

К КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ОДНО- И МНОГОКАНАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ
СИСТЕМ В ПОДХОДЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
(их конструирование
с заданными спектральными параметрами)

Б.Н.Захарьев, В.М.Чабанов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
e-mail: zakharev@thsun1.jinrc.ru
homepage: <http://thsun1.jinr.ru/zakharev>

ВВЕДЕНИЕ	278
ОДНОКАНАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ	279
Мнимые добавки к уровням энергии	279
Как от мультиплета почти вырожденных состояний отделить одно	280
Две ямы	284
Три ямы	284
Преобразование состояний рассеяния в связанные состояния, погруженные в непрерывный спектр (СНС)	285
Расщепление дублета	286
Инверсия исходного потенциала при преобразовании SUSYQ (Дарбу)	286
Прозрачные возмущения периодических потенциалов	290
Новые степени свободы спектрального управления физическими системами (изменение "нефизических" спектральных параметров)	293
Рождение ненормируемых состояний	293
Что мешает двум связанным состояниям сконцентрироваться в узкой пространственной области	297
МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ	298
Существование связанных состояний и рассеяния при одной и той же энергии	305

Прозрачные системы	309
Преобразование SUSYQ в многоканальном случае	309
Межканальное движение	318
Классические точно решаемые многочастичные модели	318
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	319

К КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ОДНО- И МНОГОКАНАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ
СИСТЕМ В ПОДХОДЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
(их конструирование
с заданными спектральными параметрами)

Б.Н.Захарьев, В.М.Чабанов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
e-mail: zakharev@thsun1.jinrc.ru
homepage: <http://thsun1.jinr.ru/zakharev>

Собраны новые результаты по простым универсальным алгоритмам управления спектрами, рассеянием, распадами. Рассматриваются предельные (наиболее информативные) случаи: разделение в пространстве и по энергии "неразделимых", на первый взгляд, состояний, близких по энергии и форме модулей волновых функций, и, наоборот, сближение уровней вплоть до их вырождения. Демонстрируется обогащение набора элементарных трансформаций при переходе к многоканальным системам (к векторной структуре спектральных параметров – рычагов управления связанными каналами). Так, с их помощью можно концентрировать волны в одном канале, "выкачивая" волны из других. Выяснилось, что солитоноподобные потенциальные ямы являются "переносчиками" не только одноканальных, но и парциальных канальных состояний при их сепарации от остальных состояний. Дается описание не имеющего аналога в одноканальном случае блока безотражательного взаимодействия. Рассматривается "парадоксальное" сосуществование противоположных свойств конфайнмента и прозрачности при одной и той же энергии и одном и том же взаимодействии.

New results are collected about the simple universal algorithms of spectral, scattering and decay control. The limiting (the most informative) cases are considered, including the separation of seemingly "non-separable" states being close in energy and the shape of modules of wave functions, and vice versa: bringing together the levels up to the degeneration. Enrichment of the complete set of elementary transformations when going to multichannel systems (to vector structure of spectral parameters – the levers of management of coupled channels) is demonstrated. So it is possible to concentrate waves in one channel by "pumping" them out from other channels. It became clear that soliton-like potential wells are the "carriers" not only of one-channel but also partial channel states while their separation from another states. The description is given of a reflectionless interaction having no analog in one-channel case. A paradoxical coexistence of confinement and transparency at the same energy and for the same interaction is considered.

ВВЕДЕНИЕ

Только из самых простых и доступных вещей должны выводиться самые сокровенные истины.

Под интуицией я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума настолько прямое и отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения...

Рене Декарт

После нашего третьего обзора в ЭЧАЯ [1] из серии "Уроки квантовой интуиции" удалось выяснить много нового, да и на сделанное ранее наш взгляд несколько изменился.

Суть квантовой теории состоит в установлении связей характеристик взаимодействия с наблюдаемыми – спектральными данными. Научиться изменять по желанию наблюдаемые величины соответствующими вариациями взаимодействия – это хороший способ понять закономерности структуры микромира и процессов в нем. Этому может способствовать математический формализм обратной задачи и суперсимметрии (SUSYQ) [2–7]*. Действительно, в обратной задаче входными данными являются спектральные характеристики. Это делает ее удобной для исследования элементарных трансформаций взаимодействия при вариации отдельных наблюдаемых параметров. При этом обратную задачу нужно использовать не традиционно узко как численное приближенное восстановление потенциала конкретной системы, для которой имеются измеренные (с ошибками) данные рассеяния и спектры. Можно поставить задачу шире: вскрыть общие законы конструирования квантовых систем, не ограничивая себя реализованными природой примерами, составляющими лишь множество меры нуль среди всех допустимых объектов. В окружающем нас мире они представляют лишь редкие точки из континуума возможностей. Мы приобретаем теперь способность представить себе, по крайней мере теоретически, преобразования объектов разной природы друг в друга. Это делает их понимание более глубоким, единым и простым, наводя

* Следует оговориться, что под суперсимметрией в нерелятивистской квантовой механике понимается редукция к одномерному пространству соответствующего формализма для релятивистских систем.

между ними связующие мостики непрерывных переходов (континуум "траекторий" эволюции взаимодействий и волновых функций, см. наши книги и обзоры [8]).

Примером может служить преобразование свободного движения в систему с потенциальной ямой, имеющей заранее заданное расположение связанных состояний: с нижними уровнями как у осцилляторной, или прямоугольной, или линейной ям, см. рис.5.2 в [8], 1996. Другой пример – сгребание состояния рассеяния в связанное состояние, погруженное в непрерывный спектр, см. рисунки в [6, 8, 9]. То же относится к рождению новых и уничтожению имеющихся уровней энергии связанных состояний и т.п. [8].

Каждая квантовая система имеет как бы свой "паспорт" – спектральную функцию. Она указывает, при каких энергиях существуют физические состояния (дискретный, непрерывный, полосатый спектр) и сопоставляет каждому значению такой энергии свой спектральный весовой множитель (СВМ) c_ν или M_ν , связанный с пространственным распределением волн (их локализацией – "пропиской").

Качественная теория "квантового дизайна" для одномерных и одноканальных систем почти завершена: выяснено, какие потенциальные трансформации необходимы для желаемых изменений физических свойств. Выявлены элементарные составляющие – "кирпичики" таких трансформаций [1, 8–11]. Теперь задача состоит в том, чтобы распространить эти достижения на случай объектов с более сложным строением.

В первой части обзора мы рассмотрим одноканальные системы, а во второй – многоканальные с подчеркиванием их особенностей при сравнении с одноканальным случаем.

ОДНОКАНАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Мнимые добавки к уровням энергии. Рассмотрим превращение отдельных связанных состояний в распадающиеся в одномерном случае.

Оказывается, здесь годится обычное правило, сформулированное нами в [6, 8], только теперь применим его для мнимой части потенциального возмущения. Сдвиг вверх (вниз) лишь одного n -го уровня энергии связанного состояния, при бесконечном числе неподвижных остальных, производится добавлением n холмиков отталкивания (ямок притяжения) $\text{Im } \Delta V(x)$ к исходному потенциалу $V(x)$ в областях наибольшей чувствительности n -й волновой функции $\psi_n(x)$ к потенциальным возмущениям, именно – в средних частях n ее пучностей. А чтобы удержать от сдвигов остальные уровни, добавляются $n + 1$ компенсирующих ямок (холмиков) в области узлов $\psi_n(x)$. Примеры возмущений потенциалов и собственных функций при добавлении к значению избранного уровня мнимой единицы показаны на рис.1 для бесконечной прямоугольной ямы при $\overset{\circ}{E}_1 \rightarrow E_1 = \overset{\circ}{E}_1 + i$; $\overset{\circ}{E}_{j \neq 1} = E_{j \neq 1}$

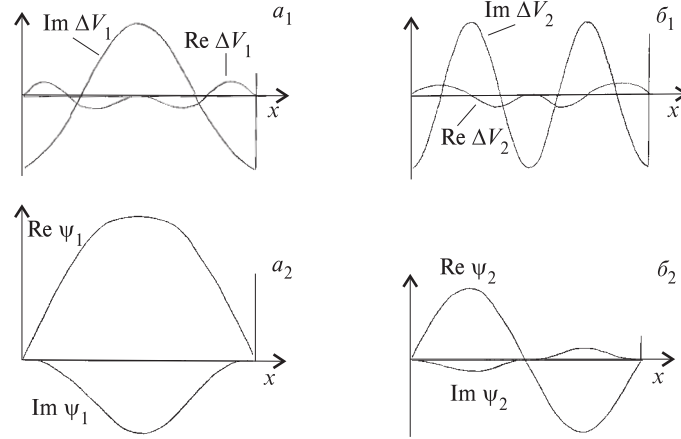


Рис. 1. Трансформация $\Delta V(x)$ бесконечной прямоугольной потенциальной ямы и волновых функций ψ_n при мнимой добавке к одному из уровней $\overset{\circ}{E}_n \rightarrow E + i$ связанных состояний (сдвиг в "мнимом направлении") без изменения спектральных параметров остальных состояний. Сдвиг осуществляется в основном мними же добавками к потенциалу в соответствии с качественными правилами вещественных сдвигов: а) сдвиг на $+i$ основного состояния $\overset{\circ}{E}_1 \rightarrow E_1 + i$; б) сдвиг на $+i$ второго уровня $\overset{\circ}{E}_2 \rightarrow E_2 + i$

и $\overset{\circ}{E}_2 \rightarrow E_2 = \overset{\circ}{E}_2 + i$; $\overset{\circ}{E}_{j \neq 2} = E_{j \neq 2}$. Вещественная часть потенциального возмущения оказывается при этом сравнительно малой. Попробуйте объяснить ее форму (авторам это пока не удалось).

Как от мультиплета почти вырожденных состояний отделить одно. Напомним обычное правило. Возмущения $\Delta V(x)$ для сдвига одного связанного состояния в пространстве строятся из универсальных элементарных блоков: комбинаций из одного отталкивающего холмика и одной ямки для каждой пучности стоячей волны. Для n -го состояния требуется n таких элементарных "кирпичиков"-блоков (пар: барьерчик + ямка). Положение уровней на шкале энергий при этом не меняется в силу взаимной компенсации отталкивания и притяжения. При этом оказывается, что наименьшие значения $\inf [|\psi_n(x)|^2]$ избранного состояния остаются фиксированными в пространстве. В этих же точках наименьшие значения и у модуля возмущения. Было установлено, что при сдвиге по x одного состояния, без изменения спектральных параметров остальных, последние испытывают некоторую "отдачу" (слегка отклоняются в противоположную сторону – тенденция к дополнительной сепарации их от избранного состояния). В пределе можно таким образом удалять избранное состояние на бесконечность, что эквивалентно уничтожению соответствующего уровня энергии в спектре оставшейся системы [8]. И наоборот, породить

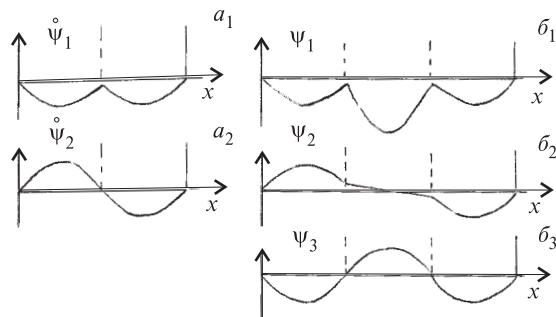


Рис. 2. Невозмущенные состояния в бесконечной прямоугольной яме, разделенной слабопроницаемыми δ -барьерами (штриховые линии), что приводит к группировке состояний в почти вырожденные мультиплеты: а) дублета основного и первого возбужденного состояний для двойной ямы; б) триплета для тройной ямы. Внутри парциальных ям невозмущенные волновые функции подобны для всех связанных состояний с точностью до знака. Только второе состояние триплета, имеющее узел в середине центральной ямы и принимающее на этом отрезке малые значения, имеет по отношению к другим состояниям "коэффициент пропорциональности", близкий к нулю

новый уровень можно, как бы притягивая состояние из бесконечности.

Рассмотрим теперь, как действует это простое правило в другом поучительном предельном случае очень близких уровней для обогащения наших качественных представлений о свойствах квантовых систем. При едва отличимой структуре максимумов (пучностей) и минимумов $|\psi_n(x)|^2$ почти вырожденных состояний, казалось бы, неясно, за что можно "зацепиться", чтобы отделить какое-либо из них в пространстве. Казалось бы, возникает противоречие: раньше разные состояния с разным числом пучностей стоячих волн мы сдвигали с помощью разного числа блоков (барьер + ямка). А у квазивырожденных состояний (в многоямных исходных системах) одинаковое количество пучностей. И каждая такая пучность похожа на соответствующие пучности других состояний с точностью до знака (рис.2). Сдвиг же любого из подобных друг другу состояний мультиплета требует близости формы потенциальных возмущений. В работе [14] мы поняли, за счет чего очень похожими преобразованиями исходного потенциала удастся сдвигать в сторону (по x) только одно из группы очень близких по энергии и по форме состояний, в то время как другие стоячие волны собственных функций перемещаются даже в противоположном (!) направлении, хотя можно было бы предположить одинаковое поведение для всех членов мультиплета при подобных трансформациях потенциала.

Используя точно решаемые модели с двумя и тремя ямами, мы убедимся, что "парадокс" допускает простое истолкование. При сепарации одного со-

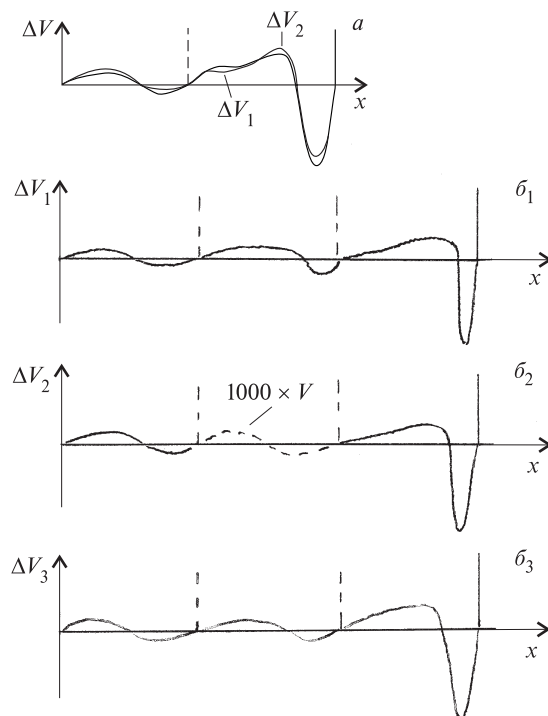


Рис. 3. Преобразования потенциалов ΔV_i из исходной прямоугольной ямы с перегородками в виде δ -барьеров (вертикальные штриховые линии), сдвигающие только избранное i -е состояние нижнего мультиплета к правой стенке потенциала в двухъямной (а) и трехъямной (б) системе. Эти потенциалы в парциальных отсеках представляют собой элементарные блоки (барьер-ямка). Малая центральная часть ΔV_2 на рис.б2 умножена на 1000, чтобы сделать ее более заметной

стояния было обнаружено два типа механизмов сдвига стоячих волн. Имеется смещение внутри каждой парциальной ямы. Это отвечает приобретенной прежде интуиции: на каждую пучность приходится по барьеру с ямкой в потенциальном возмущении (рис.3). Это возмущение, действительно, трансформирует отдельные пучности, "сгребая" их у всех состояний мультиплета в одну сторону. Но на это преобразование функций накладывается *изменение амплитуд* отдельных пучностей. Для избранного состояния эти амплитуды растут в сторону желаемого сдвига, усиливая сдвиги отдельных пучностей, а для остальных состояний амплитуды растут в противоположную сторону, пересиливая более слабые парциальные сдвиги в пределах каждой пучности (рис.4).

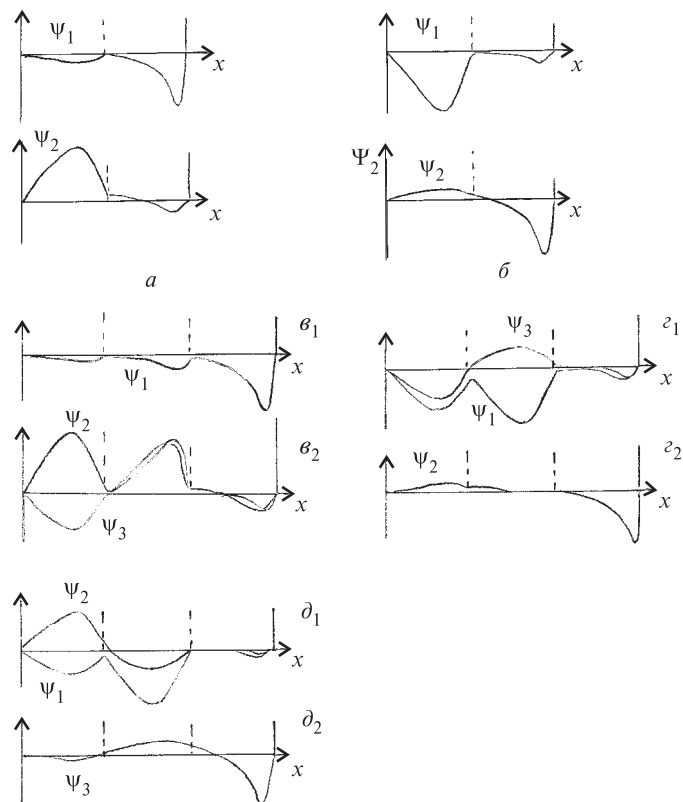


Рис. 4. Волновые функции (ненормированные), соответствующие потенциалам, показанным на рис.3 (пунктиром обозначены потенциальные перегородки): *a*) основное состояние дублета сдвинуто к правой стенке потенциала, при этом второе состояние смещено влево, *б*) второе состояние дублета сконцентрировано у правой стенки, первое состояние смещено влево; θ_1) основное состояние триплета сдвинуто вправо, при этом θ_2) второе и третье состояния триплета отклоняются влево; z_1) основное и третье состояния триплета отклоняются влево, когда z_2) второе состояние триплета сдвинуто вправо; d_1) основное и второе состояния триплета отклоняются влево, когда d_2) третье состояние триплета сдвинуто вправо. Внутри парциальных ямок волновые функции смещаются обычно вправо, но резонансная модуляция амплитуд выделяет правую ямку лишь для избранного состояния, а для остальных приводит к общему сдвигу (отклонению) в противоположном направлении

Столь разная "амплитудная модуляция" происходит из-за высокой чувствительности к малой разнице в энергии состояний мультиплета – резонансного усиления парциальных пучностей: для разных состояний резонансные

условия выполняются для разных парциальных частей функции в разной степени, что вызывает перераспределение интенсивности волн в них. То же самое явление обнаружено для другого предельного случая – ”сгребания” состояния рассеяния в связанное.

Две ямы. В качестве начальной точно решаемой модели мы выберем бесконечную прямоугольную яму шириной $2a$, разделенную на две части слабопроницаемым $V\delta(x-a)$ -барьером. Значения $V = -2 \operatorname{ctg}(a)$ и $a = \pi - 0,1$ выбраны так, чтобы второе состояние имело узел в точке расположения δ -барьера и чтобы волновая функция была там непрерывна (см. рис.2). Волновые функции двух самых нижних, почти полностью вырожденных связанных состояний имеют вид

$$\overset{\circ}{\varphi}_1^l = -\sin(x); \quad \overset{\circ}{\varphi}_1^r(x) = -\sin(2a-x); \quad (1)$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_2(x) = \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad (2)$$

функции в левой и правой частях полной потенциальной ямы помечены l и r соответственно, а в другую часть ямы продолжают (анти)симметрично, см. рис.2,а. Они нормированы так, чтобы производная функции $\overset{\circ}{\varphi}_{1,2}^r(x)$ в точке $x = 2a$ была равна 1 (специальный вид ”регулярных” решений). Производная в этой точке для ν -го связанного состояния $\overset{\circ}{\Psi} - \nu(x)$ со стандартной нормировкой может быть выбрана в качестве спектрального весового множителя.

На рис.3,а показаны преобразования потенциала, сдвигающие основное или более высокое состояние вправо. Они подобны, но эффект их действия на чуть различающиеся по энергии два низших состояния (рис.4,а,б) различен, хотя имеются некоторые общие особенности. Все стоячие волны внутри отдельной (левой или правой) ямы перемещаются вправо в соответствии с нашими обычными, выработанными ранее представлениями, но различная амплитудная модуляция пучностей стоячих волн обеспечивает общий сдвиг обоих состояний в противоположных направлениях. Это получается из-за влияния эффекта интерференции многократно отраженных волн (резонансная чувствительность к возмущению): в одной части ямы это вмешательство конструктивно и приводит к усилению волны, а в другой – деструктивно и ведет к ее ослаблению.

Три ямы. Рассмотрим случай исходной бесконечной прямоугольной ямы шириной $3a$ с двумя слабопроницаемыми барьерами-перегородками $V\delta(x-a)$ и $V\delta(x-2a)$, приводящими к сближению (почти вырождению) трех самых низких связанных состояний, см. рис.2,б.

Значения V и $a = \pi - 0,1$ выбраны так, чтобы третье состояние имело узлы на δ -барьерах, и волновая функция в этих точках была бы непрерывна (излом функции δ -барьером пропорционален величине функции в точке барьера и исчезает, если барьер расположен в узле функции).

Есть интересная особенность невозмущенной функции второго состояния $\overset{\circ}{\varphi}_2(x)$. К ней предъявляются, казалось бы, противоречивые требования: с одной стороны, эта функция должна иметь узел в середине ямы ($x = 3a/2$), но как член мультиплета квазивыврожденных состояний она должна быть приближенно пропорциональна внутри отдельной средней ямы основному и третьему состоянию, которые имеют здесь не узлы, а пучности. Единственный способ заставить функцию $\overset{\circ}{\varphi}_2(x)$ удовлетворять обоим требованиям – это сделать ее малой в центральной яме, что приближенно можно интерпретировать как "пропорциональность с фактором, близким к нулю", функциям соседних состояний $\overset{\circ}{\varphi}_{1,3}(x)$, см. рис.2,б₂.

Преобразованные потенциалы и волновые функции определяются теми же самыми формулами, что и в случае с двумя ямами [14]. На рис.3,б показаны изменения прямоугольного потенциала, разделенного на три части двумя δ -барьерами, когда увеличивается только один из СВМ. Соответствующие преобразованные волновые функции показаны на рис.4,б,в,г,д.

Сравнение результатов для трех- и двухъямной систем подтверждает высказанные выше выводы.

Понятие о влиянии резонансного механизма на локализацию волн, с которым мы здесь встретились, должно быть полезным и для объяснения трансформаций состояний континуума, к рассмотрению которых мы переходим.

Преобразование состояний рассеяния в связанные состояния, погруженные в непрерывный спектр (ССНС). Такие ССНС рассматривались нами еще в [6, 8, 12]. Но теперь, на основании вышеизложенного, их появление можно объяснить как сгребание к началу координат функции в одной из точек непрерывного спектра $E = E_b$ (индекс b отвечает создаваемому связанному состоянию) [13]. Можно также дать интерпретацию происходящего с соседними состояниями континуума, см. пример на рис.5,а, где показана волновая функция для состояния рассеяния с энергией, близкой к E_b . Если для ССНС каждой пучности волновой функции отвечает блок ямка-барьер, то для соседних состояний узлы функции не только не будут в точности совпадать с концами блоков (ослабление сгребания), но на отдельных участках будет сильное расфазирование и там может происходить (локальное) сгребание волн в противоположном направлении, что приводит к биениям, заметным на рис.5,а. Имеется также конкуренция тенденций сгребания и модуляции амплитуд колебаний стоячих волн за счет конструктивной или деструктивной интерференции волн на разных участках оси x . Сами ССНС можно рассматривать как частный случай такой картины, где волна сгребается к началу координат со *всей* оси, имеется лишь *одна* пучность биения.

Сближение двух уровней ССНС приводит к расщеплению ССНС на две группы волн. Одна остается вблизи начала координат. Другая удаляется от нее (в пределе уходит на бесконечность), см. рис.5,б, что напоминает разрыв

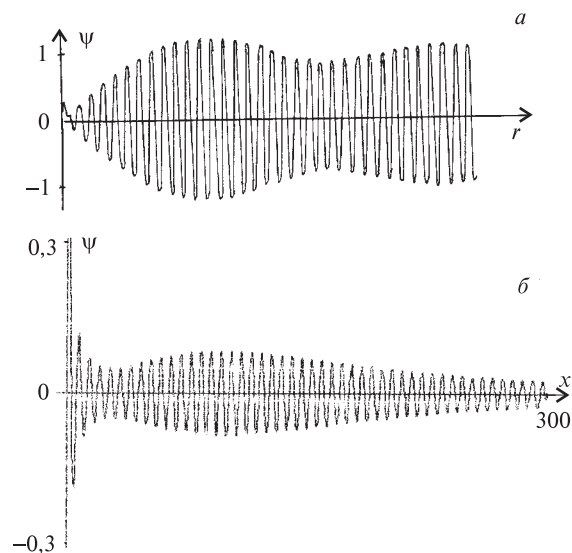


Рис. 5. *а*) Биения в волновой функции состояния рассеяния, близкого к связанному состоянию, погруженному в континуум (ССНС). Биения объясняются локальным периодическим рассогласованием фаз колебаний потенциала и функции (в отличие от ССНС). Стребание влево происходит лишь на отдельных участках, а на соседних – даже в обратную сторону, что приводит к локальным усилениям амплитуды стоячей волны. На больших расстояниях биения ослабевают и функция выходит на невозмущенный режим колебаний без фазового сдвига (узлы функции при преобразовании не сдвигаются). *б*) "Разрыв" на две части волновой функции ССНС при сближении уровней энергий двух ССНС

обычных связанных состояний при их вырождении [17]. У потенциала же при этом заметны биения из-за "сложения" колебаний с близкими частотами (амплитуды спадают $\sim 1/x$).

Расщепление дублета. Эффект разрыва и *пространственного расталкивания* состояний при сближении соответствующих уровней энергии был открыт в [17]. Рассмотрим теперь обратный процесс удаления друг от друга близких уровней мультиплета. На рис.6 показаны изменения плоского дна прямоугольной потенциальной ямы со слабопроницаемой перегородкой посередине при опускании уровня основного состояния нижнего дублета и при сдвиге вверх уровня второго состояния. При этом остальные уровни остаются на месте. Оба возмущения $\Delta V_{1,2}(x)$ составлены из блоков (барьер-ямка, ямка-барьер), *сдвигающих* пучности волновых функций друг к другу.

Инверсия исходного потенциала при преобразовании SUSYQ (Дарбу). Замечательная суть SUSYQ состоит в том, что, факторизуя исходный гамиль-

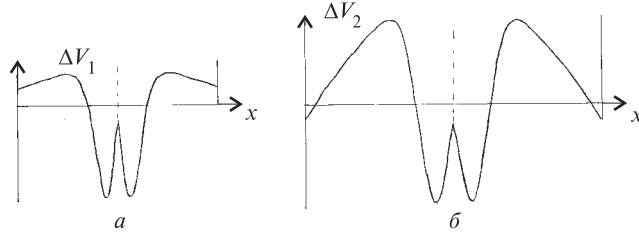


Рис. 6. Изменение дна прямоугольной потенциальной ямы со слабопроницаемой перегородкой в центре при расщеплении нижнего дублета E_1, E_2 связанных состояний: а) добавка к потенциалу, сдвигающая основное состояние E_1 вниз; б) возмущение потенциала, сдвигающее уровень второго состояния E_2 вверх

тониан H – дифференциальный оператор второго порядка – на дифференциальные операторы первого порядка A^+, A^- , а потом переставляя A^\pm местами, мы получаем, что потенциалы и волновые функции нового гамильтониана *очень просто* выражаются через V, ψ исходной системы [20,24,25,27,29].

Инверсия отдельных δ -потенциалов. Рассмотрим преобразование $\delta(x)$ -потенциала $V_0(x) = v_0\delta(x)$ при порождении связанного состояния с сохранением отражательных свойств системы. Мы применяем преобразование SUSYQ (Дарбу), которое **сохраняет** спектральную структуру, за исключением одного уровня связанного состояния, добавляемого или удаляемого из спектра системы при данном преобразовании [18,21,23]. Запишем исходный гамильтониан в факторизованном виде

$$H_- = \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) = A^+A^- + \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} < 0, \quad (3)$$

где \mathcal{E} есть так называемая энергия факторизации, A^- имеет вид

$$A^- = -\frac{d}{dx} + W(x), \quad (4)$$

A^+ – его эрмитово сопряжение. $W(x)$ может быть получено из уравнения

$$A^-\psi^- = \left[-\frac{d}{dx} + W(x)\right]\psi^- = 0. \quad (5)$$

Здесь ψ^- является решением уравнения Шредингера для гамильтониана H при энергии \mathcal{E} и

$$A^- = -\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \ln \psi^-. \quad (6)$$

Для SUSYQ-партнера $H_1 \equiv A^- A^+ + \mathcal{E}$ имеем следующее выражение (это и есть собственно преобразование Дарбу):

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi^-. \quad (7)$$

Пусть ψ_E^- является собственной функцией H при энергии E . Тогда $\psi_E^+ \equiv A^- \psi_E^-$ есть решение уравнения Шредингера с H_1 при той же энергии:

$$H_1(A^- \psi_E^-) = A^- A^+(A^- \psi_E^-) + \mathcal{E}(A^- \psi_E^-) = A^- H \psi_E^- = E A^- \psi_E^-. \quad (8)$$

При энергии факторизации \mathcal{E} функция ψ^+ получается путем решения дифференциального уравнения первого порядка

$$A^+ \psi^+ = \left[\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \ln \psi^- \right] \psi^+ = 0, \quad (9)$$

что дает

$$\psi^+ = \frac{1}{\psi^-}. \quad (10)$$

Само решение $\psi^-(x)$ можно строить в виде произвольной комбинации линейно независимых решений исходного уравнения Шредингера $\psi_1^-(x)$ и $\psi_2^-(x)$ при энергии факторизации \mathcal{E} :

$$\psi^-(x) = \psi_1^-(x) + c\psi_2^-(x). \quad (11)$$

В частности, $\psi^-(x)$ можно выбрать безузловой и растущей асимптотически. Тогда $\psi^+(x)$ в силу (10) будет нормируемым (асимптотически затухающим) решением нового уравнения Шредингера, что означает порождение нового связанного состояния.

Из выражения для преобразованного потенциала можно явно увидеть эффект инверсии потенциального пика (ямы). Действительно,

$$\begin{aligned} V_1(x) &= V_0(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi^-(x) = \\ &= -V_0(x) + 2\mathcal{E} + 2\left\{ \frac{[\psi^-(x)]'}{\psi^-(x)} \right\}^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где мы воспользовались выражением для $[\psi^-(x)]''$, вытекающим непосредственно из уравнения Шредингера. Заметим, что член V_0 появляется в последнем равенстве со знаком минус. В нашем случае V_0 является δ -функцией, и поэтому остальные (конечные при всех x) члены не могут скомпенсировать переворот δ -барьера (ямы):

$$V_1(x) = -v_0\delta(x) + 2\mathcal{E} + 2\left\{ \frac{[\psi^-(x)]'}{\psi^-(x)} \right\}^2. \quad (13)$$

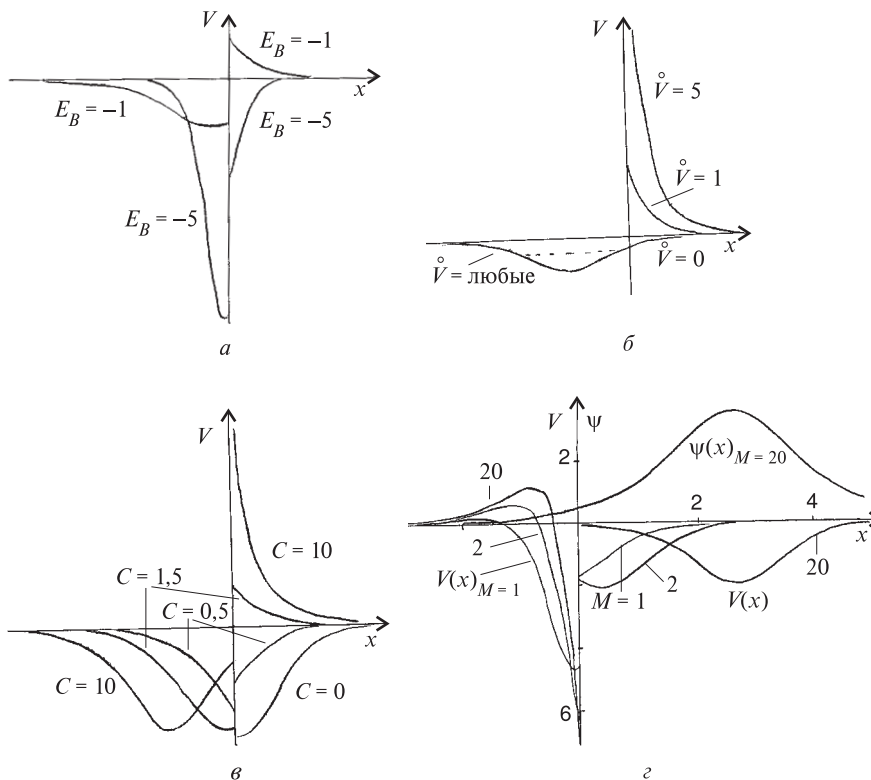


Рис. 7. Трансформация исходного δ -образного потенциального пика при порождении связанного состояния в зависимости от а) энергии связи порождаемого состояния, б) силы потенциального барьера \bar{V} и в) спектрального параметра c , определяющего положение связанного состояния в пространстве. г) Потенциалы при двойном преобразовании SUSYQ без инверсии (порождение связанного состояния и сдвиг в пространстве)

Следует подчеркнуть, что формула (12) верна и в случае любого одномерного потенциала. Однако изменение знака может скрываться на фоне дополнительных членов.

Указанное преобразование не меняет модуля коэффициента отражения и прохождения. Действительно, пусть $\psi_{\bar{E}}(x)$ есть решение исходного уравнения Шредингера при энергии E , удовлетворяющее асимптотическому условию

$$\psi_{\bar{E}}(x) \sim \exp(-ikx) + r(k) \exp(ikx), \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда, согласно (6), (8), получаем выражение для асимптотики возмущенного

решения

$$\psi_E^+(x) = [\psi_E^-(x)]' + [\psi_E^-(x)]' \psi_E^-(x) / \psi_E^-(x),$$

где

$$\psi_E^-(x) \sim \exp(\kappa x), \quad x \rightarrow \infty$$

и

$$\psi_E^-(x) \sim \exp(ikx) + \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} r(k) \exp(ikx), \quad x \rightarrow \infty.$$

Здесь решение нормировано на единичную амплитуду падающей волны. Таким образом, коэффициент отражения $r(k)$ остается неизменным по модулю, меняется только его фаза.

На рис.7 показано, как исходный δ -пик, помимо инверсии (переворота в δ -яму), дополняется потенциальными возмущениями при порождении связанного состояния в зависимости от энергии связи порождаемого состояния, силы потенциального барьера $\overset{\circ}{V}$ и спектрального параметра s , определяющего положение связанного состояния в пространстве. Показан также потенциал при двойном преобразовании SUSY, когда в результате двух инверсий δ -пик возвращается в свое исходное состояние (рис.7,з).

Прозрачные возмущения периодических потенциалов. Обратная задача для периодических потенциалов рассматривалась в прошлом разными авторами, см. ссылки в [8]. Для периодических потенциалов характерен полосатый спектр с зонами проводимости (разрешенными зонами), по которым распространяются блоховские волны. Решения в запрещенных зонах-лакунах экспоненциально растут ("разбалтываются"). Создадим связанное состояние в нижней запрещенной зоне периодического потенциала, сохраняя зонную структуру. Однако чисто солитонобразные потенциальные возмущения не могут в этом случае быть прозрачными, как это отмечалось выше, так как возникает локальное опускание нижних границ запрещенных зон в разрешенные зоны. Такие прогибы действуют как эффективные потенциальные барьеры, "сवेशивающиеся сверху" и дающие сильное отражение [8].

Рассмотрим два случая исходных периодических потенциалов [15]: так называемую гребенку Дирака – сумму периодически расположенных δ -барьеров (или ям)

$$V_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0 \delta(x - na) \quad (14)$$

и периодический потенциал вида

$$V_0(x) = v_n \cos(\pi x)^{2n}, \quad (15)$$

где n есть целое число, а величина v_n выбрана для нормировки потенциала таким образом, чтобы в пределе $n \rightarrow \infty$ этот потенциал переходил в гребенку Дирака с $v_0 = 1$.

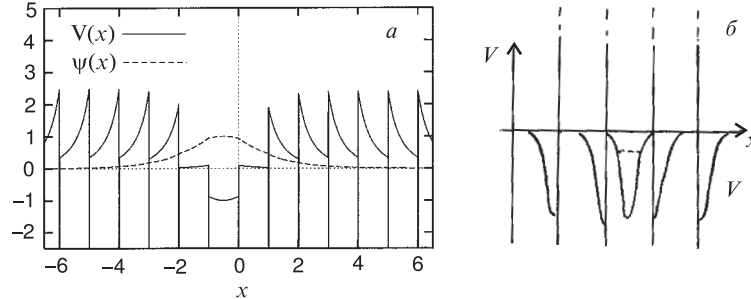


Рис. 8. Трансформация с использованием SUSY-преобразования: а) гребенки Дирака при порождении связанного состояния в нижней запрещенной зоне, сопровождающаяся инверсией δ -пиков и появлением компенсирующих конечных потенциальных пиков для сохранения спектральных параметров системы; б) периодических δ -ям, превращающихся в гребенку Дирака и компенсирующих потенциальные ямки конечной глубины

Для порождения связанного состояния в нижней запрещенной зоне периодического потенциала применим преобразование Дарбу (SUSYQ), не нарушающее характеристик остального спектра. Действительно, если энергия E принадлежит разрешенной зоне, т.е. ψ_E^- не растет на асимптотике экспоненциально, то не будет расходиться и новое решение $A^-\psi_E^-$, так как функция $W(x)$, стоящая в операторе A^- , конечна при больших $|x|$. Другими словами, преобразование Дарбу не смещает границы энергетических лакун, хотя преобразованный потенциал уже не является периодическим.

На рис.8,а показаны эффекты преобразования SUSYQ, порождающего связанное состояние в нижней запрещенной зоне для гребенки Дирака, состоящей из потенциальных δ -барьеров (пиков). Сила потенциала взята $v_0 = 1$ и энергия связанного состояния выбрана $\mathcal{E} = -1$ в (безразмерных единицах).

Здесь "δ-барьеры" переходят в "δ-ямы". Острые конечные пики в потенциале появляются, чтобы поднять на прежние места спектральные полосы, опускающиеся при инверсии гребенки. Ямка между средними пиками обеспечивает появление связанного состояния.

Преобразование периодических δ -ям с $v_0 = -0,5$ показано на рис.8,б при выборе энергии связанного состояния $\mathcal{E} = -1$. Появляющиеся конечные потенциальные ямки опускают зоны, поднятые вверх при перевороте δ -ям, на их прежние места, а средняя ямка обеспечивает появление заданного связанного состояния.

На рис.9 показан случай периодических потенциалов, задаваемых формулой (15) с разными значениями n . На рис.9,а показана трансформация исходного потенциала с $n = 1$ и $\mathcal{E} = -1$. Здесь также происходит пере-

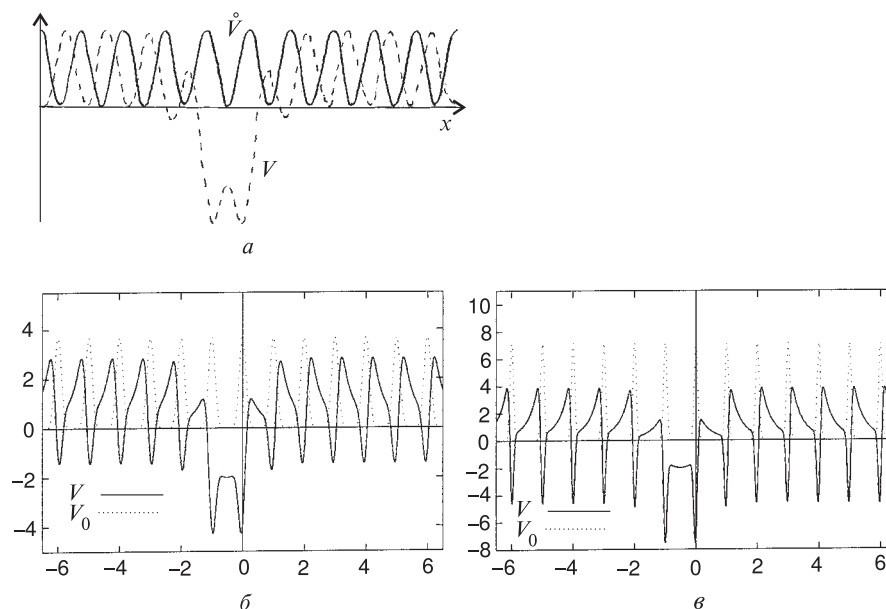


Рис. 9. Трансформация гладкого периодического потенциала (15), происходящая при порождении связанного состояния в нижней запрещенной зоне в зависимости от параметра, приближающего его к гребенке Дирака: *a*) $n = 1$; *б*) $n = 8$; *в*) $n = 32$. Волновые функции соответствующих связанных состояний обозначены штриховой линией

ворот потенциала, хотя это не столь четко видно (сдвиг по "фазе" исходного периодического потенциала). На рис.9,*б,в* представлены результаты с $n = 8$, $n = 32$. Рост величины n приближает потенциал к гребенке Дирака (ср. с рис.8,*а*).

На рис.7–9 можно заметить элементы трансформации потенциала ΔV , сдвигающиеся к центру нижние состояния (как на рис.6) при отщеплении уровня связанного состояния от непрерывного спектра. Это тенденция, противоположная разрыву и расталкиванию отдельных частей состояний при сближении уровней [17], см. также рис.5,*б*.

Отметим попутно, что связанные состояния под каждой из разрешенных зон могут порождаться и в подходе обычной прямой задачи при произвольно малом притягивающем возмущении потенциала, как это имеет место в случае свободного движения на всей оси. По аналогии можно ожидать, что связанное состояние может возникнуть **над** каждой разрешенной зоной при сколь угодно малой отталкивающей добавке к потенциалу и тем самым создающей "перевернутые потенциальные ямки", вдавленные внутрь запрещенных зон.

До сих пор мы изменяли лишь отдельные спектральные параметры. Но оказывается, что при вариации отдельных "нефизических" спектральных характеристик можно изменять бесконечное (!) число физических параметров в рамках точно (!) решаемых моделей обратной задачи и SUSYQ, что обогащает арсенал алгоритмов квантового проектирования (дизайна).

Новые степени свободы спектрального управления физическими системами (изменение "нефизических" спектральных параметров). Данному оператору Шредингера отвечают определенные граничные условия. Эти условия можно накладывать в соответствии с физическими требованиями. Но имеется еще бесчисленное множество ("математических") способов задания поведения решений на концах (или асимптотиках) области движения волн. И в каждом таком случае имеется свой набор спектральных параметров, однозначно фиксирующих форму потенциала $V(x)$. Вариация отдельных "математических" параметров приводит к изменению потенциала, которого, как правило, можно добиться только путем изменения бесконечного числа параметров физических. По теореме о двух спектрах* (например, одного физического и одного нефизического, см. [6] и ссылки там) два набора собственных значений без весовых факторов тоже фиксируют вид $V(x)$. При этом изменение одного собственного значения в двух наборах при фиксированном положении остальных (что описывается точными моделями [31]) приводит к изменению всех (!) весовых факторов (в такой постановке задачи они не фиксированы). Порождение нефизических состояний возможно и с помощью преобразований SUSYQ (Дарбу) [18, 32]. Таким образом, резко расширяется класс точно решаемых квантовых моделей, представляющих большую ценность благодаря удобству пользования ими.

Интересным примером может служить случай симметричных преобразований осцилляторного потенциала $V(x)$, когда уровни связанных состояний на всей оси x (один спектр) одновременно представляют собой два спектра задачи на полуоси. Состояния, волновые функции которых не обращаются в нуль в центре ямы, являются нефизическими состояниями для половины потенциала (на полуоси).

Рождение ненормируемых состояний. Рассмотрим рождение нефизических "уровней" в случае исходных δ -барьера (или ямы) $V\delta(x)$, расположенного в точке $x = 0$:

$$-\psi''(x) + V\delta(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (16)$$

*Теорема была доказана Г.Боргом для конечного отрезка, ее обобщили на бесконечные интервалы авторы работы [30]. Интересно было бы установить, возможно ли обобщить ее на случай, когда нефизические состояния ненормируемы и имеют экспоненциальный рост на больших расстояниях.

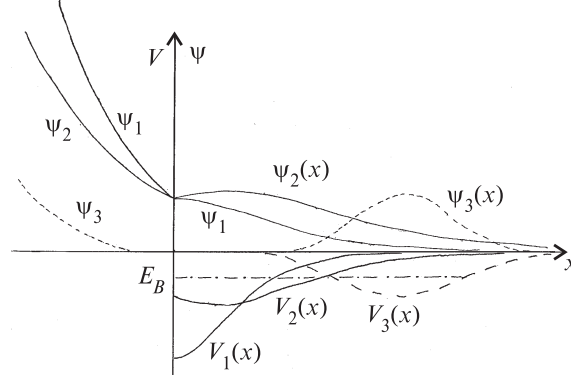


Рис. 10. Деформация δ -образной потенциальной ямы: $-V\delta(x) \rightarrow V\delta(x) + V_1(x) \rightarrow V\delta(x) + V_2(x) \rightarrow V\delta(x) + V_3(x)$ при рождении ненормируемого (нефизического) состояния с $E = \mathcal{E}$ все ближе к единственному связанному состоянию с $E = E_b$. Однородные граничные условия для нефизического состояния выбраны на обеих асимптотиках так, чтобы это решение было чисто спадающим вправо как $\exp(-\kappa_1 x)$ (коэффициенты при $\exp(\kappa_1 x)$ выбраны равными нулю). Чем ближе E к E_b , тем дальше *вправо* удаляется яма, в которой в основном локализуется связанное состояние. Эта *ямка-переносчик* связанного состояния постепенно приобретает солитоноподобный вид при сближении $E = \mathcal{E}$ с E_b и затем практически не меняется. При этом в яме все более похожими становятся справа физическое $\psi_b(x)$ и нефизическое $\psi_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}(x)$ состояния (слева $\psi_{1,2,3}(x)$ отклоняется от $\psi_b(x)$, экспоненциально возрастая). При таких SUSYQ-преобразованиях остаются неизменными коэффициенты отражения (прохождения) для состояний непрерывного спектра (ср. с результатами [8], где мы впервые продемонстрировали *инверсию знака исходных δ -ям и пиков* при SUSYQ-преобразовании)

Выберем энергию ниже физического спектра $E = \mathcal{E}$ как "энергию факторизации" гамильтониана (3) на более простые операторы первого порядка A^+ , A^- (5), (9), где

$$\begin{aligned} \psi(x \leq 0) &= \exp(\kappa_1 x), \\ \psi(x \geq 0) &= b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x), \\ \kappa_1 &= \sqrt{-\mathcal{E}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Будем интерпретировать преобразование SUSYQ (см. детали формализма в [18]) как порождение нефизического состояния с $E_{\text{нф}} = \mathcal{E}$:

$$\psi_{\text{нф}}(\mathcal{E}, x) = \frac{1}{\psi(\mathcal{E}, x)}; \quad (18)$$

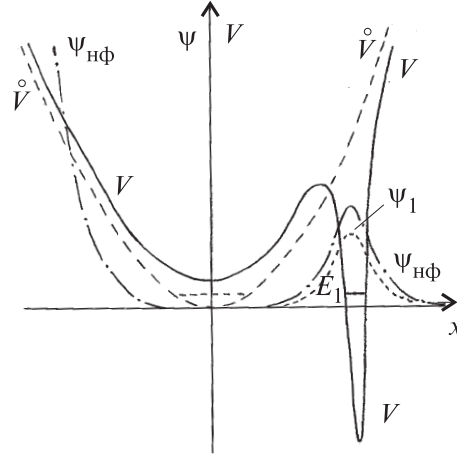


Рис. 11. Деформация осцилляторной потенциальной ямы при рождении нефизического состояния с $E = E_{\text{нф}}$ под основным связанным состоянием с $E = E_1$. Нефизическое состояние выбрано спадающим справа. Этот рисунок дополняет приведенный в [18]. В нашем случае более отчетливо видно, что чем ближе $E_{\text{нф}}$ к E_1 , тем более становятся похожими основное $\psi_1(x)$ и нефизическое $\psi_{\text{нф}}(x)$ состояния справа, удаляясь при этом вправо в типичной потенциальной ямке-переносчике (слева $\psi_{\text{нф}}(x)$ отклоняется от $\psi_1(x)$, экспоненциально возрастая). Остальные уровни как физического, так и нефизического спектра остаются на месте (на энергетической шкале) и относительно мало сдвигаются по оси

то есть

$$\begin{aligned} \psi_{\text{нф}}(x \leq 0) &= \exp(-\kappa_1(x)); \\ \psi_{\text{нф}}(x \geq 0) &= \frac{1}{b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x)}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$b_1 = \frac{v_0}{2\kappa_1}; \quad c_1 = 1 - \frac{v_0}{1\kappa_1}. \tag{20}$$

Потенциал в преобразованном гамильтониане (12) показан на рис.10 (обратите внимание на инверсию знака исходного дельта-потенциала).

Чем ближе по энергии нефизическое состояние к физическому, тем более похожи друг на друга соответствующие волновые функции как решения одного и того же уравнения Шредингера (с одним и тем же потенциалом) и с одинаковыми граничными условиями с одной стороны при почти одной и той же энергии. Физическое состояние вместе с близкой к нему частью нефизической функции удаляются специальной вспомогательной потенциальной

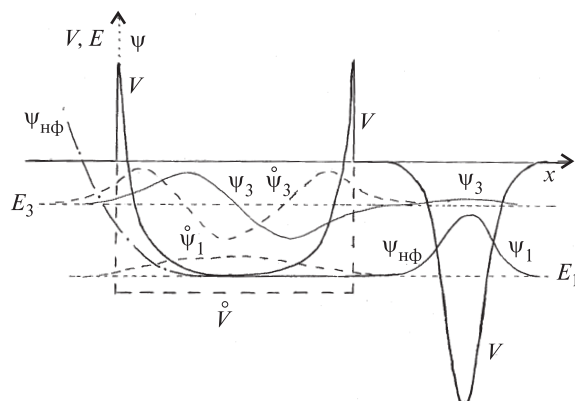


Рис. 12. Деформация прямоугольной потенциальной ямы конечной глубины при рождении нефизического состояния с $E = E_{\text{нф}}$ под основным связанным состоянием с $E = E_1$. Нефизическое состояние, как и в предыдущих примерах, выбрано спадающим справа

ямкой-переносчиком в сторону от области основной локализации исходного физического состояния.

Поведение формы потенциала при приближении значения энергии порождаемого нефизического состояния к физическому напоминает явление "аннигиляции" [32] при вырождении двух физических состояний*. В пределе $E \rightarrow E_b$ физическое состояние уносится на бесконечность (как бы эффективно исчезает из спектра потенциала, оставшегося на месте исходной δ -ямы).

На рис.11 показана трансформация осцилляторной ямы при порождении нефизического состояния под основным физическим состоянием $E_{\text{нф}} \rightarrow E_1$. Впервые небольшие трансформации такого типа были показаны в работе Сукумара [18], но там не говорилось об интерпретации полученной картины как порождении нефизического состояния и не было так отчетливо видно удаление общей части нефизического и физического состояний как угодно далеко в сторону при сближении $E_{\text{нф}} \rightarrow E_1$.

Аналогичная картина получается и для исходной конечной прямоугольной ямы глубиной \bar{V} (см. рис.12). Из приведенных рисунков следует, что при рассмотренных преобразованиях в пределе исходная симметричная яма сжимается, дно ее приподнимается без нарушения симметрии (если не учитывать потенциал-переносчик, сдвигающий связанное состояние). Правда, еще

*Этого не происходит при сближении двух нефизических состояний с одинаковыми граничными условиями (возможно, оттого, что нет ортогональности таких состояний).

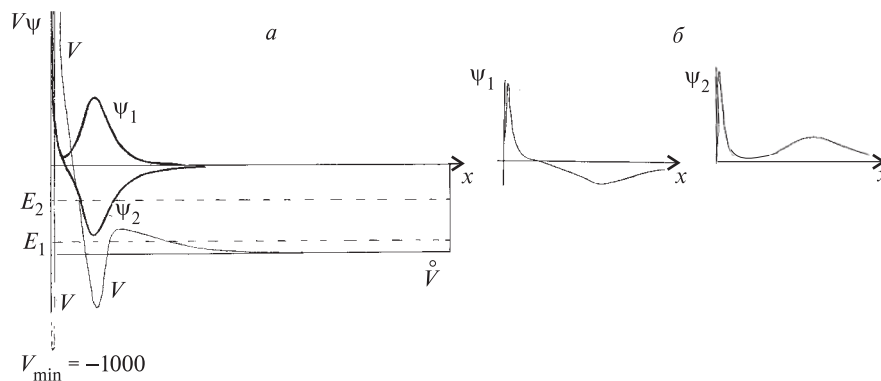


Рис. 13. *а)* Сгребание двух связанных состояний с E_1, E_2 исходной прямоугольной ямы при одновременном увеличении их СВМ. В узкой и глубокой яме, образовавшейся в начале координат за высоким узким барьером в потенциале V , связанным состояниям Ψ_1, Ψ_2 становится тесно, и они расщепляются, как при вырождении [17] (эффективное вырождение, хотя в данном случае уровни не сближались). В окрестности $x = 0$ остаются пучности одинакового знака, а подобные пучности разного знака вытесняются за барьер. *б)* Сгребание двух ССНС при $E_1 = 1, E_2 = 4$ при увеличении СВМ до $c_1 = c_2 = 1000$

предстоит ясно сформулировать качественные правила изменения при этом спектральных весовых факторов всех физических состояний в зависимости от энергии.

Что мешает двум связанным состояниям сконцентрироваться в узкой пространственной области. При сгребании в начало координат двух состояний прямоугольной ямы обнаруживаются рудименты эффекта аннигиляции (расталкивания) состояний при вырождении [17]. Уровни исходной достаточно широкой ямы, хотя и остаются на месте (не сближаются), но в узкой яме, отделенной от остального пространства сгребующим барьером, им становится как бы тесно. В суженной яме им полагалось бы располагаться дальше друг от друга по энергии. Это приводит к "разрыву" сближаемых состояний на две части, как при эффективном вырождении (см. рис.13,*а*). Поэтому слева в узкой яме вблизи $x = 0$ остается лишь часть функций, а остальная вытесняется во внешнюю область. Части разорванных функций, как и при аннигиляции [17], сближаются по форме (с точностью до знака).

Аналогичная картина получается и для двух ССНС, прижимаемых к началу координат $x = 0$ (см. рис.13,*б*). Сравнивая рис.5,*б* и 13,*б*, видим общее – разрыв состояний дублета (в первом случае – при сближении состояний по энергии, во втором – при впрессовывании их в начало координат). Разница в том, что на рис.5,*а* спектральные весовые векторы (СВВ) на несколько порядков меньше, и картина более размытая по $x = 0$ (фрагменты, на которые

разрываются состояния, содержат очень много пучностей, в то время как на рис.13,б в каждом фрагменте по одной пучности волновой функции).

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Многоканальные уравнения являются мощным и универсальным средством описания сложных квантовых объектов. Системы таких уравнений составляют основу единой теории квантовых реакций Фешбаха и ее обобщения на процессы с перераспределением частиц [33, 34], что делает ее более единой*.

Многоканальная система связанных одномерных уравнений Шредингера имеет вид

$$-\psi_i''(x) + \sum_j V_{ij}(x)\psi_j(x) = E_i\psi_i(x), \quad (21)$$

где, в отличие от *скалярного* одноканального случая, $\psi_j(x)$ являются компонентами *векторной* волновой функции, вместо потенциала $V(x)$ имеется *матрица* взаимодействия $V_{ij}(x)$, а компоненты $E_i = E - \epsilon_i$ энергетического вектора различаются пороговыми энергиями ϵ_i . Вместо скалярных спектральных весовых множителей (СВМ) c_λ здесь рычагами управления являются спектральные весовые векторы (СВВ) с компонентами $c_{\lambda,i} = \psi_i'(x=0)$, что обогащает возможности преобразования квантовых систем.

Естественно, что сильная связь каналов позволяет волнам легко переходить из канала в канал, подобно перетеканию жидкости в сообщающихся сосудах.

В одноканальном случае с увеличением СВМ соответствующая стоячая волна связанного состояния концентрируется вблизи начала координат и в пределе впрессовывается в точку начала координат, прижатая бесконечным барьером [8]. Было обнаружено [16], что для многих каналов в пределе $|c_i| \rightarrow \infty$ для i -й парциальной волны все компоненты $\psi_{k \neq i, \lambda}(x)$ (а не только i -я) полностью "перекачиваются" в избранный i -й канал, где они впрессовываются в точку начала координат (см. рис.14). Так что при этом происходит "сгребание" волн не только в конфигурационном пространстве, как в одноканальном случае, но и в дискретном пространстве канальной переменной i . Рисунок 14 демонстрирует это истинно многоканальное явление на примере двух связанных каналов на ограниченном отрезке в x -пространстве между непроницаемыми потенциальными стенками.

*Правда, поистине единой теория стала бы при дополнении ее формализмом многоканальной обратной задачи, находящимся в стадии развития [35].

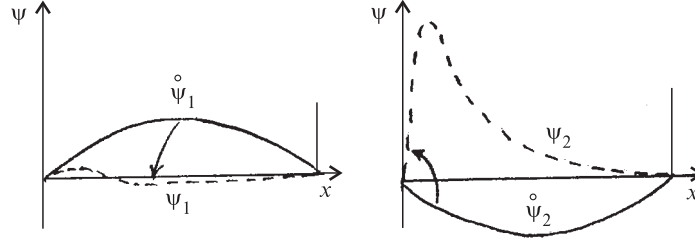


Рис. 14. Увеличение компоненты c_2 СВВ второго канала при неизменной c_1 и других спектральных параметрах: "выкачивание" волн из первого канала во второй в двухканальной системе при сгребании парциальной волны второго канала к началу координат. Элементы исходной матрицы взаимодействия – прямоугольные ямы

Точные формулы, которые мы используем здесь и далее даны в [9, 16, 35]. Например, при порождении одного связанного состояния они имеют вид

$$\psi_i(x, E) = \frac{\sum_j c_j \overset{\circ}{\Phi}_{ij}(x, E)}{1 + \sum_k \int_0^r [\sum_j c_j \overset{\circ}{\Phi}_{kj}(y, E)]^2 dy}, \quad (22)$$

$$\Phi_{ij}(x) = \frac{\overset{\circ}{\Phi}_{ij}(x, E)}{1 + \sum_k \int_0^r [\sum_j c_j \overset{\circ}{\Phi}_{kj}(y, E)]^2 dy}, \quad (23)$$

$$V_{ij}(x) = -2 \frac{d}{dx} \frac{c_i \overset{\circ}{\Phi}_{ii}(x, E) c_j \overset{\circ}{\Phi}_{jj}(x, E)}{1 + \sum_k \int_0^r [\sum_j c_j \overset{\circ}{\Phi}_{kj}(y, E)]^2 dy}, \quad (24)$$

где $\overset{\circ}{\Phi}_{ij}(x, E)$ – матрица регулярных решений уравнения Шредингера с исходной матрицей $\overset{\circ}{V}_{ij}(x)$, удовлетворяющая граничным условиям в начале координат:

$$\overset{\circ}{\Phi}_{ij}(0, E) = 0, \quad \frac{d}{dx} \overset{\circ}{\Phi}_{ij}(x=0, E) = \delta_{ij}.$$

Рычагами пространственных сдвигов отдельных состояний могут служить не только производные функций в начале координат $c_{\lambda,i} = \psi'_i(x=0)$. Так, при движении волн на полуоси $0 \leq x \leq \infty$ в подходе обратной задачи можно вместо $c_{\lambda,i}$ менять факторы $M_{\lambda,i}$ при спадающих экспонентах в асимптотическом поведении волн связанных состояний в парциальных каналах. В одноканальных задачах увеличение фактора M_λ эквивалентно уменьшению c_λ , а в пределе $c_\lambda \rightarrow 0$ или $M_\lambda \rightarrow \infty$ связанное состояние с энергией E_λ либо уносится на бесконечность в потенциальной ямке-переносчике [8], либо

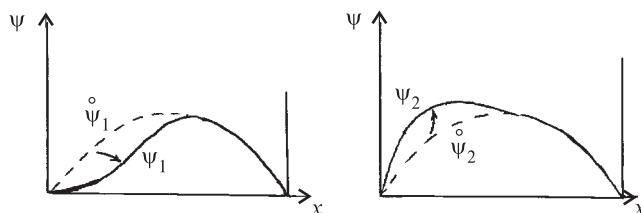


Рис. 15. Обращение в нуль производной волновой функции первого канала в начале координат, где $\psi_1(0) = 0$, не приводит к тождественному исчезновению $\psi_1(x)$, как в одноканальном случае. Функция лишь частично переходит во второй канал, откуда возвращается при $x > 0$

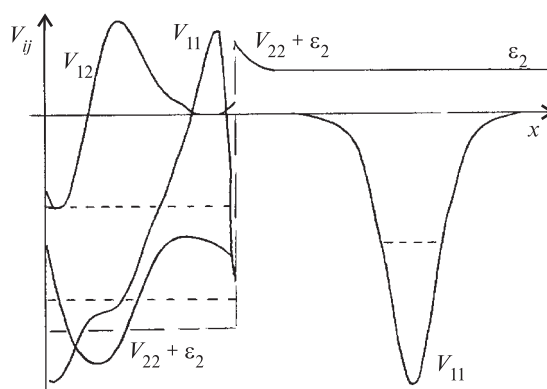


Рис. 16. При увеличении множителя M_1 при экспоненциально спадающем хвосте первой компоненты второго связанного состояния остальные компоненты переходят в первый канал и удаляются в солитонообразной яме $V_{11}(x)$. Элементы исходной матрицы взаимодействия – прямоугольные ямы конечной глубины (ср. со случаем увеличения всего вектора M на рис.17 для одинаковых и разных порогов)

впрессовывается в непроницаемую потенциальную стенку, ограничивающую движение волн, как в бесконечной прямоугольной яме. Многоканальной же особенностью является то, что в пределе $c_{\lambda,i} \rightarrow 0$ соответствующая парциальная волна не исчезает в канале λ (не уходит на бесконечность и не впессовывается в стенку, если таковая стоит на пути), но, используя связь каналов, частично переходит в другие каналы и частично сдвигается вблизи начала координат, а дальше может вернуться в исходный канал (см. рис.15). Теперь одновременное зануление функции и ее первой производной в одной точке не приводит к занулению ее на всем интервале движения, как в одноканальном случае, так как она может подпитываться из других каналов за

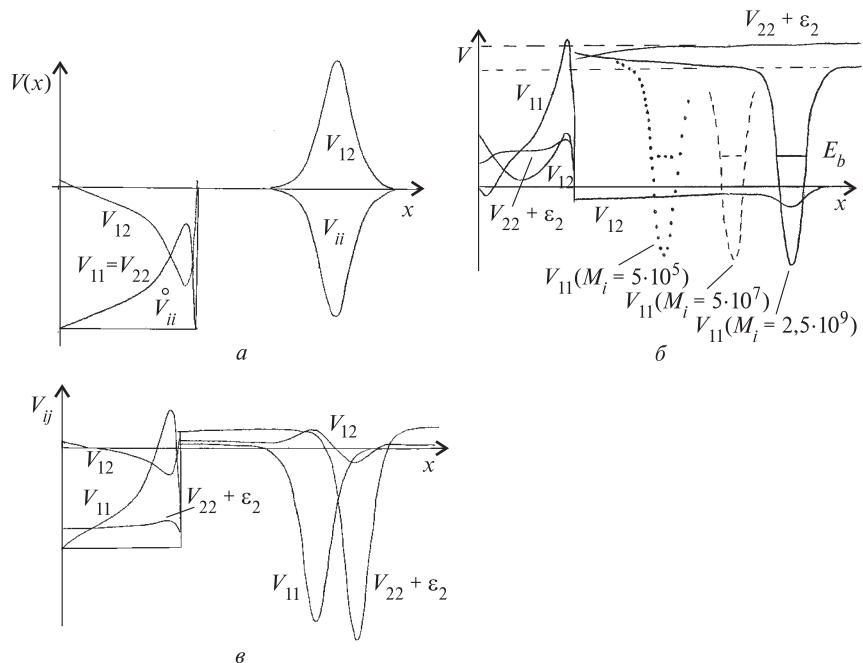


Рис. 17. Эволюция исходной прямоугольной матрицы взаимодействия при отделении одного связанного состояния от других "вытягиванием или выдавливанием" (одновременным увеличением весовых факторов асимптотических хвостов обеих компонент связанного состояния или уменьшением всех компонент его СВВ). а) При одинаковых порогах это осуществляется блоком-переносчиком матрицы взаимодействия с солитонообразными матричными элементами ($M_1 = -M_2 = 10^6$). б) При разных порогах не исчезают "тяги"-перемычки между ямами, уносящими связанное состояние, и остальной матрицей взаимодействия (нет полного разделения на два расходящихся блока). $M_1 = M_2 = 5 \cdot 10^5; 5 \cdot 10^7; 2,5 \cdot 10^9$. в) То же при одновременном уменьшении $c_1 = 1, 25 \cdot 10^{-5}, c_2 = 10^{-5}$

счет связей с ними. Если же $M_{\lambda,i} \rightarrow \infty$, то все парциальные волны данного состояния концентрируются в канале i и уносятся на бесконечность ямкой переносчиком ("ловушкой"), что эффективно эквивалентно устранению данного связанного состояния из исходной системы. Для исходного короткодействующего гамильтониана форма такого переносчика солитонообразная*, как и в одноканальном случае (см. рис.16). В одноканальном случае изменение

* Это верно, когда имеется непрерывный спектр и нужно сохранить свойства рассеяния при преобразовании связанного состояния.

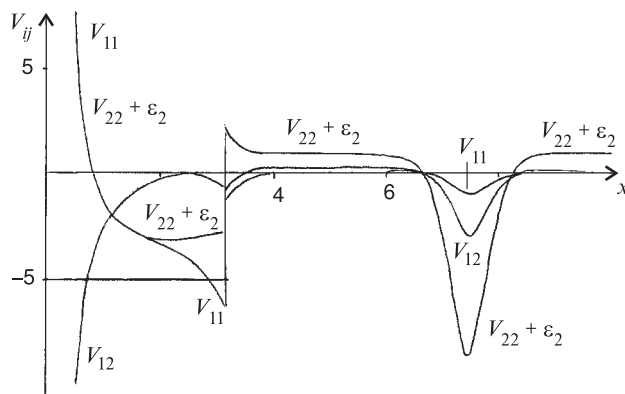


Рис. 18. Трансформация исходной прямоугольной двухканальной матрицы взаимодействия при одновременном увеличении обеих компонент СВВ (сгребании их к началу координат $c_1 = c_2 = 10^4$). В системе с разными порогами что-то заставляет матрицу $V_{ij}(x)$ испытывать "отдачу": вправо отделяется некоторый блок, в котором функция не "живет". Этот блок связан с основной частью $V_{ij}(x)$ переключками, подобными тем, что возникали на рис.17,б,в при отделении одного многоканального состояния со всеми отличными от нуля парциальными компонентами

СВМ единственного связанного состояния с одного края интервала интегрирования (доступного движению волн) не меняет альтернативных СВМ и с другого конца для остальных связанных состояний. В многоканальном случае изменение СВВ с одного края меняет все СВВ с другого.

Мы ожидали, что если увеличивать весь весовой вектор \mathbf{M} , умножая его скалярно на большое число, то избранное связанное состояние будет удаляться из исходной системы в отдельном прозрачном блоке [12], являющемся многоканальным аналогом солитонобразного потенциала. Это верно в случае одинаковых порогов ϵ_i (рис.17,а). Однако в общем случае оказалось, что матрица взаимодействия при этом не распадается на две составляющие, между которыми $V_{ij}(x)$ практически исчезает и в которых жили бы пространственно разделенные избранное и все остальные связанные состояния. Пример такого разделения связанных состояний без исчезновения элементов матрицы взаимодействия в промежуточной области, как это всегда было в одноканальном случае, показан на рис.17,б. А на рис.17,в показано подобное поведение матрицы взаимодействия при одновременном уменьшении всех компонент СВВ.

Аналогичное неожиданное поведение многоканальной квантовой системы (с разными порогами ϵ_i) мы наблюдали и при умножении на большой скалярный фактор СВВ c_λ . Что-то мешает векторному связанному состоянию просто вдавиться в начало координат, как в одноканальном случае. На рис.18

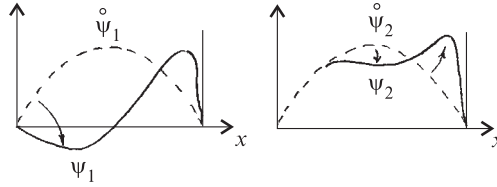


Рис. 19. Появление узлов в парциальных канальных функциях при эволюции квантовой системы, вызванной изменением знака компоненты СВВ первого канала c_1 , см. также рис.14. В одноканальном случае действует закон сохранения числа узлов при изменении СВМ

показана "отдача" матрицы взаимодействия: от нее отделяется в сторону возрастания x блок, связанный с частью $V_{ij}(x)$ относительно небольшими, но заметными перемычками (ср. с рис.17). В процессе вариации компонент СВВ могут пропадать и появляться узлы волновых канальных функций (рис.19) (в одноканальном случае узлы сохранялись при изменении СВМ).

Можно рассмотреть также трансформации многоканальных связанных состояний, погруженных в непрерывный спектр (ССНС). При увеличении только одной i -й компоненты спектрального весового вектора $c_{\lambda,i} = \psi'_i(0, E_\lambda)$ все другие канальные волновые функции $\psi_{j \neq i}(x, E_\lambda)$ также будут переходить в i -й канал. Возникло понимание возможности управлять скоростью спадания ССНС. В [6] были приведены примеры экспоненциально спадающих $V_{ij}(x)$ и $\psi_i(x)$ для ССНС ниже порога самого закрытого канала. Позднее было замечено, что в специальных случаях ССНС между порогами затухание может быть $\sim 1/x$. Объясняется это так. Матрица регулярных решений экспоненциально возрастает при больших x . Решения, отвечающие рассеянию с энергией между порогами, строятся как линейные комбинации столбцов матрицы регулярных решений с коэффициентами, обеспечивающими экспоненциальное затухание в закрытых каналах (не нарушая соотношения спектральных весовых компонент для закрытых каналов исходных физических состояний рассеяния). Оказалось, что создание ССНС с компонентами $c_{\lambda,i}$ СВВ, отвечающими тем же пропорциям (сгребание состояний рассеяния в ССНС со скалярным изменением компонент СВВ), приводит к спаданию $V_{ij}(x)$ и $\psi_{\lambda,i}(x)$ на асимптотике как $\sim 1/x$. Это связано с линейным ростом интеграла в знаменателе в формулах типа (24) из-за уходящих на бесконечность, не растущих асимптотик волн рассеяния. Любое нарушение указанных пропорций не дает сокращения экспоненциального роста в этих знаменателях. Тогда получается экспоненциальное спадание $V_{ij}(x)$ и $\psi_{\lambda,i}(x)$. Тем самым у нас имеется возможность управлять скоростью спадания потенциалов и функций, отвечающих ССНС.

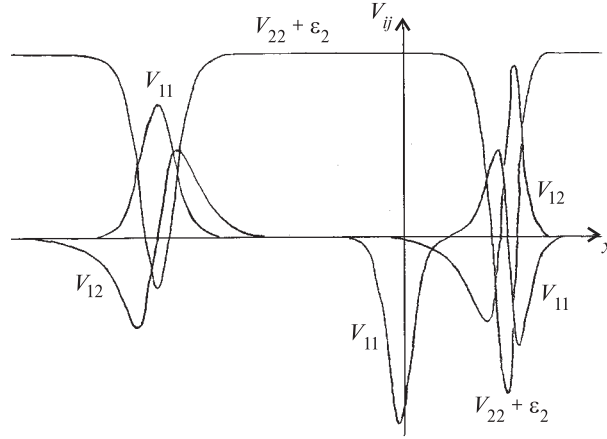


Рис. 20. Порождение двух близких ($E_1 = -0,5$; $E_2 = -0,5001$) связанных состояний с линейно независимыми СВВ. Исходная система отвечает свободному движению в несвязанных каналах с порогами, отличающимися на \mathcal{E} . Слева отделился прозрачный блок, не содержащий связанных состояний

В одноканальном случае мы открыли [17] явление эффективной "аннигиляции" (разрыва и расталкивания) связанных состояний в пределе сближения

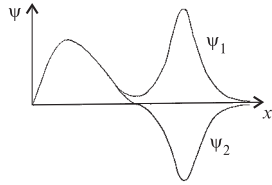


Рис. 21. Парциальные функции одного из близких по энергии связанных состояний двухканальной системы при сближении СВВ дублета, но при фиксированном положении уровней. С увеличением степени линейной зависимости СВВ расщепление состояний усиливается: правые пучности уходят все дальше вправо

соответствующих уровней энергии. В случае нескольких (M) каналов возможно сосуществование вырожденных состояний при условии их линейной независимости (или их СВВ). Расталкиваться должны лишь линейно зависимые состояния. Нас, однако, удивило, что для каналов с разными порогами в эволюции матрицы взаимодействия $V_{ij}(x)$ при сближении уровней энергии двух связанных состояний с независимыми СВВ происходит пространственное отделение некоторого блока матрицы взаимодействия, как показано на рис.20. Такой блок уходит на бесконечность в пределе вырождения, является прозрачным, что напоминает одноканальную "аннигиляцию" [16], но не уносит с собой никакого связанного состояния. Последние целиком остаются в основной части матрицы взаимодействия. Объяснение этого эффекта остается открытой проблемой. Мы еще обсудим свойства этого блока, когда покажем порождение его с помощью процедуры SUSYQ.

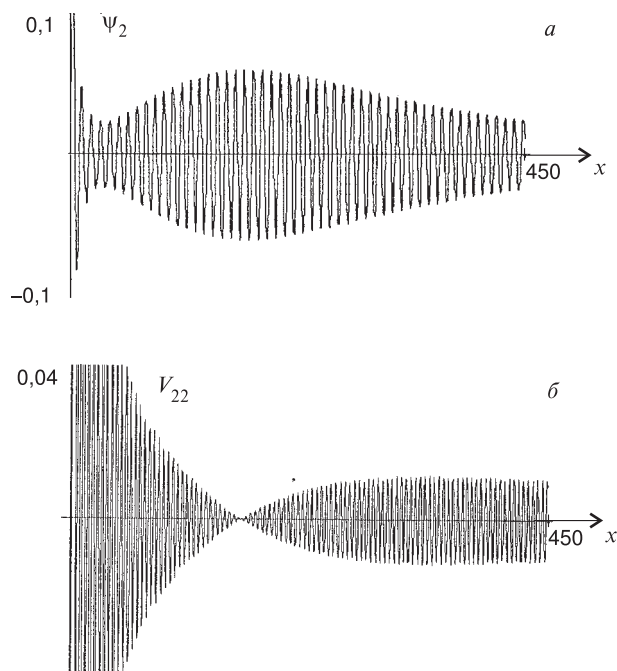


Рис. 22. Расщепление связанных состояний, погруженных в непрерывный спектр при их порождении с близкими энергиями. Символически показаны лишь отдельные компоненты волновых функций и матрицы взаимодействия (рисунок сжат по x , чтобы показать модуляцию осцилляций функций и потенциалов)

Интересно, что рудименты пространственного разрыва функций (подготовки к "аннигиляции") можно наблюдать не только при сближении уровней, но и при сближении СВВ двух близких соседних состояний с фиксированными уровнями (без их сближения) – см. рис.21, о подобном явлении мы упоминали в [8], но тогда не знали его правильного объяснения.

Как и в одноканальном случае, состояния с линейно зависимыми СВВ будут сопротивляться сгребанию к началу координат (концентрации в узкой пространственной области).

При сближении по энергии двух ССНС с одинаковыми СВВ происходит расщепление состояний, как показано на рис.22 (ср. с явлением эффективной "аннигиляции", открытым в одноканальном случае [17]).

Как и в одноканальном случае, вблизи (по энергии) с ССНС решения с тем же отношением компонент СВВ наблюдаются биения в канальных функциях рассеяния, но с разными частотами биений.

Существование связанных состояний и рассеяния при одной и той же энергии. "Парадокс" объединения свойств-антиподов (способность взаимодействия осуществлять конфайнмент волн в связанное состояние и быть в то же время прозрачным) и его разрешение проливает дополнительный свет на фундаментальные особенности многоканальных квантовых систем.

Не следует путать с рассматриваемым случаем и хорошо изученные квазисвязанные состояния, которые имеют одновременно черты связанных состояний (длительная задержка и накопление волн в мишени) и рассеяния.

Парадокса не будет, если отделить ограниченную в пространстве область с помощью непроницаемого (бесконечного) потенциального барьера, что приведет к появлению (параллельных) спектральных ветвей: дискретной для связанных состояний внутри построенной ловушки и непрерывной для состояний рассеяния вне барьера. Это тривиальный пример связанных состояний, погруженных в континуум. Здесь нет перекрытия областей связанных состояний и рассеяния, и соответствующие волны находятся в разделенных областях и испытывают воздействие разных частей внешнего поля.

То же получается и при расцепленных каналах: спектр системы складывается из независимых спектральных ветвей отдельных каналов. Тогда связанное состояние в одном (например, закрытом) канале может сосуществовать с рассеянием в не связанном с ним другом канале при той же энергии. Это не удивительно, поскольку и здесь состояния разной природы формируются разными взаимодействиями.

Но замечательно, что и при сильной связи открытых каналов специальные комбинации независимых волн способны застревать в области взаимодействия (конфайнмент ССНС), в то время как другие волны могут без особых препятствий входить в область локализации ССНС и выходить из нее в процессе рассеяния даже без строгого разделения соответствующих волн в конфигурационном или канальном пространстве. Мы установили [38], что одна и та же матрица взаимодействия способна как полностью удерживать волну (конфайнмент), так и иметь решения, отвечающие волнам, заходящим в область взаимодействия и покидающим ее и даже быть прозрачным взаимодействием, как будет объяснено ниже. При этом соответствующие волновые функции получаются как различные линейные комбинации набора независимых решений системы уравнений. В одной комбинации межканальное влияние волн полностью подавляет рассеяние, а в других – нет.

В случае исходного свободного движения преобразованная матрица регулярных решений $\Phi(x)$ при энергии ССНС имеет вид

$$\Phi_{lp}(x) = \frac{1}{k_l} \left(\sin(k_l x) \delta_{lp} - \frac{c_l c_p \sin(2k_l x) \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2k_p x)}{4k_p} \right)}{1 + c_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2k_1 x)}{4k_1} \right) + c_2^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2k_2 x)}{4k_2} \right)} \right), \quad (25)$$

где $k_i = \sqrt{E_i}$. В этих решениях имеются как спадающие ($\sim \frac{1}{x}$) члены,

так и другие, отвечающие свободному распространению волн на асимптотике $x \rightarrow \infty$:

$$\Phi_{lp}(x) \rightarrow \frac{1}{k_l} \sin(k_l x) \delta_{lp} - \frac{c_l c_p}{c_1^2 + c_2^2} \sin(k_l x) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (26)$$

причем столбцы матрицы регулярных решений $\Phi(x)$ становятся линейно зависимыми на асимптотике и могут быть взаимно уничтожены в комбинации, отвечающей ССНС. В любой другой линейной комбинации они дают решения рассеяния.

Если построить при одной энергии столько независимых ССНС (выше всех порогов), сколько имеется каналов в системе, то рассеяния при этой энергии уже не будет (в случае M каналов может быть n связанных и $M - n$ состояний рассеяния при одной энергии). Для трех и более каналов можно построить между двумя верхними порогами связанные состояния (ССНС), экспоненциально быстро затухающие с ростом x и сосуществующие с рассеянием. Это достигается нарушением пропорции в линейной комбинации регулярных решений для исходного гамильтониана, в которой растущие компоненты волновых функций закрытых каналов взаимно сокращаются. Тогда наличие растущих экспонент в знаменателе выражений типа (27) обеспечивает короткий радиус взаимодействия и связанных состояний. Этого нельзя добиться при энергии выше всех порогов, где возможно существование лишь связанных состояний*, спадающих как $\sim 1/x$.

Рассмотренный предельный случай при слабом возмущении матрицы взаимодействия переходит в сосуществование при одной энергии двух существенно различных *собственно-канальных* состояний. Одного – резонансного со скачком собственного фазового сдвига вблизи исходного ССНС, и другого – безрезонансного.

На рис.23 показаны некоторые из типичных элементов (компонент) векторных решений для связанных состояний, рассеяния, а также матрицы взаимодействия

$$V_{ij}(x) = -2 \frac{d}{dx} \frac{c_i c_j \frac{1}{k_i} \sin(k_i x) \frac{1}{k_j} \sin(k_j x)}{1 + \sum_m \int_0^x c_m^2 \frac{1}{k_m^2} \sin(k_m y)^2 dy}. \quad (27)$$

Выражения для Φ_{ij} и V_{ij} могут быть проверены прямой подстановкой в (21).

* Между верхними порогами имеется $(M - 1)$ независимых решений, не имеющих экспоненциально растущих компонент в закрытом канале. Если открыт только один канал, возможно существование лишь одного физического состояния при каждом значении энергии.

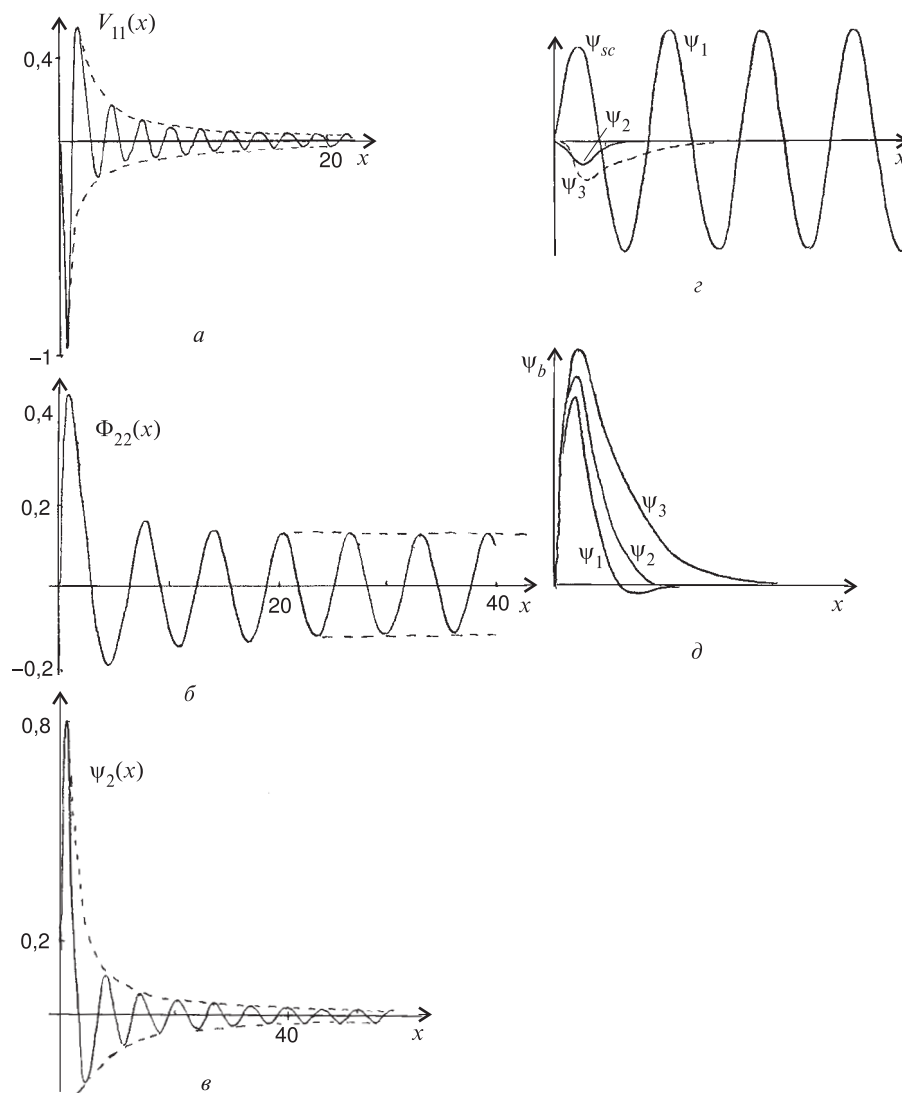


Рис. 23. Отдельные типичные элементы волновых функций и матриц взаимодействия в случае сосуществования связанных состояний в непрерывном спектре при одной и той же энергии. а, б, в) ССНС выше порогов двухканальной системы, осцилляции $V_{ij}(x)$, $\Psi_i(x)$, $\Phi_{ij}(x)$ затухают как $\sim 1/x$; г, д) ССНС трехканальной системы ниже порога третьего канала – случай экспоненциального затухания с x функций ССНС и потенциалов

Итак, в одноканальном случае при энергии связанного состояния, погруженного в континуум (в потенциалах Неймана–Вигнера), рассеяние отсутствует, а многоканальные связанные и несвязанные состояния могут сосуществовать в одной и той же спектральной точке.

Прозрачные системы. По аналогии с одноканальным случаем можно было ожидать, что безотражательные матрицы взаимодействия строятся из солитонобразных потенциальных ям. Действительно, это верно при одинаковых порогах каналов. Но для разных порогов, в отличие от одноканального случая, где безотражательные потенциалы обязательно имели связанное состояние, имеются абсолютно прозрачные многоканальные матрицы взаимодействия с чисто непрерывным спектром. Они были получены с помощью SUSYQ-преобразования.

Преобразование SUSYQ в многоканальном случае. Выше уже рассматривалось преобразование SUSYQ для одноканального случая. Дадим теперь обобщение этого формализма на многоканальный случай [16,19,21,22,26].

Гамильтониан в уравнении (21) на всей оси представляется в факторизованном виде

$$\hat{H}_- = \hat{A}^+ \hat{A}^- + \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} < \epsilon_i, \quad (28)$$

это матричное обобщение уравнения (3), где "шляпки" используются для обозначения матриц, а \mathcal{E} – так называемая энергия факторизации. Оператор \hat{A}^- имеет вид

$$\hat{A}^- = -\frac{d}{dx} + \hat{W}(x), \quad (29)$$

где $\hat{W}(x)$ есть матричная функция, вид которой не является, вообще говоря, однозначным, и конкретный ее выбор дает определенное преобразование потенциала. Оператор $\hat{A}^+ = \frac{d}{dx} + \{\hat{W}(x)\}^\dagger$ является эрмитовым сопряжением оператора \hat{A}^- . Для определенности рассмотрим случай только двух каналов и с исходной матрицей потенциалов $V_{ij}(x)$, равной тождественно нулю на всей оси. Пусть $\hat{\Psi}(x)$ – (2×2) -матричное решение уравнения Шредингера при энергии \mathcal{E} (т.е. $\hat{H}_- \hat{\Psi}(x) = \mathcal{E} \hat{\Psi}(x)$). Каждый столбец этой матрицы в отдельности есть решение уравнения Шредингера, и, стало быть, может быть представлен в виде линейной комбинации, вообще говоря, четырех линейно независимых решений уравнения Шредингера при данной энергии. В нашем случае (свободное движение) это приводит к тому, что каждый матричный элемент $\hat{\Psi}(x)$ можно представить в виде комбинации растущих и убывающих экспонент:

$$\hat{\Psi}_{ij}(x) = \alpha_{ij} e^{-\kappa_i x} + \beta_{ij} e^{\kappa_i x}, \quad (30)$$

где индекс i нумерует строки матрицы (т.е. каналы) и $\kappa_i = \sqrt{\epsilon_i - \mathcal{E}}$. Таким образом, выбор $\hat{\Psi}(x)$ сводится в нашем случае к должному выбору коэффициентов α_{ij} и β_{ij} . В частности, мы можем взять $\hat{\Psi}(x)$ в следующем виде:

$$\hat{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} m_1 e^{-\kappa_1 x} & c_1 e^{\kappa_1 x} \\ m_2 e^{-\kappa_2 x} & c_2 e^{\kappa_2 x} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где мы положили $\alpha_{11} \equiv m_1$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{21} \equiv m_2$, $\alpha_{22} = 0$, $\beta_{11} = 0$, $\beta_{12} \equiv c_1$, $\beta_{21} = 0$, $\beta_{22} \equiv c_2$.

Теперь мы легко можем получить $\hat{W}(x)$ из уравнения

$$\hat{A}^- \hat{\Psi}(x) = 0, \quad (32)$$

прямо следующего из определения решения матрицы $\hat{\Psi}(x)$ и выбора гамильтониана (28). Нетрудно получить, что

$$\hat{W}(x) = \hat{\Psi}'(x) \hat{\Psi}(x)^{-1}. \quad (33)$$

Используя (31), мы переписываем это выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{W}(x) &= \frac{1}{\det \hat{\Psi}(x)} \begin{pmatrix} -\kappa_1 m_1 e^{-\kappa_1 x} & \kappa_1 c_1 e^{\kappa_1 x} \\ -\kappa_2 m_2 e^{-\kappa_2 x} & \kappa_2 c_2 e^{\kappa_2 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 e^{\kappa_2 x} & -c_1 e^{\kappa_1 x} \\ -m_2 e^{-\kappa_2 x} & m_1 e^{-\kappa_1 x} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\kappa_1 [m_1 c_2 e^{(\kappa_2 - \kappa_1)x} + m_2 c_1 e^{(\kappa_1 - \kappa_2)x}]}{m_1 c_2 e^{(\kappa_2 - \kappa_1)x} - m_2 c_1 e^{(\kappa_1 - \kappa_2)x}} & \frac{2\kappa_1 c_1 m_1}{m_1 c_2 e^{(\kappa_2 - \kappa_1)x} - m_2 c_1 e^{(\kappa_1 - \kappa_2)x}} \\ \frac{-2\kappa_2 c_2 m_2}{m_1 c_2 e^{(\kappa_2 - \kappa_1)x} - m_2 c_1 e^{(\kappa_1 - \kappa_2)x}} & \frac{\kappa_2 [m_2 c_1 e^{(\kappa_1 - \kappa_2)x} + m_1 c_2 e^{(\kappa_2 - \kappa_1)x}]}{m_1 c_2 e^{(\kappa_2 - \kappa_1)x} - m_2 c_1 e^{(\kappa_1 - \kappa_2)x}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы наложить ограничения на коэффициенты в $\hat{\Psi}(x)$, чтобы матрица $\hat{W}(x)$ была эрмитовой (в нашем случае просто симметрической). Иначе факторизация на операторы \hat{A}^- в виде (29) и эрмитово сопряжение \hat{A}^+ будет возможна только для гамильтониана, включающего оператор $\frac{d}{dx}$ первой производной по координате. Действительно, пусть \hat{W} не самосопряженная матрица, тогда

$$\begin{aligned} \hat{H}_- &= \hat{A}^+ \hat{A}^- + \mathcal{E} = \left(\frac{d}{dx} + \{\hat{W}(x)\}^\dagger \right) \left(-\frac{d}{dx} + \hat{W}(x) \right) + \mathcal{E} = \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{W}'(x) + \hat{W}(x) \frac{d}{dx} - \{\hat{W}(x)\}^\dagger \frac{d}{dx} + \{\hat{W}(x)\}^\dagger \hat{W}(x) + \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (35)$$

Вид (33) для матрицы \hat{W} не гарантирует, вообще говоря, ее эрмитовости. Однако

$$\hat{\Psi}^\dagger (\hat{W}^\dagger - \hat{W}) \hat{\Psi} = \hat{\Psi}^\dagger \{ \hat{\Psi}^{-1\dagger} \hat{\Psi}'^\dagger - \hat{\Psi}' \hat{\Psi}^{-1} \} \hat{\Psi} = \hat{\Psi}'^\dagger \hat{\Psi} - \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}' = \hat{C},$$

где \hat{C} – постоянная матрица. Доказательство последнего утверждения аналогично выводу закона сохранения потока. И мы можем занулить эту постоянную матрицу (и тем самым сделать \hat{W} симметрической матрицей) просто должным заданием параметров в (31). В нашем частном случае это приводит к следующему условию: $c_2 = -c_1 m_1 \kappa_1 / \kappa_2 m_2$. Тогда c_1 сокращается в числителе и знаменателе:

$$\hat{W}_{11}(x) = \frac{m_2^2 \kappa_1 \kappa_2 \exp[(\kappa_1 - \kappa_2)x] - m_1^2 \kappa_1^2 \exp[(\kappa_2 - \kappa_1)x]}{m_1^2 \kappa_1 \exp[(\kappa_2 - \kappa_1)x] + m_2^2 \kappa_2 \exp[(\kappa_1 - \kappa_2)x]},$$

$$\hat{W}_{12}(x) = \hat{W}_{21}(x) = -\frac{2\kappa_1 m_1 \kappa_2 m_2}{m_1^2 \kappa_1 \exp[(\kappa_2 - \kappa_1)x] + m_2^2 \kappa_2 \exp[(\kappa_1 - \kappa_2)x]},$$

$$\hat{W}_{22}(x) = \frac{m_1^2 \kappa_1 \kappa_2 \exp[(\kappa_2 - \kappa_1)x] - m_2^2 \kappa_2^2 \exp[(\kappa_1 - \kappa_2)x]}{m_1^2 \kappa_1 \exp[(\kappa_2 - \kappa_1)x] + m_2^2 \kappa_2 \exp[(\kappa_1 - \kappa_2)x]}. \quad (36)$$

Само преобразование SUSYQ (или преобразование Дарбу) состоит в перестановке операторов \hat{A}^- и \hat{A}^+ в (28). Таким образом, мы получаем трансформированный гамильтониан (или суперсимметричный партнер \hat{H}_-)

$$\hat{H}_+ = \hat{A}^- \hat{A}^+ + \mathcal{E} = \hat{H}_- - 2\hat{W}'(x). \quad (37)$$

Решения типа вектор-столбца уравнения Шредингера с \hat{H}_+ имеют вид *:

$$\hat{\Psi}_+(x, E) = \hat{A}^- \hat{\Psi}_-(x, E). \quad (38)$$

Видно, что преобразование (38) не изменяет характеристик непрерывного спектра: матрица коэффициентов отражения остается неизменной и равной нулю тождественно – прозрачность при всех энергиях непрерывного спектра. В отличие от одноканального случая, матрица $\hat{\Psi}(x)^{-1}$ уже не является решением уравнения Шредингера при $E = \mathcal{E}$. Тем не менее можно построить новые линейно независимые решения при энергии $E = \mathcal{E}$, действуя, как в формуле (38), оператором \hat{A}^- на четыре линейно независимых решения уравнения Шредингера для исходного неизменного гамильтониана \hat{H}_- при той же энергии. Здесь надо уточнить, однако, что операция $\hat{A}^- \hat{\Psi}_-(x, \mathcal{E})$ даст нам сначала только два линейно независимых решения, ибо решения $\hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E}) = \hat{A}^- \hat{\Psi}_-(x, \mathcal{E})$ являются и решениями уравнения

$$\hat{A}^+ \hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E}) = 0, \quad (39)$$

* Доказательство не выписывается, поскольку оно полностью совпадает по форме с аналогичным доказательством при одноканальном преобразовании SUSYQ, которое уже рассматривалось в этой статье на примере δ -потенциалов и которому посвящена уже весьма обширная библиография.

поскольку это уравнение обращается в тождество, если использовать определение матричной функции $\hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E})$ и тождество $\hat{A}^+ \hat{A}^- = \hat{H}_- - \mathcal{E}$. Но данное уравнение – символически записанная система однородных дифференциальных уравнений **первого** порядка и, стало быть, имеет фундаментальную систему двух линейно независимых решений. Можно сразу привести формулы для этих двух линейно независимых столбцов-решений $\hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E})$ системы (39), объединив их в матрицу $\hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E})$ для компактификации записи:

$$\hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E}) = \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T, \quad (40)$$

где символ T означает транспонирование. Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T &= \left\{ \frac{d}{dx} + \hat{W}(x) \right\} \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T = \\ &= -\{\hat{\Psi}(x)^{-1} \hat{\Psi}'(x) \hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T + \hat{W}(x) \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T = \\ &= -\{\hat{\Psi}'(x) \hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T + \hat{W}(x) \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T = \\ &= -\{\hat{W}(x)\}^T \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T + \hat{W}(x) \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где мы воспользовались симметричностью матрицы $\hat{W}(x)$ и формулой (33) и, кроме того, применили известное выражение для дифференцирования обратной матрицы $\{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}' = -\hat{\Psi}(x)^{-1} \hat{\Psi}'(x) \hat{\Psi}(x)^{-1}$. Так что отличие от одноканального случая, когда новое решение при энергии \mathcal{E} получалось просто оборачиванием $\psi_+(x) = \psi(x)^{-1}$ исходного решения, состоит в выполнении дополнительной тривиальной процедуры.

Формула для остальных линейно независимых решений $\hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E})$, записанная сразу в общем матричном виде, имеет вид

$$\hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E}) = \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T \int^x \{\hat{\Psi}(y)\}^T \hat{\Psi}(y) dy. \quad (42)$$

Действительно, вторая пара линейно независимых решений, объединенная в матрицу $\hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E})$, может быть определена как решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\hat{A}^+ \hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E}) = \hat{\Psi}(x), \quad (43)$$

если заметить, что, подействовав оператором \hat{A}^- на обе части этого равенства, мы получим выражение $(\hat{H}_+ - \mathcal{E}) \hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E}) = 0$, т.е. эти решения удовлетворяют уравнению Шредингера (21) с гамильтонианом \hat{H}_+ . От решений $\hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E})$ решения $\hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E})$ отличаются тем, что последние удовлетворяют неоднородному дифференциальному уравнению, точнее, системе уравнений (43), тогда как $\hat{\Psi}_+(x, \mathcal{E})$ есть матрица решений системы однородных уравнений (39). Это доказывает, что решения $\hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E})$ действительно являются

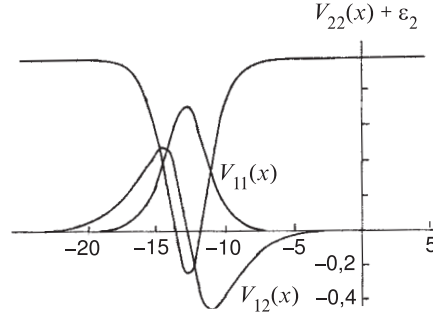


Рис. 24. Абсолютно прозрачная двухканальная матрица взаимодействия, не имеющая аналога в одноканальном случае: в ней нет связанных состояний. Такой потенциальный блок отделяется в $V_{ij}(x)$ при порождении двух связанных состояний с близкими энергиями (см. рис.20). Он входит как составной элемент в более сложные двух- и трехканальные (см. рис.25) прозрачные матрицы со связанным состоянием

новыми линейно независимыми решениями уравнения Шредингера. Наконец, решение уравнения (43) будем искать в виде

$$\hat{\Psi}_+^\#(x, \mathcal{E}) = \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T \hat{C}(x), \tag{44}$$

т.е. варьируя мультипликативную произвольную ”постоянную”, так же, как и в случае обычного, не матричного, дифференциального уравнения первого порядка. Подставляя (44) в (43), находим $\hat{C}(x)$:

$$\hat{C}(x) = \int^x \{\hat{\Psi}(y)\}^T \hat{\Psi}(y) dy,$$

что доказывает (42). Нетрудно убедиться также в правильности формулы (42) и прямой подстановкой (42) в уравнение Шредингера (21) с гамильтонианом H_+ (37).

Оказывается, что выбор $\hat{\Psi}(x)$ (31) соответствует тому случаю, когда невозможно построить такую линейную комбинацию полученных решений вектор-столбцов, которая, подобно связанному состоянию, экспоненциально затухала бы на асимптотике. Другими словами, данное преобразование не приводит к появлению связанного состояния при энергии \mathcal{E} . Так что мы имеем нетривиальное двухканальное преобразование потенциалов, не изменяющее непрерывный спектр, но и не порождающее физическое связанное состояние.

На рис.24 показана прозрачная матрица взаимодействий $V_{ij}(x)$, отвечающая формулам (37),(31). Интересно, что эта матрица взаимодействия является как часть прозрачной матрицы со связанным состоянием, открытой

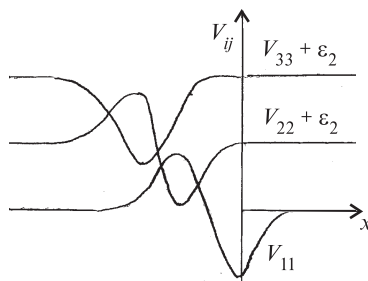


Рис. 25. Диагональные элементы абсолютно прозрачной трехканальной матрицы взаимодействия с разными порогами и связанным состоянием, локализованным в правой солитонобразной ямке в $V_{11}(x)$. Обратите внимание на элементы, подобные изображенным на рис.24

в [12] (см. рис.18 в [1], на котором дополнительная солитонобразная яма в первом канале справа обеспечивает существование связанного состояния в системе). Здесь, как и в прозрачном потенциальном блоке со связанным состоянием [1, 12, 16], имеется потенциальный барьер. И несмотря на то, что он вызывает отражение, он необходим для полной прозрачности: для взаимного подавления этих отраженных волн и волн с противоположной фазой, идущих из второго канала. Он, в частности, входит составляющей в трех- и более канальные прозрачные матрицы, показанные впервые в [12], как элементы "застежки-молнии" (рис.25).

Как уже отмечалось выше, такой прозрачный блок без связанных состояний отделялся от матрицы взаимодействия при сближении уровней двух состояний с независимыми СВВ (см. рис.20).

В M -канальном подходе SUSYQ возможно *порождение сразу двух (или даже M) состояний* с помощью одного простейшего преобразования.

Действительно, только что рассмотренный пример – это не единственный случай всех возможных преобразований, определяемых выбором коэффициентов α_{ij} и β_{ij} . Можно, например, взять все эти коэффициенты (с обязательно накладываемым ограничением, связанным с матричной симметричностью $\hat{W}(x)$ и неравенством нулю определителя $\hat{\Psi}(x)$ при всех x) не равными нулю и одного знака в каждом из матричных элементов $\hat{\Psi}(x)$ (но необязательно во всей матрице). После такого преобразования SUSYQ получаем безотражательную систему с двумя вырожденными связанными состояниями при энергии факторизации \mathcal{E} (рис.26).

Другими словами, одно преобразование SUSYQ создало сразу **два(!)** связанных состояния, хотя и вырожденных. В том, что это так, нетрудно убедиться, действуя оператором \hat{A}^- на четыре линейно независимых решения-

столбца невозмущенной системы уравнений Шредингера, которыми могут быть

$$\hat{\Psi}_-^{(1)}(x, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} e^{\kappa_1 x} \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\Psi}_-^{(2)}(x, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} e^{-\kappa_1 x} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Psi}_-^{(3)}(x, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\kappa_2 x} \end{pmatrix}, \hat{\Psi}_-^{(4)}(x, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\kappa_2 x} \end{pmatrix}.$$

Новые решения $\hat{\Psi}_+^{(\nu)}(x, \mathcal{E}), \nu = 1, \dots, 4$, полученные по формуле (38), все асимптотически (на $\pm\infty$) экспоненциально затухают. При этом они не являются теперь линейно независимыми решениями новой системы уравнений Шредингера. Можно показать, что из набора $\hat{\Psi}_+^{(\nu)}(x, \mathcal{E})$ можно выбрать каждый раз не более двух линейно независимых решений, из которых можно построить, составляя соответствующие линейные суперпозиции, два взаимно ортогональных и нормированных на единицу решения, т.е. волновые функции вырожденных по энергии связанных состояний. Следует подчеркнуть, что такое вырождение в принципе возможно для многоканальных систем, если только волновые функции обладают линейно независимыми спектральными весовыми векторами, т.е. факторами (каждый на свой канал), стоящими перед спадающими экспонентами – асимптотиками канальных волновых функций связанных состояний.

Рассмотрим еще одну важную особенность многоканальных систем. Для быстро затухающих на асимптотике матриц взаимодействия $V_{ij}(x)$, казалось бы, следовало ожидать фактического расщепления каналов при больших $|x|$ и в случае разных канальных порогов \mathcal{E} , решения в парциальных каналах должны были бы переходить в свободные решения. Однако убывающие матричные элементы, связывающие каналы, способны ускорять затухание решений в одних каналах за счет "откачивания" из них волн в другие каналы.

Так, оказалась возможной инверсия скорости экспоненциального (спадающего) роста на асимптотике канальных функций с разных сторон прозрачного блока при порождении одного связанного состояния. Это возможно при различных порогах \mathcal{E} . Если, с одной стороны, модуль показателя экспоненты больше в более закрытом канале (нормальная ситуация), то с другой

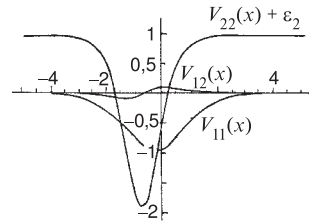


Рис. 26. Абсолютно прозрачная матрица взаимодействия с двумя вырожденными связанными состояниями. Ее можно рассматривать как предельный случай, когда соответствующий прозрачный блок, типа изображенного на рис.24, удалился на бесконечность $x \rightarrow -\infty$. На рис.20 представлен промежуточный случай неполного вырождения связанных состояний, когда блок без связанного состояния удалился на конечное расстояние

– наоборот. При порождении двух связанных состояний две такие инверсии восстанавливают нормальную ситуацию.

Как уже отмечалось в [1], если на прозрачный блок падает волна с одной стороны в каком-то одном канале, то она в области интенсивного влияния матрицы взаимодействия будет разбросана по другим каналам, но затем полностью должна собраться с другой стороны мишени в начальном канале. Даже волны, заброшенные в открытые каналы, где, казалось бы, ничто не мешает волнам уходить на бесконечность, должны вернуться в канал, откуда появились (демонстрируя экспоненциальное затухание в открытом канале за счет не подбарьерности, а отсасывания посредством канальной связи, которая сама экспоненциально затухает).

В случае прозрачных систем на всей оси x , включая и предельный случай свободного движения, имеется "виртуальный уровень" при $E = 0$, который становится реальным при сколь угодно малом добавочном притяжении.

Отметим еще способность сколь угодно малой, но знакопостоянной добавки к связи каналов ΔV_{12} порождать связанное состояние в случае исходной системы свободного движения в расцепленных каналах или прозрачной матрицы взаимодействия.

Прозрачная матрица без связанного состояния характеризуется энергетическим параметром \mathcal{E}, m_1, m_2 (нефизического состояния с заданным ростом на асимптотике, порождаемого SUSYQ-преобразованием).

Продemonстрируем теперь формулу для двукратного преобразования SUSYQ. Речь идет о том, что с уже преобразованной по SUSYQ системой (см. ф-лу (39) и прочие относящиеся к ней равенства) проводится еще одно преобразование SUSYQ по той же схеме, что и выше. Так, в качестве $\hat{\Psi}(x)$ берется комбинация матричных решений, полученных на первом шаге:

$$\hat{\hat{\Psi}}(x) = \{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T + c\{\hat{\Psi}(x)^{-1}\}^T \int^x \{\hat{\Psi}(y)\}^T \hat{\Psi}(y) dy, \quad (45)$$

где c – произвольная константа. С такой функцией $\hat{\hat{V}}(x)$ на втором шаге имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\hat{V}}(x) &= \hat{V}(x) - 2 \frac{d}{dx} \hat{W}(x) = \\ &= \hat{V}(x) - 2 \frac{d}{dx} (\hat{\Psi}'(x) \{\hat{\Psi}(x)\}^{-1} + \hat{\hat{\Psi}}'(x) \{\hat{\hat{\Psi}}(x)\}^{-1}) = \\ &= \hat{V}(x) - 2 \frac{d}{dx} \{c \hat{\Psi}(x) \{1 + c \int^x [\hat{\Psi}(y)]^T \hat{\Psi}(y) dy\}^{-1} \hat{\Psi}(x)^T\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Получаем, что при выборе

$$\hat{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{\sqrt{c}} e^{-\kappa_1 x} & 0 \\ \frac{m_2}{\sqrt{c}} e^{-\kappa_2 x} & 0 \end{pmatrix}$$

(46) переходит в точности в формулу $V_{ij}(x) = -2 \frac{d}{dx} K_{ij}(x, x)$, где K определяется выражением, которое было получено в подходе обратной задачи (порождение уровня). Таким образом, обратная задача – это частный случай формулы (46), и преобразование суперсимметрии (одно- и двухкратное) дает нам **более широкий класс** точно решаемых моделей как для многоканальных систем, так и для случая ординарного одномерного уравнения Шредингера. Подчеркнем, что рассмотренный выше формализм верен и в общем случае произвольного числа каналов.

Как и в одноканальном случае [15], при спектрально-эквивалентных преобразованиях обратной задачи (SUSYQ) возможна инверсия матрицы взаимодействия (с рождением и уничтожением связанных состояний).

Недавно мы построили два таких блока, подобных изображенному на рис.24 и отвечающих двум энергиям факторизации (рождению разных ненормируемых "нефизических" состояний). Оказалось, что при сближении энергий факторизации эти блоки удаляются друг от друга, не меняя при этом своей формы, как показано на рис.27. Этот не разгаданный пока сюрприз многоканальных систем тоже напоминает процесс расталкивания солитонных ям при сближении уровней физических состояний [17].

В общем случае построить связанное состояние на полуоси в подходе Марченко нельзя даже в одноканальном случае, так как требование не менять фазы рассеяния $\delta(k)$ (параметры непрерывного спектра, задаваемые на

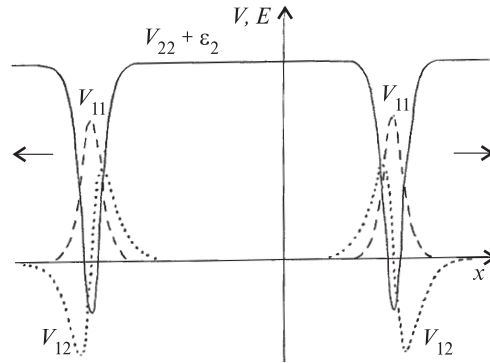


Рис. 27. Двойное преобразование SUSYQ свободной двухканальной системы с близкими энергиями факторизации, соответствующими рождению "нефизических" состояний. Наблюдается расталкивание прозрачных блоков матрицы взаимодействия

бесконечности) входит в противоречие с теоремой Левинсона, требующей изменения при этом фазы для нулевой энергии $\delta(0)$ на π . Другими словами, построение уровня требует углубления потенциальной ямы, что приводит к фазовому сдвигу. Однако если имеется центробежный барьер с $l = 2$, дающий $\delta(0) = l\pi/2 = \pi$, то построение связанного состояния убирает этот барьер, а $\delta(0)$ остается неизменной: исчезновение барьера уменьшает $\delta(0)$ на π , а появление уровня связанного состояния увеличивает $\delta(0)$ на π , так что эти изменения полностью компенсируют друг друга [21]. В многоканальном случае для возможности породить уровень в подходе Марченко требуется центробежный барьер хотя бы в одном канале.

Межканальное движение. Благодаря возможности движения волн между каналами, а не только по пространственной координате, оказывается, существует новый резонансный механизм (квазисвязанное состояние – стоячая волна по канальной переменной) [36].

Интересно, что периодичность матрицы взаимодействия по канальной переменной (для бесконечного числа каналов с одинаковыми порогами) приводит к полосатому спектру (это выяснилось благодаря вопросу студента Янченко на лекции в МФТИ).

Классические точно решаемые многочастичные модели. В работе [37] (см. также ссылки в ней) было показано, что решению уравнения Шредингера отвечает решение классической задачи. Мы воспользуемся теперь открытыми нами в подходе обратной задачи и SUSYQ многоканальными квантовыми моделями и по аналогии бесплатно получим соответствующие обширные классы точно решаемых одномерных, но уже многочастичных (!) классических моделей.

Заменим в системе (21) канальную функцию $\psi_i(x)$ и ее координату x на координату i -й классической частицы и время $x_i(t)$. Тогда вторая производная $\psi_i(x)$ заменится на ускорение \ddot{x}_i , элементы потенциальной матрицы $V_{ij}(x)$ перестанут быть потенциалами и превратятся в функции от времени, станут составляющими сил, зависящих и от координат, и от времени. Вся же система (21) превратится в систему уравнений для нескольких классических частиц, где ускорения частиц будут определяться силами – остальными членами в уравнениях

$$\ddot{x}_i = \sum_j V_{ij}(t)x_j(t) - E_i x_i(t). \quad (47)$$

Здесь параметры E_i уже не играют роль канальных энергий, а просто входят в определение действующих в системе сил. Таким образом, каждому точному решению многоканальной квантовой задачи (а их у нас полный набор!) будет соответствовать точное решение многочастичной классической задачи с силами, зависящими от времени. Асимптотические и граничные условия

квантовых задач будут определять начальные и конечные условия соответствующих классических решений. Интересно, что для классических решений рассеяния нужно использовать нефизические квантовые решения, растущие на асимптотиках линейно (при $E_i = 0$). Эти результаты, полученные в последний момент, будут подробнее описаны в специальной публикации.

Мы установили ряд новых многоканальных закономерностей, но впереди предстоит еще открыть столько удивительных свойств, явлений, прежде чем будет достигнута полнота картины качественных преобразований сложных систем (увлекательнейшая задача – существенно обогатить арсенал наших квантовых представлений).

Авторы благодарны И.В.Амирханову за стимулирующие дискуссии. Один из авторов (Чабанов В.М.) благодарен фонду INTAS за поддержку, осуществляемую в рамках программы исследований Международного центра фундаментальной физики в Москве (ICFPM).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Захарьев Б.Н., Чабанов В.М.** — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.1561.
2. **Левитан Б.М.** — Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. **Марченко В.А.** — Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977;
Marchenko V.A. — Sturm-Liouville Operators and Applications. Birkhauser, Basel, 1986.
4. **Шадан К., Сабатье П.** — Обратная задача в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980; 2-е англ. изд.
Chadan K., Sabatier P. — Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. Springer, Heidelberg, 1989.
5. **Ньютон Р.Г.** — Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969; **Newton R.G.** — Scattering Theory of Waves and Particles, 2nd ed. NY, Springer, 1982.
6. **Захарьев Б.Н., Сузько А.А.** — Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985;
Zakhariev B.N., Suzko A.A. — Direct and Inverse Problems. Heidelberg, Springer, 1990.
7. **Cooper F., Khare A., Sukhatme U.** — Phys. Rep., 1995, v.251, No.5,6, p.268.
8. **Захарьев Б.Н.** — Уроки квантовой интуиции. Дубна: ОИЯИ, 1996; Новая квантовая азбука (в картинках). Ижевск: Удм.ГУ, 1997; "Шредингера оператора спектр", Физическая энциклопедия. М., 1998, т.5; "Новая ситуация в квантовой механике (о возможностях управления спектрами, рассеянием, распадами)", Соросовский образоват. журн., 1996, No. 7; JINR Rapid Commun. 6[45]-90, 1990.
9. **Chabanov V.M., Zakhariev B.N.** — Inverse Problems (topical review), 1997, v.13., R47-R79.
10. **Захарьев Б.Н., Костов Н., Плеханов Е.Б.** — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.914.
11. **Захарьев Б.Н.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.1387.
12. **Chabanov V.M., Zakhariev B.N.** — Phys.Rev., 1994, v. A50, No.8, p.3948.
13. **Chabanov V.M., Zakhariev B.N., Sofianos S.A.** — Ann. der Phys., 1997, v.6, p.136.

14. **Zakhariev B.N., Mineev M.A.** — J. Mosc. Phys. Soc. 1997, v.7, No.3, p.227–236; Препринт ОИЯИ Р4-96-280, Дубна, 1996.
15. **Chabanov V.M., Zakhariev B.N., Sofianos S.A., Braun M.** — In: Lecture Notes in Physics, Inverse and Algebraic Quantum Scattering, Springer, 1997, p.197.
16. **Chabanov V.M., Zakhariev B.N.** — In: Lecture Notes in Physics, Inverse and Algebraic Quantum Scattering, 1997, Springer, p.30.
17. **Chabanov V.M. et al.** — Phys. Rev., 1995, v.A52, R3389; In: Proc. Intern. Conf. "New Frontiers...", Monteroduni, Italy, 1996. Hadronic Press, 1996, v.2, pp.159,171.
18. **Sukumar C.V.** — J. Phys., 1985, v.A18, pp.2917,2937; 1985, v.L57, p.697; 1986, v.A19, p.2297; 1987, v.A20, p.2461.
19. **Andrianov A.A., Cannata F., Ioffe M.V., Nishnianidze D.N.** — J. Phys., 1997, v.A30, No.14, p.5037;
Fukui T. — Phys. Lett., 1993, v.A178, p.1.
20. **Berezovoy V.P., Pashnev A.I.** — Z. Phys. C. 1991, v.51, p.525;
Березовой В.П., Пашнев А.И. — ТМФ, 1987, т.70, с.146; 1988, т.74, с.392.
21. **Baye D.** — J. Phys., 1987, v.A.20, p.5529; Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.2738; In: Proc. Inverse Problems. Bad Honnef 1993. Springer, 1994, p.127.
22. **Amado R.D., Cannata F., Dedonder J.-P.** — Phys. Rev., 1988, v.A37, p.2277; Phys. Rev. Lett., 1988, v.A38, p.3797; v.61, p.2901.
23. **Andrianov A.A., Borisov N.V., Ioffe M.V.** — Zh. Eksp. Theor. Fiz., 1984, v.39, p.78 (Sov. J. Exp. Theor. Phys., 1984, v.39, p.93); Sov. J. Theor. Math. Phys., 1984, v.61, pp.17,183; Phys. Lett., 1995, v.A201, p.103; Int. J. Mod. Phys., 1995, v.18, p.2643 (Sov. J. Theor. Math. Phys., 1987, v.72, p.97); Phys.Lett., 1984, v.A105, p.19; Pis'ma Zh. Eksp. Theor. Fiz., 1984, v.39, p.78 (Lett. Sov. J. Exp. Theor. Phys., 1984, v.39, No.1).
24. **Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V.P.** — Phys. Lett., 1993, v.A174, p.273.
25. **Baye D., Sparenberg J.-M.** — Phys. Rev. Lett., 1994, v.73, p.2789; J. Phys., 1995, v.A28, p.5079.
26. **Cannata F., Ioffe M.V.** — Phys. Lett. B, 1992, v.278, p.399.
27. **Pursey D.L.** — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.431; Phys. Rev. D, 1986, v.33, p.1048; Phys. Rev., 1986, v.D33, p.2267; Phys. Rev., 1987, v.D36, p.1103.
28. **Weber T.A., Pursey D.L.** — Phys. Rev., 1994, v.A 50, p.4478; Phys. Rev., 1995, v.A52, pp.3923,3932,4255.
29. **Witten E.** — Nucl. Phys. B, 1981, v.185, p.513.
30. **Gesztesy F., Simon B., Teschl G.** — To be published in Advances in Math. Sci. Buslaev V., Solomyax M. (eds), Am. Math. Soc., Providence, 1999.
31. **Iiev I.D., Khristov E.Kh., Kirchev K.P.** — Spectral Methods in Soliton Equations. Longman, NY, 1994.
32. **Захарьев Б.Н., Чабанов В.Н., Торчинов В.В.** — Сообщение ОИЯИ Р4-98-645, Дубна, 1998.
33. **Жигунов В.П., Захарьев Б.Н.** — Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. М.: Атомиздат, 1974.
34. **Efimenko T.G., Zhigunov V.P., Zakhariev B.N.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1968, v.47, p.275.
35. **Amirkhanov I.V., Puzynin I.V., Puzynina T.P., Zakhariev B.N.** — In: Proc. of the Int. Conf., Dubna, 6-10 September 1988, ed. by P.Exner and P.Sheba. World Scientific, Singapore/New Jersey/London/Hong Kong, 1989, p.353.
36. **Zakhariev B.N., Zastavenko L.G.** — Phys. Rev., 1989, v.A39, p.5528.
37. **Mielnik B., Reyes M.A.** — J. Phys., 1986, v.A29, p.6009.
38. **Chabanov V.M., Zakhariev B.N.** — JINR Commun., E4-98-298, Dubna, 1998.