональный анализ и его приложения, 1974, т.8, с.43.
37. **Boiti M., Pempinelli F., Pogrebkov A.K., Polivanov M.C.** — Inverse Problems, 1991, v.7, p.43.
38. **Миллер У.** — Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
39. **Andrianov A.A., Ioffe M.V., Nishnianidze D.N.** — Preprint SpbU-IP-96-12. St.-Petersburg, 1996.
40. **Агаева Р.Г.** — Современный групповой анализ. Методы и приложения. Сб. статей под ред. Максудова Ф.Г. и Рустамова К.А. Баку: «Элм», 1989, с.3.
41. **Крейн М.Г.** — ДАН, 1957, т.113, с.970.
42. **Адлер В.Э.** — ТМФ, 1994, т.101, с.323.

43. **Генденштейн Л.Э., Криве И.В.** — УФН, 1985, т.146, с.553.
44. **Cooper F., Khare A., Sukhatme V.** — Phys. Rep., 1995, v.251, p.267.
45. **Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V.** — Phys. Lett., 1993, v.A174, p.273.
46. **Rubakov V.A., Spiridonov V.P.** — Mod. Phys. Lett., 1988, v.A3, p.1337.
47. **Beckers J., Debergh N.** — J. Math. Phys., 1991, v.32, p.1808.
48. **Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V.P., Vinet L.** — Phys. Lett., 1991, v.B272, p.297.
49. **Samsonov B.F.** — Mod. Phys. Lett. A, 1996, v.11, p.2095.
50. **Samsonov B.F.** — Mod. Phys. Lett. A, 1996, v.11, p.1563.
51. **Husimi K.** — Progr. Theor. Phys., 1953, v.9, p.381.
52. **Малкин И.А., Манько В.И.** — Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
53. **Agayeva R.G.** — J. Phys. A: Math. and Gen., 1980, v.13, p.1685.
54. **Веселов А.П., Шабат А.Б.** — Функциональный анализ и его приложения, 1993, т.27, вып.2, с.1.
55. **Shabat A.** — Inverse Probl., 1992, v.8, p.303.
56. **Шабат А.Б., Ямилов Р.И.** — Алгебра и анализ, 1990, т.2, вып.2, с.183.
57. **Новиков С.П.** — Функциональный анализ и его приложения, 1974, т.8, вып.3, с.814.
58. **Дубов С.Ю., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е.** — ЖЭТФ, 1992, т.102, вып.3, с.814.
59. **Dubov S.Yu., Eleonskii V.M., Kulagin N.E.** — Chaos, 1994, v.4, p.47.
60. **Spiridonov V.** — Phys. Rev., 1995, v.A52, p.1909.
61. **Лукашевич Н.А.** — Дифференциальные уравнения, 1967, т.3, с.395.
62. **Справочник по специальным функциям.** Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979.
63. **Березовой В.П., Пашиев А.И.** — ТМФ, 1987, т.10, с.146.
64. **Самсонов Б.Ф., Овчаров И.Н.** — Изв. вузов. Физика, 1995, т.38, №4, с.77.
65. **Calogero F.** — J. Math. Phys., 1969, v.10, p.2191.
66. **Polychronakos A.P.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.703.
67. **Frahm H.** — J. Phys. A: Math. and Gen., 1993, v.26, p.L473.
68. **Leinaas J.M., Myrhein J.** — Phys. Rev., 1988, v.B37, p.9286.
69. **Генденштейн Л.Э.** — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.299.
70. **Schrödinger E.** — Naturwiss., 1926, v.14, p.664.
71. **Klauder J.R.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1960, v.11, p.123; J. Math. Phys., 1963, v.4, p.1055; 1963, v.4, p.1058.
72. **Glauber R.J.** — Phys. Rev., 1963, v.130, p.2529; 1964, v.131, p.2766.
73. **Переломов А.М.** — Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987.
74. **Sudarshan C.G.** — Phys. Rev. Lett., 1963, v.10, p.227.
75. **Klauder J.R., Skagerstam B.-S.** — Coherent States. World Scientific, Singapore, 1985.

76. **Daubechies I.** — Ten lectures in Wavelets. — CBMS—NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. 1992, v.61, SIAM, Philadelphia.
77. **Berezin F.A.** — Comm. Math. Phys., 1975, v.40, p.153.
78. **Onofri E.** — J. Math. Phys., 1975, v.16, p.1087.
79. **Nieto M.M., Simmons L.M.** — Phys. Rev., 1979, v.D20, p.1321.
80. **Fernandez C.D.J., Hussin V., Nieto L.M.** — J. Phys., 1994, v.A27, p.3547.
81. **Fernandez C.D.J., Nieto L.M., Rosas-Ortiz O.** — J. Phys., 1995, v.A28, p.2963.
82. **Bagrov V.G., Samsonov B.F.** — J. Phys. A: Math. and Gen., 1996, v.29, p.1011.
83. **Самсонов Б.Ф.** — ЯФ, 1996, т.59, №4, с.753.