

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

В.В.Пупышев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Результаты недавних экспериментальных и теоретических исследований низкоэнергетических нуклон-нуклонных и нуклон-дейтронных столкновений обсуждаются и сравниваются с давно известными. Особое внимание уделяется двум проблемам: проблеме экстраполяции фаз, амплитуд и сечений таких столкновений в экспериментально недоступную область энергий и проблеме разделения вкладов от ядерного и электромагнитного взаимодействий в параметры низкоэнергетического упругого рассеяния. Анализируются различные классические и недавно предложенные подходы к решению этих проблем. Развивается метод построения низкоэнергетических разложений, позволяющих извлечь информацию о ядерном взаимодействии из измеренных фаз рассеяния в системах двух и трех нуклонов или ядер и исследовать роль электромагнитных поправок к кулоновскому взаимодействию в таком рассеянии.

The results of recent theoretical and experimental investigations of low-energy nucleon-nucleon and nucleon-deuteron collisions are reviewed and compared with the previous ones. A special attention is paid to the following problems: the problem of extrapolation of the phase-shifts, amplitudes and cross-sections of the above collisions to the experimentally inaccessible energy region and the problem of separation of the contributions from the nuclear and electromagnetic interactions to the low-energy scattering parameters. The various classical and recently proposed ways for solving these problems are analyzed. The method for constructing the low-energy expansions, that allows one to extract the information about nuclear interaction in the low-energy limit from the measured two and three nucleons or nucleuses phase-shifts and to investigate the role of the electromagnetic corrections to the Coulomb interaction in that scattering, is developed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Знание явной низкоэнергетической зависимости вспомогательных функций и физически наблюдаемых величин, характеризующих столкновение квантово-механических объектов, позволяет решить многие прикладные и теоретические задачи. К ним относятся проблема экстраполяции таких наблюдаемых величин, измеренных при возможных низких энергиях исследуемого столкновения, в область еще более низких, но технически

недоступных для прямого эксперимента энергий, и одна из важнейших теоретических проблем, а именно задача о выборе функциональной формы и параметров взаимодействия в пределе низких энергий по имеющимся экспериментальным данным.

Главная цель настоящего обзора — показать, что построение явных низкоэнергетических асимптотик фаз рассеяния в системах двух и трех частиц и определение коэффициентов таких асимптотик остается одной из интересных, но не решенных в полном объеме задач современной теории рассеяния. Одним из таких коэффициентов является длина рассеяния. Понятию длины рассеяния в задаче двух тел, способам ее определения и различным подходам к построению низкоэнергетических асимптотик в такой задаче посвящен второй раздел. В третьем разделе обсуждаются результаты экспериментальных и теоретических исследований длин, эффективных радиусов и низкоэнергетического поведения фаз нуклон-нуклонного (NN) рассеяния. В четвертом разделе анализируются некоторые попытки построения низкоэнергетических асимптотик в задаче трехчастичного рассеяния ($3 \rightarrow 3$) и ($2 \rightarrow 2$). В пятом разделе сравниваются результаты различных теоретических исследований нуклон-дейтронного (Nd) рассеяния при энергии Nd -столкновения, близкой к нулю.

В обзоре, как правило, используется терминология и обозначения, принятые в известных математических справочниках [1—4], книгах по теории потенциального рассеяния [5—10] и монографиях, посвященных методам фазовых функций [11,12] и гипергармоник [13,14], теории NN -взаимодействия [15—17] и физике нейтрона [18,19]. Все термины, означающие относительные понятия, и все компактные авторские обозначения описываются до их использования.

Теория низкоэнергетических разложений строится уже длительное время. Для лучшего понимания ее современного состояния в обзоре цитируются как работы, ставшие классическими, так и статьи, опубликованные сравнительно недавно. Чтобы показать, как развивались фундаментальные понятия метода низкоэнергетических асимптотик и как решались основные проблемы этого метода, работы, посвященные каждому такому понятию или проблеме, обсуждаются в том хронологическом порядке, в котором они появлялись в свет.

Настоящий обзор ни в коей мере не претендует на полноту и по сути дела является естественным продолжением предыдущего обзора [20]. В нем основное внимание было сосредоточено на анализе различных способов оценки границ энергетических интервалов, в которых короткодействующим (V^s) или далекодействующим (V^l) потенциалом можно или нельзя пренебречь для корректного описания низкоэнергетических столкновений в рамках эффективно двухчастичной задачи рассеяния суперпозицией

$V^{cls} = V^c + V^l + V^s$, содержащей кулоновский потенциал V^c . Знание таких оценок еще не достаточно для экстраполяции фаз и сечений нуклон-ядерного рассеяния в область экспериментально недоступных низких энергий. Для полного решения такой экстраполяционной проблемы необходимо еще знать низкоэнергетические разложения — асимптотические формулы, описывающие аналитическую зависимость экстраполируемых величин при стремящихся к нулю импульсе k или энергии столкновения $E = O(k^2)$.

Различные способы построения таких разложений анализируются в настоящем обзоре. Основная цель этого анализа — ответить на два вопроса: как разделить вклады от ядерного короткодействующего и электромагнитного далекодействующего взаимодействий в фазы, сечения и параметры низкоэнергетического NN - или Nd -рассеяния и как потом определить параметры, характеризующие только ядерное взаимодействие.

Решения этих задач ищутся издавна. Полученные результаты разбросаны по многочисленным оригинальным статьям и отражены в существующих книгах [5—10] в рамках различных подходов и даже с разных концептуальных точек зрения. Поэтому представляется важным и интересным просуммировать, сопоставить и оценить правдоподобность результатов, полученных в разное время и разными способами с единой точки зрения и в рамках одного подхода, основанного на использовании низкоэнергетических разложений, построенных в рамках метода фазовых функций. Попытка решить эту нелегкую задачу о систематизации и анализе многочисленных результатов предпринята в настоящем обзоре.

Обобщенному потенциальному описанию взаимодействия легчайших ядер в dd -, $p^3\text{He}$ -, $d^3\text{He}$ -, $d^4\text{He}$ -рассеянии при сравнительно низких энергиях был посвящен недавний и подробный обзор [21]. Это позволило ограничиться в настоящем обзоре анализом потенциального низкоэнергетического NN - и Nd -рассеяния, но зато больше внимания уделить строгим математическим методам решения задачи рассеяния в системах двух и трех тел с парными взаимодействиями в виде суперпозиций коротко- и далекодействующих потенциалов. Эти методы применимы для надежного вывода низкоэнергетических разложений характеристик упругих столкновений в системах из двух и трех ядер, взаимодействие между которыми можно описать подходящими эффективными парными потенциалами. Такие потенциалы, как правило, содержат далекодействующие компоненты, кардинально изменяющие характер столкновения при достаточно низких энергиях. Понятие «низкие энергии» весьма условно. В настоящем обзоре под множеством низких энергий NN - или Nd -столкновений подразумевается интервал энергий $0 \leq E_{\text{lab}} < 10$ МэВ, в котором экспериментальные данные о таких столкновениях бедны, а порой и не согласуются друг с другом. Именно это важное обстоятельство побудило автора ограничиться обсуждением извест-

ных результатов исследований NN - и Nd -столкновений только при выше определенных низких энергиях, но зато тщательно протестировать эти результаты на достоверность.

2. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

Для обсуждения таких разложений необходимо сначала пояснить, какие потенциалы далее будут называться коротко- или дальнедействующими.

В современной теории рассеяния [5,8] центральный потенциал $V^s(r)$, финитный ($V^s(r) \equiv 0$ при $r > b$, где $0 < b < \infty$) или убывающий при увеличении расстояния r не медленнее юкавского потенциала V^Y :

$$V^s(r) \sim V^Y(r) \quad \text{или} \quad V^s(r) = o(V^Y(r)), \quad r \rightarrow \infty; \quad (1)$$

$$V^Y(r) \equiv V_0^Y \exp(-r/r^Y) (r^Y/r), \quad V_0^Y = \text{const}, \quad r^Y = \text{const} > 0, \quad (2)$$

принято относить к короткодействующим взаимодействиям, а потенциал, убывающий медленнее, например, как обратная целая степень расстояния:

$$V^l(r) \sim V_0^d r^{-d}, \quad V_0^d = \text{const}, \quad d = 1, 2, 3, \dots, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

принято считать дальнедействующим. Однако понятие коротко- или дальнедействующего потенциала относительно [22]: один и тот же потенциал в одном случае проявляет себя как короткодействующий, в другом — как дальнедействующий. Поэтому вопрос о величине радиуса действия потенциала решается в каждом рассматриваемом случае. Во всех случаях, обсуждаемых ниже, такое уточнение не требуется, и поэтому потенциалы с асимптотиками (1) или (3) называются коротко- или дальнедействующими.

Для краткости изложения все функции и величины, характеризующие рассеяние потенциалом V^a или суперпозицией $V^{ca} = V^c + V^a$, помечаются верхним индексом a или ca . Ниже последовательно рассматривается несколько случаев: рассеяние потенциалами $V^s(a = s)$, $V^l(a = l)$, их суперпозицией $V^{ls} (a = ls)$ и суперпозициями V^{ca} с $a = s, l, ls$. Смысловые значения всех остальных индексов не изменяются и совпадают с их первыми по тексту определениями. Символы γ , $\Gamma(x)$ и $B(x, y)$ или $\hat{\delta}_{nm}^l$ всюду означают постоянную Эйлера, гамма- и бета- функции или символ Кронекера, также всюду R — борковский радиус, $\rho \equiv kr$, а $\eta \equiv 1/2kr$.

2.1. Понятие длины рассеяния и способы ее вычисления. Сначала это понятие было введено [5,6] для рассеяния потенциалом V^s с быстроубывающей асимптотикой (1). Для фазы рассеяния $\delta_l^s(k)$ таким потенциалом в квантовом состоянии двух частиц $|k, l\rangle$ с сохраняющимися относительным импульсом k и угловым моментом l предел

$$a_l^s \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \text{tg } \delta_l^s(k) / k^{2l+1} \quad (4)$$

конечен [5], а соответствующая функция эффективного радиуса

$$K_l^s(E) \equiv k^{2l+1} \text{ctg } \delta_l^s(k) = k^{2l+1} / \mathcal{K}_l(E) \quad (5)$$

является целой [7] функцией k^2 и имеет низкоэнергетическую ($E \equiv \hbar^2 k^2 / 2\mu \rightarrow 0$) асимптотику [6]:

$$K_l^s(E) \sim -1/a_l^s + k^2 r_{0l}^s / 2 - k^4 r_{0l}^s P_l^s, \quad k \rightarrow 0. \quad (6)$$

Функция (5) простым образом связана с элементом \mathcal{K}_l матрицы Гайтлера [7] (или \mathcal{K} -матрицы [5]) в базисе парциальных волн $|k, l\rangle$. Конечные величины a_l^s , r_{0l}^s и P_l^s , содержащиеся в (6), называются параметрами рассеяния [15—17] в состоянии $|k, l\rangle$, а именно: длиной рассеяния, эффективным радиусом и, соответственно, параметром формы. Среди множества известных способов [5,6] вычисления параметров рассеяния короткодействующим потенциалом наиболее прост и удобен алгоритм метода фазовых функций. Напомним этот алгоритм.

В одной из нелинейных версий метода фазовых функций величина $\text{tg } \delta_l^s(k)$ определяется как предел при $r \rightarrow \infty$ фазовой функции $t_l^s(r; k)$, равной нулю при $r = 0$ и удовлетворяющей при $r > 0$ нелинейному уравнению [12]:

$$\partial_r t_l^a(r; k) = -k^{-1} V^a(r) [j_l(\rho) - t_l^a(r; k) n_l(\rho)]^2, \quad (7)$$

где $a = s$ и $\rho \equiv kr$. Если в уравнении (7) заменить функции Риккати — Бесселя и Риккати — Неймана их соответствующими разложениями [1]:

$$j_\lambda(\rho) = k^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} j_{\lambda n}(r),$$

$$j_{\lambda n}(r) \equiv (r/2)^{2n+\lambda+1} \frac{\sqrt{\pi}(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\lambda+3/2)};$$

$$n_l(\rho) = k^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} n_{ln}(r), \quad n_{ln}(r) \equiv (-1)^{\lambda+1} (2/r) j_{-l, n}(r) \quad (8)$$

с $\lambda = l$ и использовать анзац

$$t_l^a(r; k) = k^{2l+1} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} t_{ln}^a(r), \quad (9)$$

где $a = s$, то можно будет отделить параметр k от аргумента r и получить рекуррентные ($n = 0, 1, \dots$) уравнения

$$\begin{aligned} \partial_r t_{ln}^a(r) &= -V^a(r) \sum_{m'+m=n} Q_{lm'}^a(r) Q_{lm}^a(r), \quad r > 0, \\ Q_{ln}^a &\equiv j_{ln}(r) - \sum_{m'+m=n} t_{lm'}^a(r) n_{lm}(r) \end{aligned} \quad (10)$$

для новых неизвестных функций $t_{ln}^s(r)$, равных нулю при $r = 0$. Энергонезависимость и рекуррентность уравнений (10) существенно упрощают их численное решение и позволяют с высокой точностью найти параметры рассеяния по формулам

$$\begin{aligned} a_l^a &= -t_{l0}^a(\infty), \quad r_{l0}^a = -2t_{l1}^a(\infty)/(a_l^a)^2, \\ P_l^a &= t_{l2}^a(\infty)/[(a_l^a)^2 r_{l0}^a] + a_l^a r_{l0}^a/4, \end{aligned} \quad (11)$$

следующим в рассматриваемом случае ($a = s$) из (5), (6) и (9).

Избежать возможных недоразумений терминологического характера поможет приведенное ниже пояснение часто встречающихся в литературе по низкоэнергетическому потенциальному рассеянию фраз: «Длина рассеяния существует (определена)» и «Длина рассеяния не существует (не определена)». Итак, если при $k = 0$ рассматриваемая функция эффективного радиуса не равна (равна) нулю, то говорят, что длина рассеяния существует (не существует).

Еще в 1949 г. Блатт и Джексон [23] доказали, что при любом $l = 0, 1, \dots$ функция (5) является бесконечным рядом по четным степеням k для более широкого, чем (1), класса потенциалов, а именно для потенциалов, убывающих быстрее, чем r^{-d} при любом $d > 1$. Эти же авторы, исследуя рассеяние дальнедействующими потенциалами (3), не принадлежащими такому классу, показали, что функция (5) конечна при $k = 0$, если $2l + 3 < d$, а ее следующее по скорости убывания при $k \rightarrow 0$ слагаемое квадратично по k , если $2l + 5 < d$. Иными словами, при рассеянии потенциалом (3) в состоянии $|k, l\rangle$ длина рассеяния определена при $2l + 3 < d$, а эффективный радиус существует, если $2l + 5 < d$. При данном l длина рассеяния может существовать, а эффективный радиус — нет. Пример такой ситуа-

ции — S -волновое ($l = 0$) рассеяние поляризационным потенциалом, имеющим асимптотику (3) с показателем $d = 4$:

$$V^P(r) \sim V_0^P r^{-4}, \quad V_0^P = -\alpha_e/2 |R| = \text{const}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В этом случае низкоэнергетическая асимптотика функции эффективного радиуса, определенной равенством (5), функционально отличается от асимптотики (6), т.к. имеет вид [24,25]:

$$\begin{aligned} K_0^P(E) &\equiv k \operatorname{ctg} \delta_0^P(k) = \\ &= -\frac{1}{\alpha_0^P} - \frac{\pi V_0^P}{3(\alpha_0^P)^2} |k| - \frac{V_0^P}{3\alpha_0^P} k^2 \ln \left(\frac{-V_0^P k^2}{16} \right) + O(k^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta_0^P(k)$ — фаза, а α_0^P — длина рассеяния потенциалом (12). Наличие в сумме (13) линейного и логарифмического по импульсу слагаемых означает, что эффективный радиус r_{00}^S бесконечен, т.е. не существует. При $d = 4$ условие Блатта и Джексона $2l + 3 < d$ выполняется только для $l = 0$, а для всех $l > 0$ длина рассеяния, а значит и эффективный радиус, не определены. Этот же вывод следует из равномерного по $l > 0$ асимптотического соотношения [24]:

$$\operatorname{tg} \delta_l^P(k) = -\pi V_0^P k^2 / [(4l^2 - 1)(2l + 3)] + O(k^{2l+1}), \quad k \rightarrow 0,$$

согласно которому все фазы $\delta_l^P(k)$ с $l > 0$ линейны по энергии.

Продолжая сравнение разложений (6) и (13), отметим, что медленное убывание поляризационного потенциала (12) по сравнению с любым короткодействующим потенциалом (1) порождает неаналитические по k слагаемые низкоэнергетической асимптотики фазы рассеяния $\delta_0^P(k)$. В 1963 г. Леви и Келлер [26] заметили, что если в уравнениях (7) и (10) положить $a = l$, т.е. заменить V^S на V^l , то конечными при $r = \infty$ будут функции $t_{ln}^l(r)$ с индексом n , подчиненным условию $2n < d - 2l - 3$. Поэтому представление функции $t_l^l(r; k)$ бесконечным рядом (9) с $a = l$ теряет смысл при $r = \infty$, а ее корректное при всех r разложение имеет вид

$$t_l^l(r; k) = k^{2l+1} \sum_{n=0}^m k^{2n} t_{ln}^l(r) + \beta_l(r; k), \quad (14)$$

где m — максимально возможное значение n , при котором верно неравенство $2n < d - 2l - 3$, а нетривиальное слагаемое β_l убывает при $k \rightarrow 0$ быст-

рее, чем $k^{2(l+m)+1}$, но медленнее, чем $k^{2(l+m+1)+1}$. Подставив (14) в (7), Леви и Келлер вывели уравнения (10) для ограниченных при всех r функций $t_{ln}^l(r)$ с индексом $n \leq m$ и уравнение для функции $\beta_l(r; k)$. Исследуя последнее уравнение, они доказали, что при $k \rightarrow 0$ и любой степени $d \geq 3$ убывания потенциала (3) верно асимптотическое соотношение

$$\beta_l(r; k) \sim -k^{-1} \int_0^r dr V^l(r) \left\{ [j_l(\rho)]^2 - \rho^{2l+2} \sum_{n=0}^m \tau_{ln} \rho^{2n} \right\},$$

$$\tau_{ln} \equiv \sum_{m'+m=n} d_{lm} d_{lm}, \quad d_{ln} \equiv 2^l (-1)^n \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(2l+2n+2)}. \quad (15)$$

Заменяв $\beta_l(\infty; k)$ в (14) найденной асимптотикой интеграла (15), Леви и Келлер впервые нашли явные низкоэнергетические ($k \rightarrow 0$) разложения тангенсов фаз рассеяния $\delta_l^d(k)$ потенциалами (3) вплоть до их первых неаналитических по k слагаемых:

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim -2^{-d} \pi V_0^d k |k|^{d-3} \frac{\Gamma(d-1) \Gamma(l+3/2-d/2)}{\Gamma^2(d/2) \Gamma(l+1/2+d/2)}, \quad 3 < d < 2l+3;$$

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim -V_0^d k |k|^{2l} \ln |k| / [(2l+1)!!]^2, \quad d = 2l+3;$$

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim k^{2l+1} \sum_{n=0}^m k^{2n} t_{ln}^l(\infty) - V_0^d k |k|^{d-3} \times$$

$$\times \int_0^\infty dr r^{-d} \left\{ [j_l(r)]^2 - r^{2l+2} \sum_{n=0}^m \tau_{ln} r^{2n} \right\}, \quad 2l+3 < d \neq 5, 7, \dots;$$

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim k^{2l+1} \sum_{n=0}^{(d-5)/2} k^{2n} t_{ln}^l(\infty) +$$

$$+ V_0^d \tau_{l, (d-3)/2-l} k |k|^{d-3} \ln |k|, \quad 2l+3 < d = 5, 7, \dots \quad (16)$$

Согласно (16) все такие слагаемые — произведения функции $\ln |k|$ и целых степеней k . Следующие, более быстро убывающие слагаемые низкоэнергетических асимптотик функций $\operatorname{tg} \delta_l^d(k)$ в случае произвольных констант V_0^d асимптотик (3) неизвестны. При дополнительном предположении о малости V_0^d такие слагаемые нетрудно найти в рамках линейного по малому

параметру V_0^d приближения способом Хинкелмана и Шпрача [27]. Как они показали, фаза рассеяния $\delta_0^{ps}(k)$ суперпозицией $V^{ps} \equiv V^p + V^s$ неперекрывающихся потенциалов (1) и (12)

$$V^p(r) \equiv 0, \quad r < b; \quad V^s(r) \equiv 0, \quad r \geq b; \quad 0 < b < \infty \quad (17)$$

имеет при $k, V_0^p \rightarrow 0$ асимптотику

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_0^{ps}(k) = & -a_0^{ps}k + (V_0^p k^2/3) [\pi + 4a_0^s k \ln |2kb| - (3/2) \tau_0 k] + \\ & + (V_0^p/3) (a_0^s)^2 k^4 [2r_{00}^s k \ln |2kb| - \pi] + O((V_0^p)^2, k^5). \end{aligned} \quad (18)$$

Оказалось, что длина рассеяния a_0^{ps} суперпозицией (17) и коэффициент τ_0 связаны с длиной a_0^s и эффективным радиусом r_{00}^s рассеяния потенциалом V^s , обрезанным в точке $r = b$, следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0^{ps} = & a_0^s + V_0^p(1 - \tau + \tau^2/3)/b, \quad \tau \equiv a_0^s/b, \\ \tau_0 = & (a_0^s)^2 r_{00}^s/V_0^p + (2b/3) \times \\ & \times [1 + 2(11/3 - 2\gamma) \tau - (3 + r_{00}^s(1 - \tau)/b) \tau^2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Формулы (18), (19) позволяют по измеренным константе V_0^p и фазе $\delta_0^{ps}(k)$ рассеяния суперпозицией (17) найти параметры рассеяния потенциалом V^s . Почему такие и другие низкоэнергетические соотношения, связывающие характеристики рассеяния суперпозицией $V^{ls} = V^l + V^s$ с величинами, характеризующими ее короткодействующую компоненту V^s , представляют особый интерес? Как вывести такие соотношения в общем случае, и для каких функций импульса столкновения их выводить? Обсуждение этих проблем начнем с одного замечания.

Согласно (4) и (5) фаза $\delta_l^s(k)$ убывает при $k \rightarrow 0$ как степенная функция $-a_l^s k^{2l+1}$ импульса k . Поэтому длина рассеяния a_l^s одним короткодействующим потенциалом V^s имеет простой геометрический смысл: при $k = 0$ она является коэффициентом наклона графика функции $\operatorname{tg} \delta^{c,s}(k)$ к оси абсцисс, на которой отложена величина $-k^{2l+1}$. По-видимому, желание сохранить аналогичный смысл в случае рассеяния суперпозициями V^{ls} определило в

40-х годах способ введения *модифицированных* параметров рассеяния. Поясним этот общепринятый способ на примере одной из наиболее важных для ядерной физики суперпозиций такого типа.

В пределе низких энергий полная фаза рассеяния $\delta_l^{cs}(k)$ суперпозицией $V^{cs} \equiv V^c + V^s$, где $V^c = 1/rR$ — отталкивающий кулоновский потенциал с боровским радиусом $R > 0$ неограниченно растет [1] как кулоновская фаза $\delta_l^c(k) \equiv \arg \Gamma(1 + l + i\eta)$:

$$\delta_l^{cs}(k) \sim \delta_l^c(k) \sim \eta(\ln \eta - 1) + \pi/4, \quad \eta \equiv 1/2kR, \quad k \rightarrow 0,$$

и поэтому аналог

$$a_l^{cs} \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_l^{cs}(k)/k^{2l+1} = - \lim_{k \rightarrow 0} (2Rk^{2l+2})^{-1}$$

предела (4) равен $-\infty$. Это первая причина, по которой в рассматриваемом случае ($a = cs$) понятие длины рассеяния стоит модифицировать. Вторая причина имеет явный физический смысл и заключается в следующем: полная фаза $\delta_l^{cs}(k)$ описывает совместное влияние потенциалов V^c и V^s на рассеяние. При экспериментальном исследовании рассеяния суперпозицией V^{cs} взаимодействие V^s , как правило, неизвестно. Чтобы извлечь информацию о нем, из измеренной фазы $\delta_l^{cs}(k)$ следует вычесть кулоновскую фазу, а функцию эффективного радиуса определить так, чтобы она была рядом по целым степеням k^2 .

Именно этот способ построения теории низкоэнергетического рассеяния одноименно заряженных ядерных частиц ($R > 0$) был выбран Брейтом, Кондоном и Презентом [28] для построения первой теории протон-протонного (pp) рассеяния и используется до сих пор. Эти авторы ввели понятие кулон-ядерной фазы рассеяния

$$\delta_l^{c, s}(k) = \delta_l^{cs}(k) - \delta_l^c(k) \quad (20)$$

как вклада в полную фазу рассеяния $\delta_l^{cs}(k)$ суперпозицией V^{cs} от ядерного pp -потенциала V^s , и показали, что подходящим образом определенная кулон-ядерная функция эффективного радиуса

$$K_l^{c, s}(E) \equiv [k^l C_l(\eta)]^2 [k \operatorname{ctg} \delta_l^{c, s}(k) + h^c(\eta)] \quad (21)$$

должна содержать кулоновские множители [1]:

$$C_l(\eta) \equiv 2^l \exp(-\pi\eta/2) |\Gamma(l+1+i\eta)| / \Gamma(2l+2),$$

$$h^c(\eta) \equiv h(\eta) / RC_0^2(\eta), \quad h(\eta) \equiv \operatorname{Re} \psi(i\eta) - \ln \eta, \quad (22)$$

чтобы получался желаемый тип асимптотики

$$K_l^{c,s}(E) \sim -1/a_l^{c,s} + k^2 r_{0l}^{c,s} / 2 - k^4 r_{0l}^{c,s} P_l^{c,s}, \quad k \rightarrow 0. \quad (23)$$

Так как полученное разложение (23) и разложение (6) имело аналогичную функциональную зависимость от k^2 , то коэффициенты

$$a_l^{c,s}(k) \equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_l^{c,s}(k) / [k^l C_l(\eta)]^2, \quad (24)$$

$r_{0l}^{c,s}$ и $P_l^{c,s}$ стали называть кулон-ядерными (или модифицированными) длиной рассеяния, эффективным радиусом и, соответственно, параметром формы. Вместо термина «кулон-ядерный» параметр рассеяния [16] употребляется и словосочетание «ядерно-кулоновский» параметр рассеяния [9]. Физический смысл таких параметров наиболее точно отражает более длинное название — ядерный параметр рассеяния в кулоновском поле.

Интерес к проблеме определения кулон-ядерных параметров рассеяния вновь возрос в 1949 г. и был инициирован работой Ландау и Смородинского [29]. Они нашли простое приближенное соотношение

$$1/a_0^{c,s} \approx 1/a_0^s + R^{-1} [\ln(r_s/R) + 2\gamma - 0,824], \quad (25)$$

связывающее кулон-ядерную длину $a_0^{c,s}$ рассеяния суперпозицией V^{cs} с длиной рассеяния a_0^s короткодействующей компонентой V^s этой суперпозиции, радиусом действия этой компоненты r_s и боровским радиусом R .

Невозможно хотя бы кратко упомянуть все многочисленные работы, последовавшие за статьей Ландау и Смородинского и посвященные проблеме определения кулон-ядерных параметров рассеяния, но стоит классифицировать и сравнить по простоте реализации и степени надежности известные методы вычисления таких параметров. Для такого сравнения необходимо напомнить некоторые формулы.

Полная амплитуда упругого ($k = k'$) рассеяния $f(\theta; k)$ центральным потенциалом $V(r)$ из начального состояния $|k\rangle$ в конечное состояние $|k'\rangle$ зависит от одного угла рассеяния $\theta \equiv \arccos[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')/kk']$ и представляется бесконечным рядом [5] по полиномам Лежандра $P_l(\cos \theta)$:

$$f(\theta; k) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(k) [(2l+1) P_l(\cos \theta)] \quad (26)$$

и парциальным амплитудам

$$f_l(k) = (2ik)^{-1} [\exp(2i\delta_l^c(k)) - 1]. \quad (27)$$

Если $V = V^{ca}$, то разбиение

$$\delta_l^{ca}(k) = \delta_l^c(k) + \delta_l^{c,a}(k) \quad (28)$$

каждой ($l = 0, 1, \dots$) фазы рассеяния $\delta_l^c(k) \equiv \delta_l^{ca}(k)$ на кулоновскую фазу $\delta_l^c(k)$ и фазу $\delta_l^{c,a}(k)$, отсчитанную от нее, порождает разбиения полной (26) и парциальных (27) амплитуд рассеяния

$$f^{ca}(\theta; k) = f^c(\theta; k) + f^{c,a}(\theta; k), \quad f_l^{ca}(k) = f_l^c(k) + f_l^{c,a}(k) \quad (29)$$

на полную [9]

$$f^c(\theta; k) = -R^{-1} [2k \sin(\theta/2)]^{-2} \exp(2i(\delta_0^c(k) - \eta \ln \sin(\theta/2))) \quad (30)$$

и парциальные ($f_l^c(k)$) амплитуды рассеяния кулоновским потенциалом, и соответствующие им амплитуды

$$f_l^{c,a}(\theta; k) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{c,a}(k) [(2l+1) P_l(\cos \theta)], \quad (31)$$

$$f_l^{c,a}(k) = (2ik)^{-1} \exp(2i\delta_l^c(k)) [\exp(2i\delta_l^{c,a}(k)) - 1], \quad (32)$$

порожденные потенциалом V^a при рассеянии в кулоновском поле. Вклады $\sigma_l^{c,a}$, $d\sigma^{c,a}/d\theta$ и $\sigma^{c,a}$ этого потенциала в парциальное, дифференциальное и полное сечения рассеяния суперпозицией V^{ca} определяются следующим образом:

$$\sigma_l^{c,a}(E) \equiv 4\pi |f_l^{c,a}(k)|^2, \quad (33)$$

$$d\sigma^{c,a}(\theta; E)/d\theta \equiv |f^{c,a}(\theta; k)|^2 \sin \theta, \quad (34)$$

$$\sigma^{c,a}(E) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l^{c,a}(E) = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta (d\sigma^{c,a}(\theta; E)/d\theta). \quad (35)$$

В традиционном подходе [30—34] кулон-ядерные ($a = s$) амплитуды (31) и (32) задаются матричными элементами

$$f^{c, s}(\theta; k) = -\frac{\mu}{2\pi} \langle \mathbf{k} | T^{c, s}(z) | \mathbf{k}' \rangle, \quad f_l^{c, s}(k) = -\frac{\mu}{2\pi} T_l^{c, s}(k, k; z) \quad (36)$$

полного ($T^{c, s}$) и парциальных ($T_l^{c, s}$) кулон-ядерных операторов перехода на энергетической поверхности ($k = k'$, $z = E + i0 = \hbar^2 k^2 / 2\mu + i0$), а определение кулон-ядерных параметров сводится к вычислению пределов при $z \equiv E + i0 \rightarrow 0+$ функции $T_l^{c, s}(k, k; z)$ и ее производных по энергии. Эти пределы вычисляются со стороны положительных значений энергии, где матрица $\langle \mathbf{k} | T^{c, s}(z) | \mathbf{k}' \rangle$ и все ее парциальные компоненты $T_l^{c, s}(k, k'; z)$ являются комплексными функциями. Таким образом, для определения действительных величин (кулон-ядерных параметров рассеяния) приходится сначала найти комплексное решение $T_l^{c, s}(k, k'; z)$ парциального уравнения Липпмана — Швингера. Это первая причина, из-за которой традиционный метод не так просто реализуется в вычислительном плане, особенно в случае кулоновского притяжения ($V^c < 0$), когда все кулоновские функции $T_l^c(k, k'; z)$ имеют бесконечное число полюсов, отвечающих кулоновским связанным состояниям и сгущающихся к точке $z = 0$. Вторая причина малой эффективности традиционного метода состоит в необходимости вычисления вышеупомянутых пределов. Численно такая задача сводится к задаче экстраполяции парциальной амплитуды (32), (36) и ее производных по энергии, найденных для убывающей последовательности $E_1 > E_2 > \dots > E_N > 0$ положительных значений энергии, в точку $E = 0$. Как известно [3], любой экстраполяционный метод приводит к дополнительной потере точности.

В [35] Навроцкий показал, что пределы, определяющие кулон-ядерные параметры, можно вычислить со стороны отрицательных энергий. В качестве стартового им использовалось представление [36]:

$$T^{c, s}(z) = [1 + T^c(z) G_0(z)] \tilde{T}^{c, s}(z) [1 + T^c(z) G_0(z)], \quad (37)$$

содержащее свободную функцию Грина G_0 , вспомогательный кулон-ядерный оператор $\tilde{T}^{c, s}$ и известную в явном виде кулоновскую матрицу [37]:

$$\langle \mathbf{k} | T^c(z) | \mathbf{k}' \rangle = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu R |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} [1 + \omega^{-1} F_{i\eta}(\tau) - \omega^{-1} F_{i\eta}(\tau^{-1})],$$

$$\omega \equiv - \left[1 + \frac{(k^2 - p^2)(k'^2 - p^2)}{p^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \right]^{1/2}, \quad \tau \equiv \frac{\omega + 1}{\omega - 1},$$

$$p^2 \equiv 2\mu z / \hbar^2, \quad (38)$$

где $F_{i\eta}(x) \equiv {}_2F_1(1, i\eta; 1 + i\eta; x)$ — гипергеометрическая функция [1]. Оператор $\tilde{T}^{c, s}$, в отличие от оператора $T^{c, s}$, удовлетворяет уравнению

$$\tilde{T}^{c, s}(z) = V^s + V^s G^c(z) \tilde{T}^{c, s}(z) \quad (39)$$

с компактным ядром, содержащим V^c лишь посредством кулоновской функции Грина

$$G^c(z) = G_0(z)[1 + T^c(z)G_0(z)]. \quad (40)$$

За упомянутой выше переформулировкой (37)—(40) исходной задачи (уравнения Липпмана — Швингера для оператора $T^{c, s}$ с $V^c < 0$) в обсуждаемой работе [35] последовал анализ ядра уравнения (39). Этот анализ был начат доказательством представления кулоновской матрицы (38) в виде суммы

$$\langle \mathbf{k} | T^c(z) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | \omega(z) | \mathbf{k}' \rangle + i \operatorname{cth}(\pi\eta) \langle \mathbf{k} | u(z) | \mathbf{k}' \rangle, \quad (41)$$

где функции $\langle \mathbf{k} | \omega(z) | \mathbf{k}' \rangle$ и $\langle \mathbf{k} | u(z) | \mathbf{k}' \rangle$ непрерывны по энергии в точке $z = 0$, а множитель $\operatorname{cth}(\pi\eta)$ описывает явно все полюсные по энергии сингулярности, отвечающие кулоновским связанным состояниям. Представление (41) позволило выделить из функции (40) сингулярную (G^u) и гладкую (G^ω) части:

$$G^c = G^u + i \operatorname{cth}(\pi\eta) G^\omega, \quad G^u \equiv G_0 u G_0, \quad G^\omega \equiv G_0(1 + \omega G_0), \quad (42)$$

а затем свести уравнение (39) к двум уравнениям: к уравнению с явно выделенными кулоновскими особенностями

$$\tilde{T}^{c, s}(z) = T^\omega(z) + i \operatorname{cth}(\pi\eta) T^\omega(z) G^u(z) \tilde{T}^{c, s}(z) \quad (43)$$

и уравнению

$$T^\omega(z) = V^s + V^s G^\omega(z) T^\omega(z) \quad (44)$$

для вспомогательного оператора T^ω , матрица которого не имеет особенностей кулоновского происхождения и непрерывна в точке $z = 0$. Дальнейшие построения были выполнены лишь в случае нулевого l . Оказалось, что кулон-ядерная S -волновая длина рассеяния равна пределу нулевой энергии

$$a_0^{c,s} = \frac{\mu}{2\pi} T_{00}(0) \quad (45)$$

матричного элемента несингулярной части оператора $\tilde{T}^{c,s}$:

$$T_{kk'}(z) \equiv \langle \phi_k | T^{\text{reg}}(z) | \phi_{k'} \rangle, \\ T^{\text{reg}}(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{T}^{c,s}(z), & V^c > 0, \\ T^\omega(z), & V^c < 0 \end{array} \right\}, \quad (46)$$

взятой в обкладках перенормированных кулоновских функций $\phi_k(r) \equiv F_0(\rho, \eta) / \rho C_0(\eta)$. В случае $V^c > 0$ получившаяся таким образом функция $T_{kk'}(z)$ подчиняется уравнению

$$T_{kk'}(z) = V_{kk'}^s + \int_0^\infty \frac{dp p^2 C^2(\eta_p)}{2\pi^2(z - E_p)} V_{kp}^s T_{pk'}(z),$$

$$V_{kk'}^s \equiv \langle \phi_k | V^s | \phi_{k'} \rangle, \quad \eta_p \equiv 1/2pR, \quad E_p \equiv \hbar^2 p^2 / 2\mu, \quad (47)$$

а эффективный радиус определяется формулой

$$r_{00}^{c,s} = 2R/3 + [1/2\pi(a^{c,s})^2] [\lim_{z \rightarrow 0} \partial_z T_{00}(z) + 4\mu \lim_{k \rightarrow 0} \partial_{k^2} T_{k0}(0)]. \quad (48)$$

Итак, в отличие от традиционного подхода, в способе Навроцкого *все* особенности кулоновского происхождения *последовательно* выделены, а пределы (45) и (48), определяющие кулон-ядерные параметры, можно вычислять со стороны отрицательных энергий, когда функция (46) является действительной. Оба эти преимущества упрощают вычисление кулон-ядерных параметров. Однако схема вычислений по формулам (37)—(48) требует нахождения многочисленных вспомогательных операторов и поэтому является довольно громоздкой. Главная причина тому — выбор (в качестве рабочего) импульсного пространства, в котором кулоновская матрица (38) является не только сингулярной, но и очень сложной функцией. Стартуя с уравнения Шредингера в координатном пространстве и используя вместо этой матрицы простые объекты — функции F_l и G_l , можно построить более надежные алгоритмы определения кулон-ядерных параметров. Упомянем два таких способа.

Применив к задаче рассеяния Шредингера с $l = 0$ и взаимодействием V^{cs} метод эволюции по константе связи [38], Киржниц и Пеньков [39] нашли для разности функций (5) и (21) следующее интегральное представление:

$$\Delta(E) \equiv K_0^s(E) - K_0^{c,s}(E) = R^{-1} \operatorname{cosec}^2 \delta_0^s(k) \times \\ \times \operatorname{Im} \int_0^\infty dr \ln(r/|R|) \partial_r [u_0^{+s}(r; k) u_0^{-s}(r; k) + i[u_0^{+s}(r; k)]^2 - \\ - \sin(\rho + \delta_0^s(k)) \exp(i(\rho + \delta_0^s(k)))]], \quad (49)$$

позволяющее определить S -волновые кулон-ядерные параметры после вычисления фазы $\delta_0^s(k)$, регулярной (u_0^{+s}) и нерегулярной (u_0^{-s}) функций рассеяния потенциалом V^s . При $k = 0$ представление (49) принимает вид

$$1/a_0^{c,s} - 1/a_0^s = \Delta(0) \quad (50)$$

и позволяет найти кулон-ядерную длину рассеяния $a_0^{c,s}$ по известной длине рассеяния a_0^s и интегралу $\Delta(0)$. Соотношение (50) согласуется с формулой (25), но, в отличие от нее, не зависит от радиуса действия r_s потенциала V^s . Параметры $r_{00}^{c,s}$ и $P_0^{c,s}$ разложения (23) выражаются через первую и вторую производные функции $\Delta(E)$ по энергии E в точке $E = 0$.

Способ, предложенный Бабиковым [40], более прост, так как в нем вычисление каких-либо производных и пределов по энергии не требуется. Исходную задачу Шредингера с потенциалом $V^{c,s}$ Бабиков сначала переформулировал так, чтобы тангенс фазы $\delta_l^{c,s}(k)$ был равен пределу при $r \rightarrow \infty$ вспомогательной функции $t_l^{c,s}(r; k)$, равной нулю при $r = 0$ и удовлетворяющей при $r > 0$ нелинейному уравнению

$$\partial_r t_l^{c,s}(r; k) = -k^{-1} V^s(r) [F_l(\rho, \eta) + t_l^{c,s}(r; k) G_l(\rho, \eta)]^2. \quad (51)$$

Затем, используя две последовательные подстановки

$$t_l^{c,s}(r; k) = (2l+1) k [k^l C_l(\eta)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} A_{ln}^{c,s}(r; h(\eta)), \quad k \rightarrow 0, \quad (52)$$

$$A_{ln}^{c,s}(r; h(\eta)) = t_{ln}^{c,s}(r) / \tau_l(r; h(\eta)), \quad n = 0, 1,$$

$$\tau_l(r; h(\eta)) \equiv 1 + t_{l0}^{c,s}(r) h(\eta) / R,$$

$$A_{l2}^{c,s} = b_l^{c,s}(r; h(\eta)) / \tau_l(r; h(\eta)), \quad t_{l2}^{c,s}(r) = b_l^{c,s}(r; 0). \quad (53)$$

и представление Бесселя — Клиффорда [1] для F_l и G_l , Бабиков свел уравнение (51) к рекуррентной цепочке довольно сложных, но зато энергоне-

зависимых уравнений для функций $t_{ln}^{c,s}(r)$, $n = 0, 1, 2$, через которые кулон-ядерные параметры с $l = 0$ выражаются по формулам (11) с $a = c, s$.

Заметим, что функции (53) низкоэнергетического разложения (52) параметрически зависят от неаналитической функции $h(\eta)$ (см. (22)). Выделить эту зависимость в явном виде Бабикову не удалось по простой причине: использованное им исходное уравнение (51) — нелинейное.

Еще более надежный и простой метод определения кулон-ядерных параметров можно попытаться построить по следующей схеме. Сначала исходная задача рассеяния суперпозицией V^{cs} сводится к системе *линейных* уравнений для некоторых вспомогательных функций, через которые выражается кулон-ядерная фаза рассеяния. Затем из искомым вспомогательных функций выделяются в явном виде все неаналитические множители и слагаемые кулоновского происхождения, а оставшиеся части этих функций представляются в виде рядов по известным функциям импульса-параметра k и новым неизвестным функциям расстояния-аргумента r . Далее, с помощью такого представления исследуемые уравнения сводятся к энергонезависимым уравнениям для новых неизвестных функций, через которые потом выражаются все кулон-ядерные параметры.

Метод, построенный автором по вышеупомянутой схеме, кратко излагается в следующем пункте и позволяет единообразно определить как кулон-ядерные параметры рассеяния суперпозицией V^{cs} , так и ядерные параметры рассеяния суперпозицией V^{cls} с $V^c > 0$.

Задача определения ядерной длины рассеяния суперпозицией V^{cls} оказалась достаточно сложной и решалась длительное время. Полную фазу рассеяния $\delta_l^{cls}(k)$ такой суперпозицией можно разбить двумя способами:

$$\delta_l^{cls}(k) = \delta_l^c(k) + \delta_l^{c,ls}(k); \quad (54)$$

$$\delta_l^{cls}(k) = \delta_l^{cl}(k) + \delta_l^{cl,s}(k), \quad \delta_l^{cl}(k) = \delta_l^c(k) + \delta_l^{c,l}(k), \quad (55)$$

выделив таким образом компоненты, имеющие различный физический смысл. Фаза $\delta_l^{c,ls}(k)$ характеризует совместное влияние двух взаимодействий (V^l и V^s) на рассеяние в кулоновском поле V^c , а фаза $\delta_l^{cl,s}(k)$ описывает вклад одного ядерного потенциала V^s в полную фазу $\delta_l^{cls}(k)$. По низкоэнергетической асимптотике именно этого вклада можно судить о строении ядерного взаимодействия в пределе низких энергий. Экспериментально можно определить лишь полную фазу, а не ее компоненты. Далее возникают две проблемы: как из уже известной полной фазы выделить компоненту

$\delta_l^{cl, s}(k)$ и как построить низкоэнергетическое разложение такой компоненты? Эти до сих пор не решенные в полном объеме задачи теории потенциального рассеяния, представляются достаточно общими и очень важными с теоретической и прикладной точек зрения. Такие задачи неизбежно возникают при теоретическом исследовании роли заданного потенциала V^s , описывающего ядерное взаимодействие, в молекулярных, атомных и ядерных столкновениях, происходящих при сверхнизких в ядерном масштабе энергиях, и при решении обратной задачи, т.е. определении формы и параметров ядерных сил V^s по найденным из опыта наблюдаемым, характеризующим такие столкновения.

Основные черты низкоэнергетического рассеяния заряженной частицы мишенью с неточечным распределением электрического и (или) магнитного зарядов (атом, ион, молекула, ядро) можно предсказать, используя эффективно-двухчастичное приближение, в котором частица и мишень рассматриваются как точечные, но взаимодействующие посредством подходящего эффективного потенциала, содержащего различные по своей природе слагаемые, эффективно учитывающие неточечность частицы и мишени. В достаточно общем случае эффективно-двухчастичное взаимодействие представляется суперпозицией V^{cls} кулоновского потенциала V^c , дальнедействующей электромагнитной поправки V^l к этому потенциалу и короткодействующего потенциала V^s , описывающего сугубо ядерное взаимодействие. Электромагнитные поправки имеют асимптотики (3) с показателем $d = 2, 3, 4, \dots$

Например, взаимодействие магнитного момента $\mu = 2s\mu_N$ нуклона с электрическим зарядом Ze мишени имеет асимптотику [19]:

$$V_{ls}^m \sim V_{ls,0}^m (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) r^{-3}, \quad V_{ls,0}^m \equiv \mu_N Ze^2 / 2m_N c^2, \quad r \rightarrow \infty, \quad (56)$$

где \mathbf{s} — оператор спина нуклона, а m_N и μ_N — его масса и значение его магнитного момента.

При $r \rightarrow \infty$ неконтактная часть взаимодействия магнитных моментов μ_1 и μ_2 двух нуклонов задается формулой [19]:

$$V^m(r) \sim -\frac{m_N}{h^2} [3(\mu_1 \cdot \mathbf{r})(\mu_2 \cdot \mathbf{r}) r^{-2} - (\mu_1 \cdot \mu_2)] r^{-3}. \quad (57)$$

Поляризационное взаимодействие заряженной частицы с электрическим моментом дейтрона [15] имеет асимптотику (12), в которой $\alpha_e = 0,007$ фм — константа электрической поляризуемости дейтрона [14], а R — боровский радиус системы «частица + дейтрон».

Фундаментальное теоретическое исследование низкоэнергетического рассеяния суперпозицией $V^{cl,s}$ с V^l типа (3) было выполнено в [42,43]. Бергер и Шпрач [42] доказали, что в случае $k \rightarrow 0$, $V^c > 0$, $d \geq 3$ и при любом $l = 0, 1, \dots$ старшие слагаемые асимптотик компонент $\delta_l^{c,ls}(k)$ и $\delta_l^{c,l}(k)$ разбиений (54) и (55) определяются борновским интегралом

$$\delta_l^{c,ls}(k) \sim \delta_l^{c,l}(k) \sim -k^{-1} \int_b^\infty dr V^l(r) F_l^2(\rho, \eta), \quad 0 < b < \infty, \quad (58)$$

из которого следуют *равномерные* по l асимптотики

$$\delta_l^{c,d}(k) \sim \frac{-V_0^d k}{2l(l+1)(2l+1)} [2l+1 - 2\eta\chi_l(\eta)], \quad d = 3, \quad (59)$$

$$\delta_l^{c,d}(k) \sim \frac{-V_0^d}{2R^2} \frac{2[3\eta^2 + l(l+1)] \chi_l(\eta) - (6l+3)\eta}{l(l+1)(4l^2-1)(2l+3)}, \quad d = 4, \quad (60)$$

$$\chi_l(\eta) \equiv \pi/2 - \text{Im} \psi(l+1+i\eta) \quad (61)$$

и справедливая при всех $l \ll \eta$ и $d \geq 3$ асимптотическая формула

$$\delta_l^{c,ls}(k) \sim \delta_l^{c,l}(k) \sim (-V_0^d/2R^{1-d}) k^{2d-3} B(d-1, 1/2), \quad k \rightarrow 0. \quad (62)$$

Как заметили Бергер и Шпрач, из-за медленного, а именно степенного, по k убывания (62) фазы $\delta_l^{c,ls}(k)$ аналог кулон-ядерной длины рассеяния (24)

$$\begin{aligned} a_l^{c,ls} &\equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \text{tg} \delta_l^{c,ls}(k) / k [k^l C_l(\eta)]^2 = \\ &= \text{const} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} k^{2(d-l-1)} \exp(\pi/kR) \end{aligned} \quad (63)$$

является бесконечной величиной. Так возникла проблема определения *ядерной* длины рассеяния суперпозицией $V^{cl,s}$. Чтобы ее решить, Бергер, Снодграсс и Шпрач [43] использовали разбиение (55). Введя подходящий аналог кулон-ядерной функции эффективного радиуса (21)

$$K_l^{cl,s}(E) \equiv [k^l C_l^{cl}(\eta)]^2 [k \text{ctg} \delta_l^{cl,s}(k) + h^{cl}(\eta)] \quad (64)$$

и доказав, что

$$K_l^{cl,s}(E) \sim -1/a_l^{cl,s} + k^2 r_{0l}^{cl,s}/2 - k^4 r_{0l}^{cl,s} P_l^{cl,s}, \quad k \rightarrow 0, \quad (65)$$

они определили модифицированные длину рассеяния

$$a_l^{cl,s} \equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_l^{cl,s}(k)/k[k^l C_l^{cl}(\eta)]^2, \quad (66)$$

эффективный радиус $r_{0l}^{cl,s}$ и параметр формы $P_l^{cl,s}$ как величины, содержащиеся в коэффициентах асимптотики (65). Такие параметры характеризуют влияние одного потенциала V^s на рассеяние суперпозицией V^{cls} и поэтому называются ядерными параметрами рассеяния в поле V^{cl} .

Хотя проблема определения ядерной длины рассеяния была решена с концептуальной точки зрения, интегральные представления, полученные в [42,43] для коэффициентов разложения (65) и неаналитических функций $C_l^{cl}(\eta)$ и $h_l^{cl}(\eta)$ параметра η , оказались слишком громоздкими.

Дискуссия о длине рассеяния суперпозицией V^{cls} возобновилась лишь в 1984 г. Начав эту дискуссию докладом [44], Квицинский и Меркурьев показали в последовавшей статье [45], что из-за pd -поляризационного взаимодействия (12) дублетная (${}^2a_{pd}$) и квартетная (${}^4a_{pd}$) pd -длины, определяемые подстановкой в (63) соответствующей pd -фазы вместо фазы $\delta_0^{cls}(k)$, оказываются бесконечными. После этого замечания поляризационные эффекты в низкоэнергетических ядерных столкновениях интенсивно исследовались различными способами. Основные результаты этих исследований обсуждены в [20].

Наиболее полное теоретическое исследование рассеяния суперпозицией V^{cls} в случае $V^c > 0$, $V^l = V^p$ и $l = 0$ выполнено Бенцем и др. [46] в рамках оригинальной линейной версии [47] метода фазовых функций. Основной вывод этого исследования следующий: по крайней мере для вычисления ядерной длины рассеяния в формуле (66) можно заменить $C_l^{cl}(\eta)$ на $C_l(\eta)$ и использовать получившееся соотношение

$$a_l^{cl,s} \approx -\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_l^{cl,s}(k)/k[k^l C_l(\eta)]^2 \quad (67)$$

как приближенное выражение для такой длины.

Теория, построенная Бенцем и др., далеко не полна, потому что авторам не удалось ответить на два важных вопроса: каково строение функций $C_l^{cl}(\eta)$ и $h_l^{cl}(\eta)$ из (64) и как вычислить величины $r_{0l}^{cl,s}$ и $P_l^{cl,s}$ из (65)?

Недавно автор нашел ответы на эти вопросы. Подробное описание предлагаемого им метода будет дано в отдельной статье, а схематическое приведено ниже для случая $V^c > 0$.

2.2. Низкоэнергетические разложения для рассеяния суперпозицией V^{cls} . Следуя [48], введем безразмерные аргумент $x \equiv r/R$ и параметр $q \equiv kR$ и запишем исследуемую задачу рассеяния Шредингера в виде дифференциальных уравнений

$$[\partial_x^2 - l(l+1)x^{-2} - V^c(x) - V(x) + q^2] u_l^\pm(x; q) = 0, \quad x \in \mathcal{R}^+, \quad (68)$$

для искомым регулярной (u_l^+) и нерегулярной (u_l^-) волновых функций, подчиненных соответствующим граничным условиям

$$u_l^\pm(x; q) = O(x^{\pm(l+1/2)+1/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad (69)$$

$$u_l^\pm(x; q) \sim \sin[\rho - \eta \ln 2\rho - (2l+1 \mp 1)\pi/4 + \delta_l^c(q) + \delta_l(q)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (70)$$

Здесь $\mathcal{R}^+ \equiv \{x : 0 \leq x \leq \infty\}$, $\rho = kr = qx$, $\eta = 1/2q$, а $\delta_l(q)$ означает фазу, порождаемую потенциалом V в кулоновском поле $V^c = 1/x$. Единственное ограничение

$$I_l(b, x) \equiv (2\pi/(l+1))^{1/2} \int_b^x dt \cdot t |V(t)| < \infty, \quad 0 \leq b \leq x \leq \infty, \quad (71)$$

накладываемое на потенциал V , является достаточно общим [8]. Ему удовлетворяют большинство короткодействующих потенциалов, используемых в ядерной физике для описания сильного взаимодействия [16,17], все дальнедействующие поправки (3) с $d > 2$ и суперпозиции V^{ls} таких ядерных и дальнедействующих потенциалов. Далее при необходимости будет оговорено, для какого именно класса (V^s , V^l или V^{ls}) потенциалов V будут верны те или иные низкоэнергетические ($q \rightarrow 0$) разложения. Большинство из них — асимптотические [4] бесконечные ряды

$$S(x; q) = N(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} S_n(x), \quad x \in \mathcal{R}^+, \quad q \rightarrow 0, \quad (72)$$

с нормировочным множителем $N(q)$ и аргументом x , отделенным от стремящегося к нулю параметра q . Ряд (72) представим в виде разбиения на его конечную подсумму $S^{(M)}$ и остаточный член $^{(M)}S$:

$$S = S^{(M)} + ^{(M)}S, \quad S^{(M)}(x; q) \equiv N(q) \sum_{n=0}^M q^{2n} S_n(x). \quad (73)$$

Достаточно простым способом исследования *различных* решений уравнения Шредингера (68) является линейная версия метода фазовых функций [11], по сути дела, эквивалентная методу вариации «постоянных» коэффициентов [2]. Калоджеро [47] сформулировал эту версию в терминах амплитудных функций («постоянных» коэффициентов) для вычисления регулярного решения u_l^+ задачи (68)—(70) и фазы рассеяния $\delta_l(q)$. Недавно эта оригинальная версия была дополнена способом построения нерегулярного решения [48], развита для исследования искусственных и физических резонансных состояний [49] и объединена с методом комплексного вращения координаты [50] для вычисления функции Йоста [51].

Расширим линейную версию для построения низкоэнергетических разложений функций, связанных с задачей (68)—(71), в виде (72), (73). Сначала напомним, как эта задача была переформулирована в работе [48].

Искомые волновые функции представляются в виде

$$\begin{aligned} u_l^+(x; q) &= N_l^+(q) U_l^+(x; q), \\ u_l^-(x; q) &= \tilde{u}_l^-(x; q) + \alpha_l(q) u_l^+(x; q), \\ \tilde{u}_l^-(x; q) &= N_l^-(q) U_l^-(x; q), \end{aligned} \quad (74)$$

$$U_l^\pm(x; q) \equiv c_l^\pm(x; q) F_l(\rho, \eta) + s_l^\pm(x; q) G_l(\rho, \eta). \quad (75)$$

Котангенс фазы $\delta_l(q)$ и нормировочные множители $N_l^\pm(q)$ и $\alpha_l(q)$, обеспечивающие асимптотики (70), определяются как пределы при $x \rightarrow \infty$ соответствующих функций

$$\operatorname{ctg} \delta_l(x; q) \equiv c_l^+(x; q) / s_l^+(x; q), \quad (76)$$

$$N_l^\pm(x; q) \equiv [(c_l^\pm(x; q))^2 + (s_l^\pm(x; q))^2]^\mp 1/2, \quad (77)$$

$$\alpha_l(x; q) \equiv -c_l^+(x; q) c_l^-(x; q) - s_l^+(x; q) s_l^-(x; q). \quad (78)$$

Для амплитудных функций выводятся две незацепляющиеся системы уравнений (первая система для c_l^+ и s_l^+ , а вторая — для c_l^- и s_l^-)

$$\partial_x \begin{Bmatrix} c_l^\pm(x; q) \\ s_l^\pm(x; q) \end{Bmatrix} = q^{-1} V(x) U_l^\pm(x; q) \begin{Bmatrix} + G_l(\rho, \eta) \\ - F_l(\rho, \eta) \end{Bmatrix} \quad (79)$$

с соответствующими начальными ($x \rightarrow 0$) условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} c_l^+(x; q) \\ s_l^+(x; q) \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} + q^{-1} \int_0^x dt V(t) F_l(\rho', \eta) \left\{ \begin{array}{l} + G_l(\rho', \eta) \\ - F_l(\rho', \eta) \end{array} \right\}; \quad (80)$$

$$\begin{aligned} c_l^-(x; q) &\sim c_l^-(x_0; q) + q^{-1} \int_{x_0}^x dt V(t) G_l^2(\rho', \eta), \\ s_l^-(x; q) &\sim 1 - q^{-1} \int_0^x dt V(t) F_l(\rho', \eta) G_l(\rho', \eta), \end{aligned} \quad (81)$$

обеспечивающими асимптотики (69) функций (74). В (80) и (81) $\rho' \equiv tq$; если первый интеграл (81) существует при $x_0 = 0$, то полагается, что $x_0 = 0$ и $c_l^-(0; q) = 0$, в противном случае параметр x_0 выбирается так, чтобы выполнялись два неравенства: $x_0 > x$ и $x_0 q \ll 1$.

Итак, для построения решений u_l^\pm исходной задачи (68)—(71) по формулам (74) и (75) необходимо решить задачи (79)—(81), а затем вычислить пределы при $x \rightarrow \infty$ каждой функции (76)—(78).

Перейдем к построению низкоэнергетических разложений типа (72) для всех функций, связанных с исследуемой задачей (68)—(71).

Сначала рассмотрим случай $V \equiv 0$, когда $u_l^+ = F_l$ и $u_l^- = G_l$. Перепишем формулу Ламберта ((3.25) из [52]) в виде

$$\begin{aligned} G_l(\rho, \eta) &= \tilde{G}_l(\rho, \eta) + h^c(q) F_l(\rho, \eta), \\ \tilde{G}_l(\rho, \eta) &\equiv \Theta_l(x, q) / C_l^2(q), \end{aligned} \quad (82)$$

$$C_l(q) \equiv q^l C_l(\eta), \quad h^c(q) \equiv h(\eta) / q C_0(q), \quad (83)$$

где $C_l(\eta)$ и $h(\eta)$ даны равенствами (22), а Θ_l — целая функция q^2 .

Известные ряды Бесселя — Клиффорда (см. формулы (14.4.1)—(14.4.4) в [1]) содержат полиномы $b_n(\eta)$ параметра k^2 и модифицированные функции Бесселя $I_n(z)$ и $K_n(z)$ переменной $z \equiv 2x^{1/2}$. Объединив в этих рядах слагаемые с одинаковыми степенями параметра k^2 , получаем ряды типа (72):

$$F_l(\rho, \eta) = q C_l(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} f_{ln}(x), \quad \tilde{G}_l(\rho, \eta) = C_l^{-1}(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} g_{ln}(x), \quad (84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2f_{ln}(x) \\ (2l+1)g_{ln}(x) \end{array} \right\} \equiv 2^{-2n} \sum_{m=2n}^{3n} a_{nm} z^{m+1} \left\{ \begin{array}{l} I_{2l+m+1}(z) \\ (-1)^{-m} K_{2l+m+1}(z) \end{array} \right\}. \quad (85)$$

Здесь a_{nm} — энергонезависимые коэффициенты, подчиненные рекуррентным цепочкам ($m = 2n, \dots, 3n$ для каждого $n = 1, 2, \dots$) уравнений

$$2ma_{nm} + 2(2l+m)a_{n-1, m-2} + a_{n-1, m-3} = 0, \quad (86)$$

причем $a_{00} \equiv 1$ и $a_{nm} \equiv 0$, если $n > 0$ и $m < 2n$ или же $m > 3n$.

Как известно [4], оценки [1]

$${}^{(M)}F_l(\rho, \eta) = O(q^{2M+3}C_l(q)), \quad {}^{(M)}\tilde{G}_l(\rho, \eta) = O(q^{2M+2}/C_l(q)) \quad (87)$$

остаточных членов разбиений (73) рядов (84) равномерны по ρ , если

$$\rho \ll \rho_l^c \equiv \eta [1 + (1 + l(l+1)/\eta)^{1/2}]. \quad (88)$$

Построим ряды типа (72) для амплитудных функций. Для этого подставим эти функции в виде искомого рядов

$$c_l^\pm(x; q) = \tilde{c}_l^\pm(x; q) - h^c(q) s_l^\pm(x; q), \quad (89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_l^\pm(x; q) \\ s_l^\pm(x; q) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (qC_l^2(q))^{(-1 \pm 1)/2} \\ (qC_l^2(q))^{(+1 \pm 1)/2} \end{array} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \left\{ \begin{array}{l} c_{ln}^\pm(x) \\ s_{ln}^\pm(x) \end{array} \right\} \quad (90)$$

в (75) и (79)—(81), а функции F_l и G_l представим в виде (82)—(86). Отделив q от x в полученных соотношениях, получаем представления

$$U_l^\pm(x; q) = q^{(1 \pm 1)/2} C_l^{\pm 1}(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^\pm(x),$$

$$U_{ln}^\pm(x) \equiv \sum_{m'+m=n} [c_{lm'}^\pm(x) f_{lm}(x) + s_{lm'}^\pm(x) g_{lm}(x)], \quad (91)$$

бесконечную ($n = 0, 1, \dots$) цепочку энергонезависимых уравнений

$$\partial_x \left\{ \begin{array}{l} c_{ln}^\pm(x) \\ s_{ln}^\pm(x) \end{array} \right\} = V(x) \sum_{m'+m=n} U_{lm'}^\pm(x) \left\{ \begin{array}{l} + g_{lm}(x) \\ - f_{lm}(x) \end{array} \right\} \quad (92)$$

для искомого функций c_{ln}^\pm и s_{ln}^\pm и их асимптотики при $x \rightarrow 0$:

$$\left\{ \begin{matrix} c_{ln}^+(x) \\ s_{ln}^+(x) \end{matrix} \right\} \sim \left\{ \begin{matrix} \hat{\delta}_{n0} \\ 0 \end{matrix} \right\} + \sum_{m'+m=n}^{\infty} \int_0^x dt V(t) f_{lm'}(t) \left\{ \begin{matrix} +g_{lm}(t) \\ -f_{lm}(t) \end{matrix} \right\}; \quad (93)$$

$$\begin{aligned} c_{ln}^-(x) &\sim c_{ln}^-(x_0) + \sum_{m'+m=n}^{\infty} \int_{x_0}^x dt V(t) g_{lm'}(t) g_{lm}(t), \\ s_{ln}^-(x) &\sim \hat{\delta}_{n0} - \sum_{m'+m=n}^{\infty} \int_0^{x_0} dt V(t) f_{lm'}(t) g_{lm}(t). \end{aligned} \quad (94)$$

Если первый интеграл (94) существует при $x_0 = 0$, то полагается $x_0 = 0$ и $c_{ln}^-(0) = 0$, в противном случае считается, что $x < x_0 \ll 1$.

Подставив U_l^{\pm} в виде (91) в (74), получаем искомые ряды

$$\begin{aligned} u_l^+(x; q) &= qC_l(q) N_l^+(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^+(x), \\ \bar{u}_l^-(x; q) &= (C_l(q) N_l^+(q))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^-(x). \end{aligned} \quad (95)$$

Используя равенства (87), можно показать, что при условии (88) для остаточных членов разбиений (73) рядов (90) и (95) верны следующие оценки:

$$\left\{ \begin{matrix} {}^{(M)}\bar{c}_l^{\pm}(x; q) \\ {}^{(M)}s_l^{\pm}(x; q) \end{matrix} \right\} = O \left(q^{2M+2} \left\{ \begin{matrix} (qC_l^2(q))^{(-1 \pm 1)/2} \\ (qC_l^2(q))^{(+1 \pm 1)/2} \end{matrix} \right\} \right), \quad (96)$$

$${}^{(M)}u_l^{\pm}(x; q) = O(q^{2M+3} C_l(q)), \quad {}^{(M)}\bar{u}_l^-(x; q) = O(q^{2M+2} / C_l(q)). \quad (97)$$

Перейдем к построению функций эффективного радиуса. Чтобы формулы имели компактный вид, введем два взаимосвязанных индекса a и a' . Символом $A^{ca}(x, q)$ с индексом ca , где $a = s, l, ls$, обозначаем исследуемую функцию $A(x, q)$, характеризующую рассеяние соответствующей суперпозицией V^{ca} с $a = s, l, ls$. Символы типа $A^{a'}(q)$ со штрихованным индексом $a' = c, s; a = c, l; a' = cl, s$, содержащим запятую, будут использоваться для обозначения вкладов $\delta_l^{c,s}(k)$, $\delta_l^{c,l}(k)$ и $\delta_l^{cl,s}(k)$ в рассматриваемую полную фазу рассеяния $\delta_l^{ca}(k)$, функций эффективного радиуса $K_l^{c,s}$ или $K_l^{cl,s}$ и коэффициентов их разложений при $q \rightarrow 0$.

Сначала рассмотрим рассеяние суперпозицией V^{cs} . В этом случае $V = V^s$, $a = s$ и $a' = c, s$. Используя (83), запишем кулон-ядерную функцию эффективного радиуса (21) в безразмерной форме

$$K_l^{a'}(q) \equiv R^{2l+1} K_l^{a'}(E). \quad (98)$$

Докажем асимптотическое представление

$$K_l^{a'}(q) = \sum_{n=0}^M q^{2n} K_{ln}^{a'} + O(q^{2M+2}), \quad M < \infty, \quad q \rightarrow 0 \quad (99)$$

и попутно выведем формулы для его трех первых коэффициентов:

$$\begin{aligned} K_{l0}^{a'} &= c_{l0}^{+ca}(\infty)/s_{l0}^{+ca}(\infty), & K_{l1}^{a'} &= [c_{l1}^{+ca}(\infty) - K_{l0}^{a'} s_{l1}^{+ca}(\infty)]/s_{l0}^{+ca}(\infty), \\ K_{l2}^{a'} &= [c_{l2}^{+ca}(\infty) - K_{l0}^{a'} s_{l2}^{+ca}(\infty) - K_{l1}^{a'} s_{l1}^{+ca}(\infty)]/s_{l0}^{+ca}(\infty) \end{aligned} \quad (100)$$

и соотношения

$$\begin{aligned} a_l^{a'} &= -R^{2l+1}/K_{l0}^{a'}, & r_{0l}^{a'} &= 2R^{1-2l} K_{l1}^{a'}, \\ P_l^{a'} &= -R^{3-2l} K_{l2}^{a'}/r_{0l}^{a'}, \end{aligned} \quad (101)$$

определяющие кулон-ядерные параметры рассеяния ($a' = c, s$) как простые алгебраические комбинации (100) предельных ($x \rightarrow \infty$) значений $c_{ln}^{+ca}(\infty)$ и $s_{ln}^{+ca}(\infty)$ решений c_{ln}^+ и s_{ln}^+ задач (92), (93) с $V = V^s$ и $n = 0, 1, 2$.

Подставим c_l^+ в виде разности (89) в (76). Ряды (90) для функций \tilde{c}_l^+ и s_l^+ запишем в виде (72), (73) и положим $x \rightarrow \infty$. Как было показано выше, в этом пределе функции c_{ln}^+ и s_{ln}^+ конечны и верны оценки (96). Поэтому предел функции (76) при $x \rightarrow \infty$ дает следующее низкоэнергетическое ($q \rightarrow 0$) представление:

$$\operatorname{ctg} \delta_l^{c, s}(q) = q^{-1} C_l^{-2}(q) \left[\frac{\sum_{n=0}^M q^{2n} c_{ln}^+(\infty)}{M} + O(q^{2M+2}) \right] - h^c(q).$$

Из этого представления следуют формулы (99) и (101). Сравнив их со стандартным выражением (23), получаем соотношения (101). Согласно им

вычисление кулон-ядерных параметров рассеяния $a_l^{c, s}$, $r_{0l}^{c, s}$ и $P_l^{c, s}$ сводится к последовательному ($n = 0, 1, 2$) интегрированию трех энергонезависимых задач (92), (93) с $V = V^s$. В случае $V = V^{ls}$ вычисление модифицированных параметров рассеяния усложняется.

Пусть теперь $V = V^l + V^s$, где V^s удовлетворяет (1), а V^l имеет асимптотику (3) с $d \geq 3$. Докажем, что функция

$$K_l^{cl, s}(q) = [C_l(q)N_l^{+cl}(q)]^2 [q \operatorname{ctg} \delta_l^{cl, s}(q) + q\alpha_l(q)] \quad (102)$$

связана с модифицированной функцией эффективного радиуса (64) соотношением (98) и имеет асимптотику (99) с коэффициентами (100), где теперь $a = ls$, $a' = cl$, s , а $c_{ln}^{+cls}(\infty)$ и $s_{ln}^{+cls}(\infty)$ — некоторые конечные величины, которые мы определим по ходу доказательства.

На его первом этапе находим *вспомогательные* функции $u_l^{\pm cl}$, определенные как решения u_l^{\pm} задач (68)—(71) при выключенном ядерном взаимодействии, т.е. когда $V = V^l$, $a = l$ и $a' = c, l$. Функции $u_l^{\pm cl}$ и их низкоэнергетические разложения строим вышеизложенным методом. В итоге получаем

$$\begin{aligned} u_l^{+cl}(x; q) &= N_l^{+cl}(q) U_l^{+cl}(x; q), \\ u_l^{-cl}(x; q) &= \tilde{u}_l^{-}(x; q) + \alpha_l^{cl}(q) u_l^{+cl}(x; q), \\ \tilde{u}_l^{-}(x; q) &= N_l^{-cl}(q) U_l^{-cl}(x; q), \\ U_l^{\pm cl}(x; q) &\equiv c_l^{\pm cl}(x; q) F_l(\rho, \eta) + s_l^{\pm cl}(x; q) G_l(\rho, \eta); \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} u_l^{+cl}(x; q) &= qC_l(q)N_l^{+cl}(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^{+cl}(x), \\ \tilde{u}_l^{-cl}(x; q) &= [C_l(q)N_l^{+cl}(q)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^{-cl}(x), \end{aligned}$$

$$U_{ln}^{\pm cl}(x) \equiv \sum_{m'+m=n} [c_{lm'}^{\pm cl}(x) f_{lm}(x) + s_{lm'}^{\pm cl}(x) g_{lm}(x)]. \quad (104)$$

В (103) $c_l^{\pm cl}$ и $s_l^{\pm cl}$ означают решения c_l^{\pm} и s_l^{\pm} задач (79)—(81) с $V = V^l$, а множители $N_l^{\pm cl}(q)$ и $\alpha_l^{cl}(q)$ равны пределам при $x \rightarrow \infty$ соответствующих

функций (77) и (78). Функции $c_{ln}^{\pm cl}$ и $s_{ln}^{\pm cl}$, содержащиеся в (104), означают решения c_{ln}^{\pm} и s_{ln}^{\pm} задач (92)—(94) с $V = V^l$.

Перейдем к следующему этапу ($a = ls$, $a' = cl$, s) и построим регулярное решение u_l^{+cls} исходной задачи (68)—(70) с $V = V^{ls}$ в рамках обобщенной линейной версии метода фазовых функций [11] следующим образом. Сначала запишем асимптотику (70) функции u_l^{+ca} с $a = ls$ в виде, отвечающем разбиению (55) полной фазы рассеяния:

$$u_l^{+cls}(x; q) \sim \cos \delta_l^{cl, s}(q) u_l^{+cl}(x; q) + \sin \delta_l^{cl, s}(q) u_l^{-cl}(x; q) \sim \\ \sim \sin(\rho - \eta \ln 2\rho + \delta_l^{cl}(q) + \delta_l^{cl, s}(q)), \quad qx \rightarrow \infty. \quad (105)$$

Функции (103), подчиненные в силу (70) соотношению Вронского

$$u_l^{-cl}(x; q) \partial_x u_l^{+cl}(x; q) + u_l^{+cl}(x; q) \partial_x u_l^{-cl}(x; q) = q, \quad x \in \mathcal{R}^+, \quad (106)$$

используем теперь как эталонные вместо F_l и G_l , а u^{+cls} ищем в виде

$$u^{+cls}(x; q) = N_l^{+cls}(q) U_l^{+cls}(x; q), \\ U_l^{+cls}(x; q) \equiv c_l^{+cls}(x; q) u_l^{+cl}(x; q) + s_l^{+cls}(x; q) u_l^{-cl}(x; q), \quad (107)$$

где неизвестные обобщенные амплитудные функции c_l^{+cls} и s_l^{+cls} подчинены по определению тождеству Лагранжа

$$\partial_x c_l^{+cls}(x; q) u_l^{+cl}(x; q) + \partial_x s_l^{+cls}(x; q) u_l^{-cl}(x; q) \equiv 0, \quad x \in \mathcal{R}^+. \quad (108)$$

Подставив (107) в (68)—(70) и учтя (106) и (108), выводим уравнения

$$\partial_x \begin{Bmatrix} c_l^{+cls}(x; q) \\ s_l^{+cls}(x; q) \end{Bmatrix} = q^{-1} V^s(x) U_l^{+cls}(x; q) \begin{Bmatrix} + u_l^{-cl}(x; q) \\ - u_l^{+cl}(x; q) \end{Bmatrix} \quad (109)$$

с простыми начальными условиями: $c_l^{+cls}(0; q) = 1$, $s_l^{+cls}(0; q) = 0$. Асимптотики функций (107) при $x \rightarrow \infty$ будут иметь нужный вид (105), если положить по определению

$$\text{ctg } \delta_l^{cl, s}(q) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} c_l^{+cls}(x; q) / s_l^{+cls}(x; q). \quad (110)$$

Используя разложения (104) и анзац

$$c_l^{+cls}(x, q) = \tilde{c}_l^{+cls}(x; q) - \alpha_l^{cl}(q) s_l^{+cls}(x; q), \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_l^{+cls}(x; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} c_{ln}^{+cls}(x), \\ s_l^{+cls}(x; q) &= q [C_l(q) N_l^{+cl}(q)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} s_{ln}^{+cls}(x), \end{aligned} \quad (112)$$

сводим задачу (109) к рекуррентной ($n = 0, 1, \dots$) цепочке зацепляющихся пар энергонезависимых уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x \left\{ \begin{array}{l} c_{ln}^{+cls}(x) \\ s_{ln}^{+cls}(x) \end{array} \right\} &= V^s(x) \sum_{m'+m=n} U_{lm'}^{+cls}(x) \left\{ \begin{array}{l} + U_{lm}^{-cl}(x) \\ - U_{lm}^{+cl}(x) \end{array} \right\}, \\ U_{ln}^{+cls}(x) &\equiv \sum_{m'+m=n} [U_{lm'}^{+cl}(x) c_{lm}^{+cls}(x) + U_{lm'}^{-cl}(x) s_{lm}^{+cls}(x)] \end{aligned} \quad (113)$$

для функций c_{ln}^{+cls} и s_{ln}^{+cls} таких, что $c_{ln}^{+cls}(0) = \hat{\delta}_{n0}$ и $s_{ln}^{+cls}(0) = 0$. Методом итераций [2] можно показать, что все эти функции ограничены на \mathcal{R}^+ , если V^s удовлетворяет (1). Подставив c_l^{+cls} в виде (111) в (110) и положив $x \rightarrow \infty$, приходим к соотношению, которое переписывается в виде формулы (102), определяющей безразмерную функцию $K_l^{cl,s}$ через функции \tilde{c}_l^{+cls} и s_l^{+cls} , взятые при $x = \infty$. Разбив ряды (112) на слагаемые типа (73) и используя оценки (97) для конечных сумм рядов (104), доказываем соотношения (99) и (100), где $a = ls$, $a' = cl$, s , а $c_{ln}^{+cls}(\infty)$ и $s_{ln}^{+cls}(\infty)$ означают предельные значения решений задач (113). Сравнив (64) с (102), получаем связи

$$C_l^{cl}(\eta) = C_l(q) N_l^{+cl}(q), \quad h^{cl}(\eta) = k \alpha_l^{cl}(q) \quad (114)$$

и формулы (101), определяющие модифицированные параметры рассеяния в рассмотренном случае $a = ls$, $a' = cl$, s . Согласно (99), (101) и (102) формула для ядерной длины рассеяния имеет вид

$$a_l^{cl,s} \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_l^{cl,s}(k) / k [k^l C_l(\eta) N_l^{+cl}(k)]^2$$

и отличается от приближенного соотношения (67), полученного в [46], наличием множителя N_l^{+cl} . Последний близок к единице, если V^l достаточно мал (см. оценки (37) работы [48]). Только в этом случае формула (67) дает правдоподобное, но тем не менее *приближенное* значение длины $a_l^{cl,s}$.

Как было показано выше, для вычисления C_l^{cl} и h^{cl} из (64) посредством формул (114) сначала решаются задачи (79), (80) с $V = V^l$. Последующее

вычисление модифицированных параметров рассеяния сводится к решению трех ($n = 0, 1, 2$) энергонезависимых и рекуррентных задач (92)—(94) с $V = V^l$ и трех ($n = 1, 2, 3$) задач (113). Все упомянутые задачи — системы линейных дифференциальных уравнений с простыми граничными условиями, практическое решение которых с высокой точностью не вызывает каких-либо затруднений. В предложенном методе вычисление параметров ядерного рассеяния центральным потенциалом V^s в поле V^{cl} не требует никаких предположений о малости V^l , но позволяет исследовать лишь модельное рассеяние в системах из двух нуклонов или ядер. Дело в том, что, согласно современным представлениям, сугубо ядерное NN -взаимодействие не является центральным потенциалом, хотя координатная зависимость всех его компонент описывается короткодействующими потенциалами с асимптотиками (1).

Сначала эмпирически [15], а затем и в рамках мезонной теории [16] было установлено, что реалистическое NN -взаимодействие должно содержать наряду со сферически-симметричной компонентой спин-орбитальное и тензорное слагаемые. В настоящее время наиболее обоснованными теоретически и позволяющими описать широкую совокупность данных по NN - и $3N$ -системам считаются парижский [53], боннский [54], ниджеменский [55] и урбана-арагонский [56] потенциалы. Имеется и серия гибридных потенциалов, полученных в рамках кварковых моделей и отражающих обмен мезонами [57]. Исследованию вкладов $\pi\pi$ - и $\pi\rho$ -обменов в NN -взаимодействие была посвящена недавняя работа [58]. Несмотря на обилие версий NN -потенциалов, построение теории ядерных сил и уточнение представлений о природе этих сил продолжается. Важным аспектом этого построения является вывод низкоэнергетических разложений характеристик NN -рассеяния суперпозициями V^{ls} и V^{cls} с реалистическим ядерным потенциалом и электромагнитной поправкой V^l . Чтобы пояснить почему, напомним результаты старых исследований эффектов нарушения зарядовой симметрии NN -сил и проанализируем, как уточнялись величины параметров низкоэнергетического NN -рассеяния.

3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ NN -РАССЕЯНИЕ

В 1932 г. Гейзенберг [59] ввел понятие изоспина прежде всего в качестве изящного счетного средства. Согласно этому понятию нейтрон и протон — два проявления одной и той же частицы нуклона, имеющей по определению изоспин $1/2$, причем нейтрон обладает проекцией изоспина $-1/2$, а протон — проекцией изоспина $+1/2$. Однако два таких состояния

физически различимы за счет заряда протона и разницы масс нейтрона и протона. Поэтому не очевидно, что понятие изоспина как негеометрической (изоспиновой) симметрии имеет истинный смысл. С экспериментальной точки зрения следствие такой симметрии состоит в эквивалентности (зарядовой независимости) ядерных pp -, np - и nn -взаимодействий. Равенство pp - и nn -взаимодействий (зарядовая симметрия) — менее ограниченное понятие. Вопрос об источниках нарушения зарядовой симметрии и эффектах, обусловленных таким нарушением, остается одной из фундаментальных проблем современной теории атомного ядра и элементарных частиц. Зарядовая симметрия нарушается электромагнитным и слабым взаимодействиями, подразумевающими наличие разных по цвету кварков (u , d , s , c , ...). Другой источник нарушения этой симметрии — разница масс u - и d -кварков, приблизительно равная 3 МэВ.

Одно из известных [60—63] с начала 60-х гг. указаний на nn - и pp -асимметрию ядерного взаимодействия — разница масс зеркальных ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ — называется аномалией Окамото — Нолена — Шиффера. В 1971 г. Нигил [64] объяснил ее в рамках предположения о том, что ядерное NN -взаимодействие зарядово-несимметрично, а именно ядерное nn -взаимодействие V_{nn}^s является немного более притягивающим ($|V_{nn}^s| > |V_{pp}^s|$), чем ядерное pp -взаимодействие V_{pp}^s . После такого предположения было построено несколько первых версий [65—68] зарядово-несимметричных ядерных 1S_0 -потенциалов, учитывающих $\rho\omega$ - и $\pi^0\eta$ -смешивания. Последовавшее использование таких потенциалов позволило объяснить основные эффекты, обусловленные нарушением NN -зарядовой симметрии в ядрах ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$: разницу их масс [69] и различие энергетических зависимостей упругих факторов [70].

Экспериментальное и теоретическое исследования эффектов нарушения зарядовой симметрии в низкоэнергетическом NN -рассеянии — довольно сложная задача. Протоны заряжены, поэтому их легче ускорять и детектировать, чем нейтроны. Измерения характеристик pp -столкновения пока является лучшим источником количественной информации о ядерных силах при не очень низких энергиях ($E_{\text{lab}} > 10$ МэВ). С уменьшением энергии постановка pp -эксперимента все более затрудняется из-за отталкивающего кулоновского барьера, сильно подавляющего вероятность сближения протонов в области действия ядерных сил. Кулоновское взаимодействие усложняет и теоретический анализ [71—74] экспериментальных pp -данных. Этот анализ становится еще более громоздким при уменьшении энергии pp -столкновения из-за возрастающей роли [75,76] различных электромагнитных поправок. В np -системе, в отличие от pp - и nn -систем, возможны два типа

состояний: синглетное и триплетное по полному изоспину. Необходимость учета обоих этих состояний — основная причина, по которой анализ экспериментальных np -данных и теоретическое определение по ним параметров низкоэнергетического np -рассеяния — задачи несравненно более сложные, чем в случае pp - или nn -столкновений. Непосредственное наблюдение nn -столкновения еще не было осуществлено, хотя реальная схема nn -эксперимента в нейтронном пучке обсуждалась в [77]. Пока для экспериментального определения параметров nn -рассеяния нет иного способа, как анализ кинематики системы из трех и более частиц в конечном состоянии, например, $D(\pi^-, \gamma) 2n$, $D(n, nn) p$, $D(t, {}^3\text{He}) 2n$, $D(\mu^-, \nu_\mu) 2n$. Однако любое теоретическое описание системы из трех и более частиц с сильным взаимодействием требует моделирования задачи и, как правило, приближенного алгоритма ее решения. Оба эти приближения, логическое и численное, неизбежно вносят множество трудноконтролируемых теоретических неопределенностей. Пренебрежение ими может привести к неверному заключению. Представляется полезным привести пример, подтверждающий это утверждение.

В литературе 70-х гг. (см. обзор [78]) часто приводилось значение 1S_0 -длины nn -рассеяния $a_{nn}^s = (-16,6 \pm 0,6)$ фм, полученное простым усреднением многочисленных данных о реакции $D(n, nn) p$. При усреднении теоретические неопределенности обработки этого эксперимента с тремя адронами в конечном состоянии не учитывались, и усредненное значение оказалось меньше по абсолютной величине 1S_0 -длины pp -рассеяния $a_{pp}^{c,s} = (-17,1 \pm 0,2)$ фм, извлеченной из pp -данных [79]. Как выяснилось позже (см. [80]), именно вследствие этого неучета среднее значение $a_{nn}^s = (-16,6 \pm 0,6)$ фм, как и более поздний результат $a_{nn}^s = (-16,9 \pm 0,6)$ фм исследования [81] реакции $D(n, nn) p$ недостоверны. Оба эти значения противоречат предположению Нигела о том, что $|V_{nn}^s| > |V_{pp}^s|$ и не согласуются с величиной $a_{nn}^s = (-18,5 \pm 0,4)$ фм, полученной в [82,83] с помощью полного кинематического анализа фотонного спектра реакции $D(\pi^-, \gamma) 2n$, измеренного с большой статистикой. Исследование этой реакции представляет особый интерес, потому что в ее конечном состоянии можно детектировать все три частицы, из которых только две взаимодействуют посредством ядерных сил. Последнее обстоятельство особенно важно: оно предоставляет редкую возможность исследовать все кинематические области, что позволяет определить не только длину a_{nn}^s , но и эффективный радиус r_{nn}^s синглетного nn -рассеяния. Реакция $D(\pi^-, \gamma) 2n$

привлекательна и с теоретической точки зрения. Действительно, начальное состояние этой реакции можно описать в рамках трехчастичных дифференциальных уравнений Фаддеева, а исследование ее конечного состояния сводится к решению простой задачи двух тел (нейтронов). По этим причинам все теоретические неопределенности анализа $D(\pi^-, \gamma) 2n$ -данных сводятся до минимума, что позволяет определить параметры nn -рассеяния с большей точностью и достоверностью, чем из данных по реакциям с тремя адронами в конечном состоянии. В 1987 г. Терамонд и Габюуд [80], тщательно исследовав взаимодействие нейтронов в конечном состоянии реакции π^-D -захвата, подтвердили ранее измеренные [83] значения $a_{nn}^s = (-18,5 \pm 0,4)$ фм и $r_{nn}^s = (2,80 \pm 0,11)$ фм. К 1992 г. наиболее достоверными считались [84] величины $a_{nn}^s = (-18,5 \pm 0,4)$ фм и $r_{nn}^s = (2,75 \pm 0,11)$ фм, полученные усреднением всех накопившихся к тому времени данных [85—87], а длину pp -рассеяния было принято [87] считать равной $a_{pp}^{c,s} = (-17,3 \pm 0,3)$ фм. Упомянутые выше значения длин согласуются с неравенством $|V_{nn}^s| > |V_{pp}^s|$ и позволяют объяснить аномалию Окамото — Нолена — Шиффера: если положить разность $a_{pp}^{c,s} - a_{nn}^s$ равной 1,3 или 1,5 фм, то для разности масс ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ получатся [88] соответствующие величины 59 и 63 кэВ, сравнимые с ее экспериментальным [89] значением (62 ± 3) кэВ.

В результате тщательного исследования [90] экспериментальных данных [91] о реакции $D(n, nn) p$, выполненного к 1993 г. в рамках W -матричного AGS-метода [92] с модифицированным парижским NN -потенциалом [53], было получено значение $a_{nn}^s = (-17,0 \pm 1,0)$ фм.

Как следует из приведенного выше хронологического обзора, в течение трех последних десятилетий значения 1S_0 -параметров низкоэнергетического nn -рассеяния постоянно уточнялись. В настоящее время понятно, как можно достичь еще большей точности в экспериментальном [80] и теоретическом [90] определении таких S -волновых параметров. При энергиях $E_{\text{lab}} < 20$ МэВ вклад S -фаз в сечения NN -рассеяния является доминирующим, что существенно затрудняет экспериментальное определение энергетической зависимости 3P_j -фаз ($j = 0, 1, 2$) в этой области энергий. Вторая причина, по которой 3P_j -фазы экспериментально исследованы лишь при $E_{\text{lab}} > 10$ МэВ, состоит в том, что для их однозначного определения требуется измерить пять независимых NN -амплитуд [71,73,75]. Измерение лишь

двух таких амплитуд даже при достаточно больших энергиях, например [93] np -спиновых наблюдаемых K_{osko} и K_{osso} при энергиях 230—530 МэВ, представляет трудную экспериментальную задачу. Как отмечено в [84], данные о всех пяти NN -наблюдаемых в настоящее время неизвестны и вряд ли будут доступны в ближайшем будущем. В связи с такой экспериментальной ситуацией теоретическое определение P -волновых ($l = 1$) параметров NN -рассеяния и развитие надежного метода экстраполяции 3P_j -фаз в область низких энергий представляются особенно актуальными задачами. Их решение позволило бы уточнить строение и величину P -волновых слагаемых современных NN -потенциалов. Такое уточнение необходимо как для обработки экспериментальных данных о реакциях $D(\pi^-, \gamma) 2n$ и $D(n, nn) p$, так и для надежного теоретического описания Nd -спиновых наблюдаемых, в частности, pd -анализирующей способности $A_{y, pd}$, которая, в отличие от NN -анализирующей способности $A_{y, NN}$, чрезвычайно чувствительна к величине P -волновых слагаемых NN -взаимодействия. Например [84], для правдоподобного описания в рамках задачи трех тел угловой зависимости $A_{y, pd}(\theta; E)$, измеренной [94] при энергиях 5,0 и 8,5 МэВ, необходимо модифицировать модель боннского потенциала [54] умножением его 3P_0 -слагаемых на заметно отличный от единицы фактор, равный 1,04, 0,86 и 0,75 для np -, pp - и nn -взаимодействий [95] соответственно. Приведем несколько аргументов, позволяющих надеяться, что альтернативным к такой эмпирической модификации способом может оказаться корректный учет электромагнитных поправок к ядерному NN -потенциалу.

С давних пор исследование роли таких поправок в NN -столкновениях является одной из задач фазового анализа экспериментальных NN -данных. Еще в 1950 г. Швингер [96] обратил внимание на то, что контактные, короткодействующие части взаимодействия магнитных моментов нейтрона с протоном и протона с протоном в 1S_0 -состояниях отличны друг от друга как по абсолютной величине, так и по знаку:

$$V_{np}^{\delta}(\mathbf{r}) = 4\pi\mu_n(2\mu_p - \mu_0) \delta(\mathbf{r}) < 0,$$

$$V_{pp}^{\delta}(\mathbf{r}) = 2\pi [(2\mu_p^2 - \mu_0^2) + \mu_0^2] \delta(\mathbf{r}) > 0, \quad (115)$$

где $\mu_n = -1,913\mu_0$ и $\mu_p = 2,793\mu_0$ — магнитные моменты нейтрона и протона, $\mu_0 \equiv e\hbar/2m_Nc$ — ядерный магнетон, а $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция. Швингер предположил, что короткодействующие части np - и pp -взаимодействий — суперпозиции $V_{np}^{s\delta} = V^Y + V_{np}^{\delta}$ и $V_{pp}^{s\delta} = V^Y + V_{pp}^{\delta}$ одинаковых, сугубо ядер-

ных юкавских потенциалов (2) и поправок (115). Оценив вклады $a_{np}^{s\delta} - a_{np}^s$ и $a_{pp}^{c, \delta s} - a_{pp}^{c, s}$ от этих поправок в длины $a_{np}^{s\delta}$ и $a_{pp}^{c, \delta s}$ синглетного np - и pp -рассеяния предположенными им суперпозициями, Швингер показал, что это предположение вполне объясняет известное в его время различие между короткодействующими частями np - и pp -взаимодействий.

Так же давно, по-видимому, с 1955 г., известно [97], что учет потенциала поляризации вакуума [98]

$$V^v(r) = \frac{2e^2}{3\pi\hbar c} V^c(r) \int_1^\infty dt \exp(-tr/\lambda_e) t^{-4}(2t^2 + 1)(t^2 - 1)^{1/2} \quad (116)$$

позволяет существенно улучшить фит энергетической зависимости 1S_0 -фазы pp -рассеяния при низких ($E_{\text{lab}} < 10$ МэВ) энергиях. Потенциал (116) является короткодействующим:

$$V^v(r) \sim (3\sqrt{2\pi}/4) t^{-3/2} \exp(-t), \quad \lambda_e \equiv \hbar/2m_e c, \quad t \equiv r/\lambda_e \rightarrow \infty,$$

но из-за большой комптоновской длины электрона ($\lambda_e \approx 193$ фм) убывает более медленно, чем ядерное pp -взаимодействие, радиус действия которого $r_s \approx 4$ фм. Поэтому даже при низких энергиях фазами $\delta_l^{c, v}(k)$ с $l > 0$ нельзя пренебречь при анализе pp -рассеяния. Как показал Дуранд [98], для того, чтобы извлечь правильное значение ядерной 1S_0 -фазы из экспериментальных pp -данных, необходимо реализовать следующую, основанную на формулах (26)—(32) и (55), процедуру.

Сначала из экспериментально найденной полной амплитуды $f^{cvs}(\theta; k)$ синглетного pp -рассеяния суперпозицией $V^{cvs} \equiv V^c + V^v + V^s$ вычитается симметризованная «электрическая» амплитуда

$$f^{cv}(\theta; k) \equiv f^c(\theta; k) + f^c(\pi - \theta; k) + f^{c, v}(\theta; k) + f^{c, v}(\pi - \theta; k). \quad (117)$$

При этом кулоновская амплитуда вычисляется по формуле (30), а амплитуда рассеяния $f^{c, v}$ потенциалом (116) в кулоновском поле, определенная формулами (31) и (32) с $a = v$, аппроксимируется следующим соотношением:

$$f^{c, v}(\theta; k) \sim k^{-1} \sum_{l=0}^6 (2l+1) \delta_l^{c, v}(k) \exp(2i\delta_l^c(k)) P_l(\cos \theta), \quad k \rightarrow 0. \quad (118)$$

Полученная разностная симметризованная амплитуда $f^{cv, s}$ рассеяния потенциалом V^s в «электрическом» поле $V^{cv} \equiv V^c + V^v$ заменяется ее удвоенной S -волновой компонентой $f_0^{cv, s}$:

$$\begin{aligned}
 f^{cv, s}(\theta; k) &= f^{cv s}(\theta; k) - f^{cv}(\theta; k) \approx 2f_0^{cv, s}(k) \equiv \\
 &\equiv (ik)^{-1} \exp(2i\delta_0^{c, v}(k)) [\exp(2i\delta_0^{cv, s}(k)) - 1] \approx \\
 &\approx 2k^{-1} \exp(2i\delta_0^{c, v}(k)) \delta_0^{cv, s}(k).
 \end{aligned} \tag{119}$$

Таким образом определяется экспериментальное значение 1S_0 -фазы $\delta_0^{cv, s}(k)$, порождаемой только ядерным потенциалом V^s при рассеянии в поле V^{cv} .

Реализовав упомянутую выше процедуру, Хеллер [99] показал, что если при анализе 1S_0 -волновой pp -функции эффективного радиуса пренебречь потенциалом (116), то значение параметра формы $P_0^{c, s}$ окажется в 0,02 раза меньше величины модифицированного параметра формы $P_0^{cv, s}$, получаемой при учете потенциала (116) в рамках борновского приближения по формулам (117)—(119).

В 1949 г. Швингер [100] показал, что взаимодействие (56) магнитного момента μ нейтрона с кулоновским полем ядра обуславливает расходимость нейтрон-ядерного дифференциального сечения при рассеянии вперед. Впоследствии этот эффект неоднократно исследовался теоретически и экспериментально [18]. В серии работ [101—103], выполненных в 50 гг., было показано, что учет взаимодействия (56) магнитного момента одного протона с кулоновским полем другого в плосковолновом борновском приближении заметно улучшает фит экспериментальных значений анализирующей pp -способности $A_{y, pp}(\theta; E)$ при больших энергиях ($E_{\text{lab}} > 150$ МэВ) и малых углах ($\theta < 15^\circ$). Для удовлетворительного фита значений функции $A_{y, pp}(\theta; E)$, измеренных [104] к 1975 г. при более низкой энергии ($E_{\text{lab}} = 10$ МэВ), авторам работы [105] пришлось учесть эффекты кулоновского искажения путем замены в борновском по поправке (56) приближении плоских волн регулярными функциями Кулона. Получившееся приближение стало традиционным и до сих пор применяется для учета взаимодействия (56), (57) и (116) при фазовом анализе pp -данных. Используя это приближение, Стокс и де Сварт [75] в 1990 г. показали, что включение pp -поправки (56) позволяет согласовать вычисленную ими угловую зависимость функции $A_{y, pp}(\theta; E)$ с ее экспериментально измеренной [106, 107] при двух значениях энергии: $E_{\text{lab}} = 9,75$ МэВ и $E_{\text{lab}} = 5,05$ МэВ. Оказалось, что в первом случае учет поправки (56) улучшает согласие в области $\theta < 30^\circ$, а во втором — при всех $\theta < 90^\circ$. Следовательно, верхняя граница интервала углов рассеяния, где включение поправки (56) заметно изменяет функцию $A_{y, pp}(\theta; E)$, увеличивается с уменьшением энергии. Сравнение функций

$A_{y, pp}(\theta; E)$ и $A_{y, np}(\theta; E)$, изображенных на рис.1 и 2 работы [75], показывает, что влияние взаимодействия (56) магнитного момента нейтрона с кулоновским полем протона на угловую зависимость функции $A_{y, np}(\theta; E)$, измеренную в [108] при энергии $E_{\text{lab}} = 10,03$ МэВ, близкой к энергии $E_{\text{lab}} = 9,75$ МэВ, сказывается в более широком интервале углов, а именно при $\theta < 60^\circ$. Измерения функций $A_{y, NN}(\theta; E)$ и 3P_j -фаз NN -рассеяния при более низких энергиях особенно интересно потому, что поправки (56) и (57) радикально меняют поведение этих наблюдаемых в низкоэнергетическом пределе. В результате этого изменения общепринятые [17] определения 3P_j -длин NN -рассеяния, называемых также объемами NN -рассеяния, теряют смысл. Доказательство этого важного утверждения начнем с триплетного pp -рассеяния.

Пусть $\delta_{l,j}^{c,ms}(k)$ — разность между полной фазой $\delta_{l,j}^{cms}(k)$ рассеяния суперпозицией $V_{pp}^{cms} \equiv V^c + V_{ls}^m + V^s$ и кулоновской фазой $\delta_l^c(k)$, $l = j$. В силу (59) и (62)

$$\delta_{1,j}^{c,ms}(k) \sim -3^{-1}[j(j+1) - 4] R^2 V_{ls,0}^m k^3, \quad k \rightarrow 0.$$

Следовательно, 3P_j -фазы $\delta_{1,j}^{c,ms}(k)$ убывают при $k \rightarrow 0$ гораздо медленнее, чем кулон-ядерные 3P_j -фазы $\delta_{1,j}^{c,s}(k)$. Поэтому 3P_j -объем pp -рассеяния $a_{1,j}^{c,ms}$, определенный по аналогии с кулон-ядерным объемом (24), т.е. как

$$a_{1,j}^{c,ms} = - \lim_{k \rightarrow 0} \text{tg } \delta_{1,j}^{c,ms}(k) / k^3 C_1^2(\eta),$$

равен бесконечности при любом $j = 0, 1, 2$.

Как было доказано в [109,110], поправка (57) к ядерному nn -взаимодействию обуславливает линейное по k убывание 3P_j -фаз

$$\delta_{1,j}^{ms}(k) \sim \frac{(-1)^{j+1} \mu_n^2 m_n k}{\max\{1, j\} (2j + 1 - j \hat{\delta}_{1,j})}, \quad k \rightarrow 0,$$

nn -рассеяния суперпозицией $V^{ms} = V^m + V^s$. Значит, определение

$$a_{1,j}^{ms} = - \lim_{k \rightarrow 0} k^{-3} \text{tg } \delta_{1,j}^{ms}(k) \tag{120}$$

3P_j -объема nn -рассеяния, аналогичное стандартному определению (4), приводит к равенству $|a_{1,j}^{ms}| = \infty$.

Применив способ работы [110] для анализа триплетного np -рассеяния суперпозицией $V^{ms} = V_{ls}^m + V^s$, можно показать, что все 3P_j -фазы $\delta_{1,j}^{ms}(k)$ такого рассеяния имеют линейные по k асимптотики

$$\delta_{1,j}^{ms}(k) \sim -2^{-3}[j(j+1) - 4] V_{ls,0}^m k, \quad k \rightarrow 0. \quad (121)$$

Следовательно, np -пределы (120) с $j = 0, 1, 2$ бесконечны, а параметризация

$$k^3 \operatorname{ctg} \Delta_{ls}^{ms}(k) = -1/a_{ls}^{ms},$$

использованная в [75] для фита энергетической зависимости комбинации

$$12\Delta_{ls}^{ms}(k) \equiv -2\delta_{1,0}^{ms}(k) - 3\delta_{1,1}^{ms}(k) + 5\delta_{1,2}^{ms}(k) \quad (122)$$

3P_j -фаз np -рассеяния, неприменима при $k \rightarrow 0$, когда параметр a_{ls}^{ms} становится бесконечным. В силу формул (121) и (122) в этом пределе известное равенство [111]

$$(d\sigma_{np}^{ms}(\theta; E)/d\theta) A_{y,np}^{ms}(\theta; E) = [\sin \delta_0^s(k)/2k]^2 12\Delta_{ls}^{ms}(k) \sin \theta$$

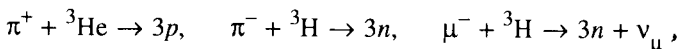
превращается в асимптотическое соотношение

$$(d\sigma_{np}^{ms}(\theta; E)/d\theta) A_{y,np}^{ms}(\theta; E) \sim (-3/4) (a_0^s)^2 V_{ls,0}^m k \sin \theta, \quad k \rightarrow 0,$$

связывающее дифференциальное сечение и анализирующую способность np -рассеяния с его 1S_0 -длиной a_0^s и константой $V_{ls,0}^m$ взаимодействия (56).

Итак, при $k \rightarrow 0$ поведение всех 3P_j -фаз pp -, np - или nn -рассеяния не зависит от ядерного взаимодействия и целиком определяется соответствующими поправками (56) или (57). Этот факт необходимо учитывать как при экстраполяции 3P_j -фаз к нулевой энергии, так и для *корректного* описания характеристик медленных столкновений в трехнуклонных системах. Такое математически строгое описание необходимо и по другим, не менее важным причинам. Поясним некоторые из них.

Как известно [14], волновые функции непрерывного спектра, описывающие конечное состояние в реакциях полного развала



сильно изменяются при учете взаимодействия между всеми продуктами реакции, и соответствующие сечения оказываются достаточно критичными к выбору типа парных взаимодействий. Поэтому исследования таких разва-

лов и совместный анализ столкновений ($2 \rightarrow 2,3$) и ($3 \rightarrow 3$) в системе из трех нуклонов или ядер представляется эффективным способом отбора наиболее реалистичного варианта NN -сил. Построение теории низкоэнергетических ядерных процессов ($2 \rightarrow 2,3$) и ($3 \rightarrow 3$) особо важно и интересно и с прикладной точки зрения, а именно как способ решения многих задач ядерной астрофизики и термоядерного синтеза. Два подхода к созданию такой теории обсуждаются в следующем разделе.

4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В работах, посвященных этой задаче, традиционно используются не только различные обозначения координат, квантовых чисел, волновых векторов и мультииндексов, но и различные анзацы для вспомогательных функций. Поэтому обсуждение низкоэнергетических разложений, полученных разными авторами, не представляется возможным без введения единых и по возможности наиболее компактных обозначений. Введем такие обозначения для системы трех бесспиновых частиц с потенциалами V_i , действующими в каждой из трех ($i = 1, 2, 3$) пар частиц и обладающими сферической симметрией: $V_i(\mathbf{x}_i) = V_i(x_i)$. Квантовые состояния такой системы характеризуются наборами $\varepsilon = \{l, m, E, \sigma\}$ четырех сохраняющихся квантовых чисел. Ими являются полный угловой момент $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{x_i} + \mathbf{I}_{y_i}$, его третья проекция m , квадрат E шестимерного импульса $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$ и четность $\sigma = \pm 1$ относительно инверсии $\mathbf{r}_i \rightarrow -\mathbf{r}_i$ любого ($i = 1, 2, 3$) шестимерного вектора $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$, компоненты которого — трехмерные приведенные вектора Якоби. По определению вектору \mathbf{x}_i сопряжен угловой момент \mathbf{I}_{x_i} и импульс \mathbf{p}_i пары частиц с номером i , а вектору \mathbf{y}_i , описывающему положение оставшейся третьей частицы в координатном пространстве $\mathcal{R}^6 \equiv \mathcal{R}_{x_i}^3 \oplus \mathcal{R}_{y_i}^3$ трех частиц, соответствуют угловой момент \mathbf{I}_{y_i} и импульс \mathbf{q}_i . Набору якобиевских координат $\mathbf{r}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ отвечает набор гипersферических координат $\mathbf{r}_i = (r, \Omega_i)$: гиперрадиус $r \equiv \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ и совокупность $\Omega_i \equiv \{\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i, \varphi_i\}$ двух пар $\xi \equiv \{\theta_\xi, \varphi_\xi\}$ сферических углов якобиевских векторов $\xi = \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ и гиперугла $\varphi_i \equiv \arctg(y_i/x_i)$. Аналогичное соответствие имеет место для полного импульса $\mathbf{k} = (k, \Omega_k)$. В теории Шредингера [8] считается, что волно-

вая функция $\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}; \mathbf{k})$ исследуемого трехчастичного состояния ε принадлежит линейному пространству \mathcal{A}^ε дважды непрерывно-дифференцируемых всюду в \mathcal{R}^6 и по всем своим шести аргументам функций, обладающих набором квантовых чисел ε . В пространстве \mathcal{A}^ε ортонормированный базис на торе $T^4 \equiv S^2(\hat{x}_i) \oplus S^2(\hat{y}_i)$, где $S^2(\hat{\xi})$ — единичная сфера вектора ξ в \mathcal{R}^3 , образуют бисферические гармоники

$$\mathcal{Y}_\alpha^\varepsilon(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \equiv [Y_{l_{x_i}}^{m_{x_i}}(\hat{x}_i) \oplus Y_{l_{y_i}}^{m_{y_i}}(\hat{y}_i)]^{l, m} = (-1)^{l_{x_i} + l_{y_i}} \mathcal{Y}_\alpha^\varepsilon(-\hat{x}_i, -\hat{y}_i), \quad (123)$$

обладающие квантовыми числами $l_{x_i}, l_{y_i}, l, m, \sigma$. В (123) компоненты двойного индекса $\alpha \equiv \{l_{x_i}, l_{y_i}\}$ подчинены неравенствам треугольника, в частности $|l_{x_i} - l_{y_i}| \leq l \leq l_{x_i} + l_{y_i}$, и дополнительному условию: $l_{x_i} + l_{y_i}$ — четное (нечетное) число, если $\sigma = +1(-1)$. В качестве ортонормированного базиса пространства \mathcal{A}^ε на единичной сфере S^5 в \mathcal{R}^6 удобен набор полисферических гипергармоник с квантовыми числами $l_{x_i}, l_{y_i}, l, m, \sigma, L$. Введя тройной индекс $\nu \equiv \{\alpha, L\}$, запишем такие гипергармоники в виде произведений

$$Y_\nu^\varepsilon(\Omega_i) \equiv 2 \operatorname{cosec} 2\varphi_i W_\nu(\varphi_i) \mathcal{Y}_\alpha^\varepsilon(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \quad (124)$$

бисферических гармоник (123) и функций

$$W_\nu(\varphi_i) \equiv N_\nu (\sin \varphi_i)^{l_{y_i} + 1} (\cos \varphi_i)^{l_{x_i} + 1} P_n^{y_i}(\cos \varphi_i)^{l_{x_i} + 1/2, l_{x_i} + 1/2} (\cos 2\varphi_i). \quad (125)$$

Эти функции содержат полиномы Якоби $P_n^{(a, b)}$ и имеют единичную $\mathcal{L}_{[0, \pi/2]}^2$ норму при соответствующем выборе множителя N_ν , что и подразумевается далее. Гипермомент $L = l_{x_i} + l_{y_i} + 2n$, где $n = 0, 1, \dots$, является четным (нечетным) числом, если $\sigma = +1(-1)$.

Теперь напомним, как в методе гипергармоник [112] ставится краевая задача для волновой функции Ψ^ε . Сначала из трех якобиевских наборов гиперсферических координат выбирается единственный и наиболее удобный для описания исследуемого процесса набор координат (r, Ω_i) . Далее индекс i этого набора обычно опускается. Функция Ψ^ε раскладывается по базису (124) и представляется матричным произведением

$$\Psi^\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = r^{-5/2} Y^\epsilon(\Omega) u(r; \mathbf{k}) \equiv r^{-5/2} \sum_{\nu=\nu_-}^{\nu_+} Y_\nu^\epsilon(\Omega) u_\nu(r; \mathbf{k}) \quad (126)$$

строки Y гипергармоник Y_ν^ϵ и столбца u неизвестных парциальных компонент u_ν . В анзаце (126) $\nu_\pm \equiv \{\alpha_\pm, L_\pm\}$, $\alpha_\pm \equiv \{l_{x\pm}, l_{y\pm}\}$, $L_\pm \equiv l_{x\pm} + l_{y\pm} + 2n$. По определению все компоненты мультииндекса ν_- имеют минимальные из всех возможных для состояния ϵ значения. Замена, вообще говоря, бесконечных верхних пределов суммирования по компонентам мультииндекса ν конечными ($\nu_+ < \infty$, т.е. $l_{x+}, l_{y+}, L_+ < \infty$) является *основным* приближением метода гипергармоник. Оно позволяет выполнять расчеты и поэтому подразумевается ниже. Краевая задача для Ψ^ϵ , т.е. уравнение Шредингера в \mathcal{R}^6 :

$$(H_0 + E) \Psi^\epsilon = \left(-\sum_{i=1}^3 V_i\right) \Psi^\epsilon, \quad (127)$$

дополненное регулярными асимптотическими условиями в точке тройного столкновения ($r = 0$) и на осях $x = 0, y = 0$ и граничным условием $\Psi^\epsilon(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \sim \Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k})$ при $r \rightarrow \infty$, проектируется на конечномерное линейное пространство гипергармоник (124) с $\nu = \nu_-, \dots, \nu_+$. Таким образом, получается одномерная матричная задача Шредингера:

$$[(\partial_r^2 + k^2) I + D_0 r^{-2} - V(r)] u(r; \mathbf{k}) = 0, \quad r \in \mathcal{R}^+, \quad (128)$$

$$u(0; \mathbf{k}) = 0; \quad u(r; \mathbf{k}) \sim u^{as}(r; \mathbf{k}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (129)$$

Здесь и далее I — единичная, а $D_0 \equiv \text{diag} \{ \lambda(\lambda + 1) \}$ — диагональная матрицы; полуцелый индекс λ принимает все значения от $L_- + 3/2$ до $L_+ + 3/2$ через единицу; элементы $V_{\nu\nu'}$ матрицы взаимодействия V и элементы u_{ν}^{as} столбца u^{as} — соответствующие интегралы по гиперсфере S^5 :

$$V_{\nu\nu'}(r) \equiv \int_{S^5} d\Omega (Y_\nu^\epsilon(\Omega))^* \sum_{i=1}^3 V_i(x_i) Y_{\nu'}^\epsilon(\Omega) \equiv \langle Y_\nu^\epsilon | \sum_{i=1}^3 V_i(x_i) | Y_{\nu'}^\epsilon \rangle, \quad (130)$$

$$u_{\nu}^{as}(r; \mathbf{k}) \equiv r^{5/2} \langle Y_\nu^\epsilon | \Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \rangle. \quad (131)$$

Асимптотические трехчастичные функции $\Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k})$ с действительным и ненулевым импульсом \mathbf{k} исследованы достаточно полно: они построены в рамках уравнений Фаддеева [10,113,114] для всех типов столкновений, воз-

можных в системах трех нейтральных или заряженных частиц. Поэтому проблема с постановкой задачи в рамках стандартного для метода гипергармоник приближения ($v_+ < \infty$) не возникает. Вся постановка фактически сводится к вычислению интегралов (130) и (131). Система уравнений (128) поставленной краевой задачи (128), (129) выглядит точно так же, как система двухчастичных уравнений Шредингера с потенциалом, не сохраняющим двухчастичный угловой момент [12]. Поэтому известные в задаче двух частиц матричные обобщения различных версий метода фазовых функций достаточно просто модифицируются для переформулировки трехчастичной задачи (128), (129). Насколько этот подход, основанный на объединении теории гипергармоник и нелинейной [115—119] или линейной [49,120—122] версий метода фазовых функций, перспективен для построения низкоэнергетических асимптотик в задаче трех частиц, каковы основные трудности и как их можно преодолеть? Эти вопросы обсуждаются ниже.

4.1. Метод фазовых функций в задаче трех частиц. Задача (128), (129) имеет одну особенность: независимо от того, являются парные взаимодействия $V_i = V_i^a$ коротко- ($a = s$) или дальнедействующими ($a = l$) потенциалами (1) или (3), или же суперпозициями ($a = ls$) таких потенциалов, элементы (130) убывают медленно [123,124]:

$$V^a(r) \sim \sum_{n=n_-}^{\infty} r^{-n} V_n^a, \quad V_n^a \equiv \|V_{vv',n}\|, \quad r \rightarrow \infty, \quad (132)$$

где $n_- \geq 3$ при $a = s$ и $n_- = d$, если $a = l, ls$. Например [124], для состояния $\epsilon = \{0, 0, 1, E\}$ трех тождественных частиц, взаимодействующих посредством гауссовских потенциалов

$$V_i(x_i) = V_0 \exp(-(\tau x_i)^2), \quad V_0 = \text{const}, \quad \tau = \text{const} > 0$$

элементы (130) с $v = v' = v_- = \{0, 0, 0\}$ убывают при $r \rightarrow \infty$ как

$$V_{v_-v_-}(r) = \frac{6V_0}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\tau r)^{-2n-1} \Gamma^{-1}(n+1) \left[\frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2-n)} - \frac{\Gamma(5/2+n)}{\Gamma(5/2-n)} \right].$$

При исследовании низкоэнергетических асимптотик всех функций, связанных с задачей (128), (129), факту медленного убывания элементов потенциальной матрицы следует уделить самое пристальное внимание. В противном случае неизбежны ошибочные выводы. Чтобы пояснить причину, порождающую такие выводы, рассмотрим, насколько верны основные построения работы [115], посвященной «истинно» трехчастичному процессу ($3 \rightarrow 3$) в состоянии $\epsilon = \{0, 0, 1, E\}$ системы трех попарно не связываю-

шихся одинаковых частиц с парными короткодействующими потенциалами. В этом случае $v_- = \{0, 0, 0\}$ и в (132) $a = s$, а $n_- = 3$.

В [115] Джибути и Сигуа предположили, что асимптотическая конфигурация (3 → 3)-столкновения — сумма плоской и сферической волн:

$$\Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \equiv (2\pi)^{-3} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x} + i\mathbf{q}\mathbf{y}) + \mathcal{F}(\Omega; \mathbf{k}) r^{-5/2} \exp(ikr). \quad (133)$$

Отметим, что постулированная авторами асимптотика (133) не содержит слагаемого, отвечающего процессам двукратного перерасеяния [10]. Доминирует ли это слагаемое над вкладом от расходящейся сферической волны в пределе $k \rightarrow 0$, неизвестно. Поэтому неучет двукратного перерасеяния — первое необоснованное упрощение авторов. Следующее упрощение, сделанное ими для построения «истинно» трехчастичной амплитуды рассеяния \mathcal{F} , касалось уже поставленной задачи (128), (129), (133) и состояло в необоснованном предположении о том, что матрица V диагональна:

$$V_{vv'}(r) = V_{vv}(r) \hat{\delta}_{vv'}. \quad (134)$$

В результате этого «диагонального приближения» система (128) распалась на совокупность незацепляющихся одномерных уравнений

$$[\partial_r^2 - \lambda(\lambda + 1) r^{-2} + k^2 - V_{vv}(r)] u_v(r; \mathbf{k}) = 0, \quad (135)$$

что позволило авторам применить одну из нелинейных версий метода фазовых функций [12] и свести каждое ($v = v_-, \dots, v_+$) уравнение (135) соответствующей подстановкой

$$\begin{aligned} u_v(r; \mathbf{k}) &= r^{1/2} A_v(r; \mathbf{k}) U_v(r; \mathbf{k}), \quad \rho \equiv kr, \\ U_v(r; \mathbf{k}) &\equiv \cos \delta_v(r; k) j_\lambda(\rho) - \sin \delta_v(r; k) n_\lambda(\rho) \end{aligned} \quad (136)$$

к двум уравнениям: нелинейному

$$\partial_r \delta_v(r; k) = -k^{-1} V_{vv}(r) U_v(r; k) \quad (137)$$

для фазовой функции $\delta_v(r; k)$ и линейному, определяющему амплитудную функцию $A_v(r; \mathbf{k})$.

Известно [2], что при условии

$$\int_0^\infty dx_i |x_i| |V_i(x_i)| < \infty, \quad i = 1, 2, 3 \quad (138)$$

асимптотика решения уравнения (137) в малой ($0 \leq r \leq b, bk \ll 1$) окрестности точки $r = 0$ дается первой итерацией эквивалентного ему интегрального уравнения и имеет вид

$$\delta_v(r; k) \sim -k^{-1} \int_0^r dt V_{vv}(t) j_\lambda^2(\rho'), \quad \rho' \equiv kt, \quad r \rightarrow 0. \quad (139)$$

При условии (132) с $n_- = 3$ решение этого же уравнения (137) имеет [2] конечный предел при $r \rightarrow \infty$. Это дало Джибути и Сигуа основание назвать конечную величину $\delta_v(k) \equiv \delta_v(\infty; k)$ парциальной «истинно» трехчастичной фазой рассеяния и, предполагая ограниченность каждой амплитудной функции при $r = \infty$, представить асимптотики функций (136) в виде

$$u_v(r; \mathbf{k}) \sim A_v(\infty; \mathbf{k}) \sin(\rho - \pi\lambda/2 + \delta_v(k)), \\ r \rightarrow \infty, \quad \lambda \equiv L + 3/2. \quad (140)$$

Затем, используя (140) и положив без всяких объяснений

$$A_v(\infty; \mathbf{k}) \equiv 1, \quad v = v_-, \dots, v_+, \quad (141)$$

авторы записали асимптотику функции (126) при $r \rightarrow \infty$ в терминах парциальных фаз $\delta_v(k)$ и показали, что эта асимптотика будет иметь требуемую форму (133), если амплитуду \mathcal{F} определить рядом

$$\mathcal{F}(\Omega; \mathbf{k}) = \sum_{v=v_-}^{v_+} Y_v^\varepsilon(\Omega) (Y_v^\varepsilon(\Omega_k))^* \mathcal{F}_v(k) \quad (142)$$

по парциальным амплитудам

$$\mathcal{F}_v(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} [-\exp(-i\pi/4) k^{-3/2}] (2ik)^{-1} [\exp(2i\delta_v(k)) - 1]. \quad (143)$$

Главная ошибка обсуждаемой работы [115] — утверждение о том, что старшее слагаемое низкоэнергетической асимптотики фазы $\delta_v(k)$ совпадает со старшим слагаемым ее координатной асимптотики (139), взятой в точке $r = b$, $bk \ll 1$, и поэтому зависит от k степенным образом:

$$\delta_v(k) \sim -\frac{\pi k^{2L+4}}{[2^{L+5/2}\Gamma(L+3)]^2} \int_0^b dr V_{vv}(r) r^{2L+5}, \quad k \rightarrow 0. \quad (144)$$

Формулы (142)—(144) привели авторов к ошибочным соотношениям

$$\mathcal{F}_v(k) = O(k^{2L+3/2}), \quad \mathcal{F}(\Omega; \mathbf{k}) = O(k^{2L_-+3/2}), \quad k \rightarrow 0 \quad (145)$$

и, что самое досадное, к неверному выводу о $E^{3/4}$ -пороговом поведении амплитуды \mathcal{F} в случае $l = 0$ и $v_- = \{0, 0, 0\}$. Эта зависимость и ее качественные объяснения позже упоминались в книге [13]. Поэтому до обсуж-

дения того, как преодолеть ограничения (133), (134) и (141), наложенные в [115], необходимо получить правильные асимптотические соотношения в рамках этих же ограничений. Для этого подстановкой $t_{\nu}(r; k) \equiv \text{tg } \delta_{\nu}(r; k)$ сведем уравнение (137) к уравнению

$$\partial_r t_{\nu}(r; k) = -k^{-1} V_{\nu\nu}(r) [j_{\lambda}(\rho) - t_{\nu}(r; k) n_{\lambda}(\rho)]^2 \quad (146)$$

с начальным условием $t_{\nu}(0; k) = 0$. Полученное уравнение функционально отличается от двухчастичного уравнения (7) только тем, что содержит функции j_{λ} и n_{λ} с полуцелым индексом $\lambda = L + 3/2$ вместо функций j_l и n_l с целым индексом l . Это отличие не мешает применить к уравнению (146) метод Леви и Келлера [26], описанный в п.2.1, и доказать, что при любом ν борновский интеграл (аналог функции (15) с $m = 0$)

$$\beta_{\nu}(\infty; k) \equiv -k^{-1} \int_0^{\infty} dr V_{\nu\nu}(r) j_{\lambda}^2(\rho), \quad (147)$$

порождаемый первой итерацией этого уравнения, определяет старшее слагаемое искомой асимптотики:

$$\text{tg } \delta_{\nu}(k) \sim \beta_{\nu}(\infty; k) \sim -\frac{2V_{\nu\nu; 3}}{(2L + 3)(2L + 5)} k, \quad k \rightarrow 0. \quad (148)$$

Такая же линейная по k зависимость всех парциальных фаз в пределе $k \rightarrow 0$ получается (см. [125]) в рамках ВКБ-приближения [4] и обуславливает расходимость всех парциальных амплитуд (143):

$$\mathcal{F}_{\nu}(k) \sim \frac{2V_{\nu\nu; 3} \exp(-i\pi/4)}{(2L + 3)(2L + 5)} k^{-3/2}, \quad k \rightarrow 0.$$

Аналогичную $k^{-3/2}$ -сингулярность имеет и полная амплитуда (142) при любых *конечных* значениях всех трех компонент мультииндекса ν_+ . Следовательно, при том же условии любая характеристика $(3 \rightarrow 3)$ -столкновения, пропорциональная $|\mathcal{F}|^2$, например, дифференциальное сечение, должна расходиться как $O(k^{-3})$, если $k \rightarrow 0$. К такому же выводу можно прийти, если в формуле [116]

$$\sigma_{\nu_-} = 264k^{-5} [\pi \sin \delta_{\nu_-}(k)]^2,$$

описывающей в рамках минимального $\nu = \nu_- = \{0, 1, 1\}$ приближения сечение $(3 \rightarrow 3)$ -столкновения трех нейтронов в ${}^3P_{1/2}$ -состоянии ($\epsilon = \{1, m, -1, E\}$), заменить фазу $\delta_{\nu_-}(k)$ ее асимптотикой (148).

Перейдем к качественным объяснениям. Если в (147) положить

$$V_{vv}(r) \equiv 0, \quad r \geq b, \quad b < \infty, \quad (149)$$

то при любом конечном b можно будет выбрать k настолько малым, что будет верно соотношение $kr \ll 1$, позволяющее аппроксимировать функцию $j_\lambda(\rho)$ старшим слагаемым ее асимптотики при $\rho \rightarrow 0$. В результате такой замены получится формула (144), порождающая соотношения (145). Следовательно, асимптотики (144) и (145), полученные в [115], справедливы в случае *искусственного* обрезания (149) всех элементов V_{vv} матрицы V при *любом* конечном значении b гиперрадиуса r . Однако из-за медленного убывания (132) элементов V_{vv} именно эта область больших значений гиперрадиуса ($kr \gg 1$) и определяет лидирующий при $k \rightarrow 0$ член (148) асимптотики интеграла (147).

Принципиальную возможность выйти за рамки предположений (133), (134) и (141) дает метод, предложенный в [120]. С его помощью можно построить низкоэнергетическое разложение исследуемой функции Ψ^ε с произвольной, наперед заданной асимптотикой Ψ^{as} и при любых конечных значениях r, v_+ и парных потенциалах, подчиненных двум достаточно общим условиям: условию интегрируемости (138) и условию абсолютной сходимости рядов

$$V_i(x_i) = \sum_{n=-1}^{\infty} x_i^n V_i^{(n)}, \quad x_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

обеспечивающему абсолютную сходимость разложений

$$V_{vv'}(r) = \sum_{n=-1}^{\infty} r^n V_{vv'}^{(n)}, \quad r \rightarrow 0 \quad (150)$$

всех матричных элементов (130) вблизи точки тройного столкновения.

Преимущества и недостатки метода станут очевидными, если обсудить его схему в наиболее общем случае, когда коэффициенты $V_{vv'}^{(-1)}$ всех ($v, v' = v_-, \dots, v_+$) рядов (150) отличны от нуля.

Первый этап — определение и построение фундаментальной [2] матрицы $U = \|U_{vv'}\|$ регулярных решений уравнения (128). Каждый ($v' = v_-, \dots, v_+$) ее столбец $U^{v'}$ определяется как решение этого же уравнения, т.е. уравнения

$$[(\partial_r^2 + k^2)I + D_0 r^{-2} - V(r)] U^{v'}(r; k) = 0 \quad (151)$$

со *специальным* начальным ($r \rightarrow 0$) условием

$$U_{\nu}^{\nu'}(r; k) \equiv U_{\nu\nu'}(r; k) = r^{\lambda'+1} [\hat{\delta}_{\nu\nu'} + O(r) (1 - \hat{\delta}_{\nu\nu'})],$$

$$\nu = \nu_-, \dots, \nu_+. \quad (152)$$

Как показал Палумбо [126], условия (152) гарантируют линейную независимость столбцов $U^{\nu'}$, а значит, и возможность [2] представить общее регулярное решение u уравнения (128) в виде линейной комбинации

$$u(r; \mathbf{k}) = U(r; k) N(\mathbf{k}) \quad (153)$$

столбцов $U_{\nu}^{\nu'}$ и коэффициентов $N_{\nu}(\mathbf{k})$, собранных в столбец $N(\mathbf{k})$. Частное решение u с заданной физической асимптотикой (131) получается при выборе столбца $N(\mathbf{k})$ как решения линейного матричного уравнения

$$U(r; k) N(\mathbf{k}) \sim u^{as}(r; \mathbf{k}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (154)$$

Следовательно, главное преимущество метода — его универсальность в следующем смысле: если при заданной энергии фундаментальная матрица построена, то по формулам (124)—(126), (153) и (154) можно вычислить волновую функцию, описывающую любой возможный при этой же энергии процесс в рассматриваемой трехчастичной системе. Однако это преимущество трудно реализуется в вычислительном плане из-за быстрого роста числа уравнений системы (151) при увеличении хотя бы одной компоненты мультииндекса ν_+ .

Для исследования асимптотики при $k \rightarrow 0$ решения U задачи (151), (152) удобно применить матричную линейную версию метода фазовых функций [120]. В этой версии для U используется анзац

$$U(r; k) = j(\rho) c(r; k) - n(\rho) s(r; k), \quad (155)$$

содержащий диагональные матрицы $j \equiv \text{diag} \{j_{\lambda}\}$, $n \equiv \text{diag} \{n_{\lambda}\}$ и неизвестные амплитудные матрицы $c \equiv \|c_{\nu\nu'}\|$ и $s \equiv \|s_{\nu\nu'}\|$. Подстановкой (155) задача (151), (152) сводится к матричным уравнениям

$$\partial_r \begin{Bmatrix} c(r; k) \\ s(r; k) \end{Bmatrix} = -k^{-1} \begin{Bmatrix} n(\rho) \\ j(\rho) \end{Bmatrix} V(r) U(r; k) \quad (156)$$

с начальными ($r \rightarrow 0$) условиями

$$k^{\lambda+1} c_{\nu\nu'}(r; k) \sim \hat{\delta}_{\nu\nu'} / \sigma_{\lambda} - \tau_{\lambda} V_{\nu\nu'}^{(-1)} \begin{Bmatrix} r^{\tau} / \tau, & \tau \equiv \lambda' - \lambda + 1 \neq 0 \\ \ln r, & \tau = 0 \end{Bmatrix},$$

$$k^{-\lambda} s_{\nu\nu'}(r; k) \sim -\sigma_{\lambda} V_{\nu\nu'}^{(-1)} (\lambda + \lambda' + 2)^{-1} r^{\lambda + \lambda' + 2}, \quad (157)$$

обеспечивающими нужное поведение (152) функций (155).

Для вывода формул (157) необходимо учесть условия (152); в уравнениях (156) заменить элементы матрицы V рядами (150); функции j_λ и n_λ аппроксимировать их асимптотиками $j_\lambda(\rho) \sim \sigma_\lambda \rho^{\lambda+1}$ и $n_\lambda(\rho) \sim \tau_\lambda \rho^{-\lambda}$ при $\rho \rightarrow 0$ и, наконец, найти первую итерацию получившихся уравнений.

Второй недостаток обсуждаемого метода — сингулярные начальные условия (157) для функций $c_{\text{VV}}(r; k)$ в случае $\lambda' + 1 \leq \lambda$ — не так важен, хотя и усложняет численное решение задачи (156), (157).

Следующая трудность, порожденная строением функции $n_\lambda(\rho)$ с полуцелым индексом, легко преодолима. Функция $j_\lambda(\rho)$ с полуцелым индексом $\lambda = L + 3/2$ представима в виде (8), а разложение [1] функции n_λ содержит множитель $(2/\pi) \ln(\rho/2)$, зависящий от энергии. Разделение r и k в задаче (156), (157) начинается с представления этого множителя в тождественном по отношению к произвольному параметру τ виде [121]:

$$\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\rho}{2} \right) \equiv h^s(k\tau) + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{r}{2\tau} \right), \quad h^s(k\tau) \equiv \frac{2}{\pi} \ln(k\tau).$$

Это тождество позволяет выделить из функции $n_\lambda(\rho)$ неаналитический по k множитель $h^s(k\tau)$ и представить ее в следующем виде:

$$n_\lambda(\rho) = \tilde{n}_\lambda(\rho) + h^s(k\tau) j_\lambda(\rho), \quad \tilde{n}_\lambda(\rho) = k^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} n_{\lambda n}(r),$$

$$n_{\lambda n}(r) \equiv - (r/2)^{2n-\lambda} \frac{\Gamma(\lambda + 1/2 - n)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}, \quad n = 0, \dots, \lambda - 1/2;$$

$$n_{\lambda n}(r) \equiv (1/\pi) \left[\ln \left(\frac{r}{2\tau} \right) - \psi(n+1) - \psi(n - \lambda + 1/2) \right] \times$$

$$\times j_{\lambda, n-\lambda-1/2}(r), \quad n = \lambda + 1/2, \dots \quad (158)$$

Далее, в (155)—(157) функции j_λ и n_λ заменяются их известными суммами (8) и (158), а матрицы c и s — искомыми матричными рядами

$$c(r; k) = \tilde{c}(r; k) + h^s(k\tau) s(r; k), \quad \tilde{c}_{\text{VV}}(r; k) = k^{-\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} c_{\text{VV}; n}(r),$$

$$s_{\text{VV}}(r; k) = k^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} s_{\text{VV}; n}(r). \quad (159)$$

В итоге получается формальное асимптотическое разложение

$$U(r; k) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} U_n(r),$$

$$U_n(r) \equiv \sum_{m'+m=n} [j_{m'}(r) c_m(r) - n_{m'}(r) s_m(r)], \quad (160)$$

содержащее матрицы $c_n \equiv \|c_{\nu\nu'; n}\|$, $s_n \equiv \|s_{\nu\nu'; n}\|$, подчиненные рекуррентной ($n = 0, 1, \dots$) цепочке энергонезависимых уравнений

$$\partial_r \begin{Bmatrix} c_n(r) \\ s_n(r) \end{Bmatrix} = - \sum_{m'+m=n} \begin{Bmatrix} n_{m'}(r) \\ j_{m'}(r) \end{Bmatrix} V(r) U_{m'}(r) \quad (161)$$

с начальными ($r \rightarrow 0$) условиями

$$c_{\nu\nu'; n}(r) \sim \hat{\delta}_{n0} \hat{\delta}_{\nu\nu'} / \sigma_{\lambda} - \hat{\delta}_{n0} \tau_{\lambda} V_{\nu\nu'}^{(-1)} \begin{cases} r^{\tau} / \tau, & \tau \equiv \lambda' - \lambda + 1 \neq 0, \\ \ln r, & \tau = 0 \end{cases},$$

$$s_{\nu\nu'; n}(r) \sim - \hat{\delta}_{n0} \sigma_{\lambda} V_{\nu\nu'}^{(-1)} (\lambda + \lambda' + 2)^{-1} r^{\lambda + \lambda' + 2}. \quad (162)$$

Из-за медленного убывания (132) элементов $V_{\nu\nu'}(r)$ все функции $s_{\nu\nu'; n}(r)$, удовлетворяющие уравнениям (161) и граничным условиям (162), неограничены при $r = \infty$. Следовательно, аппроксимация бесконечных рядов (159) их конечными подсуммами справедлива только во внутренней области $0 \leq r \leq b_-$, $kb_- \ll 1$ и позволяет только в этой области получить следующее асимптотическое представление ряда (160):

$$U(r; k) = \sum_{n=0}^{M < \infty} k^{2n} U_n(r) + O(k^{2M+2}), \quad k \rightarrow 0.$$

Как было показано в [49], асимптотику матрицы U при $\rho \rightarrow \infty$ нетрудно построить, если переписать анзац (155) и ключевую задачу (156), (157) в терминах диагональных матриц $h^{\pm} \equiv j \pm in = \text{diag} \{h_{\lambda}^{\pm}\}$, составленных из функций Риккати — Нанкеля $h_{\lambda}^{\pm} = j_{\lambda} \pm in_{\lambda}$, и амплитудных матриц $f^{\pm} \equiv c \pm is$. Тогда анзац (155) и система (156) примут соответствующий вид:

$$U(r; k) = 2^{-1} [h^{+}(\rho) f^{+}(r; k) + h^{-}(\rho) f^{-}(r; k)], \quad (163)$$

$$\partial_r f^{\pm}(r; k) = (\mp i/2k) h^{\mp}(\rho) V(r) U(r; k). \quad (164)$$

Если в (164) подставить $V = V^a$ в виде (132), заменить матрицы h^\pm рядами [1]

$$h^\pm(\rho) = \exp(\pm i\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} h_n^\pm, \quad \rho \rightarrow \infty,$$

$$h_n^\pm \equiv (\mp 2i)^{-n} \text{diag} \{(\lambda + 1/2, n) \exp(\mp i\pi(\lambda + 1/2)/2)\}, \quad (165)$$

а матрицы f^\pm искать в виде

$$f^\pm(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} [C_{1n}^\pm(k) + \exp(\mp 2i\rho) \rho^{-3} C_{2n}^\pm(k)], \quad (166)$$

то для матриц C_{jn}^\pm получится рекуррентная ($n = 1, 2, \dots; j = 1, 2$) цепочка уравнений

$$2(n-1) i C_{j, n-1}^\pm(k) - \sum_{m'+m=n} k^{m'-2} V_m D_{jm}^\pm(k) = 0,$$

$$8i C_{j, n}^\mp + 4(1-n) C_{j, n-1}^\mp + \sum_{m'+m=n} k^{m'-2} V_m D_{jm}^\mp(k) = 0;$$

$$D_{jn}^\pm \equiv \sum_{m'+m=n} [\tau_{1m'} C_{jm}^\pm + (-1)^{m'} \tau_{2m'} C_{jm}^\mp],$$

$$\tau_{jn} \equiv (-2i)^{-n} \sum_{m'+m=n} (-1)^{(j-1)m'} h_{m'}^+ h_m^-, \quad (167)$$

определяющих все такие матрицы с $n > 0$ через матрицы C_{j0}^\pm . Последние можно найти, «сшивая» в достаточно удаленной ($kb_+ \gg 1$) точке $r = b_+$ функции f^\pm , вычисленные интегрированием уравнений (156) или (164) на конечном отрезке $0 \leq r \leq b_+$, с функциями $f^{\pm(M)}$, порожденными аппроксимацией рядов (166) их конечными ($M < \infty$) подсуммами

$$f^\pm(b_+ - 0; k) = f^{\pm(M)}(b_+ + 0; k),$$

$$\partial_r f^\pm(b_+ - 0; k) = \partial_r f^{\pm(M)}(b_+ + 0; k).$$

Если теперь в (163) аппроксимировать ряды (165) и (166), (167) их конечными подсуммами, то получится искомое асимптотическое представление

$$U(r; k) = (1/2) [U^{+(M)}(r; k) + U^{-(M)}(r; k)] + O(\rho^{-M-1}), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

$$U^{\pm(M)}(r; k) \equiv \exp(\pm i\rho) \sum_{n=0}^M \rho^{-n} \sum_{m'+m=n} [h_m^{\pm} C_{1m}^{\pm}(k) + \rho^{-3} h_m^{\mp} C_{2m}^{\mp}(k)],$$

позволяющее снять предположение (149), т.е. учесть все парные взаимодействия при любых $r \geq b_+$.

В качестве следующего за выводом правильной асимптотики (148) фазы $\delta_V(k)$ примера, показывающего, насколько важен такой учет, приведем основной вывод работы [49]: искусственное обрезание (149) матрицы V при любом конечном значении гиперрадиуса $r = b$ может породить трехчастичные резонансы, исчезающие в пределе $b \rightarrow \infty$ и поэтому называемые искусственными.

Пусть теперь парные взаимодействия описываются суперпозициями $V_i = V_i^c + V_i^a$ кулоновских ($V_i^c = 1/R_i x_i$) и более быстро убывающих потенциалов V_i^a , $a = s, l, ls$. Тогда потенциальная матрица V представляется суммой $V = V^c + V^a$ кулоновской матрицы V^c с элементами

$$V_{VV'}^c(r) = \sum_{i=1}^3 \langle Y_V | (R_i x_i)^{-1} | Y_{V'} \rangle = (R_{VV'}^c)^{-1} \quad (168)$$

и матрицы V^a , элементы которой в любом из трех случаев ($a = s, l, ls$) убывают по закону (132). Применить к матричной задаче (128), (129) с $V = V^{ca}$ метод фазовых функций, выбрав в качестве эталонных функций кулоновские, мешает недиагональность кулоновской матрицы (168). Все результаты, перечисленные ниже, получены в рамках предположения (134), при котором система (128) распадается на незацепляющиеся уравнения (135). Каждое такое уравнение является одномерным уравнением Шредингера с *полуцелым* угловым моментом λ и суперпозицией $V_{VV} = V_{VV}^{ca} = V_{VV}^c + V_{VV}^a$ кулоновского и дальнедействующего потенциала и поэтому легко переформулируется как в нелинейной [117], так и в линейной [122] версиях метода фазовых функций.

Аналитические выражения для коэффициентов R_{VV} кулоновских взаимодействий (168), регулярного и нерегулярного решений уравнения (135) в случае $V_{VV} = V_{VV}^c$, т.е. кулоновских функций $F_{\lambda}(\rho, \eta_V)$ и $G_{\lambda}(\rho, \eta_V)$ с полуцелым индексом углового момента λ и параметром $\eta_V = 1/2kR_{VV}$, получены в [127] и обсуждались в [119].

По аналогии с двухчастичным соотношением (20) из фазы $\delta_V^{ca}(k)$, порожденной суперпозицией V_{VV}^{ca} , можно выделить фазу $\delta_V^{c,a}(k)$, отсчитанную от кулоновской фазы $\delta_V^c(k)$:

$$\delta_V^{c,a}(k) = \delta_V^{ca}(k) - \delta_V^c(k), \quad \delta_V^c(k) = \arg \Gamma(\lambda + 1 + i\eta_V). \quad (169)$$

В случае кулоновского отталкивания и искусственного обрезания (149) потенциала $V_{VV}^a(r)$ при любом, но конечном значении гиперрадиуса $r = b$ функция эффективного радиуса, отвечающая разбиению (169), имеет вид [122]

$$K_V^{c,a}(E) \equiv [k^\lambda C_\lambda(\eta_V)]^2 [k \operatorname{ctg} \delta_V^{c,a}(k) + h^c(\eta_V)],$$

где C_λ и h^c — функции (22) при $l = \lambda$ и $\eta = \eta_V$. Если перейти к необрезанному потенциалу $V_{VV}^a(r)$, положив в (149) $b \rightarrow \infty$, а затем рассмотреть предел $a^{c,a}$ функции $-1/K_V^{c,a}(E)$ при $E \rightarrow 0$, то получится $|a_V^{c,a}| = \infty$. Описанная попытка определить модифицированную трехчастичную длину рассеяния $a_V^{c,a}$ оказалась несостоятельной по той же причине, что и в случае рассеяния двух частиц суперпозицией кулоновского и дальнедействующего потенциалов. Дело в том, что из-за медленного убывания потенциала $V_{VV}^a(r)$ низкоэнергетическая асимптотика фазы $\delta_V^{c,a}(k)$ не содержит множителя $k^{2\lambda+1} C_V^2(\eta_V)$ и при любом λ имеет вид [125]:

$$\delta_V^{c,a}(k) \sim -V_{VV;n} (2R_{VV})^{n-1} (\pi/8\tau)^{1/2} \times \\ \times \Gamma(n-1) (\tau^2 - 1)^{(3-2n)/4} P_{-1/2}^{3/2-n}(1/\tau),$$

$$\tau^2 \equiv 1 + 4(kR_{VV})^2 \lambda(\lambda + 1),$$

где n_- — показатель лидирующего члена асимптотики (132) функции $V_{VV}^a(r)$, а P_V^μ — функция Лежандра первого рода [1].

Итак, объединение метода фазовых функций и теории гипергармоник позволяет продвинуться в исследовании низкоэнергетических разложений в задаче трех частиц (126)—(131), записанной в усеченном ($v_+ < \infty$) базисе гипергармоник (124). Как в рамках этого объединения перейти к полному базису, т.е. к пределу $v_+ \rightarrow \infty$, неизвестно. Альтернативный путь — заме-

нить дискретную переменную (гипермомент L) ее непрерывным аналогом (гиперуглом φ_i). Такая замена возможна, она приводит к интегродифференциальным фаддеевским уравнениям.

4.2. Метод интегродифференциальных уравнений в задаче трех частиц. Как было показано в [128,129,130], если спроектировать на базис гипергармоник (124) не уравнение Шредингера (127), а отвечающую ему систему из трех дифференциальных уравнений Фаддеева

$$(H_0 - E) \Psi_i^\varepsilon = -V_i \Psi^\varepsilon = -V_i \sum_{i=1}^3 \Psi_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3 \quad (170)$$

для фаддеевских компонент

$$\Psi_i^\varepsilon(r, \Omega_i; E) = r^{-2} \sum_{\nu=\nu_-}^{\infty} u_{i\nu}(r; E) Y_\nu^\varepsilon(\Omega_i)$$

волновой функции Ψ^ε , а затем просуммировать полученные уравнения для неизвестных функций $u_{i\nu}$ по индексу L , то получатся интегродифференциальные уравнения Фаддеева для компонент $\Psi_{i\alpha}^\varepsilon$ разложений

$$\Psi_i^\varepsilon(r, \Omega_i; E) = 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi_i \sum_{\alpha=\alpha_-}^{\infty} \Psi_{i\alpha}^\varepsilon(r, \varphi_i; E) Y_\alpha^\varepsilon(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \quad (171)$$

по базису (123). Аналитические свойства интегродифференциальных уравнений исследованы довольно полно. Асимптотики компонент $\Psi_{i\alpha}^\varepsilon$ при $r \rightarrow \infty$ известны [113] для всех возможных в системе трех нейтральных или заряженных частиц процессов с *ненулевой* энергией столкновения. Асимптотики компонент $\Psi_{i\alpha}^\varepsilon$ при $r \rightarrow 0$ можно построить различными способами [131—133]. Спектральное представление [129,130,134] самых сложных объектов интегродифференциальных уравнений — интегральных по переменной φ_i операторов $h_{\alpha\alpha'}^l$ — и компактные формулы для их ядер [130] позволили выполнить серию аналитических исследований [135—140]. В [135] предложен простой способ регуляризации интегродифференциальных уравнений в предельных точках $\varphi_i = 0, \pi/2$ их угловых аргументов φ_i , $i = 1, 2, 3$. В [136] получены дифференциальное и интегральное представления коэффициентов Рейнала — Реваи. Некоторые точные решения задачи трех тождественных частиц с S -волновыми парными потенциалами $V_i = \text{const } x_i^{-2}$ найдены в [137]. Вслед за работой [141] ложные решения интегродифференциальных уравнений для такой же трехчастичной систе-

мы, но в случае осцилляторных взаимодействий $V_i = \omega x_i^2$, исследовались в [138]. Критерий существования ложных решений уравнений (170) в случае центральных потенциалов V_i доказан в [139,140], способ построения таких решений в явном виде предложен и пояснен примерами в [140].

Спектр ложных решений совпадает со спектром свободного трехчастичного гамильтониана [142]. Ложные решения не отвечают никакой физической конфигурации системы трех частиц, ибо по определению такие решения обращают в нуль одновременно правую и левую части системы (170) и не зависят от взаимодействий V_i . Поэтому из известных в явном виде ложных решений для системы трех нуклонов [143] невозможно извлечь какую-либо информацию, полезную для построения низкоэнергетических разложений физических решений интегродифференциальных фаддеевских уравнений. Тем не менее эти уравнения привлекательны для построения таких разложений с вычислительной точки зрения, т.к. они сочетают сравнительно простые граничные условия с разреженностью матрицы дискретной задачи. Эффективные алгоритмы [144—150] решения такой задачи основаны на аппроксимации искомых решений различными сплайнами [3]. Значительно упростить вычисления позволяет тензорное представление [147] вспомогательных матриц.

Чтобы пояснить, что существенно мешает выводу трехчастичных низкоэнергетических разложений в рамках интегродифференциальной задачи Фаддеева, рассмотрим случай, когда эта задача не только выглядит наиболее просто, но и неоднократно решалась самыми разными способами.

В случае S -волновых ядерных потенциалов V_i^S задача pd -рассеяния в квантовом состоянии $\epsilon = \{l, m, S, E\}$ с $l = 0$, полным спином $S = 3/2$ и энергией pd -столкновения $E = (3/4m_N)(\hbar k)^2$, не превышающей ($\tau^2(k) \equiv B(d) - E > 0$) энергию связи дейтрона $B(d)$, сводится путем отделения дискретных спин-изоспиновых переменных, подробно описанного в [151], к бесконечной системе зацепляющихся по индексу α уравнений [10]. Зацепление обуславливается недиагональностью матрицы кулоновского pp -взаимодействия $V_1^c = 1/Rx_1$ в базисе бисферических гармоник (123). Если в рядах (171) для пространственных частей фаддеевских компонент ограничиться первым слагаемым, т.е. положить [10]

$$\begin{aligned} \Psi_i^\epsilon(r, \Omega_i; E) &= 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi \Psi_{i, \alpha_-}^\epsilon(r, \varphi; E) \mathcal{Y}_{\alpha_-}^\epsilon(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) = \\ &= (2r^2\pi)^{-1} \operatorname{cosec} 2\varphi U(r, \varphi; k), \quad \alpha_- = \{0, 0\}, \end{aligned}$$

то останется одно интегродифференциальное уравнение [10]

$$\begin{aligned}
 & [\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2 + \tau^2(k) - V_{\alpha_- \alpha_-}^c(r, \varphi)] U(r, \varphi; k) = \\
 & = V^s(r \cos \varphi) \left[1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{t_-(\varphi)}^{t_+(\varphi)} d\varphi' U(r, \varphi'; k) \right] \quad (172)
 \end{aligned}$$

с переменными пределами интегрирования [114]

$$t_{\pm}(\varphi) \equiv \min \{ |\varphi \pm \pi/3|, 2\pi/3 - \varphi \} \quad (173)$$

и матричным элементом

$$V_{\alpha_- \alpha_-}^c(r, \varphi) = \frac{1}{rR_0(\varphi)}, \quad R_0(\varphi) \equiv \frac{R}{2} \begin{cases} \cos(\varphi), & \varphi < \pi/6 \\ \sqrt{3} \sin \varphi, & \varphi \geq \pi/6 \end{cases} \quad (174)$$

кулоновского взаимодействия V_1^c .

Следует отметить, что существование и единственность регулярного,

$$U(0, \varphi; k) = 0; \quad U(r, \varphi; k) = 0, \quad \varphi = 0, \pi/2, \quad (175)$$

решения этого уравнения строго доказаны [10] только в одном случае: если k — отличный от нуля фиксированный параметр, а асимптотика U при $r \rightarrow \infty$ имеет вполне определенный вид. Используя разбиение (28) pd -фазы $\delta_0^{cs}(k)$ и формулы (29)—(32) для полной pd - амплитуды f^{ca} с $a = s$, эту асимптотику можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U(r, \varphi; k) = & k^{-1} u_d(x) [\sin \theta^c(t; \eta) + \operatorname{tg} \delta_0^{cs}(k) \cos \theta^c(t; \eta) + O(y^{-1})] + \\
 & + [A^{br}(\varphi; k) + O(r^{-1})] r^{-1/2} \exp(-\tau(k)r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (176)
 \end{aligned}$$

Здесь $x \equiv x_1 = r \cos \varphi$, $y \equiv y_1 = r \sin \varphi$, $u_d(x)$ — радиальная 3S_1 -компонента волновой функции дейтрона, а тригонометрические функции аргумента θ^c :

$$\theta^c(t; \eta) \equiv t - 2\eta \ln t + \delta_0^c(k), \quad t \equiv ky, \quad \eta \equiv 1/2kR_0(\pi/2),$$

совпадают со старшими членами асимптотик

$$F_0^c(t, \eta) = \sin \theta^c(t; \eta) (1 + O(t^{-1})), \quad G_0^c(t, \eta) = \cos \theta^c(t; \eta) (1 + O(t^{-1}))$$

кулоновских функций [1] при $t = ky \rightarrow \infty$.

По-видимому, это совпадение побудило авторов работ [152,153] заменить асимптотику (176), вообще говоря, неэквивалентной ей асимптотикой

$$U(r, \varphi; k) = k^{-1} u_d(x) [F_0(t, \eta) + \operatorname{tg} \delta_0^{c, s}(k) G_0(t, \eta)] + \\ + [A^{br}(\varphi; k) + O(r^{-1})] r^{-1/2} \exp(-\tau(k)r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (177)$$

Неэквивалентность заключается в том, что асимптотика (177), в отличие от (176), содержит все без исключения слагаемые разложений функций Кулона в бесконечные ряды [1] по обратным целым степеням аргумента ku . Теорема существования и единственности решения получившейся задачи (172)—(175), (177) до сих пор не доказана. Однако *постулированное* асимптотическое условие (177) позволило авторам работ [152,153] перейти к пределу нулевой энергии ($k \rightarrow 0$) и получить в этом пределе граничное условие

$$U(r, \varphi; 0) \sim f_{00}(\xi) - a_0^{c, s} g_{00}(\xi), \quad \xi \equiv 2\sqrt{y}/R_0(\pi/2) \quad (178)$$

с конечным коэффициентом $a_0^{c, s}$, отождествленным ими с кватретьной кулон-ядерной длиной pd -рассеяния (${}^4a_{pd}$) и первыми членами f_{00} и g_{00} рядов (84). Полученное таким образом уравнение (172) с $k = 0$ и граничными условиями (175) и (178) позволяет найти эту длину непосредственно, т.е. минуя вычисление фазы $\delta_0^{c, s}(k)$ путем решения энергозависимой задачи (172)—(175), (177) для последовательности сходящихся к нулю, но отличных от него, значений k и последующего нахождения $a_0^{c, s}$ экстраполяцией в точку $k = 0$ функции эффективного радиуса (21).

Отметим, что описанный переход от задачи (172)—(175), (177) с $k > 0$ к задаче (172)—(175), (178) с $k = 0$ осуществляется в два этапа, требующих принять еще одно предположение. Сначала уравнение (172) и граничные условия (175), (177) делятся на кулоновский барьерный множитель $C_0(\eta)$.

Далее полагается $k \rightarrow 0$, а функции $\operatorname{tg} \delta_0^{c, s}(k)$ и F_0, G_0 заменяются в (177) их разложениями (21) и (84). Если предположить, что при $k \rightarrow 0$ амплитуда виртуального развала дейтрона $A^{br}(\varphi; k)$ убывает быстрее, чем $C_0(\eta)$, то получится соотношение (178). Обоснованию этого предположения, как и построению низкоэнергетических разложений корректно поставленной задачи (172)—(176), мешают два обстоятельства. Во-первых, отсутствие полных асимптотических разложений фаддеевских компонент при фиксированном $k > 0$ и $r \rightarrow \infty$. Во-вторых, отсутствие каких-либо асимптотических разложений этих компонент при $kr \rightarrow \infty$. Вывод асимптотик второго типа — актуальная задача проблемы трех тел. Полное решение этой задачи позволило бы задать энергонезависимые граничные условия при $r \rightarrow \infty$ для каждого уравнения, полученного подстановкой

$$U(r, \varphi; k) = N(k) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} U_n(r, \varphi) \quad (179)$$

в уравнение (172) и последующим отделением k . Сформулированную таким образом энергонезависимую и рекуррентную по индексу n задачу для функций $U_n(r)$ с $n = 0, 1, \dots, M < \infty$ можно было бы решить численно, а затем найти неизвестный нормировочный множитель $N(k)$ и фазу $\delta_0^{c,s}(k)$, «сшивая» конечную ($M < \infty$) подсумму ряда (179) в некоторой достаточно удаленной точке $r = b < \infty$ с построенным асимптотическим разложением функции U при $kr \rightarrow \infty$.

Высказанные замечания о неполноте теории рассеяния для системы трех частиц следует иметь в виду при сравнении результатов работ, посвященных определению параметров Nd -рассеяния и обсуждаемых ниже.

5. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ Nd -РАССЕЯНИЕ

Рассеяние тепловых нейтронов дейтронами хорошо изучено экспериментально [154—158]. Результаты многочисленных теоретических исследований удовлетворительно согласуются с экспериментальными и неоднократно обсуждались в обзорных статьях [153, 159—162] и докладах [163, 164]. Поэтому обсуждение современных представлений о nd -рассеянии в пределе нулевой энергии nd -столкновения представляется разумным ограничить упоминанием некоторых недавних работ, а большее внимание уделить исследованиям корреляционных зависимостей в nnp -системе. Это поможет не только пояснить, почему построение таких зависимостей является перспективным методом определения параметров низкоэнергетических экстраполяционных формул для Nd -рассеяния, но и лучше понять до сих пор не решенную проблему определения pd -длин.

Несмотря на определенные успехи, достигнутые в теоретическом описании динамики $3N$ -систем, всегда остается актуальным вопрос о том, в какой степени полученные $3N$ -данные согласуются между собой в рамках существующих представлений об NN -силах. Традиционный способ решения этой задачи состоит в том, что для различных вариантов NN -потенциалов, параметры которых фиксируются по определенным низкоэнергетическим данным о двухнуклонном рассеянии, производится расчет $3N$ -параметров. Для разных NN -потенциалов, как правило, получается значительный разброс вычисленных значений. Такой способ «проб и ошибок» требует достаточно трудоемких вычислений, но не позволяет прояснить общую ситуацию, т.е. систематизировать ранее известные результаты и достоверно предсказать

итоги нового расчета. Однако результаты ранних *np*-расчетов, выполненных различными способами, но взятых вместе, позволили Филлипсу [159] установить в 1968 г. наличие линейной корреляционной зависимости дублетной *nd*-длины $^2a_{nd}$ от энергии связи трития $B(^3\text{H})$. С тех пор эта кривая называется *nd*-линией Филлипса, а исследование корреляционных зависимостей двух характеристик системы трех частиц принято [160] в теории нескольких частиц как способ, позволяющий предсказать значение одной неизвестной характеристики по известному значению другой.

Для построения низкоэнергетических $3N$ -разложений особый интерес представляет выяснение причин корреляционных зависимостей трудно вычисляемых параметров таких разложений от сравнительно просто определяемых параметров $2N$ -рассеяния. Знание такой зависимости позволило бы не только систематизировать известные расчеты, но и предсказать с хорошей точностью результаты новых расчетов $3N$ -параметров по заданным значениям $2N$ -параметров. Почему и как длина $^4a_{nd}$ и эффективный радиус $^4r_{nd}$ квартетного *nd*-рассеяния зависят от длины $^3a_{np}$ и эффективного радиуса $^3r_{np}$ триплетного *np*-рассеяния, было выяснено в работе [165]. Ее авторы нашли функциональные зависимости

$$\begin{aligned} ^4a_{nd}(\tau)/^3a_{np} &\approx 1,179066 - 0,03595\tau - 0,007448\tau^2, \\ ^4r_{nd}(\tau)/^3a_{np} &\approx -0,0383 + 1,0588\tau, \quad \tau \equiv ^3r_{np}/^3a_{np} \end{aligned} \quad (180)$$

nd-параметров от отношения τ и получили соотношения

$$\begin{aligned} ^4a_{nd} &\approx [6,327 + 1,57(^3a_{np} - 5,414) - 0,32(^3r_{np} - 1,705)] \text{ фм}, \\ ^4r_{nd} &\approx [1,736 + 0,92(^3a_{np} - 5,414) + 0,44(^3r_{np} - 1,705)] \text{ фм}, \end{aligned} \quad (181)$$

связывающие эти параметры с отклонениями *np*-параметров от их усредненных экспериментальных значений [166] $^3a_{np}^{\text{exp}} = (5,414 \pm 0,005)$ фм и $^3r_{np}^{\text{exp}} = (1,750 \pm 0,005)$ фм. Приведем наиболее интересные качественные результаты обсуждаемой работы [165]. Согласно (180) $^4a_{nd}(\tau)$ — убывающая функция отношения τ , достигающая своего максимального значения ($\approx 6,383$ фм) в пределе $^3r_{np} \rightarrow 0$. Это значение является оценкой сверху и несущественно отличается от значения 6,316 фм, получаемого при подстановке в (180) усредненных экспериментальных данных $^3a_{np} = 5,414$ фм и $^3r_{np} = 1,705$ фм. Столь несущественное отличие означает, что длина $^4a_{nd}$

является в высшей степени модельно независимой величиной. В отличие от нее эффективный радиус ${}^4r_{nd}(\tau)$ существенно зависит от выбранной модели NN -сил: если ${}^3r_{np} = 0$, то ${}^4r_{nd} \approx -0,207$ фм; при всех ${}^3r_{np} \neq 0$ имеет место оценка ${}^4r_{nd}(\tau) \approx {}^3r_{np}$. Корреляционные зависимости (180) и (181) систематизируют все многочисленные расчеты длины ${}^4a_{nd}$, упомянутые в обзоре [160], и позволяют по известным двухчастичным данным предсказать как результаты трехчастичных расчетов, так и результаты будущих экспериментов. Например, из (181) следует [165], что предполагаемое экспериментальное значение параметра ${}^4r_{nd}$ должно принадлежать интервалу $1,73 \div 1,74$ фм.

Этому прогнозу противоречит значение ${}^4r_{nd} = 1,91$ фм, вычисленное Яковлевым и Филихиным [167], по методу сильной связи каналов для задачи (172)—(176) с потенциалом V^s версии МТИ-III [168]. Тем не менее значение ${}^4a_{nd} = 6,44$ фм, полученное теми же авторами, очень близко к ${}^4a_{nd} = 6,4$ фм [113,169] и ${}^4a_{nd} = 6,43$ фм [170], вычисленным ранее для таких же NN -потенциалов.

Результаты недавних трехчастичных расчетов [171,172] длин ${}^2a_{nd}$, ${}^4a_{nd}$ и $B(^3\text{H})$ хорошо согласуются с их экспериментальными значениями ${}^2a_{nd}^{\text{exp}} = (0,65 \pm 0,04)$ фм, ${}^4a_{nd}^{\text{exp}} = (6,35 \pm 0,02)$ фм [154] и $B(^3\text{H}) = (8,481855 \pm 0,000013)$ МэВ [89]. Учет трехчастичных сил при описании nd -динамики [171,172] не изменяет прежнюю [160], рассчитанную с двухчастичными реалистическими NN -взаимодействиями, линейную корреляционную зависимость между ${}^2a_{nd}$ и $B(^3\text{H})$. К настоящему времени считается хорошо и неоднократно проверенным фактом, что nd -линия Филлипса проходит через многие точки, вычисленные различными способами, и более того — через точку, отвечающую экспериментальным значениям ${}^2a_{nd}$ и $B(^3\text{H})$.

Так как данные о зеркальных ядерных системах содержат ценную информацию о зарядовой симметрии NN -сил, то особо интересным представляется параллельное исследование зеркального к nd -рассеянию процесса упругого pd -столкновения в рамках одного и того же подхода. Такой зеркальный процесс изучен в гораздо меньшей степени и экспериментально, и теоретически. Физическая причина тому — отталкивающее кулоновское взаимодействие, подавляющее вероятность сближения протона с дейтроном тем сильнее, чем меньше энергия pd -столкновения E . Из-за этого прямое

измерение pd -длин при $E = 0$ не представляется возможным, а измерения сечения pd -рассеяния при $E_{\text{lab}} < 10$ МэВ настолько сложны, что к настоящему времени опубликованы лишь три набора экспериментальных значений дублетной и триплетной длин:

$$\begin{aligned} {}^2a_{pd}^{\text{exp}} &= (1,3 \pm 0,2) \text{ фм}, & {}^4a_{pd}^{\text{exp}} &= (11,4_{-1,2}^{+1,8}) \text{ фм} [173]; \\ {}^2a_{pd}^{\text{exp}} &= (2,73 \pm 0,10) \text{ фм}, & {}^4a_{pd}^{\text{exp}} &= (11,88_{-0,1}^{+0,4}) \text{ фм} [174]; \\ {}^2a_{pd}^{\text{exp}} &= (4,0 \pm 0,66) \text{ фм}, & {}^4a_{pd}^{\text{exp}} &= (11,11 \pm 0,24) \text{ фм} [175]. \end{aligned} \quad (182)$$

Первый [173] и второй [174] получены путем экстраполяции данных, измеренных при энергиях протона свыше 1 МэВ, а третий [175] — при энергиях свыше 0,4 МэВ. Согласно (182) имеется значительное расхождение между извлеченными в [173—175] экспериментальными значениями дублетной длины и гораздо меньшее расхождение между соответствующими значениями квартетной длины. Возможная причина такого расхождения — использование традиционного низкоэнергетического разложения (23) для экстраполяции данных, измеренных при больших энергиях, к нулевой энергии.

Какие физические эффекты нужно учесть для вывода правильных экстраполяционных pd -формул? Ответ на этот вопрос начнем с обсуждения объективных причин, затрудняющих теоретический анализ pd -рассеяния, и сопоставления известных подходов к вычислению pd -длин с целью выбора их наиболее правдоподобных значений.

Основная причина, существенно усложняющая численное решение трехчастичной pd -задачи и теоретический вывод столь необходимых для правильной обработки экспериментальных данных экстраполяционных формул, порождается наличием кулоновского дальнего действия. Из-за обусловленных им сингулярностей матриц (37), (38) парной pp -подсистемы ядра оригинальных уравнений Фаддеева [176] для ppp -системы не фредгольмовы, а сами уравнения по этой причине имеют множество решений. В 1970 г. Веселова [177] из ядер интегральных уравнений Фаддеева выделила явно сингулярные вклады кулоновского происхождения. На основе ее ренормализационной процедуры Альт, Зандхас и Цигельманн [178] в 1978 г. получили модифицированные уравнения, ядра которых компактны лишь при $p-d$ энергии E , не превышающей ($E \leq B(d)$) порог развала на три частицы. Иной подход к модификации уравнений Фаддеева, основанный на включении всех кулоновских взаимодействий в невозмущенный трехчастичный гамильтониан, предложен Ноблом [179] в 1967 г. Следуя его схеме, в 1975 г. Харченко и Стороженко [36] вывели уравнения Фаддеева — Нобла для задачи pd -рассеяния при $E \leq B(d)$.

Следует подчеркнуть, что интегральные pd -уравнения, полученные в [36,178], настолько громоздки, что их численное решение в случае *несепара-*

рабельных ядерных взаимодействий требует целой серии дополнительных приближений и поэтому представляется малонадежным способом, не позволяющим в должной мере проконтролировать неопределенности, порожденные такими приближениями. Дифференциальные уравнения Фаддеева [10] для системы трех заряженных частиц достаточно просты, в отличие от физических граничных условий [114], дополняющих эти уравнения до однозначно разрешимой краевой задачи.

По указанным выше причинам трехчастичных расчетов pd -длин не так много. Для простейших $3N$ -моделей с сепарабельными ядерными потенциалами pd -длины вычислялись в [180—184]. В [181,182] значения этих длин определялись путем экстраполяции результатов вычислений, соответственно, при $E > 400$ кэВ и $E > 200$ кэВ. Чтобы избежать решения дополнительной экстраполяционной задачи, авторы работы [183] проинтегрировали pd -уравнения [36] при $E = 0$ и получили значения pd -длин, существенно отличающиеся от вычисленных в [182]. Как отмечалось в [184], объяснить причину несогласования не представляется возможным из-за того, что в [182] и [183] применялись разные методы вычисления длин и различные дополнительные приближения. В отличие от nd -линии Филлипса, установленные в [183] зависимости между зеркальными длинами (корреляции ${}^2a_{nd} - a_{pd}^2$ и ${}^4a_{nd} - {}^4a_{pd}$) связывают характеристики $3N$ -системы при одной и той же, а именно нулевой, энергии Nd -столкновения. Поэтому такие корреляции позволяют надежно предсказать реальные значения pd -длин.

Анализ одной корреляционной зависимости может, вообще говоря, привести к ошибочной оценке достоверности результатов трехчастичных вычислений характеристик $3N$ -системы. Правильную оценку такой достоверности можно получить лишь с помощью тщательного анализа совокупности различных корреляционных зависимостей между характеристиками nd -системы и зеркальной к ней pd -системе. В качестве яркого примера, поясняющего это предостережение, сравним поведение трех кривых, построенных на рис. 1, 2 и 4а, 4б из работы [183] по результатам, полученным в этой и в двух более ранних работах [152,182]. Согласно рис.1 три pd -линии Филлипса, отвечающие результатам [152], [182,183] и описывающие зависимость ${}^2a_{pd}$ от $B(^3\text{He})$, смещены друг относительно друга, но не пересекаются. Поэтому, исходя лишь из этой корреляционной зависимости, трудно судить о том, результаты какой из трех работ наиболее достоверны. Сравнение трех кривых, описывающих корреляционные зависимости ${}^2a_{pd}$ от ${}^2a_{nd}$ и изображенных на рис.2 [183], лишь усиливает это сомнение: эти три кривые не пересекаются, и более того, кривая из работы [152] проходит

довольно близко от кривой из [182]. Всякие сомнения автора настоящего обзора о том, достоверны или нет результаты работы [182], развеивают рис.4а и 4б: изображенная на них кривая корреляционной зависимости $^4a_{pd}$ от $^4a_{nd}$, вычисленной в [182], перпендикулярна кривой, построенной по данным из [152,183]. Возможную причину этого яркого качественного несоответствия можно было бы попытаться мотивировать сложностью трехчастичных расчетов, если бы не было простой аналитической формулы [39]:

$$1/{}^4a_{pd} = (1 - \tau)/{}^4a_{nd} + (\ln \tau + 2\gamma - 1/2)/R.$$

Она является Nd -аналогом Np -формулы (25) и описывает зависимость кулон-ядерной длины $^4a_{pd}$ от длины $^4a_{nd}$ и комбинации $\tau \equiv \xi r_d/R$ параметра ξ сшивки ($1 < \xi < 3$) фрагментов модельной волновой функции квартетного nd -рассеяния, размера дейтрона r_d и борковского $p-d$ радиуса R .

Первые расчеты pd -длин [152], [185,186], выполненные в рамках интегродифференциальных уравнений Фаддеева с одним и тем же локальным S -волновым NN -потенциалом V^s Малфли — Тьона [168], но разными способами, оказались не согласующимися между собой:

$${}^2a_{pd} = 0,15 \text{ фм}, \quad {}^4a_{pd} = 13,8 \text{ фм} \quad [152,185], \quad (183)$$

$${}^2a_{pd} = 1,03 \text{ фм}, \quad {}^4a_{pd} = 11,96 \text{ фм} \quad [186]. \quad (184)$$

Длины (183) вычислены непосредственно, т.е. решением pd -уравнений при $E = 0$ на основе аппроксимации искоемых фаддеевских компонент pd -функции бикубическими сплайнами [3]. Длины (184) получены экстраполяцией в точку $E = 0$ кулон-ядерной функции эффективного радиуса (21), в которую вместо $\delta_0^{c,s}(k)$ подставлялась pd -фаза, вычисленная путем решения pd -уравнений конечноразностным методом [3] при энергиях $E > 200$ кэВ. Качественное объяснение [44] различия в длинах (183) и (184) основывалось на предположении о существовании полюса pd -амплитуды при килоэлектронвольтовой энергии. При наличии такого полюса в точке $E = iE_0$ разложение (23) для функции (21) с $l = 0$ следует заменить формулой

$$K^{c,s}(E) \sim [-1/a^{c,s}(E_0) + k^2 r_{00}^{c,s}(E_0)/2]/[1 + (E/E_0)^2], \quad k \rightarrow 0. \quad (185)$$

При $E \gg E_0$ асимптотики (23) и (185) близки друг к другу, а при $E \ll E_0$ они имеют различный наклон к оси энергий. Поэтому даже при одной и той же дублетной pd -фазе $\delta_0^{c,s}(k)$ величины дублетных pd -длин $a_0^{c,s}$ и $a_0^{c,s}(E_0)$, вычисленные в [185] по формуле (185), а в [186] — по формуле (23), должны отличаться друг от друга. Последующее тщательное исследование [153]

подтвердило существование полюса и показало, что длину ${}^2a_{pd}$ следует определять с помощью экстраполяции к нулевой энергии асимптотики (185). Таким образом, в [153] были подтверждены значения длин (183), вычисленные ранее в [152], и неравенство ${}^2a_{pd} < {}^2a_{nd}$. Приведенный пример, показывающий, насколько важно знание правильной экстраполяционной формулы, станет еще более убедительным, если напомнить о существенной разнице между величинами $r_{00}^{c,s} = 11000$ фм и $r_{00}^{c,s}(E_0) = -450$ фм, вычисленными в [167] по соответствующим формулам (21) и (185) при $E_0 = 25$ кэВ.

Результаты первых расчетов [162,171] длин pd -рассеяния, выполненных с различными реалистическими двухчастичными потенциалами, а также с учетом и без учета $3N$ -сил, показали, что $3N$ -силы не изменяют кривой корреляционной зависимости ${}^2a_{pd}$ от $B(^3\text{He})$, а величине $B(^3\text{He}) = 7,68$ МэВ, близкой к экспериментальной $B(^3\text{He}) = (7,718109 \pm 0,000010)$ МэВ [89], отвечает отрицательное значение ${}^2a_{pd} \approx -0,1$ фм, не согласующееся с имеющимися экспериментальными данными (182). Последний вывод был подтвержден тщательным исследованием [184] корреляционной зависимости ${}^2a_{pd}$ от ${}^2a_{nd}$, выполненным на основе прямого решения модифицированных интегральных уравнений Фаддеева с сепарабельными NN -потенциалами и нулевой энергией Nd -столкновения. Полученная корреляционная кривая с хорошей точностью проходит через точки, отвечающие значениям Nd -длин, вычисленных ранее в [152,162,171], но расположена значительно ниже точек, отвечающих экспериментальным значениям (182). Рассчитанная зависимость ${}^2a_{pd}$ от ${}^2a_{nd}$ оказалась слабо чувствительной к выбору модели NN -сил, что дало авторам обсуждаемой работы [184] веские основания для следующего вывода: согласно корреляционной зависимости экспериментальному значению ${}^2a_{nd}^{\text{exp}} = 0,65$ фм соответствует значение ${}^2a_{pd} = -0,1$ фм. Несмотря на этот правдоподобный и достаточно убедительный вывод, окончательный ответ на вопрос о величине pd -длин требует их переопределения и последующего преодоления многих сложностей. Они порождаются поляризационным pd -взаимодействием [187], имеющим асимптотику (12). Формализм интегральных pd -уравнений в импульсном пространстве, развитый в [36,178], был модифицирован в [188] с целью выделения индуцированных поляризационных взаимодействий. Вычисления по этому методу до сих пор не выполнены. К настоящему времени нет ни одного трехчастичного расчета модифицированных (${}^2a_{pd}^{cp,s}$ и ${}^4a_{pd}^{cp,s}$) длин pd -рассеяния, последовательно учитывающего поляризационные эффекты. Есть две основные причины отсутствия такого расчета — практическая и теоретическая.

При прямом решении стандартных уравнений Шредингера или Фаддеева с далекодействующими потенциалами и стремящимся к нулю параметром (энергией столкновения) возникают непреодолимые вычислительные сложности [20], [147,148]. Как известно [20], точность решения двухчастичной задачи рассеяния суперпозицией $V^c + V^p + V^s$, $V^c > 0$, позволяющая исследовать влияние поляризационного взаимодействия на низкоэнергетическую зависимость S -фаз $\delta_0^{c,ps}(k)$ и $\delta_0^{cp,s}(k)$, сходится к нулю при $k \rightarrow 0$ как $O(\alpha k^5 R^2)$. Следовательно, даже при решении модельной задачи (170)—(176) точность вычисления S -волновой фаддеевской компоненты U , описывающей pd -конфигурацию в pd -рассеянии с энергией столкновения $E \approx 10$ кэВ, должна быть равна по порядку величины 10^{-12} . Столь высокой точности решения трехчастичных уравнений, описывающих пороговое pd -рассеяние, невозможно достичь даже на современных суперкомпьютерах. По оценкам Корнелиуса и др. [148], существующие компьютеры позволяют решить фаддеевские $3N$ -задачи с реалистическими NN -силами [53,54] лишь с точностью около 0,01.

При решении фаддеевской задачи на слабосвязанное состояние трех частиц с кулоновскими парными потенциалами прецизионной точности можно достичь, применив известный способ [147] включения информации о медленно убывающих асимптотиках фаддеевских компонент в области больших значений гиперрадиуса. Этот способ состоит в замене

$$r' \equiv 1 - \exp(-\tau r), \quad \tau = \text{const} > 0, \quad (186)$$

отображающей полуось \mathcal{R}^+ значений гиперрадиуса r на единичный отрезок изменения новой гиперрадиальной координаты r' , и последующем использовании для фаддеевских компонент Ψ_i анзаца

$$\Psi_i(r, \Omega; E) = \exp(-\sqrt{|E|} r') \Psi_i'(r', \Omega; E),$$

в котором первый множитель — эталонная при больших r функция, описывающая явно асимптотику этих компонент при $r \rightarrow \infty$. Расширение такого способа на задачу рассеяния в системе трех частиц, кроме масштабирования (186) гиперрадиуса, требует решения очень сложной задачи построения для каждой из трех фаддеевских компонент Ψ_i своей пары эталонных функций.

Эти функции должны *одновременно* описывать в двухчастичной асимптотической области ($x_i < \infty$, $y_i \rightarrow \infty$) волны, сходящиеся и расходящиеся по якобиевской переменной y_i , а в трехчастичной асимптотической области ($x \sim y$; $x, y \rightarrow \infty$) воспроизводить асимптотику расходящейся сферической волны по переменной r . Такая задача теории рассеяния для системы трех частиц еще не решена. Возможный подход к ее решению — объединение метода фазовых функций и интегродифференциальных уравнений Фаддеева. Перспективность объединения [189,190] метода фазовых функций и

интегральных уравнений Фаддеева убедительно продемонстрирована исследованием зависимостей длин nd -рассеяния [189] и низкоэнергетических свойств трех бозонов в резонансной области [190] от радиуса обрезания одночленного сепарабельного NN -потенциала.

Как было показано в пп. 4.1 и 4.2, метод построения трехчастичных низкоэнергетических разложений, сводящий шредингеровскую или фаддеевскую задачу к рекуррентной цепочке удобных для численного решения и энергонезависимых уравнений, находится в зачаточном состоянии.

Единственным доступным в настоящее время способом исследования поляризационных эффектов в pd -рассеянии является низкоэнергетический анализ эффективно-двухчастичной pd -задачи (68)—(70) с суперпозицией $V = V^{c,ps}$ эффективных кулоновского, ядерного (1) и поляризационного (12) pd -взаимодействий. Результаты исследований, выполненных в этом приближении для S -волнового pd -столкновения, подробно обсуждались в [20]. В процессе обсуждения возник физически интересный вопрос: может ли взаимное воздействие ядерного и поляризационного потенциалов, порождающее минимумы [191] в S -волновых парциальных кулон-поляризационно-ядерных ($a = ps$) дублетном и квартетном сечениях pd -рассеяния, обусловить минимумы (pd -аналоги эффекта Рамзауера [192]) соответствующих полных сечений такого рассеяния? Ответом на этот вопрос завершим настоящий обзор.

Начнем со случая $a = p$, когда ядерное pd -взаимодействие не учитывается, и в (68) $V \equiv V^p$, а в (70) $\delta_l(k) \equiv \delta_l^{c,p}(k)$. Согласно (60) и (61) фазы $\delta_l^{c,p}(k)$ с большими l убывают при $q \equiv kR \rightarrow 0$ гораздо медленнее фаз (62) с малыми l :

$$\operatorname{tg} \delta_l^{c,p}(q) \sim -\pi V_0^p q^2 / R^2 (4l^2 - 1) (2l + 3), \quad l \gg \eta. \quad (187)$$

Поэтому из (62) и (187) следует, что характер убывания старших слагаемых низкоэнергетических асимптотик парциальных амплитуд (32) с $a = p$ непрерывно по q изменяется при переходе из области $l \ll \eta$ в область $l \gg \eta$:

$$f_l^{c,p}(q) = O(q^4), \quad l \ll \eta; \quad f_l^{c,p}(q) = O(q), \quad l \gg \eta.$$

Из-за такого изменения дискретное по l представление (31) неудобно для вывода асимптотики полной амплитуды $f^{c,p}$.

Применив метод работы [193], Квицинский в [194] заменил сумму (31) интегралом по непрерывной переменной l и нашел асимптотику этого интеграла при $q \rightarrow 0$ методом стационарной фазы [4]. Оказалось, что в таком пределе

$$f^{c,p}(\theta; q) \sim -2V_0^p R^{-1} q^3 \exp(2i\eta (\ln(\eta \operatorname{cosec}(\theta/2)) - 1)) b_4(\theta),$$

$$b_4(\theta) \equiv \sin \theta (1 + \cos \theta)^{-3} [(2 - \cos \theta) (\pi - \theta) - 3 \sin \theta], \quad (188)$$

а основной вклад в сумму (31) дают парциальные амплитуды (32) с моментами l , близкими к точке стационарной фазы $l_0 \equiv \eta \operatorname{ctg}(\theta/2) - 1$.

Подставив (188) в (34), получаем асимптотику

$$d\sigma^{c,p}(\theta; E)/d\theta \sim 8\pi(V_0^p R^{-1} q^3)^2 b_4^2(\theta) \sin \theta, \quad q \rightarrow 0 \quad (189)$$

вклада поляризационного потенциала в дифференциальное сечение pd -рассеяния суперпозицией V^{cp} . Согласно (189) при достаточно низких энергиях этот вклад зависит от угла θ как $O(\theta^3)$ при рассеянии вперед ($\theta \rightarrow 0$) и как $O(\pi - \theta)$ при рассеянии назад ($\theta \rightarrow \pi$) и при любом фиксированном q достигает своего максимума в точке $\theta \approx \pi/2$.

Заменив в (35) вклад $d\sigma^{c,p}/d\theta$ его асимптотикой (189), выводим соотношение

$$\sigma^{c,p}(E) \sim 8\pi(V_0^p R^{-1} q^3)^2 \int_0^\pi d\theta b_4^2(\theta) \sin \theta, \quad q \rightarrow 0, \quad (190)$$

означающее, что вклад поляризационного потенциала в полное сечение pd -столкновения убывает в пределе нулевой энергии как $O(E^6)$. Пусть теперь $a = ps$ и ядерное pd -взаимодействие V^s включено наряду с поляризационным потенциалом (12), но только в состоянии с $l = 0$. Тогда

$$\delta_l^{c,s}(q) \sim -a_0^{c,s} q R^{-1} C_0^2(\eta) \hat{\delta}_{l0}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad q \rightarrow 0. \quad (191)$$

Учтя эти равенства, с помощью формул (31), (32) и (35) получаем удобное для численного анализа представление взаимного вклада ядерного и поляризационных взаимодействий в полное сечение pd -рассеяния суперпозицией V^{cps} :

$$\sigma^{c,ps}(E) = \sigma_0^{c,ps}(E) + [\sigma^{c,p}(E) - \sigma_0^{c,p}(E)]. \quad (192)$$

Для вычисления этого вклада по формулам (32), (33), (190) и (191) использовались те же самые значения pd -длин, что и в [191], а именно $a_0^{c,s} = 1,03$ фм для дублетного и $a^{c,s} = 11,96$ фм для квартетного pd -рассеяния. Оказалось, что вклад разности $[\sigma^{c,p}(E) - \sigma_0^{c,p}(E)]$ в сумму (192) является основным в дублетном случае при $E < {}^2E_1 = 3,1$ кэВ:

$$[\sigma^{c,p}(E) - \sigma_0^{c,p}(E)]/\sigma_0^{c,ps}(E) > 0,9, \quad (193)$$

а в квартетном — если $E < {}^4E_1 = 2,0$ кэВ. Компонента $\sigma_0^{c,ps}$ сечения (192) обращается в нуль [20] в точке ${}^2E_{\min} \approx 2,2$ кэВ в дублетном случае, а в квартетном — в точке ${}^4E_{\min} \approx 1,2$ кэВ. Так как ${}^nE_{\min} < {}^nE_1$, $n = 2, 4$, то в обоих случаях вклад $\sigma^{c,ps}(E)$ не может иметь заметного локального миниму-

ма в интервале энергий $E < {}^n E_1$. Согласно (193) при таких энергиях этот вклад обусловлен рассеянием поляризационным потенциалом в кулоновском поле в pd -состояниях с $l > 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нерешенные задачи теории низкоэнергетических разложений в ядерной физике формулировались в каждом разделе настоящего обзора, поэтому его можно закончить двумя самыми главными выводами.

Как было показано, исследование низкоэнергетических столкновений в NN - и $3N$ -системах продолжает оставаться актуальной проблемой ядерной физики в связи с проверкой возможности описания сложной системы на основе современных представлений о *полном* взаимодействии между нуклонами и решением обратной задачи — извлечением информации о ядерном взаимодействии путем анализа всех экспериментальных данных и теоретических результатов о NN - и $3N$ -системах.

Исследования столкновений нейтронов и протонов с легчайшими ядрами при сверхнизких в ядерном масштабе энергиях играют важную роль в ядерной астрофизике и имеют прикладное значение в связи с осуществлением термоядерного синтеза. Это еще одна причина, по которой в обзоре особое внимание было уделено доказательству утверждения о том, что анализ таких столкновений должен базироваться на математически обоснованных низкоэнергетических разложениях, полученных из строгих динамических уравнений движения, позволяющих последовательно учесть кулоновское взаимодействие и наиболее существенные электромагнитные поправки к нему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abramowitz M., Stegun I.A.** — Handbook of Mathematical Functions. Washington: D.C., 1972.
2. **Камке Э.** — Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. М.: Наука, 1976.
3. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** — Методы сплайн-функций. М: Наука, 1980.
4. **Федорюк М.В.** — Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. **Taylor J.R.** — Scattering Theory. New York: Wiley, 1972.
6. **Burke P.G.** — Potential Scattering in Atomic Physics. New York and London: Plenum Press, 1977.
7. **De Alfaro V., Regge T.** — Potential Scattering. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1965.

8. **Reed M., Simon B.** — Scattering Theory, (Methods of Modern Mathematical Physics III). New York: Academic, 1979.
9. **Ментковский Ю.Л.** — Частица в ядерно-кулоновском поле. М.: Энергоатомиздат, 1982.
10. **Merkuriev S.P., Faddeev L.D.** — Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems. Kluwer: Academic Publishers, 1993.
11. **Calogero F.** — Variable Phase Approach in Quantum Mechanics. New York: Academic, 1967.
12. **Бабиков В.В.** — Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
13. **Джибути Р.И., Крупеникова Н.Б.** — Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
14. **Джибути Р.И., Шитикова К.В.** — Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993.
15. **Schiff L.I.** — Quantum mechanics, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1968.
16. **Brown G.E., Jackson A.D.** — The Nucleon-Nucleon Interaction. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1976.
17. **Вильдермут К., Тан Я.** — Единая теория ядра. Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
18. **Alexandrov Yu.A.** — Fundamental Properties of the Neutron. Oxford: Clarendon Press, 1992.
19. **Вурне J.** — Neutrons, Nuclei, and Matter: an Exploration of the Physics of Slow Neutrons. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1994.
20. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — ЭЧАЯ, 1996, т.4, с.859.
21. **Неудачин В.Г., Сахарук А.А., Смирнов Ю.Ф.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.479.
22. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.2713.
23. **Blatt J.M., Jackson J.D.** — Phys. Rev., 1949, v.76, p.18.
24. **O'Malley T.F., Spruch L., Rosenberg L.** — J. Math. Phys., 1961, v.2, p.491.
25. **O'Malley T.F., Rosenberg L., Spruch L.** — J. Math. Phys., 1962, v.125, p.1300.
26. **Levy B.R., Keller J.B.** — J. Math. Phys., 1963, v.4, p.54.
27. **Hinckelman O., Spruch L.** — Phys. Rev., 1971, v.2, p.642.
28. **Breit G., Condon E.U., Present R.A.** — Phys. Rev., 1936, v.50, p.825.
29. **Ландау Л.Д., Смородинский Я.А.** — ЖЭТФ, 1944, т.14, с.269.
30. **Bethe H.A.** — Phys. Rev., 1949, v.76, p.48.
31. **Jackson J.D., Blatt J.M.** — Rev. Mod. Phys., 1950, v.22, p.77.
32. **Van Haeringen H., Kok L.P.** — Phys. Rev., 1982, v.A26, p.1218.
33. **Мур В.Д., Кудрявцев А.Е., Попов В.С.** — ЯФ, 1983, т.37, с.1417.
34. **Kok L.P.** — In: Lecture Notes in Physics v.273: Models and Methods in Few-Body Physics. Eds. Ferreira L.S. et al., Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.
35. **Навроцкий М.А.** — ЯФ, 1987, т.45, с.1311.
36. **Kharchenko V.F., Storozhenko S.A.** — Preprint ИТФ ИТР-75-53Е, Kiev, 1975.
37. **Van Haeringen H., van Wageningen R.J.** — J. Math. Phys., 1982, v.B32, p.307.
38. **Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж.** — ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.741.
39. **Киржниц Д.А., Пеньков Ф.М.** — ЖЭТФ, 1982, т.82, с.657.
40. **Бабиков В.В.** — ЯФ, 1965, т.1, с.793.
41. **Петрунькин В.А.** — ЭЧАЯ, 1981, т.12, с.692.
42. **Berger R.O., Spruch L.** — Phys. Rev., 1965, v.138, p.B1106.

43. **Berger R.O., Snodgrass H.B., Spruch L.** — *Phys. Rev.*, 1969, v.185, p.113.
44. **Kvitsinsky A.A., Merkuriev S.P.** — In: *Proc. of the IXth Europ. Conf. on Few-Body Problems in Physics*, Tbilisi, 1984, p.40.
45. **Квицинский А.А., Меркурьев С.П.** — *ЯФ*, 1985, т.41, с.647.
46. **Bencze Gy. et al.** — *Phys.Rev.*, 1987, v.C35, p.1188.
47. **Calogero F.** — *Nuovo Cimento*, 1963, v.27, p.261.
48. **Pupyshev V.V.** — *J. Math. Phys.*, 1995, v.A28, p.3305.
49. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — *Z. Phys.*, 1994, v.A348, p.227.
50. **Ho Y.K.** — *Phys. Rep.*, 1983, v.99, p.1.
51. **Rakityansky S.A., Sofianos S.A., Amos K.** — *Nuovo Cimento*, 1996, v.B111, p.363.
52. **Lambert E.** — *Helv. Phys. Acta*, 1969, v.42, p.667.
53. **Lacombe M. et al.** — *Phys. Rev.*, 1980, v.C20, p.861.
54. **Machleidt R. et al.** — *Phys. Reports*, 1987, v.149, p.1.
55. **Nagels M.M. et al.** — *Phys. Rev.*, 1987, v.D17, p.768.
56. **Wiringa R.B. et al.** — *Phys. Rev.*, 1987, v.C19, p.1207.
57. **Brauer K. et al.** — *Z. Phys.*, 1985, v.A320, p.609.
58. **Janssen J.** — In: *Proc. of Int. Conf. on Mesons and Nuclei at Intermediate Energies*. Eds. Khankhasaev M.Kh., Kurmanov Zh.B., Dubna: JINR, 1994, p.79.
59. **Heisenberg W.** — *Z. Phys.*, 1932, v.77, p.1.
60. **Okamoto K.** — *Phys. Lett.*, 1964, v.11, p.150.
61. **Nolen J.A. Jr., Schiffer J.P.** — *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 1969, v.19, p.471.
62. **Nolen J.A. Jr., Schiffer J.P.** — *Phys. Lett.*, 1969, v.B29, p.369.
63. **Shlomo S.** — *Rep. Prog. Phys.*, 1978, v.41, p.66.
64. **Negele J.W.** — *Nucl. Phys.*, 1971, v.A165, p.305.
65. **Henley E.M., Keliher T.E.** — *Nucl. Phys.*, 1972, v.A189, p.632.
66. **Langacker P., Sparrow D.A.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1979, v.43, p.1553.
67. **Langacker P., Sparrow D.A.** — *Phys. Rev.*, 1982, v.C25, p.1194.
68. **Coon S.A., Scardon M.D.** — *Phys. Rev.*, 1982, v.C25, p.562.
69. **Friar J.L., Gibson B.F.** — *Phys. Rev.*, 1978, v.C17, p.1456.
70. **Coon S.A.** — In: *Proc. of Xth Int. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics*. Ed. Zeitnitz B., North-Holland, Amsterdam, 1984, v.II, p.293.
71. **Stapp H.P., Ypsilantis T.J., Metropolis M.** — *Phys. Rev.*, 1957, v.105, p.302.
72. **Knutson L.D., Chiang D.** — *Phys. Rev.*, 1978, v.C18, p.1958.
73. **Moravcsik M.J., Pauschenwein J., Goldstein G.R.** — *J. Phys. (Paris)*, 1989, v.50, p.1167.
74. **Stoks V.G.J., de Swart J.J.** — *Nucl. Phys.*, 1990, v.A514, p.309.
75. **Stoks V.G.J., de Swart J.J.** — *Phys. Rev.*, 1990, v.C42, p.1235.
76. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Preprint JINR E4-90-447, Dubna, 1990.
77. **Покотилловский Ю.Н., Тахтамышев Г.Г.** — *ЯФ*, 1993, т.56, с.184.
78. **Kühn B.** — *Sov. J. Nucl. Part. Sci.*, 1976, v.6, p.139.
79. **Henley E.M., Wilkinson D.H.** — In: *Few Particle Problems in the Nuclear Interaction*. Eds. Slaus I. et al., North-Holland, Amsterdam, 1972, p.242.
80. **De Téramond G.F., Gabioud B.** — *Phys. Rev.*, 1987, v.C36, p.691.
81. **Von Witsch W. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1979, v.A329, p.141.
82. **Gabioud B. et al.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1979, v.42, p.1508.
83. **Gabioud B. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1984, v.A420, p.496.

84. Slaus I., Marušić A. — Nucl. Phys., 1992, v.A543, p.231.
85. Slaus I. et al. — Phys. Reports., 1989, v.173, p.257.
86. Miller G. et al. — Phys. Reports., 1990, v.194, p.1.
87. Slaus I. et al. — Nucl. Instr. and Methods, 1991, v.B56/57, p.489.
88. Brandenburg R.A. et al. — Phys. Rev., 1988, v.C37, p.781.
89. Tilley D.R., Weller H.R., Hasan H.H. — Nucl. Phys., 1987, v.A474, p.1.
90. Gebhardt K. et al. — Nucl. Phys., 1993, v.A561, p.232.
91. Strate J. et al. — Nucl. Phys., 1989, v.A501, p.51.
92. Alt E.O., Grassberger P., Sandhas W. — Nucl. Phys., 1967, v.B2, p.157.
93. Ahmidoux A. et al. — In: Proc. of Int. Conf. on Mesons and Nuclei at Intermediate Energies. Eds. Khankhasaev M.Kh., Kurmanov Zh.B., Dubna: JINR, 1994, p.91.
94. Tornow W. et al. — Phys. Lett., 1991, v.B257, p.861.
95. Witala H., Glöckle W. — Nucl. Phys., 1991, v.A582, p.48.
96. Schwinger J. — Phys. Rev., 1950, v.78, p.135.
97. Foldy L.L., Eriksen E. — Phys. Rev., 1955, v.98, p.775.
98. Durand L. III. — Phys. Rev., 1957, v.108, p.1597.
99. Heller L. — Phys. Rev., 1960, v.120, p.627.
100. Schwinger J. — Phys. Rev., 1949, v.73, p.407.
101. Breit G. — Phys. Rev., 1955, v.99, p.1581.
102. Ebel M.E., Hull M.H. Jr. — Phys. Rev., 1955, v.99, p.1596.
103. Garren A. — Phys. Rev., 1956, v.101, p.419.
104. Hutton J.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1975, v.35, p.429.
105. Knutson L.D., Chiang D. — Phys. Rev., 1978, v.C18, p.1958.
106. Barker M.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.48, p.918.
107. Barker M.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.49, p.1056E.
108. Holslin D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1988, v.61, p.1561.
109. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — Phys. Lett., 1995, v.B354, p.1.
110. Путьшев В.В., Соловцова О.П. — ЯФ, 1996, т.59, с.1807.
111. Mutchier G.S., Simmons J.E. — Phys. Rev., 1971, v.C4, p.67.
112. Fabre de la Ripelle M. — Lecture Notes in Physics. Models and Methods in Few-Body Physics. Proceedings, Lisboa, Portugal, 1986, v.273, p.283. Eds. Ferreira, Fonseca A.C., Streit L., Berlin, Heidelberg New York, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
113. Квицинский А.А. и др. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.267.
114. Квицинский А.А., Кострыкин В.В., Меркурьев С.П. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.1301.
115. Jibuti R.I., Sigua K.I. — Preprint Institute of Physics of the Georgian Academy of Sciences NP-31, Tbilisi, 1977.
116. Кезерашвили Р.Я. — ЯФ, 1983, т.38, с.491.
117. Джибути Р.И., Имнадзе П.М. — Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-8, Тбилиси, 1985.
118. Джибути Р.И. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.741.
119. Джибути Р.И., Шитикова К.В. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, с.311.
120. Pupyshov V.V., Rakityansky S.A. — In: Proc. of National Con. on Physics of Few-Body and Quark-Hadronic Systems. Eds. Boldyshev V., Kotlyar V., Shebeko A. Khar'kov: KFTI, 1992, p.388.

121. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics, Eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.61B.
122. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics, Eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.62B.
123. **Fabre de la Ripelle M.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1982, v.147, p.281.
124. **Haftel M.I., Mandelzweig V.B.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1983, v.150, p.48.
125. **Pupyshev V.V.** — In: Proc. of the 12th Europ. Conf. on Few-Body Physics. Eds. Lendyel V.I., Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.346.
126. **Palumbo F.** — Phys. Lett., 1977, v.B69, p.275.
127. **Джибути Р.И., Имнадзе П.М.** — Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-7, Тбилиси, 1985.
128. **Fabre de la Ripelle M.** — Few-Body Systems, 1986, v.1, p.181.
129. **Pupyshev V.V.** — JINR Rapid. Com. No.2[22]-87, Dubna, 1987, p.45.
130. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1989, т.81, с.86.
131. **Kostrykin V.V., Kvitsinsky A.A., Merkuriev S.P.** — Few-Body Systems, 1989, v.6, p.97.
132. **Pupyshev V.V.** — Preprint JINR E5-87-902, Dubna, 1987.
133. **Pupyshev V.V.** — Few-Body Systems, 1990, v.8, p.105.
134. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.260.
135. **Pupyshev V.V.** — JINR Rapid Com. No.4[24]-87, Dubna, 1987, p.31.
136. **Pupyshev V.V.** — In: Contr. to XIIth Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics. Ed. Jennings B.K., V.C. Canada, Vancouver, 1989, p.F11.
137. **Pupyshev V.V.** — Phys. Lett., 1989, v.A140, p.151.
138. **Pupyshev V.V.** — Preprint JINR E4-85-313, Dubna, 1985.
139. **Pupyshev V.V.** — Preprint JINR E4-95-152, Dubna, 1995.
140. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1996, т.107, с.501.
141. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1980, v.C22, p.284.
142. **Яковлев С.Л.** — ТМФ, 1995, т.102, с.323.
143. **Руднев В.А., Яковлев С.Л.** — ЯФ, 1995, т.58, с.1762.
144. **Payne G.L.** — Lecture Notes in Physics. Models and Methods in Few-Body Physics. Proceedings, Lisboa, Portugal, 1986, v.273, p.64. Eds. Ferreira L.S., Fonseca A.C., Streit L., Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
145. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.1318.
146. **Пупышев В.В.** — Сообщение ОИЯИ Р4-86-85, Дубна, 1986.
147. **Bosveld G.D., Schellingerhout N.V.** — Report 231, Groningen: University of Groningen, 1989.
148. **Cornelius Th. et al.** — Phys. Rev., 1990, v.C41, p.2538.
149. **Vinitsky S.I. et al.** — Yad. Fiz., 1990, v.51, p.641.
150. **Bernabeu J. et al.** — In: Contr. to Int. Symposium on Meson Catalysed Fusion. Physics of Exotic Atoms and Molecules, Dubna, JINR, 1995, p.111.
151. **Merkuriev S.P., Gignoux G., Laverne A.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1976, v.99, p.30.
152. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1983, v.C28, p.983.
153. **Chen C.R. et al.** — Phys. Rev., 1989, v.C39, p.1261.
154. **Dilg W., Koester L., Nistler W.** — Phys. Lett., 1971, v.B36, p.208.

155. **Stoler P. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1972, v.29, p.1745.
156. **Stoler P., Kaushal N.N., Green F.** — Phys. Rev., 1973, v.C8, p.1532.
157. **Journey E.T., Bendt P.J., Browne J.C.** — Phys. Rev., 1982, v.C25, p.2810.
158. **Konijnenberg M.W. et al.** — Phys. Lett., 1988, v.B205, p.215.
159. **Phillips A.C.** — Nucl. Phys., 1968, v.A107, p.209.
160. **Сигенко А.Г., Харченко В.Ф.** — УФН, 1971, т.103, с.469.
161. **Phillips A.C.** — Rep. Prog. Phys., 1977, v.40, p.905.
162. **Chen C.R. et al.** — Phys. Rev., 1986, v.C33, p.401.
163. **Kharchenko V.F.** — In: Proc. of Int. Symp. on Few Particle Problems in Nuclear Physics, Dubna: JINR, 1980, p.9.
164. **Friar J.L.** — In: Proc. of Int. Conf. on Few-Body and Quark-Hadronic Systems, Dubna: JINR, 1987, p.70.
165. **Гринюк Б.Е., Сименюк И.В., Ситниченко А.И.** — Препринт ИТФ-82-141Р, Киев, 1982.
166. **Lomon E., Wilson R.** — Phys. Rev., 1974, v.9, p.1329.
167. **Яковлев С.Л., Фелихин И.Н.** — ЯФ, 1993, т.56, с.98.
168. **Mafliet R.A., Tjon J.A.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1970, v.56, p.245.
169. **Benayoun J.J., Gignoux C., Chauvin J.** — Phys. Rev., 1981, v.C23, p.1854.
170. **Friar J.L., Gibson V.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1989, v.C39, p.1264.
171. **Friar J.L., Gibson V.F., Payne G.L.** — Phys. Lett., 1990, v.B247, p.197.
172. **Friar J.L. et al.** — Phys. Lett., 1990, v.B251, p.11.
173. **Van Oers W.T.H., Brockman K.W.** — Nucl. Phys., 1967, v.A92, p.561.
174. **Arvieux J.** — Nucl. Phys., 1974, v.A221, p.253.
175. **Huttel E. et al.** — Nucl. Phys., 1983, v.A406, p.443.
176. **Фаддеев Л.Д.** — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.1459.
177. **Веселова А.М.** — ТМФ, 1970, т.3, с.326.
178. **Alt E.O., Sandhas W., Zeigelmann H.** — Phys. Rev., 1978, v.C17, p.1981.
179. **Noble J.V.** — Phys. Rev., 1967, v.161, p.945.
180. **Alt E.O.** — In: Proc. of VIIth Int. Conf. on Few-Body Problems in Nuclear and Particle Physics. Eds. Mitra A.N. et al. Amsterdam: North-Holland, 1976, p.76.
181. **Zankel H., Mathelitsch L.** — Phys. Lett., 1983, v.B132, p.27.
182. **Berthold G.H., Zankel H.** — Phys. Rev., 1986, v.C34, p.1203.
183. **Kharchenko V.F., Navrotsky M.A., Shadchin S.A.** — Nucl. Phys., 1990, v.A512, p.294.
184. **Харченко В.Ф., Навроцкий М.А., Катеринчук П.А.** — ЯФ, 1992, т.55, с.86.
185. **Friar J.L., Gibson V.F., Payne G.L.** — Phys. Lett., 1983, v.B124, p.287.
186. **Квицинский А.А.** — Письма в ЖЭТФ, 1982, т.36, с.375.
187. **Kharchenko V.F., Shadchin S.A.** — Few-Body Systems, 1989, v.6, p.45.
188. **Shadchin S.A., Kharchenko V.F., Navrotsky M.A.** — Preprint ITP-90-15E, Kiev, 1990.
189. **Петров Н.М., Пушкаш А.М.** — ЯФ, 1986, т.43, с.1403.
190. **Петров Н.М., Пушкаш А.М.** — ЯФ, 1989, т.47, с.205.
191. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — Сообщение ОИЯИ Р4-86-346, Дубна, 1986.
192. **Ramsauer C., Kollath R.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1929, v.3, p.54.
193. **Квицинский А.А.** — ТМФ, 1984, т.59, с.472.
194. **Квицинский А.А.** — ТМФ, 1985, т.65, с.226.