

УДК 539.1.01

**СТРУКТУРА ОСОБЕННОСТЕЙ НА МИРОВЫХ  
ЛИСТАХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СТРУН**

*И. Н. Никитин*

Фраунгоферовское общество, Санкт-Августин, Германия

ВВЕДЕНИЕ	112
СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ: ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ СТРУНЫ	116
ЭКЗОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ	128
РАЗРЫВ СТРУНЫ	130
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	132
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	136

УДК 539.1.01

## СТРУКТУРА ОСОБЕННОСТЕЙ НА МИРОВЫХ ЛИСТАХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СТРУН

*И. Н. Никитин*

Фраунгоферовское общество, Санкт-Августин, Германия

Показано, что релятивистские струны открытого и замкнутого типов в пространстве-времени Минковского размерностей 3 и 4 имеют топологически устойчивые особые точки. В данной работе описывается структура особенностей, выводятся их нормальные формы и вводится локальная характеристика особенности (топологический заряд), обладающая глобальным законом сохранения. Кроме открытых и замкнутых струн также рассматриваются два других топологических типа решений, которые соответствуют разрывам струн и обладают особенностями при любом значении размерности.

We show that relativistic strings of open and closed types in Minkowski space-time of dimension 3 and 4 have topologically stable singular points. This paper describes the structure of singularities, derives their normal forms, and introduces a local characteristic of singularity (topological charge), possessing a global law of conservation. Two other types of solutions (breaking and exotic strings) are also considered, which have singularities at arbitrary value of dimension.

### ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория струн рассматривает времениподобные поверхности экстремальной площади в  $d$ -мерном пространстве-времени Минковского, называемые *мировыми листами струн*. Эти поверхности замечаются при движении в пространстве-времени одномерного объекта, называемого релятивистской струной. Теория струн используется в физике высоких энергий для моделирования внутренней структуры элементарных частиц. Для этой цели мировые листы, имеющие микроскопические пространственные размеры и бесконечно протяженные во временном направлении, рассматриваются как структурированные мировые линии элементарных частиц. В результате этого внутренние характеристики частиц, такие как масса и спин, выражаются в терминах струнной динамики и могут быть выведены из малого набора фундаментальных постоянных. Основы теории струн были сформулированы в работах [1–3]. Аналогичные релятивистские системы также рассматривались в более ранних работах [4–6] в контексте нелинейных полевых моделей типа Борна–Инфельда. При построении теории струн возник ряд серьезных проблем, связанных с квантово-механическим представлением бесконечномерных групп симметрий, которые до сегодняшнего дня разрешены только

в пространстве-времени высокой размерности ( $d = 26$ ) и в некоторых топологически нетривиальных пространственно-временных многообразиях [7, 8]. Возможные подходы для построения квантовой теории струн в пространстве-времени размерности  $d = 4$  и ее оснащения такими необходимыми в физических приложениях элементами, как массивные заряженные кварки на концах струны, обсуждались в [9]. В работах [10–12] были найдены подмножества фазового пространства теории струн, допускающие свободное от аномалий квантование при произвольном значении размерности пространства-времени. С другой стороны, в нескольких работах [13–19] авторы отмечали сингулярные свойства классической теории струн в пространстве-времени Минковского малой размерности ( $d = 3, 4$ ). В данной работе мы рассмотрим эту тему более детально.

Пусть мировой лист представлен параметрически как  $x_\mu(\sigma_1, \sigma_2)$ . Свойство времениподобности означает, что мировой лист допускает параметризацию с  $(\partial_1 x)^2 > 0$ ,  $(\partial_2 x)^2 < 0$ , т.е. один касательный вектор к этой поверхности должен быть времениподобным, другой — пространственноподобным. В этом случае касательные векторы линейно независимы, и данная точка поверхности является регулярной. При этом натянутая на эти два вектора касательная плоскость пересекает световой конус с вершиной в данной точке поверхности по двум светоподобным направлениям, и компонента скорости струны, ортогональная касательному вектору к струне в данной точке, строго меньше скорости света [7–9]. В то же время, как станет ясно из дальнейшего, на струнах также имеются особые точки, скорость которых *в точности равна* скорости света. В частности, концы открытой струны всегда двигаются со скоростью света. Поэтому в действительности рассматривается замыкание класса времениподобных решений:  $(\partial_1 x)^2 \geq 0$ ,  $(\partial_2 x)^2 \leq 0$ . Площадь мирового листа в этом случае может быть записана как

$$A = \iint d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{(\partial_1 x \partial_2 x)^2 - (\partial_1 x)^2 (\partial_2 x)^2} = \text{экстремум.}$$

**Теорема 1** (тип экстремума). Регулярная точка мирового листа является седловой точкой функционала действия. (Доказательство теоремы приводится в приложении.) Площадь мирового листа минимальна по отношению к локальным вариациям, протяженным во временном направлении, изменяющим в основном длину струн, находящихся в срезах мирового листа, плоскостями постоянного времени (см. рис. 1), и максимальна для вариаций, протяженных в пространственном направлении, которые изменяют в основном интервал мировых линий точек на струне.

Теория струн рассматривает мировые листы различных топологических типов (см. рис. 2): открытые струны — поверхности, гомеоморфные лентам  $I \times \mathbb{R}^1$ , замкнутые струны — цилиндры  $S^1 \times \mathbb{R}^1$ , 3-струны — три ленты,

склеенные вдоль одного края, а также поверхности более сложной топологии, соответствующие переходам между описанными типами (распадам и взаимопревращениям элементарных частиц).

Требование экстремума площади для каждого топологического типа приводит к уравнениям Лагранжа–Эйлера, выполняющимся во внутренних точках мирового листа, которые имеют вид локального закона сохранения энергии-импульса:

$$p_i^\mu = \delta A / \delta(\partial_i x_\mu), \quad \partial_i p_i^\mu = 0,$$

и граничным условиям, обеспечивающим обращение в нуль потока импульса через границу мирового листа. Например, открытая струна удовлетворяет граничному условию  $p_i^\mu \epsilon_{ij} d\sigma_j = 0$  (здесь  $d\sigma_j$  — касательный элемент к границе мирового листа на плоскости параметров,  $\epsilon_{ij} d\sigma_j$  — нормальный элемент); для 3-струн имеется аналогичное условие:  $\sum p_i^\mu \epsilon_{ij} d\sigma_j = 0$ , выполняющееся на мировой линии узла, где сумма берется по трем поверхностям, примыкающим к этой линии.

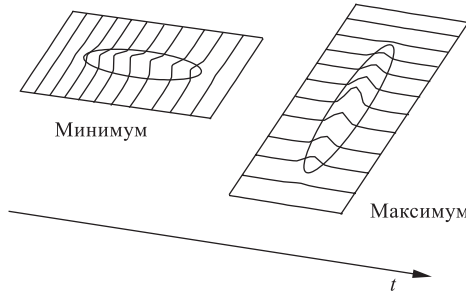


Рис. 1. Тип экстремума: седловая точка

Рис. 1. Тип экстремума: седловая точка

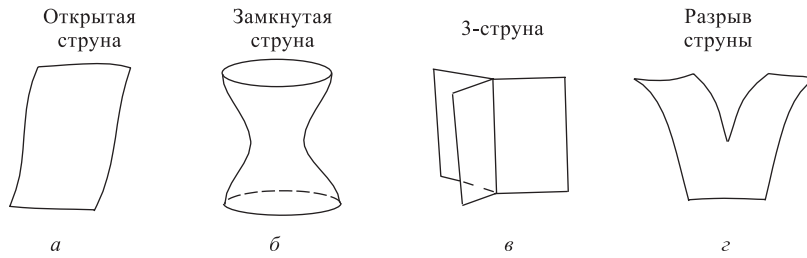


Рис. 2. Основные топологические типы мировых листов

Дальнейшее построение теории струн обычно производится в гамильтоновом подходе. Координаты на мировом листе различаются:  $\sigma$  — компактная координата,  $\sigma \in I$  для открытых струн,  $\sigma \in S^1$  для замкнутых струн;  $\tau \in \mathbf{R}^1$  — некомпактная координата, называемая эволюционным параметром. Вводятся следующие обозначения:  $\dot{x} = \partial x / \partial \tau$ ,  $x' = \partial x / \partial \sigma$ ,  $p^\mu = p_\tau^\mu$ , так что действие струны (площадь) можно записать как  $A = \int d\tau \int d\sigma \mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L} = \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}$  — лагранжева плотность. Скобки Пуассона вводятся следующим образом:  $\{x_\mu(\sigma, \tau), p_\nu(\tilde{\sigma}, \tau)\} = g_{\mu\nu} \delta(\sigma - \tilde{\sigma})$ , где  $g_{\mu\nu} =$

$\text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$  — метрический тензор,  $\delta()$  — функция Дирака. Ставится задача Коши о нахождении решения  $x(\sigma, \tau)$ ,  $p(\sigma, \tau)$  по заданным начальным данным  $x(\sigma, 0)$ ,  $p(\sigma, 0)$ . Эволюция описывается системой автономных дифференциальных уравнений, одновременных по  $\tau$  (так что зависимость от  $\tau$  обычно опускается, при этом подразумевается, что все переменные определяются при одном значении эволюционного параметра).

Теория струн является гамильтоновой теорией со связями первого рода [20,21], что означает следующее. Каноническая гамильтонова плотность определяется по лагранжевой с помощью преобразования Лежандра как  $\mathcal{H}_c = \dot{x}p - \mathcal{L}$ . Подстановка определения  $p$  в терминах  $x', \dot{x}$  обращает канонический гамильтониан в нуль:  $\mathcal{H}_c = 0$  и, кроме того, порождает следующие тождества:  $\Phi_1 = x'p = 0$ ,  $\Phi_2 = x'^2 + p^2 = 0$ . Появление этих тождеств, называемых дираковскими связями, связано с симметриями действия относительно группы репараметризаций (правых диффеоморфизмов) мирового листа, т.е. гладких невырожденных преобразований  $(\sigma, \tau) \rightarrow (\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ , обратные к которым также являются гладкими. Рассмотрение теорий со связями обычно начинается в расширенном фазовом пространстве  $(x, p)$ , в котором гамильтониан определяется как линейная комбинация связей, в нашем случае  $H = \int d\sigma(V_1\Phi_1 + V_2\Phi_2)$ . Здесь коэффициенты  $V_{1,2}(\sigma)$  произвольны и называются лагранжевыми множителями. На поверхности  $\Phi_i = 0$  гамильтониан обращается в нуль\*, однако его производные не обращаются в нуль и образуют гамильтоново векторное поле:

$$\dot{x}_\mu(\sigma) = \delta H / \delta p_\mu(\sigma), \quad \dot{p}_\mu(\sigma) = -\delta H / \delta x_\mu(\sigma).$$

Это поле касательно поверхности  $\Phi_i = 0$  в силу того, что скобки Пуассона  $\{\Phi_i(\sigma), \Phi_j(\tilde{\sigma})\}$  обращаются в нуль на поверхности  $\Phi_i = 0$ , именно такие связи называются связями первого рода.

Фазовая траектория, проинтегрированная вдоль этого поля, принадлежит поверхности  $\Phi_i = 0$ , и ее проекция в координатное пространство  $\{x\}$  дает решение уравнений Лагранжа–Эйлера. В теории струн  $\Phi_i$ -члены гамильтониана генерируют инфинитезимальные сдвиги точек в касательных направлениях к мировому листу:  $\Phi_1$  генерирует сдвиги  $\delta x \sim x'$ , в то время как  $\Phi_2$  генерирует  $\delta x \sim p \perp x'$  (см. рис.3). Совместно

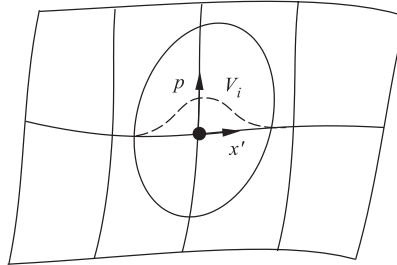


Рис. 3. Связи генерируют репараметризации

\*Этот скалярный гамильтониан не совпадает с энергией, которая в релятивистских теориях описывается компонентой импульса  $p_0$ .

связи генерируют все возможные репараметризации мирового листа (связную компоненту группы правых диффеоморфизмов).

Коэффициенты  $V_{1,2}$  влияют только на параметризацию мирового листа, выбор  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 1$  отвечает конформной параметризации  $\dot{x}x' = 0$ ,  $\dot{x}^2 + x'^2 = 0$ . Этот выбор линеаризует гамильтоновы уравнения. Решение уравнений проводилось различными методами в работах [7, 9, 18, 21, 22], результат имеет геометрическое представление, рассмотренное ниже.

## 1. СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ: ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ СТРУНЫ

Построение мирового листа основано на понятии *опорных кривых*. Рассмотрим кривую  $Q(\sigma)$  в пространстве Минковского, обладающую следующими свойствами: 1) периодичность:  $Q(\sigma + 2\pi) = Q(\sigma) + 2P$ ; 2) светоподобие:  $Q'^2 = 0$ .

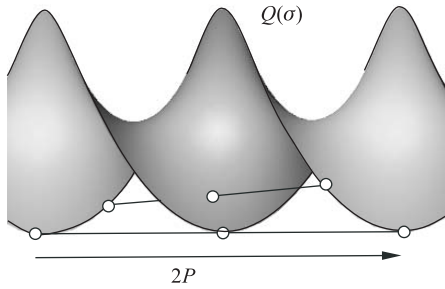


Рис. 4. Мировой лист открытой струны

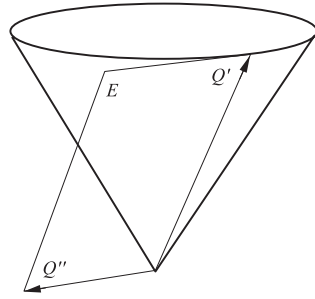


Рис. 5. Структура мирового листа вблизи края

Мировой лист открытой струны строится по этой кривой следующим образом:  $x(\sigma_1, \sigma_2) = (Q(\sigma_1) + Q(\sigma_2))/2$ ,  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 + 2\pi$  (см. рис. 4). Данная поверхность имеет два края, один из которых совпадает с  $Q(\sigma)$ , другой — с  $Q(\sigma) + P$ . При параллельном переносе на вектор  $P$  мировой лист переходит в себя, и его края меняются местами.

**Теорема 2** (край мирового листа). Любой вектор из касательной плоскости к мировому листу открытой струны на его крае ортогонален  $Q'$ . Эта плоскость касается светового конуса по направлению  $Q'$  (такие плоскости называются *изотропными*). Вследствие этого концы открытой струны движутся со скоростью света перпендикулярно направлению струны в этих точках.

Для построения мирового листа замкнутой струны необходимы две опорные кривые  $Q_{1,2}(\sigma)$ . Обе должны быть светоподобными:  $Q_{1,2}'^2 = 0$  и перио-

дичными с одним и тем же периодом:  $Q_{1,2}(\sigma + 2\pi) = Q_{1,2}(\sigma) + P$ . Мировой лист задается формулой  $x(\sigma_1, \sigma_2) = (Q_1(\sigma_1) + Q_2(\sigma_2))/2$ ,  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 + 4\pi$ .

Переменные  $\sigma_i$  вводят светоподобные координаты на мировом листе:  $(\partial_i x)^2 = 0$ , связанные с гамильтоновыми координатами выражением  $\sigma_{1,2} = \tau \pm \sigma$ . Опорные кривые определяются начальными данными задачи Коши: координатой  $x$  и плотностью импульса  $p$  на струне при значении  $\tau = 0$  с помощью следующих формул:

$$Q(\sigma) = x(\sigma) + \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} p(\tilde{\sigma}) \text{ для открытой струны;} \quad (1a)$$

$$Q_{1,2}(\sigma) = x(\pm\sigma) \pm \int_0^{\pm\sigma} d\tilde{\sigma} p(\tilde{\sigma}) \text{ для замкнутой струны.} \quad (1б)$$

В последней формуле кривая  $Q_1$  получается при выборе верхних знаков, в то время как для определения  $Q_2$  необходимо выбрать нижние знаки. Функции  $x(\sigma), p(\sigma)$  продолжены на всю ось  $\sigma$  (см. [7]): как  $2\pi$ -периодические функции в (1б) и как четные  $2\pi$ -периодические функции в (1a).

*Замечание.* Переход к комплексным переменным  $\tau \rightarrow i\tau$ ,  $p \rightarrow ip$  в вышеприведенных формулах дает решение проблемы Бьерлинга [23] о минимальных поверхностях в евклидовом пространстве (найти минимальную поверхность, проходящую через заданную кривую и касающуюся заданного векторного поля на кривой).

Обратные формулы:

$$x(\sigma) = (Q(\sigma) + Q(-\sigma))/2, \quad p(\sigma) = (Q'(\sigma) + Q'(-\sigma))/2, \quad (2a)$$

$$x(\sigma) = (Q_1(\sigma) + Q_2(-\sigma))/2, \quad p(\sigma) = (Q'_1(\sigma) + Q'_2(-\sigma))/2. \quad (2б)$$

Из (1a), (1б) мы видим, что вектор  $P$  совпадает с четырехвектором энергии-импульса струны. В частном случае  $Q_1 = Q_2$  мировой лист замкнутой струны вырождается в двукратно сложенный мировой лист открытой струны. В этом случае периоды опорных кривых равны:  $P_{\text{closed}} = 2P_{\text{open}}$ , вследствие чего каждый из двух совпадающих листов открытой струны получает половину энергии-импульса первоначальной замкнутой струны.

Подпространство, ортогональное  $P$ , определяет систему центра масс (с. ц. м.). Будучи спроецированными в с. ц. м., опорные кривые становятся замкнутыми. Те кривые, у которых временная компонента  $Q^0(\sigma)$  не является монотонной функцией, будут рассмотрены в следующем разделе. Здесь мы будем рассматривать кривые, удовлетворяющие в каждой точке условию  $Q'^0 > 0$ . Такие кривые можно восстановить по их проекции в с. ц. м.:

$$Q'_0 = |\mathbf{Q}'| \Rightarrow Q_0(\sigma_1) - Q_0(0) = \int_0^{\sigma_1} |\mathbf{Q}'(\sigma)| d\sigma = L(\sigma_1),$$

где  $L(\sigma)$  — длина дуги кривой  $\mathbf{Q}(\sigma)$  между точками  $\mathbf{Q}(0)$  и  $\mathbf{Q}(\sigma)$ . Полная длина кривой  $\mathbf{Q}(\sigma)$  равна  $2\sqrt{P^2}$  для открытой струны и  $\sqrt{P^2}$  для замкнутой струны. На кривой  $\mathbf{Q}(\sigma)$  можно ввести натуральную параметризацию, т. е. параметризацию длиной  $\sigma = 2\pi L/L_{\text{tot}}$ , тогда  $Q'_0 = |\mathbf{Q}'| = L_{\text{tot}}/2\pi$ . В теории струн такая параметризация называется калибровкой Рорлиха [24].

В пространстве-времени размерности  $d = 3, 4$  струны имеют устойчивые особые точки. Причина их появления состоит в следующем.

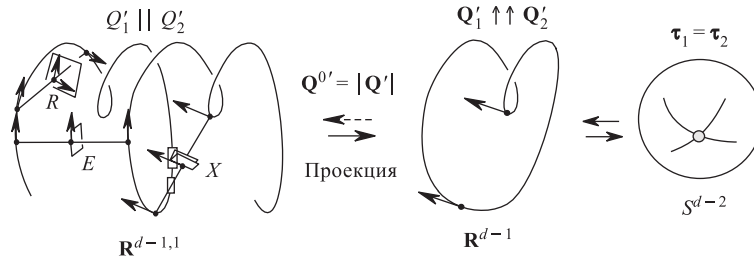


Рис. 6. Особенности мирового листа соответствуют параллельным касательным векторам к опорной кривой.  $R$  — регулярная точка;  $E$  — край;  $X$  — внутренняя особая точка

Касательными векторами к мировому листу в точке  $x(\sigma_1, \sigma_2)$  являются  $Q'(\sigma_1)$  и  $Q'(\sigma_2)$ , т. е. касательные векторы к опорной кривой в соответствующих точках. Если эти два вектора линейно независимы, они определяют касательную плоскость к мировому листу, и эта точка является регулярной (точка  $R$  на рис. 6). В противном случае, если эти векторы параллельны, точка является особой. Точка  $E$  с  $\sigma_2 - \sigma_1 = 0$  или  $2\pi$  лежит на крае мирового листа. Точка  $X$  с  $0 < \sigma_2 - \sigma_1 < 2\pi$  является внутренней особой точкой.

Для опорных кривых с  $Q^0 > 0$  линейная зависимость векторов  $Q'_1$  и  $Q'_2$  в пространстве-времени эквивалентна равенству единичных касательных векторов  $\tau = \mathbf{Q}'/|\mathbf{Q}'|$  к проекции опорной кривой в с. ц. м. Таким образом, особенности мирового листа отвечают точкам самопересечения годографа  $\tau(\sigma_1) = \tau(\sigma_2)$  (для замкнутой струны — пересечению двух годографов  $\tau_1(\sigma_1) = \tau_2(\sigma_2)$ ). Годографы лежат на сфере  $S^{d-2}$ : на окружности при  $d = 3$  и на 2-мерной сфере при  $d = 4$ . Вследствие этого при  $d = 3$

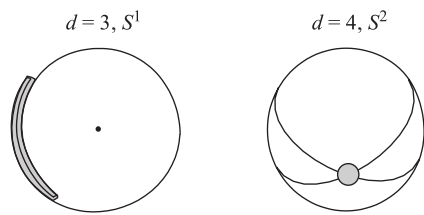


Рис. 7. Самопересечение годографа  $\tau(\sigma)$



номерные множества, а при  $d = 4$  трансверсальные пересечения находятся в изолированных точках (см. рис. 7). В случае  $d > 4$  пересечения можно устранить малыми деформациями годографов на сфере  $S^{d-2}$ .

Из (1a), (1б) мы получаем формулу для линейной плотности энергии-импульса на струне:

$$(p_0, \mathbf{p})/|\mathbf{x}'| = (2, \tau_1 + \tau_2)\gamma, \quad \gamma = (2(1 - \tau_1\tau_2))^{-1/2}.$$

В особых точках и на крае мирового листа  $\gamma \rightarrow \infty$ , вследствие чего в этих точках линейная плотность энергии-импульса стремится к бесконечности.

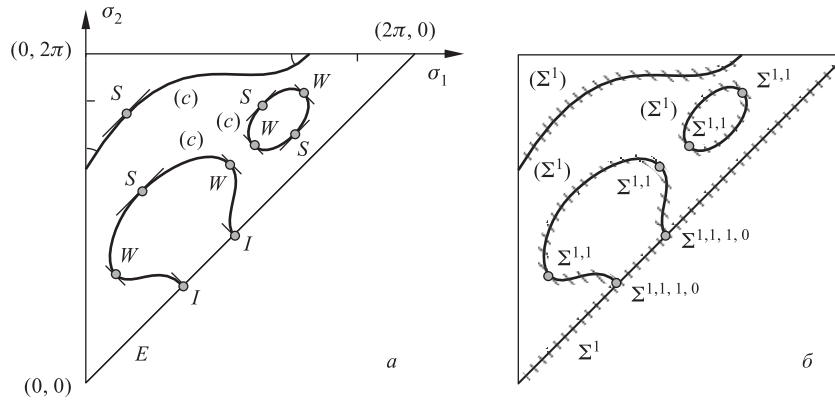


Рис. 8. а) Особые линии на плоскости параметров (схема); б) классификация особенностей по вырождению первого дифференциала [25]

**Случай  $d = 3$ .** Используем представление  $\tau(\sigma) = (\cos \varphi(\sigma), \sin \varphi(\sigma))$ . Особенности определяются уравнением  $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) \bmod 2\pi$ .

Для открытых струн это уравнение необходимо решить в треугольнике на  $(\sigma_1, \sigma_2)$ -плоскости, показанном на рис. 8, а, и затем продолжить на весь мировой лист, используя тривиальные симметрии  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ ,  $\sigma_{1,2} \rightarrow \sigma_{1,2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Для замкнутых струн уравнение  $\varphi_1(\sigma_1) = \varphi_2(\sigma_2) \bmod 2\pi$  необходимо решить в квадрате  $0 < \sigma_{1,2} < 2\pi$  и продолжить решения, используя  $\sigma_{1,2} \rightarrow \sigma_{1,2} + 2\pi k$ . Для опорных кривых общего положения (см. далее) решения этих уравнений определяют гладкие кривые на плоскости параметров, обозначенные на рис. 8, а как  $(c)$ , для которых возможно следующее поведение:

- кривые распространяются по всему мировому листу, не достигая его краев;
- кривые могут образовывать замкнутые контуры;
- в случае открытых струн кривые  $(c)$  могут обрываться на крае мирового листа.

В последнем случае кривая ( $c$ ) входит в край под прямым углом, в силу симметрии  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ . На рис. 8,  $a$  также отмечены точки, в которых кривая ( $c$ ) касательна направлениям  $d\sigma_2 = \pm d\sigma_1$ . Эволюция струны определяется с помощью сечений мирового листа плоскостями постоянного времени  $x_0 = \text{const}$ , которые в калибровке Рорлиха отвечают  $\sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}$ . Структура мирового листа вблизи особых точек показана на рис. 9.

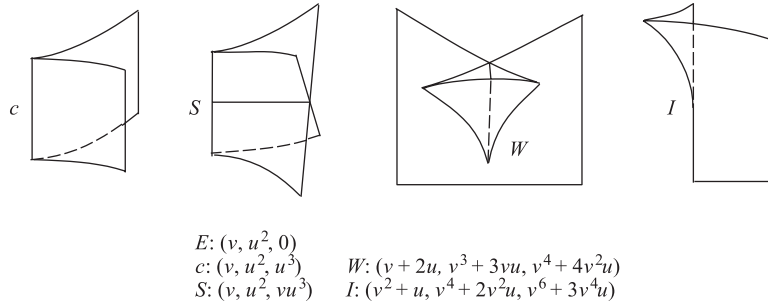


Рис. 9. Нормальные формы особенностей мирового листа,  $d = 3$

Нормальные формы приведены в световых координатах  $(t, y, x - t)$ , так что направление  $(1, 0, 0)$  является светоподобным и совместно с направлением  $(0, 1, 0)$  определяет изотропную плоскость.

- $E$ : край мирового листа;
- $c$ : складка, или линия каспов; на этой линии сечения мирового листа плоскостями постоянного времени имеют точку возврата, или касп  $(0, u^2, u^3)$ , который двигается в пространстве-времени в светоподобном направлении  $(1, 0, 0)$ , т.е. касп двигается со скоростью света перпендикулярно направлению струны в этой точке  $(0, 1, 0)$ ;
- $S$ : линия самопересечения поверхности обрывается на мировой линии каспа, в этой точке «крылья» каспа проходят сквозь друг друга;
- $W$ : «ласточкин хвост» [25], точка рождения или уничтожения пары каспов;
- $I$ : в случае открытых струн касп может появляться и исчезать одиночно на краю мирового листа в точке перегиба этой кривой:  $\varphi'(\sigma_I) = 0$ . Другими словами, поглощение каспа концом струны приводит к перегибу его траектории.

**Случай  $d = 4$ .** Здесь мы используем световые координаты  $(t, y, z, x - t)$ . Направление  $(1, 0, 0, 0)$  является светоподобным и совместно с  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  оно определяет 3-мерную изотропную гиперплоскость, касательную к световому конусу в 4 измерениях (рис. 10).

Срезы мирового листа плоскостями постоянного времени вблизи точки  $(P)$  дают кривую, которая является гладкой при  $t \neq 0$  и имеет касп  $(0, u^2, 0, u^3)$  в момент времени  $t = 0$ . Проекция в почти любое\* 3-мерное подпространство преобразуют эту особенность в *точку пинча*, в окрестности которой поверхность имеет форму *зонтика Уитни*:  $(v, u^2, vu)$ .

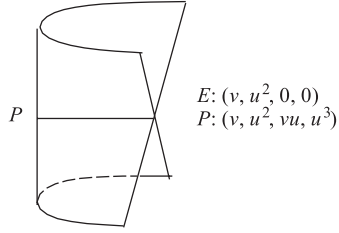


Рис. 10. Нормальные формы особенностей мирового листа,  $d = 4$

Следующие теоремы описывают приведение мировых листов к нормальным формам. Пусть  $\mathbf{Q} : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^n - C^\infty$  — гладкая аналитическая функция с  $\mathbf{Q}'(\sigma) \neq 0$ , т.е. гладкая замкнутая кривая в  $\mathbf{R}^n$ ;  $\sigma$  — натуральный параметр (длина) на кривой.

**Определение** ( $n = 2$ ). Пусть  $\varphi(\sigma)$  — полярный угол вектора  $\mathbf{Q}'(\sigma)$ . Обозначим  $\varphi_i = \varphi(\sigma_i)$ . Будем говорить, что кривая находится в *общем положении*, если в каждой паре точек, удовлетворяющих уравнению  $\varphi_1 = \varphi_2 \bmod 2\pi$ , выполняется одно из следующих свойств:

- (c)  $\varphi'_1 \neq \pm \varphi'_2$ ;
- (S)  $\varphi'_1 = \varphi'_2 \neq 0$ ,  $\varphi''_1 \neq \varphi''_2$ ;
- (W)  $\varphi'_1 = -\varphi'_2 \neq 0$ ,  $\varphi''_1 \neq \varphi''_2$ ;
- (E)  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\varphi'_1 \neq 0$ ;
- (I)  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\varphi'_1 = 0$ ,  $\varphi''_1 \neq 0$ ,  $\varphi'''_1 \neq 0$ .

Для двух замкнутых кривых  $\mathbf{Q}_{1,2}$  в  $\mathbf{R}^2$  обозначим  $\varphi_i = \varphi_i(\sigma_i)$ . Будем говорить, что кривые находятся в *общем положении друг к другу* если в каждой паре точек, удовлетворяющих уравнению  $\varphi_1 = \varphi_2 \bmod 2\pi$ , выполняется одно из свойств (c), (S), (W).

**Определение** ( $n = 3$ ). Для кривой  $\mathbf{R}^3$  обозначим  $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{Q}'(\sigma_i)$ . Кривая находится в *общем положении*, если в каждой паре точек, удовлетворяющих уравнению  $\mathbf{Q}'_1 = \mathbf{Q}'_2$ , выполняется одно из следующих свойств:

- (E)  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\mathbf{Q}''_1 \neq 0$ ;
- (P)  $\mathbf{Q}''_1 \nparallel \mathbf{Q}''_2$ ,  $|\mathbf{Q}''_1| \neq |\mathbf{Q}''_2|$ .

Для двух кривых в  $\mathbf{R}^3$  обозначим  $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{Q}'_i(\sigma_i)$ . Две кривые находятся в *общем положении друг к другу*, если в каждой паре точек, удовлетворяющих уравнению  $\mathbf{Q}'_1 = \mathbf{Q}'_2$ , выполняется свойство (P).

\*Исключительные направления проекции принадлежат плоскости  $t = x$ , они порождают особенности высшего порядка.

**Теорема 3** (общее положение). Кривые в общем положении образуют открытое всюду плотное множество в  $C^\infty$ -топологии.

**Теорема 4** (нормальные формы). Для опорных кривых в общем положении окрестность особой точки мирового листа можно преобразовать к одной из приведенных выше нормальных форм с помощью LR-диффеоморфизмов, т. е. гладких невырожденных преобразований плоскости параметров  $(\sigma_1, \sigma_2) \rightarrow (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$  и пространства Минковского  $x \rightarrow \tilde{x}$ , обратные к которым также являются гладкими. Линейная часть преобразования в пространстве Минковского, заданная матрицей Якоби  $\partial\tilde{x}/\partial x$ , отображает светоподобное направление  $Q'_1 \parallel Q'_2$  в светоподобное направление  $(1, 0, \dots, 0)$  и так же отображает друг в друга изотропные плоскости, связанные с этими направлениями.

Теорема 3 означает, что кривые в общем положении представляют общий случай во множестве всех гладких кривых. Уточнение в теореме 4 связывает изотропные плоскости в пространствах образа и прообраза и позволяет записывать нормальные формы в световых координатах.

**$\Sigma$ -классификация [25].**  $\Sigma$ -класс (символ Тома) особенности определяется ядром первого дифференциала рассматриваемого отображения, в нашем случае — решением уравнения  $Q'_1 d\sigma_1 + Q'_2 d\sigma_2 = 0$ , которое в калибровке Рорлиха влечет  $d\sigma_1 + d\sigma_2 = 0$ . Это ядро одномерно, поэтому кривые ( $c$ ), края ( $E$ ) и точки ( $P$ ) являются особенностями класса  $\Sigma^1$ . Линии  $d\sigma_1 + d\sigma_2 = 0$  показаны штриховкой на рис. 8, б. Точки ( $W$ ), в которых штриховка касательна кривым ( $c$ ), соответствуют особенностям класса  $\Sigma^{1,1}$  (касп на линии каспов). Для точек ( $I$ ) символ Тома не определен, однако в уточняющей схеме Бордмана (Boardman) такие точки классифицируются как  $\Sigma^{1,1,1,0}$ . Точки ( $S$ ) имеют класс  $\Sigma^1$ , т. е. не отличаются от окружающих точек линии каспов ( $c$ ) по  $\Sigma$ -классификации.

**Устойчивость.** Будем называть особенность мирового листа *слабоустойчивой* ( $W$ -устойчивой), если все мировые листы в  $\epsilon$ -окрестности данного листа (\*) имеют особенности. Особенность называется дифференцируемо-устойчивой (LR-устойчивой) [25], если все мировые листы в  $\epsilon$ -окрестности данного листа (\*) могут быть преобразованы в (\*) LR-диффеоморфизмом (в этом случае особенность будет также  $W$ -устойчивой). Описанные выше особенности являются LR-устойчивыми, если  $\epsilon$ -окрестность мирового листа определена в  $C^\infty$ -топологии:  $|\delta Q^{(n)}| < \epsilon_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Особенности  $W$ -устойчивы в  $C^1$ -топологии:  $|\delta Q'| < \epsilon$  (в этом случае они уже не являются LR-устойчивыми, пример показан на рис. 11, г: вблизи точки трансверсального самопересечения годографа  $Q'(\sigma)$  в его  $|\delta Q'| < \epsilon$ -окрестности существуют  $C^1$ -малые, но  $C^2$ -большие вариации, изменяющие структуру самопересечения).  $C^1$ -малые вариации опорных кривых эквивалентны вариациям начальных данных, малым в смысле  $|\delta x'| < \epsilon$ ,  $|\delta p| < \epsilon$ . С физической точки зрения также интересно рассматривать  $C^0$ -малые вариации:  $|\delta Q| < \epsilon$ ,

эквивалентные малым вариациям координаты  $|\delta x| < \epsilon$  и малым вариациям интегралов  $|\int d\sigma \delta p| < \epsilon$ , взятым по конечным отрезкам струны. Вариации опорной кривой, которые являются  $C^0$ -малыми, но  $C^1$ -большими, соответствуют стягивающимся петлям, изображенным на рис. 11, *a*. Такие петли могут устранить совпадение касательных векторов, перебрасывая годограф на противоположную сторону окружности (см. рис. 11, *б*) и таким образом устраняя особенность. Более детальный анализ показывает, что в случае  $d = 3$  этот процесс порождает новые каспы ( $c'$ ) и ласточкины хвосты ( $W$ ) (см. рис. 11, *в*), так что особенность может быть устранена лишь в малой области, но не полностью на всем мировом листе. Точки пинча могут быть полностью устранены  $C^0$ -малыми деформациями (см. рис. 11, *д*). Этот процесс сопровождается рождением малой петли на струне (рис. 11, *е*), которая распространяется со скоростью света и проходит через точку ( $P$ ), препятствуя появлению мгновенного каспа в этой точке. В этой области линейная плотность энергии-импульса струны является большой, но не бесконечной.

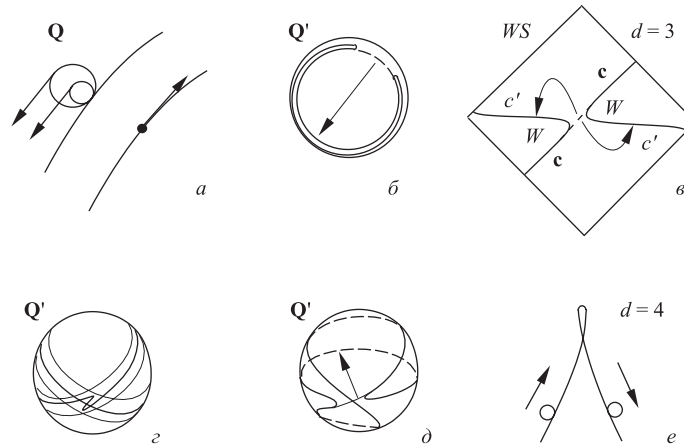


Рис. 11. Деформации, изменяющие структуру особенностей

Интересно также исследовать свойства особенностей в фурье-представлении [7], в котором коэффициенты разложения  $Q'(\sigma) = \sum a_n e^{in\sigma}$  используются как координаты в фазовом пространстве струны. В конечномерных подпространствах  $\{a_n, n \leq N; a_n = 0, n > N\}$  подмножества с  $Q' \neq 0$  и только трансверсальными пересечениями годографа  $\tau = Q'/|Q'|$  являются открытыми, таким образом, особенности являются  $W$ -устойчивыми; и поскольку соответствующие таким множествам функции  $\tau$  являются аналитическими, особенности являются LR-устойчивыми. Для образования стягивающихся петель требуется бесконечное число фурье-гармоник. В пространстве всех  $\{a_n\}$

определения  $C^0$ - и  $C^1$ -малых вариаций воспроизводятся определенными требованиями на скорость убывания фурье-гармоник.

В табл. 1 представлены различные определения топологии и соответствующие типы устойчивости особенностей на мировых листах.

Таблица 1

Топология	$d = 3$	$d = 4$	$d > 4$
$ \delta \mathbf{Q}^{(n)}  < \epsilon_n (C^\infty)$	LR	LR	—
$ \delta \mathbf{Q}'  < \epsilon (C^1)$	$W$	$W$	—
$ \delta \mathbf{Q}  < \epsilon (C^0)$	$W$	—	—
$ \delta a_n  < \epsilon; a_n = 0, n > N$	LR	LR	—
$ \delta a_n  < \epsilon/n^p, p > 1 (C^1)$	$W$	$W$	—
$ \delta a_n  < \epsilon/n^p, p > 0 (C^0)$	$W$	—	—

Мировые листы могут также иметь устойчивые самопересечения, которые обладают теми же самыми свойствами, что и для поверхностей общего вида. В табл. 2 приводятся все типы устойчивых особенностей мировых листов и поверхностей общего вида (в  $C^\infty$ -топологии).

Таблица 2

Поверхность	$d = 3$	$d = 4$	$d > 4$
Самопересечения			
Общая, мировой лист	Линии	Точки	—
Другие			
Общая	Точки пинча	—	—
Мировой лист	Линии каспов и их особенности ( $S$ ), ( $W$ ), ( $I$ )	Точки пинча	—

**Глобальная структура особенностей:**  $d = 3$ , замкнутые струны. Дальнейшее рассмотрение будет проводиться в с. ц. м.

**Теорема 5** (наличие особенностей) [14]. Все мировые листы замкнутых струн в 3-мерном пространстве Минковского имеют особенности.

*Замечание.* При определенных условиях (центральной симметрии опорной кривой) мировой лист имеет особенность типа «коллапс», при котором вся струна на одно мгновение стягивается в точку. Пример:  $Q_{1,2}(\sigma) =$

$(\sigma, \cos \sigma, \pm \sin \sigma)$ , опорные кривые, проекции которых в с.ц.м. имеют вид двух противоположно ориентированных окружностей. Эта особенность является неустойчивой: малые вариации кривых расправляют ее в малую замкнутую линию каспов (рис. 12).

Напомним, что скорость каспа  $\mathbf{v}$  ортогональна направлению струны  $\mathbf{k}$  в этой точке.

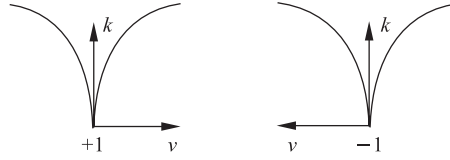


Рис. 12. Топологический заряд

**Определение.** Топологическим зарядом каспа будем называть число  $s$ , равное  $+1$ , если вращение от  $\mathbf{v}$  к  $\mathbf{k}$  производится *против часовой стрелки*, и равное  $-1$ , если это вращение по часовой стрелке.

**Теорема 6** (сохранение топологического заряда). Полный топологический заряд струны, равный сумме топологических зарядов всех каспов, постоянен во времени и равен  $n_1 + n_2$ . Здесь  $n_i$  — числа вращений векторов  $\mathbf{Q}'_i(\sigma)$  при полном обходе опорной кривой ( $n_i > 0$ , если вращение производится против часовой стрелки;  $n_i < 0$ , если это вращение по часовой стрелке).

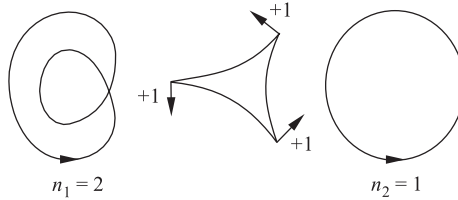


Рис. 13. Перманентный режим

**Теорема 7** (перманентный режим). Пусть опорные кривые  $\mathbf{Q}_i(\sigma)$  не имеют точек перегиба (рис. 13). Пусть  $\text{sign } n_1 = \text{sign } n_2$ . В этом случае каспы не сталкиваются и топологические заряды всех каспов имеют один и тот же знак, равный  $\text{sign } n_{1,2}$ . В результате этого число каспов на струне постоянно во времени и равно  $|n_1 + n_2|$ .

*Замечание.* Кривые с  $n_i = 0$  (например, восьмерка) с необходимостью имеют точки перегиба и нарушают условия перманентности. Таким образом, эти условия подразумевают  $|n_i| \geq 1$ , и струны при перманентных условиях всегда имеют  $N \geq 2$  каспов.

**Теорема 8** (столкновение каспов). Пересечение линий каспов неустойчиво, т.е. малые вариации опорных кривых переводят их либо в моду рассеяния, либо в моду рождения и уничтожения (рис. 14). Каспы рождаются и уничтожаются парами в особых точках типа  $W$ . В момент рождения каспы имеют равные скорости и противоположные направления, удовлетворяя тем самым закону сохранения топологического заряда:  $(+1, -1) \leftrightarrow 0$ .

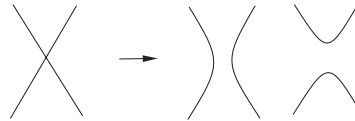


Рис. 14. Пересечение линий каспов неустойчиво

*Открытые струны* могут быть свободными от особенностей. Пример [10]: опорная кривая  $Q(\sigma)$  — окружность, мировой лист — геликоид (рис. 4), струна в с. ц. м. — прямая линия, вращающаяся с постоянной угловой скоростью. Открытая струна является вырожденным случаем замкнутой, поэтому аналогичные теоремы для открытых струн можно получить в пределе  $Q_1 \rightarrow Q_2$ . В этом пределе две линии каспов замкнутой струны отображаются в края мирового листа, в то время как остальные каспы становятся 2-кратными, как показано на рис. 15, *a, б*. Из полученных двух совпадающих листов только один представляет открытую струну, поэтому топологические заряды особенностей необходимо поделить пополам, что дает заряд  $\pm 1$  для каспов и  $\pm 1/2$  для концов струны. Поглощение каспа на конце соответствует процессу, показанному на рис. 15, *в*:  $(+1, -1/2) \leftrightarrow +1/2$ .

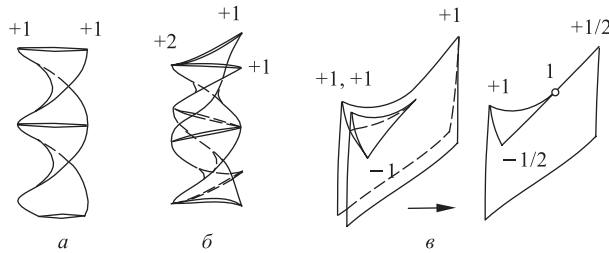


Рис. 15. Вырождение мирового листа: замкнутый  $\rightarrow$  открытый

**Теорема 6'.** Полный топологический заряд открытой струны, равный сумме топологических зарядов каспов и концов, постоянен во времени и равен  $n$  — числу оборотов вектора  $Q'(\sigma)$  при обходе опорной кривой.

**Теорема 7'.** Если опорная кривая  $Q(\sigma)$  не имеет точек перегиба, то каспы не сталкиваются и не достигают концов струны, и топологические заряды всех каспов и концов имеют один и тот же знак, равный  $\text{sign } n$ . Полное число каспов в этом случае постоянно во времени и равно  $|n| - 1$ .

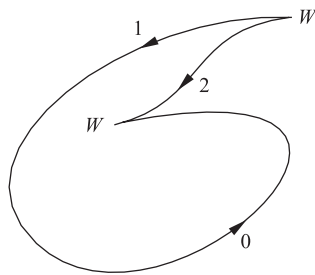


Рис. 16. Z-процесс

**Теорема 8'.** Существует устойчивое пересечение линии каспов с краем мирового листа в точках типа  $I$ . Эта особенность получается при слиянии ласточкиного хвоста с линией каспов в пределе  $Q_1 \rightarrow Q_2$ , как показано на рис. 15, *в*.

*Замечание.* Описанные локальные элементы могут объединяться в более сложные конфигурации, в частности, следующий процесс происходит как на замкнутых, так и на открытых мировых листах (см. рис. 16): на струне первоначально имеется касп (0), затем появляется пара



каспов (1, 2), один касп из пары уничтожает касп (0), в то время как другой становится каспом (0) в следующем периоде эволюции.

Некоторые примеры особенностей на струнах при  $d = 3$  показаны на рис. 21, *a–г*.

**Глобальная структура особенностей:** ( $d = 4$ ). Устойчивыми особенностями являются точки пинча, периодически расположенные на мировом листе. При эволюции мгновенные каспы появляются на струне при ее прохождении через точки пинча, периодически в одной и той же точке в с.ц.м. 3-мерные проекции мирового листа открытой струны из 4-мерного пространства-времени Минковского показаны на рис. 21, *д, е*. Два типа особых точек показаны на этом рисунке:  $P, P', \dots$  — особые точки, существующие на самом мировом листе, которые проецируются в точки пинча при проекции в 3-мерные пространства, такие как  $(xyz), (xyt)$ , показанные на рисунке;  $Q$  — точка пинча, которая имеется только в проекции и, таким образом, не является физически важной.

Для точек пинча также можно ввести топологический заряд, характеризующий поведение особенностей при непрерывных деформациях (гомотопиях) мирового листа. Для замкнутых струн трансверсальные пересечения двух замкнутых ориентированных кривых  $Q'_{1,2}(\sigma)$  на сфере  $S^2$  характеризуются индексом [26], который равен  $+1$  или  $-1$ , если пара касательных векторов  $(Q''_1, Q''_2)$  имеет соответственно совпадающую или противоположную ориентацию с системой координат, определяющей глобальную ориентацию на сфере  $S^2$ . В силу теорем [26] сумма всех индексов инвариантна относительно гомотопий и для двух замкнутых кривых на сфере всегда равна нулю. Таким образом, число точек пинча на одном периоде мирового листа замкнутой струны является четным:  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ , и при непрерывных деформациях мирового листа точки пинча появляются и исчезают парами:  $(+1, -1) \leftrightarrow 0$ .

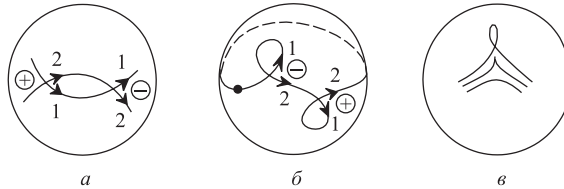


Рис. 17. Топологический заряд точки пинча

Для открытых струн точки самопересечения кривой  $Q'(\sigma)$  могут появляться и исчезать одиночно, при рождении каспа  $Q''(\sigma) = 0$  (см. рис. 17, *в*). Эта ситуация соответствует рождению точки перегиба на опорной кривой  $Q(\sigma)$  в 3-мерном пространстве. На мировом листе точка пинча перемещается к краю ( $Q'_1 = Q'_2, \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ ) и исчезает в точке перегиба края. Точки пинча

также могут появляться и исчезать парами во внутренней области мирового листа во время его непрерывной деформации, с сохранением локальной характеристики, которая вводится следующим образом [26]. Зафиксируем на кривой  $\mathbf{Q}'(\sigma)$  точку  $\sigma_0$ , не совпадающую с самопересечением. Будем обходить кривую, начиная от  $\sigma_0$ , и отмечать касательные векторы в точках самопересечения: при первом проходе через точку самопересечения пишем 1 на соответствующем касательном векторе, во втором проходе пишем 2 (см. рис. 17, б). Присвоим точке самопересечения число  $\pm 1$  в зависимости от ориентации системы координат  $(1, 2)$ . Сумма этих чисел называется индексом самопересечения (числом Уитни) замкнутой кривой. Это число зависит от выбора  $\sigma_0$  (при перемещении  $\sigma_0$  через точку самопересечения ее индекс меняет знак), однако *четность* числа Уитни не зависит от  $\sigma_0$  и инвариантна относительно тех гомотопий, которые не порождают каспы  $\mathbf{Q}''(\sigma) = 0$ .

## 2. ЭКЗОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Решения такого вида соответствуют опорным кривым, у которых временная компонента  $Q_0(\sigma)$  не является монотонной функцией (см. рис. 18). Такие кривые можно задать явно, определяя касательный вектор в виде  $Q'(\sigma) = a_0(\sigma)(1, \mathbf{n}(\sigma))$ , где  $|\mathbf{n}(\sigma)| = 1$ ,  $\mathbf{n}(\sigma)$  является  $2\pi$ -периодической функцией, и  $a_0(\sigma)$  является  $2\pi$ -периодической функцией переменного знака. Соответствующий мировой лист показан на рис. 21, ж. На этом рисунке  $(cABh)$  — опорная кривая, которая имеет два каспа  $A, B$ . Эти каспы порождают линии каспов на мировом листе:  $(fRA_d)$  и  $(gBRe)$ , которые разбивают мировой лист на множество областей. Здесь  $R = (A + B)/2$ .

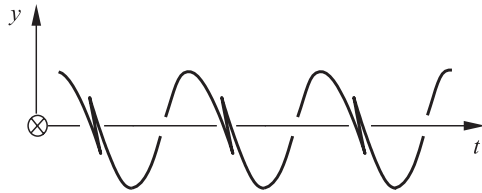


Рис. 18. Опорная кривая, не монотонная во временном направлении

Срезы такого мирового листа плоскостями постоянного времени содержат несвязные компоненты. Одна компонента («длинная струна») постоянно присутствует в системе, дополнительно происходят следующие процессы:

- в точке  $A$  из вакуума появляется новая короткая струна;
- в точке  $R$  она рекомбинируется с длинной струной: присоединяется к длинной струне, в то время как часть длинной струны отсоединяется;

• в точке  $B$  короткая струна исчезает.

Таким образом, мировые листы рассмотренного типа соответствуют процессам рождения, уничтожения и рекомбинации струн. Дальнейший ана-

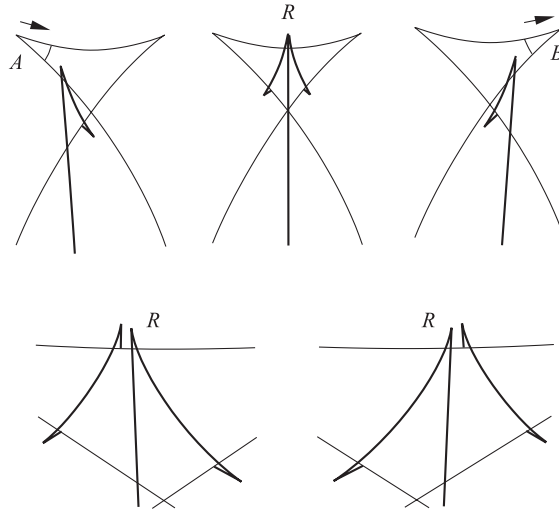


Рис. 19. Экзотические решения

лиз [18] показывает, что плотность энергии для решений такого типа не является всюду положительной: области, отмеченные (+) на рис. 21, ж, обладают положительной энергией, в то время как области (-) имеют отрицательную энергию (теоретическая физика использует для таких решений термин «экзотическая материя» [27]). Для таких решений те компоненты струн, которые появляются и исчезают в вакууме вблизи точек  $A$ ,  $B$ , имеют нулевые полные энергию-импульс и момент импульса, поэтому законы сохранения не препятствуют таким процессам. В [18] также показано, что мировые листы такого типа являются времениподобными, т. е. квадратный корень в лагранжиане струны является вещественным, однако линия каспов мирового листа соответствует точкам ветвления этого квадратного корня, таким образом, для выбора знака лагранжиана имеется несколько вариантов. Экзотические решения соответствуют такому выбору, что площади областей мирового листа, отмеченные ( $\pm$ ) на рис. 21, ж, дают противоположный вклад в действие (рис. 19). В [18] показано, что экзотические решения существуют при произвольной размерности пространства-времени и образуют области, т. е. не являются редкими в фазовом пространстве ковариантной гамильтоновой теории струн. Это фазовое пространство образовано коэффициентами фурье-разложения функции  $Q'(\sigma)$ . Исключение экзотических решений из теории, возможное только с помощью явного требования  $Q'_0(\sigma) > 0$ , или эквивалентного условия в терминах фурье-коэффициентов в квантовой теории приводит к дополнительным трудностям и фактически никогда не проводилось.

### 3. РАЗРЫВ СТРУНЫ

Рассматривая разрыв струны и другие процессы перехода, необходимо зафиксировать топологический класс процесса и найти экстремум действия в этом классе. Например, разрыв открытой струны на две открытые струны (рис. 20) соответствует диаграмме «штаны» (рис. 2, з). Поверхность должна варьироваться до достижения экстремума действия при фиксированных начальном и конечном положениях струн и свободных положениях границ и точки разрыва. Такие поверхности можно построить, используя следующий алгоритм [13] (см. рис. 21, з, и).

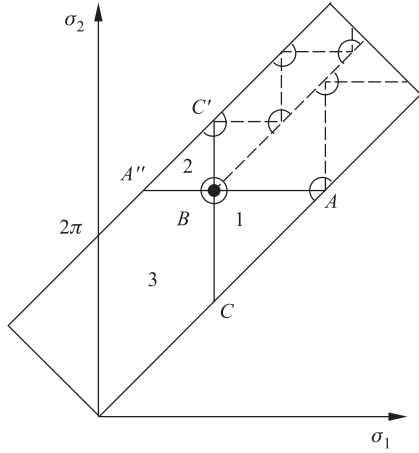


Рис. 20. Разрыв «открытая струна  $\rightarrow$  2 открытые струны» на плоскости параметров

1. Зададим мировой лист открытой струны с помощью опорной кривой  $Q$  (которая, как обычно, является  $2P$ -периодической и светоподобной).  $Q$  является первым краем мирового листа;  $Q + P$  задает второй край.

2. Зафиксируем две произвольные точки  $A, C$  на кривой  $Q$ , содержащиеся в пределах одного периода. Найдем их середину  $B = (A+C)/2$ . Эта точка будет *точкой разрыва* мирового листа. Зафиксируем также точки  $A' = A - 2P$  и  $B' = (A' + C)/2 = B - P$ .

3. Рассмотрим следующие кривые:  $AB$ , полученную из участка  $AC$  опорной кривой с помощью гомотетии с центром в точке  $A$  и с коэффициентом  $1/2$ ;  $BC$ , полученную из  $AC$  гомотетией с центром  $C$  и тем же коэффициентом ( $AB$  и  $BC$  конгруэнтны); и аналогично:  $A'B'$  — это  $A'C$ , сжатая в два раза к  $A'$ ;  $B'C'$  — это  $A'C$ , сжатая в два раза к  $C$  ( $A'B'$  и  $B'C'$  конгруэнтны). Пусть  $A''BC' = A'B'C' + P$  (параллельный перенос на вектор  $P$ ).

*Замечание.* Кривые  $ABC$  и  $A''BC'$  принадлежат мировому листу. Эти кривые отмечают путь светового сигнала, излученного из точки  $B$  на мировом листе, и называются *характеристиками*.

4. Рассмотрим криволинейно-треугольные части мирового листа:

1 = часть, ограниченная дугами  $AB, BC$  и  $AC$ ;

2 = часть, ограниченная дугами  $A''B, BC'$  и  $A''C'$ .

Рассмотрим последовательность переносов этих частей на векторы  $BA$  и  $BC'$ :

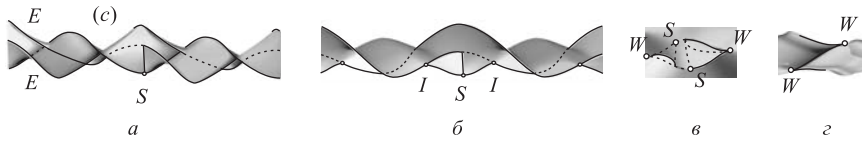
$$1' = 1 + BA, 1'' = 1' + BA, \dots$$

$$2' = 2 + BC', 2'' = 2' + BC', \dots$$

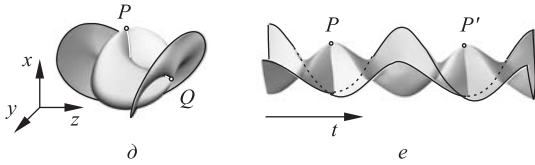
Последовательность  $\{1, 1', 1'', \dots\}$  образует связную поверхность (части стыкуются вдоль характеристики  $AB$  и ее образов при переносах; эта стыковка непрерывна, но в общем случае не является гладкой — мировой лист имеет излом вдоль характеристик). Аналогично построим  $\{2, 2', 2'', \dots\}$ .

5. Часть первоначального мирового листа, ограниченная краями  $Q, Q+P$  и дугами  $A''B, BC$  (лежащая слева от  $A''BC$ ), объединенная с поверхностями  $\{1, 1', 1'', \dots\}, \{2, 2', 2'', \dots\}$ , образует полный мировой лист для распада «открытая струна  $\rightarrow$  две открытые струны».

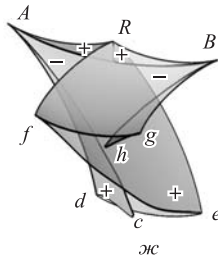
Особенности при  $d = 3$



Особенности при  $d = 4$



Экзотическое решение



Разрыв струны

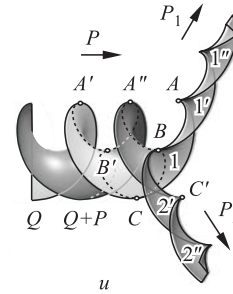
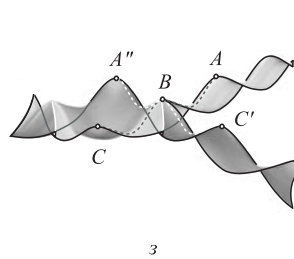


Рис. 21. Особенности на мировых листах. Изображения построены с помощью компьютерной программы [28], представляющей струнную динамику в системе виртуальной реальности Аванго [29]

*Замечания:*

а) Продукты распада  $\{1', 1'', \dots\}, \{2', 2'', \dots\}$  можно построить по опорным кривым по общему правилу «геометрическое место середин» (рис. 4).

Опорные кривые в этом случае являются периодическими продолжениями дуг  $CA$  и  $A''C'$ . Полупериоды равны энергии-импульсу, и свойство  $P = P_1 + P_2$  (т. е. сохранение энергии-импульса в процессе распада) очевидно из рис. 21, и.

б) На плоскости параметров  $(\sigma_1, \sigma_2)$  характеристики  $AB, BC, A''B, BC'$  соответствуют прямым  $\sigma_i = \text{const}$ . Части 1, 2 являются треугольниками, ограниченными этими прямыми. Отсюда мы получаем эквивалентный алгоритм построения мирового листа: рассмотрим треугольники 1, 2 на плоскости параметров, отобразим их в пространство-время, используя  $x(\sigma_1, \sigma_2) = (Q(\sigma_1) + Q(\sigma_2))/2$ , найдем их образы при переносах, описанных выше, и возьмем объединение поверхностей  $\{1, 1', 1'', \dots\} \cup \{2, 2', 2'', \dots\} \cup 3$ .

**Теорема 9** (экстремальное свойство). Мировой лист, построенный с помощью такого алгоритма, имеет экстремальную площадь.

**Теорема 10** (разрыв по особой точке). Продукты разрыва струны не имеют излома вдоль характеристик, если и только если  $B$  является особой точкой исходного мирового листа (см. рис. 21, з).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы описали геометрический метод для явного представления решений в теории струн, удобный для исследования особых точек на них. Показано, что в пространстве-времени Минковского размерности 3 и 4 мировые листы открытых и замкнутых струн имеют устойчивые особые точки, которые не устраняются при малых деформациях поверхности в рассматриваемом классе. В размерности 3 особенности имеют вид каспов, распространяющихся по мировому листу со скоростью света, появляются и исчезают одиночно на границе мирового листа или парами во внутренних областях мирового листа. В размерности 4 особенности располагаются в изолированных точках, и имеют вид мгновенных каспов, периодически расположенных на мировом листе. При большем значении размерности устойчивые особенности отсутствуют.

Мы показали, что при определенных условиях теория струн имеет решения вида  $I \times \mathbf{R}^1$ , граница которых не является гладкой кривой в пространстве-времени Минковского, а имеет точки возврата. Такие решения обладают не всюду положительной плотностью энергии и соответствуют спонтанному рождению струн из вакуума. Данные процессы приводят к неустойчивости вакуумного состояния в ковариантной гамильтоновой теории струн, о чем ранее упоминалось в работе [15].

Рассматривая процессы разрыва струны по схеме [13], мы описали взаимосвязь между особенностями на струнах и процессами разрыва. В частности, гладкий мировой лист может возникнуть только в результате разрыва особого мирового листа по одной из особых точек. Этот факт дает возможность построения моделей распада элементарных частиц, в которых гладкие мировые

листы описывают долгоживущие частицы, в то время как особые мировые листы распадаются в конечном итоге на гладкие в результате последовательности разрывов по особым точкам. Размерности  $d = 3, 4$  естественным образом выделены для таких моделей, как только те значения размерности, при которых на мировых листах существуют устойчивые особые точки. Рассмотрение таких моделей на квантовом уровне возможно, по крайней мере, для подмножеств фазового пространства [10–12], квантование которых свободно от аномалий при  $d = 3, 4$ .

### Приложение

Здесь мы приводим доказательства сформулированных выше теорем.

**T1.** Пусть  $x(\sigma, \tau)$  — экстремальная поверхность, приведенная в окрестности регулярной точки  $(\sigma_0, \tau_0)$  к конформной параметризации:  $\dot{x}^2 = -x'^2 > 0$ ,  $\dot{x}x' = 0$ . Рассмотрим локальную вариацию  $x \rightarrow x + \epsilon \delta x$ , т. е.  $\delta x \in C^\infty$ , обращающуюся в нуль снаружи малой окрестности точки  $(\sigma_0, \tau_0)$ . Заметим, что параметризация возмущенной поверхности более не является конформной. Вычислим вариацию площади:

$$\begin{aligned} \delta((\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2)^{1/2} &= \epsilon \delta \mathcal{L}_1 + \epsilon^2 \delta \mathcal{L}_2 + O(\epsilon^3), \\ \delta \mathcal{L}_1 &= \dot{x} \delta \dot{x} - x' \delta x', \\ \delta \mathcal{L}_2 &= (\dot{x}^2(\delta \dot{x}^2 - \delta x'^2) + ((\dot{x} - x')(\delta x' - \delta \dot{x}))((\dot{x} + x')(\delta x' + \delta \dot{x}))) / 2\dot{x}^2. \end{aligned}$$

Линейные по  $\delta x$  члены дают вклад  $\delta A_1 = \epsilon \int \delta \mathcal{L}_1 d\tau d\sigma = \epsilon \int (-\ddot{x} + x'') \delta x d\tau d\sigma = 0$  (здесь граничный член обращается в нуль, поскольку  $\delta x$  локальна,  $\ddot{x} = x''$  — условие экстремума в конформной параметризации). Рассмотрим вариации специального вида:  $\delta x(\sigma, \tau) = (0, 0, F(\sigma, \tau), 0, \dots)$  в системе координат, где  $\dot{x}(\sigma_0, \tau_0) = (c, 0, 0, \dots)$ ,  $x'(\sigma_0, \tau_0) = (0, c, 0, \dots)$ , т. е. вариации, ортогональные касательной плоскости к мировому листу в точке  $(\sigma_0, \tau_0)$ . Для таких вариаций  $\delta \mathcal{L}_2 = (F'^2 - \dot{F}^2)R/2$ , где  $R = 1 + (\dot{x}_2^2 - x_2'^2)/\dot{x}^2$ . В силу  $\dot{x}^2 = -x'^2 > 0$ ,  $\dot{x}x' = 0$  мы имеем неравенство  $R \geq 0$ , и поскольку  $R_0 = 1$  в точке  $(\sigma_0, \tau_0)$ , мы имеем  $R > 0$  в окрестности этой точки. Уже сейчас ясно, что  $\delta \mathcal{L}_2$  не является положительно определенной, однако имеется возможность, что  $\delta A_2$  станет положительной после интегрирования. Рассмотрим явный пример:  $F(\sigma, \tau) = f(\sigma^2/a^2 + \tau^2/b^2)$ , где  $f(\rho) \in C^\infty$  монотонна в  $\rho \in [0, 1]$  и  $f(\rho) = 0$  для  $\rho > 1$ . В пределе малых  $a, b$  мы имеем  $\delta A_2 = \epsilon^2 \int \delta \mathcal{L}_2 d\tau d\sigma = 2\pi \epsilon^2 ab(a^{-2} - b^{-2})I$ , где  $I = \int_0^1 f'^2 \rho^3 d\rho > 0$ , так что  $\delta A_2 < 0$  для  $a > b > 0$  (максимум) и  $\delta A_2 > 0$  для  $0 < a < b$  (минимум) (см. рис. 1).

**T2.** Касательная плоскость к открытому мировому листу на крае натянута на два вектора  $(Q', Q'')$  и изотропна в силу  $Q'^2 = Q'Q'' = 0$ . Касательный

вектор к струне  $x'$ , полученной как срез мирового листа плоскостью постоянного времени  $x'_0 = 0$ , содержится в касательной плоскости к мировому листу и на крае ортогонален  $Q'$ :  $x'Q' = 0 \Rightarrow \mathbf{x}'\mathbf{Q}' = 0$ , так что направление струны на конце и скорость конца ортогональны.

**T3.** Кривые, которые *не находятся* в общем положении, образуют замкнутое стратифицированное подмногообразие пространства мультиструй  ${}_2J^3(S^1, \mathbf{R}^n)$  [30], коразмерность которого больше, чем размерность рассматриваемого отображения. В силу критериев, приведенных в [31], этот случай можно устранить малой вариацией отображения. Утверждение теоремы следует из теоремы трансверсальности Тома [25,32], обобщенной в пространство мультиструй в [30].

**T4.** Нормальные формы определяются линейно независимыми членами низшего порядка в разложении Тейлора мирового листа в окрестности особой точки каждого типа. Центральная часть теоремы состоит в доказательстве того, что члены высшего порядка не изменяют структуру особенности и могут быть скомпенсированы LR-диффеоморфизмами. Например, разложение Тейлора мирового листа для случая (c), записанное в калибровке Рорлиха в световых координатах, связанных с направлением  $Q'_1 = Q'_2$ , содержит кроме нормальной формы  $(x_0, x_2, x_-) = (v, u^2, u^3)$  добавки в  $x_2, x_-$ -компоненты вида  $v^k u^n$  со следующим множеством возможных индексов:  $(k, n) \in \{k \geq 2, n = 0\} \cup \{k = 0, n \geq 3\} \cup \{k \geq 1, n \geq 2\}$ , где член с  $k = 0, n = 3$  входит только в  $x_2$ -компоненту. Эти члены можно представить как  $f_{kn} = x_0^k x_2^{n/2}$  для четных  $n$  и  $f_{kn} = x_0^k x_- x_2^{(n-3)/2}$  для нечетных  $n$  (они принадлежат идеалу, натянутому на мономы  $v, u^2, u^3$ ), поэтому их добавление эквивалентно гладкому отображению  $x \rightarrow x + f_{kn}(x)$ . Все эти отображения имеют единичную матрицу Якоби при  $x = 0$ , за исключением случая  $k = 0, n = 3$ , который соответствует невырожденному линейному отображению:  $(x_0, x_2, x_-) \rightarrow (x_0, x_2 + cx_-, x_-)$ , сохраняющему направления  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, 0)$ . Сходимость ряда Тейлора  $\sum c_{kn} v^k u^n$  соответствует сходимости  $\sum c_{kn} f_{kn}(x)$ , поэтому построенное отображение и его обратное аналитичны. Таким образом, поправки более высокого порядка к нормальной форме (c) можно скомпенсировать аналитическим L-диффеоморфизмом, сохраняющим светоподобное направление и связанную с ним изотропную плоскость. В случае (S):  $(v, u^2, vu^3)$  члены  $u^{2n+1}$  не могут быть скомпенсированы L-диффеоморфизмом (они не принадлежат идеалу). Препятствием здесь является линия самопересечения, положение которой на плоскости параметров  $v = 0$  инвариантно относительно L-диффеоморфизмов, но может быть изменено при добавлении  $u^{2n+1}$ . Нетрудно доказать, что эти члены можно устранить с помощью аналитических R-диффеоморфизмов (репараметризаций). Таким же образом преобразование к нормальной форме производится для особенностей другого типа. В каждом случае необходимо убедиться, что



построенное отображение аналитично и его линейная часть определяется невырожденной матрицей Якоби верхнетреугольного вида:  $J = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ .

Последнее свойство означает, что линейная часть построенного отображения сохраняет светоподобное направление и изотропную плоскость, первоначально связанную с  $Q'_1 = Q'_2$ .

**T5.** Если два годографа на окружности  $S^1$  не имеют пересечения, то один из них должен покрывать дугу с угловым размером  $\Delta\varphi < \pi$ . Это невозможно в силу условия  $\oint d\sigma e^{i\varphi} = 0$ , эквивалентного замкнутости кривой  $\mathbf{Q}(\sigma)$ .

**T6.** В калибровке Рорлиха топологический заряд каспа определяется ориентацией пары  $(\mathbf{Q}'_1, \mathbf{Q}''_1 + \mathbf{Q}''_2)$  и равен  $\text{sign}(\varphi'_1 + \varphi'_2)$ . Это число является частным случаем следующего топологического инварианта. Рассмотрим отображение  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ , определенное функцией  $f(\sigma_1, \sigma_2) = -\varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2)$ . Линия каспов  $(c)$  является нулевым уровнем  $f(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ . Вектор  $(-\varphi'_1, \varphi'_2)$  является нормальным элементом, а  $(\varphi'_2, \varphi'_1)$  — касательным элементом к  $(c)$ , который можно использовать для введения ориентации на  $(c)$ . Рассмотрим другой ориентированный контур  $(k)$  на торе, с касательным элементом  $(d\sigma_1, d\sigma_2)$ , пересекающий  $(c)$  в некоторой точке. Число  $\nu = \text{sign}(-\varphi'_1 d\sigma_1 + \varphi'_2 d\sigma_2)$  в этой точке называется *индексом пересечения*. Рассмотрим также отображение  $S^1 \rightarrow S^1$ , определенное с помощью ограничения  $f(\sigma_1, \sigma_2)$  на контур  $(k)$ . То же самое число  $\nu = \text{sign}(df)$ , вычисленное в прообразе точки 0 для этого отображения (т. е. в  $(c) \cap (k)$ ), называется *степенью отображения*. В силу теорем, приведенных в [26], сумма так определенных чисел по всем точкам пересечения  $(c) \cap (k)$  инвариантна относительно гомотопий отображения  $f$  и контура  $(k)$ . В нашем случае этот инвариант равен  $-n_1(k) + n_2(k)$ , где  $n_i(k)$  — числа оборотов  $\varphi_i(\sigma_i)$ , соответствующие полному обходу  $(k)$ . Утверждение теоремы соответствует случаю, когда  $(k)$  является срезом мирового листа плоскостью постоянного времени:  $(\sigma_1, \sigma_2) = (\tau_0 - \sigma, \tau_0 + \sigma)$ ,  $\sigma \in [0, 2\pi]$ , так что  $\nu = \text{sign}(\varphi'_1 + \varphi'_2)$  и  $\sum \nu_i = n_1 + n_2$ , где  $n_i$  — числа оборотов  $\varphi_i$  вдоль базисных циклов тора. Другой инвариант  $n_1 - n_2$ , равный индексу пересечения  $(c)$  с траекторией точки  $\sigma_0$  на струне:  $(\sigma_1, \sigma_2) = (\tau - \sigma_0, \tau + \sigma_0)$ ,  $\tau \in [0, 2\pi]$ , представляет полное число оборотов линии каспов вокруг цилиндра мирового листа замкнутой струны.

**T7.** Если функции  $\varphi_i$  монотонны и  $\text{sign} \varphi'_1 = \text{sign} \varphi'_2$ , то на срезах плоскостями постоянного времени мы имеем функцию  $f(\sigma) = -\varphi_1(\tau_0 - \sigma) + \varphi_2(\tau_0 + \sigma)$ , которая также монотонна и имеет интервал изменения  $f(2\pi) - f(0) = 2\pi(n_1 + n_2)$ . В этом случае уравнение  $f(\sigma) = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  имеет на интервале  $\sigma \in [0, 2\pi]$  в точности  $|n_1 + n_2|$  изолированных решений. Другие утверждения теоремы следуют из T6.

**T8.** Пересечение линии каспов соответствует седловой точке функции  $f(\sigma_1, \sigma_2) = -\varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2)$  на уровне  $f = 0$ . Малые вариации преобра-

зуют линию каспов аналогично рекомбинации гипербол  $x^2 - y^2 = c$ , когда  $c$  проходит через 0. Затем, используя условия  $\varphi'_1 + \varphi'_2 = 0$ ,  $d(\varphi'_1 + \varphi'_2) = (\varphi''_1 - \varphi''_2)d\sigma_1 \neq 0$ ,  $d\sigma_2 = -d\sigma_1$ , справедливые в точке  $W$ , мы видим, что функция  $\varphi'_1 + \varphi'_2$  изменяет знак при проходе через эту точку, поэтому созданные каспы имеют противоположные топологические заряды, в то время как скорости  $\mathbf{Q}'_{1,2}$  равны.

**Т9.** Внутренние области участков  $\{1, 1', 1'', \dots\}$ ,  $\{2, 2', 2'', \dots\}$ , 3 построены по правилу  $x(\sigma_1, \sigma_2) = (Q(\sigma_1) + Q(\sigma_2))/2$ , поэтому в них выполняются уравнения Лагранжа–Эйлера  $\partial_i p_i = 0$ . Необходимо только проверить, что условие  $\Delta I = \Delta p_i \epsilon_{ij} d\sigma_j = 0$  выполняется на линиях стыковки (характеристиках), т. е. поток импульса, вытекающий из одного участка, равен потоку импульса, втекающему в другой участок. Здесь  $\Delta p_i$  — разрыв импульса на характеристиках. Вычисляя  $p_i$ :  $p_1 = Q'(\sigma_2)$ ,  $p_2 = Q'(\sigma_1)$  (см. [18]), мы имеем  $\Delta I = -\Delta Q'(\sigma_1)d\sigma_1 + \Delta Q'(\sigma_2)d\sigma_2$ , где  $\Delta Q'(\sigma_i)$  — разрывы касательного вектора к опорной кривой. Далее, поскольку разрыв  $\Delta Q'(\sigma_i) \neq 0$  распространяется вдоль характеристики  $d\sigma_i = 0$  с тем же  $i$ , мы имеем  $\Delta I = 0$ . Фактически разрыв возникает только в компонентах импульса, касательных характеристикам. Поток импульса через свободный край обращается в нуль в силу тождеств  $Q'(\sigma_1) = Q'(\sigma_2)$ ,  $d\sigma_1 = d\sigma_2$ . Далее, рассматривая контуры, отделяющие точку разрыва и точки  $(A, C', \dots)$ , в которых характеристики пересекают края (см. рис. 20), мы видим, что поток импульса через эти контуры не меняется при непрерывном стягивании этих контуров в точки. Используя тот факт, что  $p_i$  ограничены:  $|p_i| < \text{const}$  (даже в особых точках мирового листа), мы видим, что поток импульса обращается в нуль в этом пределе, следовательно, не имеет утечки в этих точках.

**Т10.** Струна терпит разрыв в особой точке, когда касательные векторы к опорной кривой в точках  $A, C$  параллельны. В этом случае периодическое продолжение кривых  $CA$  и  $A''C'$  на рис. 21, з является  $C^1$ -гладким.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nambu Y.* Quark model and factorization of the Veneziano amplitude // Lectures at the Copenhagen Symp. on Symmetries and Quark Models. N. Y., 1970. P. 269.
2. *Hara O.* // Prog. Theor. Phys. 1971. V. 46. P. 1549.
3. *Goto T.* // Ibid. P. 1560.
4. *Барбашов Б. М., Черников Н. А.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1296.
5. *Барбашов Б. М., Черников Н. А.* // Там же. Т. 51. С. 658.
6. *Barbashov B. M., Chernikov N. A.* // Comm. Math. Phys. 1966. V. 5. P. 313.
7. *Brink L., Henneaux M.* Principles of String Theory. N. Y.; London: Plenum Press, 1988.
8. *Green M., Schwarz J., Witten E.* Superstring Theory. Cambridge Univ. Press, 1987. V. 1, 2.

9. *Barbashov V. M., Nesterenko V. V.* Introduction to the Relativistic String Theory. Singapore: World Scientific, 1990.
10. *Пронько Г. П., Разумов А. В.* // ТМФ. 1983. Т. 56, вып. 2. С. 192.
11. *Никитин И. Н.* // ТМФ. 1996. Т. 109. С. 202.
12. *Никитин И. Н.* // ЯФ. 1993. Т. 56. С. 230.
13. *Artru X.* // Phys. Rep. 1983. V. 97. P. 147.
14. *Пронько Г. П. и др.* // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14, вып. 3. С. 558.
15. *Желтухин А. А.* // ЯФ. 1981. Т. 34, вып. 2. С. 562.
16. *Brundobler S., Elser V.* // Am. J. Phys. 1992. V. 60, No. 8. P. 726.
17. *Dilão R., Schiappa R.* // Phys. Lett. B. 1997. V. 404. P. 57.
18. *Klimenko S.V., Nikitin I. N.* // Nuovo Cim. A. 1998. V. 111. P. 1431.
19. *Петров В. П., Шаров Г. С.* // ТМФ. 1996. Т. 109. С. 187.
20. *Dirac P. A. M.* Lectures on Quantum Mechanics. N. Y., 1964.
21. *Pronko G. P.* // Rev. Math. Phys. 1990. V. 2, No. 3. P. 355.
22. *Vladimirov V. S.* Equations of Mathematical Physics. 5th Ed. M.: Nauka, 1988.
23. *Dierkes U. et al.* Minimal Surfaces I. Springer-Verlag, 1991.
24. *Rohrlich F.* // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. P. 842.
25. *Арнольд В. И., Варченко В. И., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982. Ч. I.
26. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979.
27. *Alcubierre M.* // Classical and Quantum Gravity. 1994. V. 11. P. L73.
28. *Klimenko S., Dyachin V., Nikitin I.* Singularities on the world sheets of open relativistic strings // Scientific Visualization: Overviews, Methodologies, and Techniques / Eds. G. M. Nielson, H. Hagen, H. Muller. Los Alamitos, 1997. Ch. 18.
29. *Göbel M. et al.* Virtual Spaces: VR Projection System Technologies and Applications: Tutorial Notes (Eurographics '97, Budapest, 1997). 75 p.
30. *Мазер Дж. Н.* // УМН. 1974. Т. 29. С. 99.
31. *Арнольд В. И.* // УМН. 1972. Т. 27. С. 119.
32. *Thom R., Levin G.* Singularities of differentiable maps // Singularities of Smooth Maps. Gordon, 1967.