ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 7

УДК 539.12.01

СИММЕТРИИ И ПЕРЕНОРМИРОВКА

А. А. Славнов[*]

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

[*]E-mail: slavnov@mi.ras.ru

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 7

УДК 539.12.01

СИММЕТРИИ И ПЕРЕНОРМИРОВКА

*А. А. Славнов**

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Обсуждаются проблемы, возникающие при перенормировке калибровочно-инвариантных и суперсимметричных теорий. Предложен новый метод перенормировки, основанный на явном использовании обобщенных тождеств Уорда. Этот метод позволяет пользоваться произвольной промежуточной регуляризацией и гарантирует выполнение обобщенных тождеств Уорда для перенормированных корреляционных функций.

Problem arising in the process of renormalization of gauge invariant and supersymmetric theories are discussed. A new method, based on explicit of Generalized allows to use an arbitrary intermediate regularization and guarantees that Generalized Word Identifies for renormalized green functions are satisfied.

ВВЕДЕНИЕ

Перенормировка позволяет устранить появляющиеся при вычислении радиационных поправок ультрафиолетовые расходимости и получить конечные выражения для корреляционных функций и матрицы рассеяния. В работах Дж. Швингера, И. Томонага, Р. Фейнмана, Ф. Дайсона была построена последовательная процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей за счет переопределения параметров (масс, зарядов) невзаимодействующих «голых» частиц.

Математически строгая процедура перенормировки была развита Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком. Они показали, что перенормировку можно рассматривать как способ доопределения произведения обобщенных функций, описывающих распространение частиц, и построили рекуррентную вычитательную процедуру (R-операция), которая позволяет для произвольной диаграммы Фейнмана написать хорошо определенное сходящееся выражение, вычитая из соответствующих интегралов первые члены разложения в ряд Тейлора по внешним импульсам.

Более наглядно перенормировку можно описать следующим образом. Чтобы придать смысл расходящимся фейнмановским интегралам, вводится некоторая промежуточная регуляризация (ультрафиолетовое обрезание Λ).

*E-mail: slavnov@mi.ras.ru

Одновременно меняют параметры «голых» частиц, вводя в лагранжиан зависящие от Λ контрчлены:

$$L = -Z_3^\Lambda F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i Z_2^\Lambda \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi + Z_2^\Lambda (m + \delta m^\Lambda) \bar{\psi} \psi. \qquad (1)$$

Перенормируемость теории означает, что при специальном выборе зависимости $Z_2, Z_3, \delta m$ от Λ предел $\Lambda \to \infty$ существует для всех интегралов, которые необходимы для вычисления наблюдаемых. Этот предел определен с точностью до конечного числа констант, которые можно фиксировать, задавая значения масс и зарядов наблюдаемых частиц и правильно нормируя соответствующие волновые функции.

В случае стандартной модели, описывающей слабые, электромагнитные и сильные взаимодействия, подобная процедура позволяет однозначно вычислить все радиационные поправки, задавая перенормированные значения масс и зарядов, взятые из эксперимента (в этом случае требуется 18 независимых параметров).

С точки зрения физики необходимость перенормировки связана с невозможностью наивно расцепить области высоких и низких энергий. В самом деле, если бы в теории не было ультрафиолетовых расходимостей, влияние очень тяжелых состояний на низкоэнергетические процессы практически отсутствовало бы. Вклад таких состояний в произвольную фейнмановскую диаграмму пропорционален

$$\int f(k_1 \cdots k_n)(k_i^2 - \Lambda^2)^{-1} dk_1 \cdots dk_n. \qquad (2)$$

Если интеграл сходится, то для достаточно больших Λ этот вклад пренебрежимо мал. В данном случае не происходит наивного расцепления области высоких и низких энергий, поскольку физический вакуум представляет собой сложную суперпозицию виртуальных состояний, включающую высокоэнергетические возбуждения. Перенормировка позволяет расцепить области высоких и низких энергий за счет переопределения «голых» параметров и их замены физическими значениями зарядов и масс, взятыми из эксперимента.

Можно было бы думать, что перенормировка является специфической особенностью теории возмущений и ее можно избежать за счет выхода за рамки теории возмущений. Это не так. Рассмотрим в качестве примера теорию Янга–Миллса. В классической теории Янга–Миллса нет размерных параметров. Размерный параметр естественно возникает при введении регуляризации, например, при замене непрерывного пространства-времени дискретной решеткой. Параметр решетки играет роль ультрафиолетового обрезания $\Lambda = a^{-1}$. Любая величина размерности массы должна быть пропорциональна a^{-1}:

$$m = a^{-1} f(g).$$

Чтобы получить конечное значение m в непрерывном пределе, когда $a \to 0$, функция $f(g)$ должна в этом пределе обращаться в нуль. Очевидно, что при произвольном фиксированном значении g это невозможно. Константа связи сама должна зависеть от a, так что в пределе $a \to 0$, $g(a) \to g^*$, $f(g^*) = 0$. В случае теории Янга–Миллса это критическое значение равно нулю, что связано с явлением асимптотической свободы. Таким образом, непертурбативные вычисления в решеточных моделях теории поля также требуют перенормировки параметров исходного лагранжиана.

По существу, необходимость перенормировки связана с тем, что мы не умеем последовательно описывать область очень высоких энергий. Перенормированная локальная квантовая теория поля является эффективной теорией, позволяющей рассматривать физические явления вплоть до определенного ультрафиолетового масштаба Λ. Влияние области энергий, больших Λ, учитывается путем перенормировки «голых» параметров.

Надежда избежать ультрафиолетовых расходимостей и перенормировки может быть связана с построением теории, справедливой во всем интервале энергий. Такая теория должна включать размерный параметр и не может быть строго локальной. Многочисленные попытки построить непротиворечивую нелокальную теорию поля не увенчались успехом. Предлагавшиеся модели приводили к нарушению основных физических принципов, таких как причинность или унитарность. В настоящее время большие надежды связывают с моделями релятивистских струн и их обобщениями, в частности, с гипотетической M-теорией, претендующей на роль «теории всего». В моделях струн и бран нелокальность возникает естественным образом, и в то же время их низкоэнергетический предел правильно воспроизводит модели теории поля с разумным спектром частиц. Возможно, что если будет построена последовательная M-теория, то удастся избежать процедуры перенормировки и вычислить однозначно все наблюдаемые величины. Однако в настоящее время это лишь надежды, и в этом подходе существует гораздо больше вопросов, чем ответов. В частности, насколько мне известно, никто всерьез не исследовал вопрос о причинности в струнных моделях. По всей вероятности, локальная квантовая теория поля и ее необходимая составляющая — процедура перенормировки в обозримом будущем останутся основным орудием исследования в теоретической физике элементарных частиц.

1. СИММЕТРИИ В ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ ТЕОРИИ

Перенормировка должна быть совместима с симметрией данной теории. В настоящее время основным критерием выбора какой-либо модели взаимодействий является симметрия, в особенности калибровочная инвариантность.

Физический смысл калибровочной инвариантности достаточно прост: некоторые компоненты векторных полей, переносящих взаимодействие, являются нефизическими и в соответствии с калибровочной инвариантностью могут быть выбраны произвольно. В частности, пользуясь калибровочной инвариантностью, можно полностью устранить нефизические компоненты. Подобные «физические» калибровки имеют прозрачную физическую интерпретацию, однако обычно они неудобны для практических вычислений из-за отсутствия явной лоренц-инвариантности или явной перенормируемости. Так в квантовой электродинамике (КЭД) наблюдаемое электромагнитное поле описывается тензором напряженности $F_{\mu\nu}$:

$$F_{i0} = E_i; \quad \epsilon^{ijk} F^{jk} = H^i, \tag{3}$$

который зависит только от поперечных компонент вектор-потенциала. Продольные компоненты $\partial_i A_i$ являются нефизическими. В данном случае «физической» является кулоновская калибровка $\partial_i A_i = 0$, уничтожающая ненаблюдаемые продольные компоненты.

Калибровочная инвариантность гарантирует независимость наблюдаемых величин от выбора калибровки. Вместо кулоновской калибровки можно выбрать явно лоренц-инвариантное условие $\partial_\mu A_\mu = 0$ или модифицировать классическое действие следующим образом:

$$L_\alpha = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi. \tag{4}$$

В силу калибровочной инвариантности

$$S_C = S_\alpha. \tag{5}$$

Правая часть этого уравнения явно лоренц-инвариантна, в то время как левая часть зависит только от физических компонент и по построению унитарна. Отсюда можно сделать вывод о том, что наблюдаемые, например матричные элементы S-матрицы, обладают обоими этими свойствами. Калибровочная инвариантность является необходимым условием самосогласованности КЭД и неабелевых калибровочных теорий. Ее нарушение привело бы к потере унитарности, лоренц-инвариантности или других важных физических свойств.

Как следует из предыдущего раздела, перенормировка эквивалентна некоторой модификации классического лагранжиана. Поэтому симметрия перенормированной теории может отличаться от симметрии исходной модели. Оказалось, что некоторые симметрии неизбежно нарушаются квантовыми поправками. В этом случае невозможно провести процедуру перенормировки так, чтобы сохранить калибровочную инвариантность, и эти модели физически неприемлемы. Поэтому вопрос о калибровочно-инвариантной перенормировке является чрезвычайно важным.

Процедуру перенормировки нельзя сформулировать только в терминах наблюдаемых. Она с необходимостью включает корреляционные функции $\langle T\bar{\psi}(x)\psi(y)A_\mu(z)\ldots\rangle$. Эти функции зависят от выбора калибровки. Однако калибровочная инвариантность накладывает на них условия, которые являются необходимыми и достаточными для инвариантности наблюдаемых. Эти условия имеют прозрачный физический смысл: корреляторы типа $\partial_\mu A_\mu$, включающие нефизические степени свободы, выражаются через корреляторы, зависящие только от физических компонент. В КЭД такие соотношения были впервые получены Дж. Уордом [1] и в более общем виде Е. С. Фрадкиным [2] и И. Такахаши [3].

Простейшие соотношения имеют вид

$$
\begin{gathered}
\partial^x_\mu\langle TA_\mu(x)A_\nu(y)\rangle = 0,\\
\alpha^{-1}\partial^x_\mu\langle TA_\mu(x)\bar{\psi}(y)\psi(z)\rangle = e\langle T\bar{\psi}(x)\psi(z)\rangle\delta(x-y) - e\langle T\bar{\psi}(y)\psi(x)\rangle\delta(x-z).
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Как видно, корреляторы, включающие нефизические продольные фотоны, выражаются через корреляторы физических компонент полей.

В электродинамике тождества (1) являются прямым следствием классического закона сохранения электрического тока

$$
\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) = 0. \tag{7}
$$

В неабелевых калибровочных теориях столь простая интерпретация отсутствует. В отличие от электродинамики фиксация калибровки в теории Янга–Миллса нарушает сохранение классического тока. Кроме того, квантование поля Янга–Миллса приводит к дополнительной модификации классического действия: появляются новые нефизические поля — духи Фаддеева–Попова. Эффективное квантовое действие имеет вид

$$
L = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2 - i\partial_\mu\bar{c}D_\mu c. \tag{8}
$$

Здесь $\bar{c}, c$ — антикоммутирующие скалярные поля. Тем не менее соотношения, выражающие условие калибровочной инвариантности в терминах корреляционных функций, можно написать и в этом случае. Соответствующие тождества (ТСТ) были получены в работах А. А. Славнова и Дж. Тейлора [4,5]. Они имеют тот же физический смысл, что и тождества Уорда, связывая корреляторы, включающие нефизические поля, с корреляторами физических полей. В этом случае нефизические компоненты включают, помимо продольных поляризаций векторного поля, также духи Фаддеева–Попова. В частности, тождество, выражающее трехточечную функцию Грина с одной продольной поляризацией через остальные поля, имеет вид

$$
\begin{aligned}
& i\alpha^{-1}\langle TB^a_\mu(x)B^b_\nu(y)\partial_\rho B^c_\rho(z)\rangle = \\
& \quad = \langle T\partial^x_\mu \bar{c}^a(x)c^c(z)B^b_\nu(y)\rangle + gt^{ade}\langle TB^d_\mu(x)\bar{c}^e(x)c^c(z)B^b_\nu(y)\rangle + \ldots, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

где «...» обозначает аналогичные члены с заменой $x \to y, \mu \to \nu, a \to b$. Эти тождества можно связать с некоторой глобальной симметрией эффективного действия, включающего фиксирующий калибровку член и духовые поля. Для теории Янга–Миллса соответствующие преобразования имеют вид [6, 7]:

$$
\delta A^a_\mu = (D_\mu c)^a\epsilon, \quad \delta c^a = t^{abd}c^b c^d\epsilon, \quad \delta\bar{c}^a = (\partial_\mu A_\mu)^a\epsilon. \qquad (10)
$$

Здесь ϵ — это константа, являющаяся нечетным элементом алгебры Грассмана и антикоммутирующая с духовыми полями. Преобразования (10) представляют собой преобразования суперсимметрии.

Тождества (9) и соответствующие тождества для двух- и четырехточечных функций Грина являются необходимым и достаточным условием калибровочно-инвариантной перенормируемости. Важно подчеркнуть, что эти тождества должны выполняться для конечных перенормированных функций Грина. Неперенормированные функции Грина не обязательно удовлетворяют этим тождествам. Если в процессе перенормировки используется неинвариантная регуляризация, то для неперенормированных корреляторов тождества (9), как правило, нарушаются. Одновременно нарушается и BRST-симметрия перенормированного действия — в нем присутствуют неинвариантные контрчлены. Для самосогласованности теории эти контрчлены должны быть подобраны так, чтобы в точности скомпенсировать нарушение симметрии за счет неинвариантной регуляризации. Если при некотором выборе локальных контрчленов такая компенсация возможна, то перенормированные функции Грина удовлетворяют тождествам (9) и теория самосогласована. Однако в некоторых моделях тождества типа (9) не могут выполняться ни при каком выборе локальных контрчленов. Например, в «киральной электродинамике», описываемой лагранжианом

$$
L = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - ie\gamma_5 A_\mu)\psi, \qquad (11)
$$

трехточечная функция Грина должна удовлетворять соотношению

$$
\partial_\mu\langle TA_\mu(x)A_\nu(y)A_\rho(z)\rangle = 0. \qquad (12)
$$

Явное вычисление дает для фурье-образа этого коррелятора конечный ненулевой результат

$$
(p+k)^\mu\Gamma_{\mu\nu\rho}(p,k) = \frac{g^3}{8\pi}\epsilon^{\nu\rho\alpha\beta}p^\alpha k^\beta. \qquad (13)
$$

Это простейший пример квантовой аномалии. Классическая киральная симметрия нарушена квантовыми поправками. Подобные аномалии возникают также в конформно-инвариантных моделях и в некоторых других теориях, симметрия которых связана с отсутствием размерного параметра. Перенормировка приводит к появлению размерного параметра и, как следствие, к нарушению классической симметрии.

Нарушение калибровочной инвариантности ведет к противоречивости теории. Нефизические степени свободы не отщепляются, и в результате нарушается унитарность.

Существует мнение, что новые степени свободы, появляющиеся в аномальных моделях, могут иметь физический смысл, и квантовая теория, включающая большее число степеней свободы, чем классическая, может быть непротиворечива. Такой эффект действительно наблюдается в некоторых простых моделях. Однако нетривиальные четырехмерные модели такого типа неизвестны. В настоящее время физический смысл квантовых аномалий не до конца ясен, и их отсутствие рассматривается как критерий выбора самосогласованной модели.

2. МЕТОДЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ НЕАНОМАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Калибровочно-инвариантная перенормировка является нетривиальной проблемой даже для теорий, в которых квантовые аномалии отсутствуют. Эффективное решение этой проблемы весьма важно для практических вычислений в рамках стандартной модели и для полного анализа различных суперсимметричных моделей.

Существующие схемы перенормировки теорий с нетривиальной внутренней симметрией можно разделить на два класса.

В первом подходе используется калибровочно-инвариантная промежуточная регуляризация, так что корреляционные функции удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда даже в регуляризованной теории. В этом случае можно показать, что контрчлены, необходимые для устранения ультрафиолетовых расходимостей, сохраняют структуру эффективного действия, и на всех этапах теория остается явно симметричной.

Наиболее естественной и принципиально простой является регуляризация путем дискретизации пространства. К. Вильсон [8] показал, что решеточную регуляризацию можно ввести, сохранив калибровочную инвариантность теории. Этот подход успешно используется для непертурбативных вычислений в стандартной модели по методу Монте-Карло. Однако для вычислений в теории возмущений этот метод неудобен из-за сложной структуры регуляризованного действия и нарушения лоренц-инвариантности. Дополнительные сложности возникают в моделях с киральными фермионами, как, например, в модели Салама–Вайнберга.

Второй метод, обеспечивающий лагранжевскую регуляризацию калибровочных теорий, это метод высших ковариантных производных [9, 10]. В классическое действие добавляются члены со старшими ковариантными производными:

$$L_R = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu\psi - \\ - \frac{1}{4\Lambda^2}D_\alpha F_{\mu\nu}D_\alpha F_{\mu\nu} + \frac{i}{\Lambda^2}D_\alpha\bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu D_\alpha\psi. \quad (14)$$

Из-за присутствия старших производных в кинетическом члене меняется ультрафиолетовая асимптотика пропагаторов

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2 - \Lambda^{-2}k^4} \quad (15)$$

и улучшается сходимость фейнмановских интегралов. Однако требование калибровочной инвариантности заставляет вводить в действие старшие ковариантные производные и, следовательно, новые вершины. Анализ показывает, что эта регуляризация не является полной. Сходящимися становятся все диаграммы за исключением конечного числа однопетлевых диаграмм. Однопетлевые диаграммы требуют специального исследования [11, 12]. Хотя эта регуляризация не является полной, ее достоинством является универсальность. Ее можно применить к любой калибровочной теории. При этом проблема сведется к анализу небольшого числа сравнительно простых интегралов. Из существования такой регуляризации тривиально следует утверждение об отсутствии аномалий в многопетлевых диаграммах: все такие диаграммы допускают универсальную инвариантную регуляризацию и, следовательно, не могут приводить к аномалиям.

Метод высших ковариантных производных, дополненный модифицированной регуляризацией Паули–Вилларса, может быть применен для регуляризации свободных от аномалий моделей, включающих киральные фермионы, в частности, модели Салама–Вайнберга. Регуляризация Паули–Вилларса непосредственно неприменима к таким моделям, так как фермионный массовый член нарушает киральную инвариантность. Однако, как было показано в работе [13], компенсация аномалий в лептонном и кварковом секторах приводит к занулению вкладов, пропорциональных γ_5 во всех расходящихся однопетлевых диаграммах, совпадающих с точностью до фактора 1/2 с соответствующими диаграммами векторноподобной теории. Это позволяет использовать для их регуляризации процедуру Паули–Вилларса. Данная регуляризация допускает также лагранжевскую реализацию, если ввести бесконечный ряд вспомогательных полей Паули–Вилларса [13]. Возникающий при этом бесконечный ряд вспомогательных полей можно интерпретировать как дискретизованное пятое измерение. Таким образом, данный подход тесно связан с пятимерными моделями киральных фермионов [14]. Эти идеи получили важное развитие в решеточных калибровочных теориях и привели к созданию метода перекрывания [15], используемого в непертурбативных вычислениях на решетке.

Метод высших ковариантных производных весьма удобен для общего анализа перенормировки калибровочных теорий, однако с вычислительной точки зрения он является довольно громоздким из-за наличия дополнительных вершин взаимодействия.

Наиболее экономичным методом калибровочно-инвариантной регуляризации в рамках теории возмущений является размерная регуляризация [16]. Этот метод основан на том, что, меняя размерность пространства-времени, можно обеспечить сходимость всех интегралов, отвечающих диаграммам Фейнмана. При этом лоренц-инвариантные амплитуды рассматриваются как мероморфные функции размерности пространства d, имеющие полюса при $d = 4$. Для тех значений d, при которых все интегралы сходятся, обобщенные тождества Уорда справедливы, а полюса при $d = 4$ образуют калибровочно-инвариантную структуру. Отбрасывая полюсные члены и переходя к пределу при $d \to 4$, мы получаем калибровочно-инвариантную перенормированную теорию. Размерная регуляризация эквивалентна формальной замене $\int d^4k_1 \cdots d^4k_l f(k_1 \cdots k_l)$ на $\int d^nk_1 \cdots d^nk_l f(k_1 \cdots k_l)$. Она сохраняет структуру фейнмановских интегралов, что делает ее удобной для вычислений по теории возмущений. При этом, однако, необходимо определить в пространстве произвольной размерности тензорные объекты, в частности γ-матрицы Дирака. В пространстве произвольной размерности не существует непротиворечивого определения γ_5-матрицы, совместного с условием киральной инвариантности. Поэтому размерная регуляризация нарушает симметрию моделей с киральной калибровочной группой, к которым относятся такие важные теории, как модель Салама–Вайнберга и различные суперсимметричные модели.

Альтернативным подходом к перенормировке теорий с нетривиальной внутренней симметрией является алгебраическая перенормировка [6]. Этот метод представляет собой двухступенчатую процедуру. Вначале строятся конечные корреляционные функции с помощью произвольной, не обязательно сохраняющей симметрию вычитательной процедуры. При этом калибровочная инвариантность может быть нарушена. На втором этапе, пользуясь произволом в выборе конечных контрчленов, необходимо обеспечить выполнение обобщенных тождеств Уорда. В теории, свободной от аномалий, в принципе, это всегда возможно. Однако на практике анализ большого числа неинвариантных контрчленов связан с серьезными трудностями. Несомненным достоинством метода алгебраической перенормировки является его универсальность. Он может быть применен к произвольной модели и не требует использования инвариантной промежуточной регуляризации. В частности, с помощью этого метода была проанализирована перенормировка некоторых суперсимметричных моделей, для которых неизвестна инвариантная промежуточная регуляризация [17, 18, 27, 28]. Он применялся также для анализа стандартной модели [19, 20].

Как видно из предыдущего обсуждения, как метод инвариантной регуляризации, так и метод алгебраической перенормировки обладают определенными недостатками. Хотелось бы иметь процедуру перенормировки столь же универсальную, как алгебраическая перенормировка, и в то же время не требующую вычисления большого числа неинвариантных контрчленов. В следующих разделах будет описана процедура перенормировки, которая может использоваться с любой промежуточной регуляризацией и в то же время автоматически приводить к перенормированным корреляторам, удовлетворяющим обобщенным тождествам Уорда.

3. НЕ ЗАВИСЯЩАЯ ОТ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ИНВАРИАНТНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА

В этом разделе будет описана вычитательная процедура, которая автоматически учитывает ТСТ и обеспечивает симметрию перенормированной теории при любой промежуточной регуляризации [21, 22].

Основную идею метода можно объяснить следующим образом. В свободной от аномалий теории перенормированные функции Грина удовлетворяют ТСТ, которые удобно записать в дифференциальной форме:

$$\Gamma_n^r(0, p, q, \dots) = F_{n-1}^r(p, q, \dots). \tag{16}$$

Здесь Γ_n^r обозначает перенормированную функцию Грина с n внешними калибровочными линиями, а F_{n-1}^r — некоторый функционал от функций Грина, имеющих не более $n-1$ внешних калибровочных линий. Перенормировка вершинной функции осуществляется путем вычитания локального контрчлена

$$\Gamma^r = \lim_{\Lambda\to\infty}[\Gamma^\Lambda - P^\Lambda]. \tag{17}$$

Здесь Γ^Λ — это вершинная функция, вычисленная с помощью некоторой регуляризации, а P^Λ — зависящий от параметра обрезания полином.

Из уравнений (16), (17) следует, что в любой схеме регуляризации в пределе $\Lambda\to\infty$ разность

$$\Gamma^\Lambda(0, q, \dots) - F^r(q, \dots) \tag{18}$$

представляет собой локальный полином. Поэтому перенормированную вершинную функцию в случае логарифмической расходимости можно определить следующим образом:

$$\Gamma^r(p,q,\dots) = \lim_{\Lambda\to\infty} \Gamma^\Lambda(p,q,\dots) - \Gamma^\Lambda(0,q,\dots) + F^r(q,\dots). \tag{19}$$

В силу уравнения (18) такое вычитание локально. Если функции Грина с меньшим числом внешних линий калибровочного поля уже перенормированы, то правая часть уравнения (19) конечна. Перенормированная вершинная функция, определенная уравнением (19), очевидно, удовлетворяет обобщенным тождествам Уорда при любой промежуточной регуляризации. В случае линейной или квадратичной расходимости нужно аналогичным образом вычесть следующие члены разложения тождеств Уорда при одном из импульсов, равном нулю, или произвести симметризованное вычитание.

Таким образом, возникает рекуррентная вычитательная процедура, в которой обобщенные тождества Уорда выполнены точно на каждом этапе. Комбинаторика вычитаний полностью описывается стандартной R-операцией. Меняется лишь определение вычитающего оператора. Ниже проиллюстрируем эту схему на примере квантовой электродинамики.

Корреляционные функции в КЭД должны удовлетворять тождествам Уорда:

$$p_\mu \Pi^r_{\mu\nu}(p) = 0, \tag{20}$$

$$\Gamma^r_\mu(p,0) = e\frac{\partial \Sigma^r(p)}{\partial p_\mu}, \tag{21}$$

$$p_\mu \Pi^r_{\mu\nu\rho\sigma}(p,q,k) = 0. \tag{22}$$

Здесь Π обозначает чисто фотонные амплитуды, а Γ — электрон-фотонная вершина.

Тождества Уорда не накладывают ограничений на перенормировку собственной энергии электрона, поэтому ее можно перенормировать, делая вычитание в произвольной инфракрасно-конечной точке. Перенормировка электрон-фотонной вершины должна быть скоррелирована с перенормировкой собственной энергии электрона так, чтобы выполнялись тождества Уорда. Перенормированную вершинную функцию можно определить следующим образом:

$$\Gamma^r_\mu(p,q) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left[\Gamma^\Lambda_\mu(p,k) - \Gamma^\Lambda_\mu(p,0) + e\frac{\partial\Sigma^r(p)}{\partial p_\mu}\right]. \tag{23}$$

Здесь $\Sigma^r(p)$ — перенормированная собственная энергия электрона. Тождества Уорда удовлетворяются тривиально:

$$\Gamma^r_\mu(p,0) = e\frac{\partial\Sigma^r}{\partial p_\mu}. \tag{24}$$

Поскольку $\Gamma^{\Lambda}_{\mu}(p,k)$ в пределе $\Lambda \to \infty$ расходится логарифмически, разность $\Gamma^{\Lambda}_{\mu}(p,k) - \Gamma^{\Lambda}_{\mu}(p,0)$ конечна. Как было показано выше, несмотря на кажущуюся нелокальность вычитаемых членов, в действительности вычитаемая функция представляет собой полином:

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\left[\Gamma^{\Lambda}_{\mu}(p,0) - e\frac{\partial\Sigma^{r}(p)}{\partial p_{\mu}}\right] =$$
$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\left[\Gamma^{r}_{\mu}(p,0) + (Z_1(\Lambda)-1)\gamma_{\mu} - e\frac{\partial\Sigma^{r}}{\partial p_{\mu}}\right] = \lim_{\Lambda\to\infty}(Z_1(\Lambda)-1)\gamma_{\mu}, \quad (25)$$

где $Z_1(\Lambda)$ — константа, логарифмически расходящаяся в пределе $\Lambda \to \infty$.

Перенормированная четырехфотонная функция Грина определяется следующим образом:

$$\Pi^{r}_{\mu\nu\rho\sigma}(p,q,k) = \lim_{\Lambda\to\infty}[\Pi^{\Lambda}_{\mu\nu\rho\sigma}(p,q,k) - \Pi^{\Lambda}_{\mu\nu\rho\sigma}(0,q,k)]. \quad (26)$$

Очевидно, что эта функция конечна и удовлетворяет тождествам Уорда.

Тождества Уорда нечувствительны к вычитанию локальных калибровочно-инвариантных контрчленов. В электродинамике поперечная часть тензора поляризации вакуума калибровочно-инвариантна и может быть перенормирована произвольным образом:

$$(Z_3 - 1)(k^2 g_{\mu\nu} - k_{\mu}k_{\nu}). \quad (27)$$

Сделав вычитания в однопетлевых диаграммах, следует в соответствии с R-операцией провести аналогичные вычитания для двухпетлевых диаграмм и т. д.

Описанная выше процедура сводит перенормировку в произвольной схеме регуляризации к перенормировке в явно калибровочно-инвариантной схеме. Неинвариантные контрчлены вообще не появляются.

4. ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

В этом разделе мы применим изложенные выше идеи к перенормировке теории Янга–Миллса. Двухточечные функции Грина и вершинная функция, описывающая взаимодействие поля Янга–Миллса с духовыми полями, будут перенормированы с помощью локальных вычитаний, совместных с калибровочной инвариантностью. Перенормированные вершинные функции с тремя и четырьмя векторными внешними линиями будут определены путем нелокальных вычитаний, скорректированных добавлением явно известных конечных членов, восстанавливающих локальность и калибровочную инвариантность. Основная задача будет состоять в явном решении дифференциальных ТСТ для вершинных функций полей Янга–Миллса.

Эффективное действие Янга–Миллса в ковариантной α-калибровке имеет вид

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} + \bar{c}^a \partial_\mu (\delta^{ab}\partial_\mu - g t^{abc} B^c_\mu) c^b \right]. \qquad (28)$$

Мы собираемся определить перенормированные функции Грина так, чтобы они автоматически удовлетворяли ТСТ. Для собственной энергии поля Янга–Миллса эти тождества сводятся к условию поперечности

$$p_\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0. \qquad (29)$$

Поэтому перенормированную собственную энергию поля Янга–Миллса можно определить так же, как и в случае электромагнитного поля:

$$\Pi^r_{\mu\nu}(p) = P_{\mu\alpha}[\Pi_{\alpha\nu}(p) - \Pi_{\alpha\nu}(0)] - p^2 P_{\mu\nu} \Pi_1(b^2). \qquad (30)$$

Здесь b — произвольная инфракрасно-несингулярная точка, а $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu p^{-2}$ — поперечный проекционный оператор.

Условие лоренц-инвариантности и вид взаимодействия определяют структуру собственной энергии духовых полей:

$$\Pi^{ab}_G(p^2) = \delta^{ab} p^2 \Pi(p^2). \qquad (31)$$

Собственная энергия перенормируется вычитанием в произвольной инфракрасно-несингулярной точке:

$$\Pi^r(p^2) = \Pi(p^2) - \Pi(c^2). \qquad (32)$$

Вершину взаимодействия духовых полей с калибровочными тоже можно перенормировать произвольным образом. Она расходится логарифмически, и из структуры взаимодействия следует, что соответствующая локальная структура пропорциональна $t^{abc} k_\mu$, где k_μ обозначает импульс духового поля. Перенормированная вершинная функция определяется формулами

$$\Gamma^{abc,r}_\mu(k,p) = \Gamma^{abc}_\mu(k,p) - k_\mu \Gamma^{abc}(b^2), \qquad (33)$$

$$\Gamma^{abc}_\mu(k,p)_{p=0} = k_\mu \Gamma^{abc}(k^2). \qquad (34)$$

В этом уравнении p обозначает импульс калибровочного поля.

Вычитания (30), (32), (33) эквивалентны введению в лагранжиан следующих контрчленов:

$$- \frac{z_2 - 1}{4} (\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu) + \\ + (\tilde{z}_2 - 1)\bar{c}^a \Box c^a - (\tilde{z}_1 - 1) g t^{acb} \bar{c}^a \partial_\mu (B^c_\mu c^b). \qquad (35)$$

Теперь мы переходим к основной задаче — определению трехточечной функции Грина полей Янга–Миллса, которая автоматически удовлетворяла бы ТСТ. Предположим, что введена некоторая калибровочно-инвариантная регуляризация. Тогда обычным образом можно получить следующие тождества для перенормированных корреляторов:

$$\frac{i}{\alpha}\langle B_\mu^a(x)B_\nu^b(y)\partial_\rho B_\rho^c(z)\rangle^r = \tilde{z}_2\langle\partial_\mu c^a(x)\bar{c}^c(z)B_\nu^b(y)\rangle^r - \\ - \tilde{z}_2\tilde{g}t^{ade}\langle B_\mu^d(x)c^e(x)\bar{c}^c(z)B_\nu^b(y)\rangle^r + (x\to y, a\to b, \mu\to\nu). \quad (36)$$

Здесь параметр $\tilde{g}$ представляет собой эффективную константу связи, которая входит в калибровочное преобразование перенормированной теории

$$\delta B_\mu^a = \partial_\mu\alpha^a - \tilde{g}t^{abc}B_\mu^b\alpha^c. \quad (37)$$

Напомним, что при этом выводе мы предполагали, что введена некоторая калибровочно-инвариантная регуляризация, так что уравнение (36) и последующие уравнения имеют смысл. Это предположение не является необходимым. Можно было бы просто постулировать соответствующие тождества для перенормированных корреляторов. В любом случае окончательное выражение для перенормированной вершинной функции будет представлено в виде, не зависящем от промежуточной регуляризации.

Тождество (36) можно преобразовать к более удобному виду, пользуясь уравнениями для корреляторов духовых полей [22]:

$$q_\rho\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p,q) - q^2[(G_{tr}^{-1})_{\mu\alpha}^r(p)G^r(q)\Gamma_{\alpha\nu}^{abc,r}(p,q) + \\ + (\mu\to\nu, a\to b, p\to -p-q)] = 0. \quad (38)$$

В этом уравнении $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}$ — собственная трехточечная вершинная функция полей Янга–Миллса,

$$\delta^{ab}(G_{tr}^{-1})_{\mu\nu}^r = P_{\mu\alpha}(G^{-1})_{\alpha\nu}^{ab,r}, \quad \delta^{ab}G^r(p) = G^{ab,r}(p). \quad (39)$$

$G^{ab,r}(p)$ обозначает перенормированный пропагатор духового поля. Функция $\Gamma_{\mu\nu}^{abc,r}(p,q)$ представляет собой преобразование Фурье вакуумного ожидания составного оператора

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{abc,r} = (G^{-1})_{\nu\alpha}^r(y)(G^{-1})^r(z)\langle\tilde{z}_2\tilde{g}t^{aed}B_\mu^e(x)c^d(x)\bar{c}^c(z)B_\nu^b(y)\rangle^r. \quad (40)$$

Дифференцируя равенство (38) по q_ρ и полагая $q=0$, получаем дифференциальное тождество, которое будет использовано для определения перенормированной трехточечной вершинной функции полей Янга–Миллса:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p,0) - \frac{\partial}{\partial q_\rho}[q^2(G_{tr}^{-1})_{\mu\alpha}^r(p)G^r(q)\Gamma_{\alpha\nu}^{abc,r}(p,q) + \\ + (\mu\to\nu, a\to b, p\to -p-q)]_{q=0} = 0. \quad (41)$$

Равенство (41) представляет собой дифференциальное ТСТ, которое вместе с соответствующим тождеством для четырехточечной функции гарантирует калибровочную независимость перенормированной теории. Чтобы удовлетворить этим уравнениям в произвольной схеме регуляризации, мы определим перенормированную собственную вершинную функцию калибровочных полей уравнением

$$\Gamma^{abc,r}_{\mu\nu\rho}(p,q) = \Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,q) - \Big\{\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,0) + \Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(0,q) - \frac{\partial}{\partial q^\rho} \times$$
$$\times [q^2 (G^{-1}_{tr})^r_{\mu\alpha}(p) G^r(q) \Gamma^{abc,r}_{\alpha\nu}(p,q) + (\nu \to \mu, a \to b, p \to -p-q)]_{q=0} - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \times$$
$$\times [p^2 (G^{-1}_{tr})^r_{\rho\beta}(q) G^r(p) \Gamma^{cba,r}_{\beta\nu}(q,p) + (\nu \to \rho, c \to b, q \to -p-q)]_{p=0}\Big\}. \quad (42)$$

Расходящаяся часть $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,q)$ является полиномом первого порядка по переменным p, q. Поэтому сумма первых трех членов в правой части уравнения (42) конечна. Правая часть уравнения (42) включает вакуумное ожидание составного оператора $\Gamma^{abc}_{\mu\nu}$. Эта функция связана с дух-глюонной вершинной функцией уравнениями движения для духовых полей, и введение в эффективное действие контрчленов (35) обеспечивает конечность этого коррелятора [4, 22]. Это доказывает конечность правой части уравнения (42) и, следовательно, конечность перенормированной трехточечной вершинной функции.

Покажем теперь, что определение (42) в пределе $\Lambda \to \infty$ соответствует вычитанию из $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,q)$ полинома по p, q и что $\Gamma^{abc,r}_{\mu\nu\rho}(p,q)$ удовлетворяет ТСТ.

В произвольной регуляризации, сохраняющей глобальную симметрию модели, расходящаяся часть трехточечной вершинной функции имеет следующую структуру:

$$i(z_1-1)t^{abc}[(p-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-q)_\mu g_{\nu\rho} + (q-p)_\nu g_{\mu\rho}]. \quad (43)$$

Имея это в виду, перепишем сумму первых трех членов в правой части уравнения (42) в виде

$$(\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,q) + i(z_1-1)t^{abc}[(p-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-q)_\mu g_{\nu\rho} + (q-p)_\nu g_{\mu\rho}]) -$$
$$- (\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,0) + i(z_1-1)t^{abc}[2p_\rho g_{\mu\nu} - p_\mu g_{\nu\rho} - p_\nu g_{\mu\rho}]) -$$
$$- (\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(0,q) + i(z_1-1)t^{abc}[q_\rho g_{\mu\nu} - 2q_\mu g_{\nu\rho} + q_\nu g_{\mu\rho}]). \quad (44)$$

Постоянную z_1 определим из условия

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\Big[\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,0)+i(z_1^\Lambda-1)t^{abc}(2p_\rho g_{\mu\nu}-p_\mu g_{\nu\rho}-p_\nu g_{\mu\rho})-\frac{\partial}{\partial q_\rho}\times$$
$$\times\{q^2(G^{-1}_{tr})^r_{\mu\alpha}(p)G^r(q)\Gamma^{abc,r}_{\alpha\nu}+(\mu\to\nu,a\to b,p\to -p-q)\}_{q=0}\Big]=0. \quad (45)$$

Как отмечалось выше, уравнение (45) есть не что иное, как дифференциальное ТСТ, поэтому в любой свободной от аномалий модели оно может быть удовлетворено подходящим выбором z_1. В результате такого преобразования в пределе $\Lambda\to\infty$ выражение в фигурных скобках в правой части уравнения (42) обращается в нуль, и мы получаем

$$\Gamma^{abc,r}_{\mu\nu\rho}(p,q)=\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,q)+$$
$$+i(z_1-1)t^{abc}[(p-k)_\rho g_{\mu\nu}+(k-q)_\mu g_{\nu\rho}+(q-p)_\nu g_{\mu\rho}]. \quad (46)$$

Тем самым явно доказано, что в пределе $\Lambda\to\infty$ наша перенормировочная процедура совпадает с обычным локальным вычитанием. Справедливость ТСТ очевидна.

Последняя диаграмма, которую необходимо рассмотреть, это собственная четырехточечная вершинная функция полей Янга–Миллса. Ее можно проанализировать аналогично тому, как это было сделано с трехточечной функцией.

Обобщение на многопетлевые диаграммы производится в соответствии со стандартной R-операцией. Поскольку, как было показано выше, наша вычитательная процедура в пределе снятой регуляризации эквивалентна локальным вычитаниям, можно воспользоваться обычной комбинаторикой R-операции.

5. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

В качестве последнего примера мы рассмотрим применение описанной выше схемы перенормировки к суперсимметричной электродинамике. Перенормировка суперсимметричных теорий представляет особый интерес, поскольку для суперсимметричных калибровочных теорий неизвестна эффективная процедура инвариантной регуляризации, а применение алгебраической перенормировки хотя и возможно, но сталкивается с серьезными трудностями [17, 18].

В данной работе продемонстрировано, как работает универсальная инвариантная перенормировка для суперсимметричных теорий на примере суперсимметричной квантовой электродинамики [30]. Действие суперсимметричной электродинамики имеет вид

$$S_0 = \frac{1}{4e^2}\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \left(\phi^* e^{2V}\phi + \tilde{\phi}^* e^{-2V}\tilde{\phi}\right) + \\ + \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, m\,\tilde{\phi}\,\phi + \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\bar{\theta}\, m\,\tilde{\phi}^*\phi^*, \quad (47)$$

где ϕ и $\tilde{\phi}$ — киральные суперполя; V — вещественное суперполе. Тензор напряженности W_a в абелевом случае имеет вид

$$W_a = \frac{1}{16}\bar{D}(1-\gamma_5)D\left[(1+\gamma_5)D_a V\right]. \quad (48)$$

Здесь D — суперсимметричная ковариантная производная:

$$D = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\gamma^\mu\theta\,\partial_\mu. \quad (49)$$

Интегрирование по суперпространству определяется формулами

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}},$$
$$\int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \quad (50)$$
$$\int d^4\theta = \int d^2\theta\, d^2\bar{\theta} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\right)^2.$$

Эти выражения можно переписать в явно суперсимметричном виде с помощью формул

$$\int d^4x\, d^2\theta = -\frac{1}{4}\int d^4x\, \bar{D}(1+\gamma_5)D = -\frac{1}{2}\int d^4x\, D^2,$$
$$\int d^4x\, d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, \bar{D}(1-\gamma_5)D = -\frac{1}{2}\int d^4x\, \bar{D}^2, \quad (51)$$
$$\int d^4x\, d^4\theta = \frac{1}{4}\int d^4x\, \bar{D}^2 D^2 = \frac{1}{4}\int d^4x\, D^2\bar{D}^2.$$

Здесь использованы обозначения

$$D^2 \equiv \frac{1}{2}\bar{D}(1+\gamma_5)D, \quad \bar{D}^2 \equiv \frac{1}{2}\bar{D}(1-\gamma_5)D. \quad (52)$$

Действие (47) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} &V \to V - \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*), \\ &\phi \to e^{\Lambda}\phi, \quad \phi^* \to \phi^* e^{\Lambda^*}, \\ &\tilde{\phi} \to e^{-\Lambda}\tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi}^* \to \tilde{\phi}^* e^{-\Lambda^*}, \end{aligned} \tag{53}$$

где Λ — произвольное киральное суперполе. Эта инвариантность позволяет занулить часть компонент поля $V(x, \theta)$, которое принимает вид

$$V(x,\theta) = \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\, A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_5\chi(x)) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x), \tag{54}$$

где A_μ — калибровочное поле; χ — майорановский спинор; D — вспомогательное скалярное поле.

В этой калибровке, которая называется калибровкой Весса–Зумино, остающиеся калибровочные преобразования зависят только от одного параметра, а действие становится полиномиальным. Однако калибровка Весса–Зумино нарушает явную суперсимметрию модели.

Явную суперсимметрию можно сохранить, если фиксировать калибровку путем добавления к действию суперсимметричного члена

$$S_{gf} = \frac{1}{32e^2\xi}\int d^4x\, d^4\theta\, D^2V\, \bar{D}^2V, \tag{55}$$

где ξ — произвольная константа. Калибровка (55) сохраняет явную суперсимметрию, однако действие становится неполиномиальным и существует бесконечное число типов расходящихся диаграмм. Тем не менее можно показать, что суперсимметрия и калибровочная инвариантность накладывают столь жесткие ограничения на возможные контрчлены, что для устранения расходимостей достаточно перенормировать заряд и волновую функцию. Соответствующая процедура была впервые построена для суперсимметричной электродинамики в работе [23] и распространена на неабелевы теории в работах [24–26]. Однако доказательство, данное в этих работах, основывалось на предположении о существовании регуляризации, сохраняющей суперсимметрию и калибровочную инвариантность. Ниже будет построена процедура перенормировки, не требующая калибровочно-инвариантной регуляризации и обеспечивающая симметрию перенормированной теории. Мы, однако, будем предполагать, что промежуточная регуляризация сохраняет суперсимметрию и позволяет пользоваться супердиаграммной техникой.

Чтобы избежать появления инфракрасных сингулярностей, мы будем работать в «диагональной» калибровке, отвечающей $\xi = -1$ в уравнении (55). Рассмотрение калибровки общего вида требует введения дополнительной инфракрасной регуляризации, которую в абелевом случае можно осуществить, вводя массовый член для калибровочного суперполя и полагая $m_A = 0$ после вычисления интегралов [29]).

Ультрафиолетовые расходимости присутствуют в следующих корреляционных функциях:

$$(2\pi)^4\delta^4\left(k_\mu + q_\mu + (p_1)_\mu + \ldots + (p_n)_\mu\right) \times \\ \times \Gamma\left[(\theta_{x_1}, p_1), \ldots, (\theta_{x_n}, p_n); (\theta_y, q), (\theta_z, -q - p_1 - \ldots - p_n)\right] = \\ = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n\, d^4y\, d^4z \left.\frac{\delta^{n+2}\Gamma}{\delta V_{x_1}\cdots\delta V_{x_n}\,\delta\phi_y\,\delta\phi_z^+}\right|_{V,\phi,\tilde\phi=0} \times \\ \times \exp\left(i(p_1)_\mu x_1^\mu + \ldots + i(p_n)_\mu x_n^\mu + iq_\mu y^\mu + ik_\mu z^\mu\right), \quad (56)$$

$$(2\pi)^4\delta^4\left((p_1)_\mu + \ldots + (p_n)_\mu\right)\, \Pi\left[(\theta_{x_1}, p_1), \ldots, (\theta_{x_n}, -p_1 - \ldots - p_{n-1})\right] = \\ = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \left.\frac{\delta^n\Gamma}{\delta V_{x_1}\cdots\delta V_{x_n}}\right|_{\phi,\tilde\phi,V=0} \times \\ \times \exp\left(i(p_1)_\mu x_1^\mu + \ldots + i(p_n)_\mu x_n^\mu\right), \quad (57)$$

а также в функциях $\tilde\Gamma$, которые отличаются от Γ тем, что варьирование производится по полям $\tilde\phi$. Функции Γ, $\tilde\Gamma$ и Π удовлетворяют тождествам Уорда [26], которые в наших обозначениях можно записать в виде

$$\left(D^2_{x_1} + \bar D^2_{x_1}\right) \times \\ \times \Gamma[(\theta_{x_1}, p_1), (\theta_{x_2}, p_2), \ldots, (\theta_{x_n}, p_n); (\theta_y, q), (\theta_z, -q - p_1 - \ldots - p_n)] = \\ = 2\bar D^2_{x_1}\delta^4(\theta_y - \theta_{x_1}) \times \\ \times \Gamma[(\theta_{x_2}, p_2), \ldots, (\theta_{x_n}, p_n); (\theta_{x_1}, q + p_1), (\theta_z, -q - p_1 - \ldots - p_n)] + \\ + 2D^2_{x_1}\delta^4(\theta_{x_1} - \theta_z) \times \\ \times \Gamma[(\theta_{x_2}, p_2), \ldots, (\theta_{x_n}, p_n); (\theta_y, q), (\theta_{x_1}, -q - p_2 - \ldots - p_n)], \quad (58)$$

$$\left(D^2_x + \bar D^2_x\right)\left(\Pi\left[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)\right] - \frac{1}{2e^2\xi}\, p^2\delta^4(\theta_x - \theta_y)\right) = 0; \quad (59)$$

$$\left(D^2_{x_1} + \bar D^2_{x_1}\right) \times \\ \times \Pi[(\theta_{x_1}, p_1), \ldots, (\theta_{x_{n-1}}, p_{n-1}), (\theta_{x_n}, -p_1 - \ldots - p_{n-1})] = 0, \quad n > 2. \quad (60)$$

Здесь использовано следующее обозначение для фурье-образа суперсимметричной ковариантной производной:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - \gamma^\mu p_\mu, \tag{61}$$

где p — импульс, сопряженный координате x. Тождества Уорда для функций $\tilde{\Gamma}$ имеют аналогичную структуру.

Поскольку киральный проектор E_c можно представить в виде

$$E_c \equiv \frac{1}{16\partial^2}\left(\bar{D}^2 D^2 + D^2 \bar{D}^2\right) = \frac{1}{16\partial^2}\left(\bar{D}^2 + D^2\right)^2, \tag{62}$$

эти тождества выражают функции Грина с одной внешней линией, соответствующей киральному калибровочному полю через корреляторы с меньшим числом внешних калибровочных линий.

Тождества (9)–(11) написаны для случая суперсимметричной электродинамики. Однако они имеют аналогичную структуру и для неабелевых суперсимметричных моделей, отличаясь лишь присутствием в правой части корреляторов, включающих духовые поля. Поэтому описанная ниже процедура с небольшими модификациями может быть применена и к неабелевым моделям.

Мы будем придерживаться той же стратегии, что и в случае несуперсимметричных теорий. Вначале рассмотрим однопетлевые диаграммы и перенормируем произвольным образом диаграммы, входящие в правые части уравнений (58)–(60). Затем, имея в виду, что в свободной от аномалий теории тождества Уорда для корреляторов, вычисленных с помощью произвольной регуляризации, могут быть нарушены лишь локальными членами, мы определим перенормированные функции Грина, входящие в левые части соотношений (58)–(60), так, что эти тождества будут выполнены автоматически. При этом, разумеется, остается произвол, связанный с возможностью включения калибровочно-инвариантных контрчленов, которые не нарушают тождеств Уорда. Эти контрчлены, как обычно, являются свободными параметрами и могут быть фиксированы условиями нормировки. В случае суперсимметричной электродинамики предлагаемая процедура выглядит следующим образом.

Вначале рассмотрим однопетлевую двухточечную функцию Грина полей материи. Члены, пропорциональные $\phi^*\phi$ и не содержащие V, имеют следующую структуру:

$$4\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^*(x)\Sigma\left(\sqrt{-\partial^2}\right)\phi(x). \tag{63}$$

Следовательно, двухточечную функцию Грина полей материи можно записать в виде

$$\Gamma\left[(x,q),(y,-q)\right] = \bar{D}_x^2\, D_x^2 \delta^4(\theta_x - \theta_y)\, \Sigma(q). \tag{64}$$

Перенормировка осуществляется вычитанием

$$\Sigma^r(q) = \Sigma(q) - \Sigma(\mu_\sigma), \tag{65}$$

где μ_σ — точка нормировки.

Теперь необходимо построить перенормированные функции Γ и $\tilde{\Gamma}$. В силу суперсимметрии функции Γ можно представить в виде

$$\Gamma[\theta, p] = \sum_i B_i(\theta, p) F_i(p), \tag{66}$$

где p и θ обозначают всю совокупность аргументов, а $B_i(\theta, p)$ — полиномы по p и θ, которые представляют собой линейно независимые комбинации ковариантных производных, действующие на произведения $\delta^4(\theta_k - \theta_l)$; $F_i(p)$ — скалярные функции внешних импульсов. Перенормировка осуществляется вычитанием из функций $F_i(p)$ полиномов $P_i(p)$. Мы выберем эти полиномы так, что тождества (58)–(60) будут выполняться автоматически. Определим перенормированные вершинные функции

$$\gamma^r[\theta, p] = \sum_i B_i(\theta, p) \left(F_i(p) - P_i(p)\right), \tag{67}$$

где $P_i(p)$ — некоторые полиномы. Тогда левую часть уравнения (58) можно записать в виде

$$(D^2_{x_1} + \bar{D}^2_{x_1})\gamma^r[\theta, p] = \sum_i (D^2_{x_1} + \bar{D}^2_{x_1}) B_i(\theta, p) \left(F_i(p) - P_i(p)\right). \tag{68}$$

Комбинации $(D^2_{x_1} + \bar{D}^2_{x_1}) B_i(\theta, p)$ в общем случае не являются независимыми. Поэтому удобно ввести линейно независимые полиномы Q_j, пропорциональные киральным компонентам B_i:

$$\left(D^2_{x_1} + \bar{D}^2_{x_1}\right) B_i(\theta, p) = \sum_j c_{ij} Q_j(\theta, p). \tag{69}$$

Раскладывая правые части уравнений (58) в ряд по Q_j, можно представить тождества Уорда в виде

$$\sum_{ij} c_{ij} Q_j(\theta, p) \left(F_i(p) - P_i(p)\right) = \sum_j Q_j(\theta, p) R_j(p). \tag{70}$$

Из линейной независимости Q_j следует система линейных уравнений для полиномов $P_i(p)$:

$$\sum_i c_{ij} \left(F_i(p) - P_i(p)\right) = R_j(p). \tag{71}$$

Если полиномы $P_i(p)$ удовлетворяют системе (71), функции γ^r, определенные уравнением (67), удовлетворяют тождествам Уорда (58). В самом деле,

$$\left(D^2_{x_1} + \bar{D}^2_{x_1}\right) \gamma^r[\theta, p] = \\ = \sum_i c_{ij} Q_j(\theta, p) \left(F_i(p) - P_i(p)\right) = \sum_j Q_j(\theta, p) R_j(p). \quad (72)$$

Отметим, что выбор полиномов P_i неоднозначен, поскольку любые функции, удовлетворяющие тождествам Уорда, определены с точностью до чисто «поперечных» членов, обращающихся в нуль под действием кирального проектора. Поэтому для полного устранения ультрафиолетовых расходимостей может понадобиться еще вычитание из γ^r локальных калибровочно-инвариантных контрчленов P_{gi}:

$$\Gamma^r[p, \theta] = \gamma^r[p, \theta] - P_{gi}. \quad (73)$$

Подобные контрчлены, очевидно, не могут быть фиксированы тождествами Уорда.

Определив перенормированную функцию Γ^r_3, нужно подставить ее в левую часть тождества Уорда (58) для функции Γ^r_4. Повторяя этот процесс для следующих функций Грина, мы получаем рекуррентную процедуру построения всех функций Γ^r_n.

Аналогично строятся функции $\tilde{\Gamma}^r$.

Следующий шаг — перенормировка функций Π, отвечающих диаграммам без внешних линий полей материи. Так же, как и ранее, пользуясь суперсимметрией, эти функции можно представить в виде

$$\Pi[\theta, p] = \sum_i B_i(\theta, p) F_i(p). \quad (74)$$

Например, функция Π при $n = 2$ имеет вид

$$\Pi\left[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)\right] = F_1(p)\, p^2\, \Pi_{1/2}\, \delta^4(\theta_x - \theta_y) + F_2(p)\, \delta^4(\theta_x - \theta_y), \quad (75)$$

где

$$\Pi_{1/2} = -\frac{1}{16\partial^2} D^a \bar{D}^2 C_{ab} D^b. \quad (76)$$

В этом случае

$$B_1(\theta, p) = p^2 \Pi_{1/2}\, \delta^4(\theta_x - \theta_y); \qquad B_2(\theta, p) = \delta^4(\theta_x - \theta_y). \quad (77)$$

Как и раньше, перенормировка функций Грина осуществляется путем вычитания из функций $F_i(p)$ полиномов, выбранных так, чтобы обеспечить выполнение тождеств Уорда для функций Π^r:

$$\Pi^r[\theta, p] = \sum_i B_i(\theta, p)(F_i(p) - P_i(p)). \tag{78}$$

Для двухточечной функции Грина подстановка (75) в (59) приводит к уравнению

$$\left(F_2(p) - P_2(p) - \frac{1}{2e^2\xi}\, p^2\right)\left(D_x^2 + \bar{D}_x^2\right)\delta^4(\theta_x - \theta_y) = 0. \tag{79}$$

Следовательно,

$$P_2(p) = F_2(p) - \frac{1}{2e^2\xi}\, p^2. \tag{80}$$

Функция P_1 не фиксируется тождествами Уорда. Она представляет собой калибровочно-инвариантный контрчлен. Удобно выбрать

$$P_1(p) = F_1(\mu_\pi) - \frac{1}{2e^2\xi}\, p^2, \tag{81}$$

где μ_π — точка нормировки. Таким образом, перенормированную двухточечную функцию Грина можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Pi^r\left[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)\right] = \frac{1}{32e^2\xi}\left(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2\right)\delta^4(\theta_x - \theta_y) +\\ + \left(F_1(p) - F_1(\mu_\pi)\right)\, p^2\, \Pi_{1/2}\, \delta^4(\theta_x - \theta_y).\end{aligned} \tag{82}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\left(D_x^2 + \bar{D}_x^2\right)\left(\Pi^r\left[(\theta_x, p), (\theta_y, -p)\right] - \frac{1}{2e^2\xi}\, p^2\delta^4(\theta_x - \theta_y)\right) = 0, \tag{83}$$

которое является суперсимметричным аналогом условия поперечности.

Старшие функции Грина, содержащие только внешние линии калибровочного поля, могут быть перенормированы аналогичным образом. Для этого можно воспользоваться уравнениями (67), (70) и (71), положив $R_j = 0$.

Выполнив перенормировку однопетлевых диаграмм, можно повторить эту процедуру для двухпетлевых диаграмм. Вся комбинаторика задается обычной R-операцией. При любом числе петель вычисленные таким образом перенормированные функции Грина автоматически удовлетворяют тождествам Уорда.

Явные вычисления перенормированных однопетлевых диаграмм с помощью описанного выше метода были проведены в работе [30]. Аналогичная процедура может быть применена к неабелевым суперсимметричным моделям при условии, что они сформулированы в терминах суперполей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы рассматривали вопрос о том, как обеспечить симметрию перенормированной квантовой теории. Наше обсуждение в основном касалось калибровочно-инвариантных теорий, однако аналогичные проблемы возникают и в других моделях с локальными симметриями, например, в нелинейных киральных моделях.

Эта проблема имеет два аспекта. С принципиальной точки зрения важно исследовать вопрос о наличиии в данной модели аномалий и ее самосогласованности. На сегодня до конца не ясно, является ли появление аномалий следствием противоречивости теории или указывает на появление в квантовой теории новых степеней свободы, не допускающих последовательного описания в рамках теории возмущений. Для ряда аномальных моделей удается построить последовательную процедуру квантования [31,32], однако реальные методы анализа подобных моделей в четырехмерном пространстве в настояшее время отсутствуют.

С более прагматической точки зрения очень важным является вопрос о построении достаточно простой процедуры перенормировки в свободных от аномалий калибровочно-инвариантных моделях. До сих пор в практических вычислениях, главным образом, используется размерная регуляризация. Однако эта регуляризация не обеспечивает сохранение симметрии в теориях с киральными фермионами, и поэтому напрямую неприменима к стандартной модели и суперсимметричным моделям, представляющим наибольший интерес с точки зрения эксперимента. До недавнего времени вычисления в этих моделях ограничивались, главным образом, однопетлевыми диаграммами, для которых проблема восстановления симметрии решается достаточно просто. Однако сегодняшние экспериментальные данные требуют реального учета двухпетлевых диаграмм, а иногда и диаграмм более высокого порядка, для которых проблема становится действительно актуальной. Возможным решением является использование алгебраической перенормировки, однако с вычислительной точки зрения соответствующая процедура весьма сложна. В данной работе была описана новая процедура калибровочно-инвариантной перенормировки, которая, по моему мнению, может упростить вычисления в стандартной модели и в суперсимметричных теориях.

Благодарности. Эта работа была частично поддержана РФФИ (грант 02-01-00126) и президентским грантом поддержки ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ward J. C.* // Phys. Rev. 1950. V. 77. P. 288.
2. *Фрадкин Е. С.* // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 288.

3. *Takahashi Y.* // Nuovo Cim. 1957. V. 6. P. 371.
4. *Славнов А. А.* // ТМФ. 1972. Т. 10. С. 99.
5. *Taylor J. C.* // Nucl. Phys. B. 1971. V. 33. P. 436.
6. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* // Comm. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127; Ann. Phys. 1976. V. 98. P. 287.
7. *Tiutin I. V.* Preprint 39, Lebedev Physical Institute. M., 1975.
8. *Wilson K. G.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2445.
9. *Славнов А. А.* // ТМФ. 1972. Т. 10. С. 99.
10. *Lee B. W., Zinn-Justin J.* // Phys. Rev. D. 1972. V. 5. P. 3137.
11. *Славнов А. А.* // ТМФ. 1977. Т. 33. С. 977.
12. *Bakeyev T. D., Slavnov A. A.* // Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1539.
13. *Frolov S. A., Slavnov A. A.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 309. P. 344.
14. *Kaplan D. B.* // Phys. Lett. B. 1992. V. 288. P. 342.
15. *Narayanan R., Neuberger H.* // Nucl. Phys. B. 1994. V. 412. P. 574.
16. *'t Hooft G., Veltman M.* // Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189; V. 50. P. 318.
17. *Piguet O., Sibold K.* Renormalized Supersymmetry. Boston: Birkhauser, 1986.
18. *Maggiore N.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 3781.
19. *Kraus E.* // Ann. Phys. 1998. V. 262. P. 155.
20. *Grassi P. A., Hurth T., Steinhauser M.* // Ann. Phys. 2001. V. 288. P. 197.
21. *Slavnov A. A.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 518. P. 195.
22. *Славнов А. А.* // ТМФ. 2002. Т. 130. С. 3.
23. *Славнов А. А.* // ТМФ. 1975. Т. 23. С. 3.
24. *Slavnov A. A.* // Nucl. Phys. B. 1975. V. 97. P. 155.
25. *Ferrara S., Piguet O.* // Ibid. V. 93. P. 261.
26. *Кривощеков В. К., Славнов А. А., Файзуллаев Б.* // ТМФ. 1976. Т. 26. С. 147.
27. *Piguet O., Sibold K.* // Nucl. Phys. B. 1985. V. 253. P. 517.
28. *Piguet O., Sibold K.* // Nucl. Phys. B. 1984. V. 248. P. 301.
29. *Clark T. E., Piquet O., Sibold K.* // Nucl. Phys. B. 1980. V. 169. P. 77; V. 174. P. 491.
30. *Slavnov A. A., Stepanyantz K. V.* hep-th/0208006.
31. *Славнов А. А., Фролов С. А.* // ТМФ. 1992. Т. 92. С. 473.
32. *Frolov S. A., Slavnov A. A., Sochichiu K. V.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 747.