

ЭЛАСТОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

С.И.Баструков, И.В.Молодцова, Д.В.Подгайный

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Ф.Вебер

Институт теоретической физики, Университет Мюнхена, Мюнхен 80333, Германия

В.В.Папоян

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

ВВЕДЕНИЕ	993
Нейтронные звезды	997
ЭЛАСТОДИНАМИКА САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ	1000
Нуль-температурные волны в изотропной ядерной материи	1001
Стандартная модель нейтронной звезды	1005
Нерадиальные гравитационно-упругие колебания нейтронной звезды	1008
Периоды сфероидальных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний: s -мода	1010
Периоды торсионных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний: t -мода	1014
НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ: f -МОДА КЕЛЬВИНА	1018
Приливные колебания	1021
МАГНИТОПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД	1026
Нерадиальные МГД-колебания нейтронной звезды в однородной модели	1027
АЛЬФВЕНОВСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПЕРИФЕРИЙНОЙ КОРЕ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ	1033
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1039

ПРИЛОЖЕНИЕ А	1041
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	1043
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1043

ЭЛАСТОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

С.И.Баструков, И.В.Молодцова, Д.В.Подгайный

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Ф.Вебер

Институт теоретической физики, Университет Мюнхена, Мюнхен 80333, Германия

В.В.Папоян

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

В обзоре представлены результаты исследований, посвященных описанию крупномасштабных движений ядерной материи нейтронных звезд. В основе излагаемого подхода лежит представление о звездной ядерной материи как упругом ферми-континууме, обладающем свойствами скомпенсированной магнитоактивной плазмы. В качестве фундаментальных динамических уравнений движения самогравитирующей ядерной среды используются уравнения ядерной эластодинамики, сформулированные в макроскопической теории ядерных коллективных процессов. Представлен вариационный метод вычисления частот гравитационно-упругих сфероидальных (s -мода) и торсионных (t -мода) колебаний нейтронной звезды и исследована ее устойчивость относительно линейных деформаций. Эффективность эластодинамического метода проиллюстрирована расчетами периодов глобальных гравитационно-упругих колебаний в рамках стандартной однородной модели, а также реалистических моделей нейтронных звезд, построенных на основе релятивистского уравнения гравитационного равновесия и уравнений состояния ядерной материи, учитывающих гетерофазность ядерного статистического равновесия. Для описания движений замagnetизированной Ae -фазы вещества нейтронных звезд используется магнитогидродинамический подход, на основе которого проведены расчеты частот тороидальных и полоидальных альфвеновских осцилляций. Подчеркивается, что магнитоплазменные колебания могут оказывать существенное влияние на электромагнитную активность пульсаров.

The review is devoted to studies of large-scale motions of nuclear matter of neutron stars. The studies are based on the idea of star nuclear matter to be an elastic Fermi-continuum with properties of a compensated magnetoactive plasma. Fundamental dynamic equations of the motion of a self-gravitating nuclear matter are the equations of nuclear elastodynamics formulated in the theory of nuclear collective processes. A variational method is presented for computing the frequencies of gravitation-elastic spheroidal (s -mode) and torsion (t -mode) vibrations of a neutron star and its stability with respect to linear deformations is investigated. Efficiency of the elastodynamic method is demonstrated by calculations of the periods of global gravitation-elastic vibrations within the standard homogeneous model and realistic models of neutron stars based on the relativistic equation of gravitational equilibrium and equations of state of nuclear matter with the nuclear statistic equilibrium being heterophase. Motions of magnetized Ae -phase of matter of neutron stars are described in the framework of the magnetohydrodynamic approach which is used in calculating the frequencies of toroid and poloidal Alfvén oscillations. It is emphasized that magnetoplasma vibrations can essentially influence the electromagnetic activity of pulsars.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для ядерной физики главное значение открытия нейтронных звезд [1] состоит в том, что у нее появилась уникальная астрофизическая лаборатория для изучения равновесных и динамических свойств макроскопической ядерной материи. К настоящему моменту в Галактике зарегистрировано свыше 500 нейтронных звезд [2], обнаруживающих себя как изолированные источники пульсирующего радиоизлучения (радиопульсары), а также как источники пульсирующего рентгеновского излучения (рентгеновские пульсары) двойных систем, возникающего из-за аккреции вещества-компаньона на магнитные полюса вращающейся нейтронной звезды. Достаточно полное представление о развитии физики нейтронных звезд за прошедшие тридцать лет после открытия пульсаров можно получить по работам и монографиям [3—13].

В теоретических исследованиях последних лет, затрагивающих ядерные аспекты физики нейтронных звезд, центральное место занимали работы, посвященные изучению равновесных свойств этих массивных компактных объектов конечной стадии звездной эволюции (см., например, [14—22] и приведенную там библиографию). Эти исследования в значительной мере углубили ранние представления об уравнении состояния ядерной материи и основательно продвинули понимание термодинамических фазовых переходов в звездном ядерном веществе по плотности, температуре, химическому составу и интенсивности магнитного поля [21, 22]. Разработанные к настоящему времени методы эволюционного анализа позволяют с высокой степенью надежности судить о деталях стратифицированной структуры нейтронных звезд и с высокой точностью рассчитывать профили плотности, давления, температуры и других величин, определяющих глобальные равновесные параметры нейтронных звезд, такие, как масса M , радиус R , момент инерции J , критическая (кеплеровская) частота гравитационно-устойчивого вращения Ω_K , интенсивность магнитного поля B и другие*.

Между тем особенности динамического поведения ядерной среды в недрах этих компактных объектов изучены в меньшей степени. Прежде всего

*В настоящее время изучение равновесных свойств сколлапсировавших звезд сфокусировано на тщательном анализе гипотезы о существовании массивных гравитационно-устойчивых конфигураций с заметным содержанием странной и кварковой материи [23—25]. Одним из наиболее примечательных следствий этой гипотезы явилось предсказание двух новых ветвей в семействе компактных астрофизических объектов – странных звезд и странных карликов [21, 22]. Кроме того, расчеты равновесных конфигураций со странной материей показывают возможность существования некомпактных планетарноподобных объектов [26] (с малой массой типа Юпитера, $M \sim 10^{-2} - 10^{-4} M_{\odot}$), представляющих особый интерес для современной астрофизики в свете известной проблемы скрытой (темной) материи [27], на пути решения которой наметился заметный прогресс в связи с интенсивным развитием теории и техники наблюдений методом микролинзирования [28, 29].

это связано с отсутствием ясных представлений о законах, управляющих континуальной механикой самогравитирующей ядерной материи. Недостаточно исследованной остается макроскопическая электродинамика волновых процессов, способных поддерживаться сильно замагниченной ядерной средой.

В настоящем обзоре мы представим аргументы, свидетельствующие о том, что макроскопическая ядерная материя обладает свойствами упругого материального континуума и скомпенсированной сильно замагниченной плазмы. В частности, мы покажем, что в качестве фундаментальных уравнений континуальной механики ядерной сплошной среды могут быть использованы уравнения ядерной эластодинамики, установленные в лабораторной ядерной физике при изучении сильно коллективизированных процессов, таких, как гигантские резонансы и деление, а электродинамика волновых процессов, способных происходить в Ae -фазе вещества нейтронных звезд, может быть исследована на основе уравнений магнитогидродинамики.

Мы начнем с перечисления ряда наблюдений, явно демонстрирующих неадекватность отождествления непрерывной ядерной материи с несжимаемой жидкостью. Накопленные знания об эволюционном пути массивных звезд не оставляют сомнения в том, что только на ранних и зрелых стадиях эволюции звездное вещество можно рассматривать как высокотемпературную плазму [30, 31], крупномасштабные движения которой подчиняются законам газовой динамики. Представление о нормальных звездах как о сферических самогравитирующих газовых массах убедительно подтверждается многочисленными исследованиями переменных звезд главной последовательности (прежде всего цефеид), в которой периодические изменения их блеска (светимости) хорошо описываются гидродинамической теорией радиальных пульсаций [32—37]. Однако газодинамическая концепция поведения звездной среды перестает себя оправдывать для звезд заключительной стадии эволюции – белых карликов и нейтронных звезд. Теоретические расчеты и наблюдения показывают, что по мере выгорания ядерного топлива происходит заметное уплотнение вещества силами гравитационного сжатия, в результате которого в конечных продуктах звездной эволюции оно приобретает свойства крайне жесткого материала, подобного твердому телу. В настоящее время твердо установлено, что переменность излучения белых карликов обусловлена их сдвиговыми сфероидальными и торсионными (крутильными) существенно нерадиальными колебаниями [37-41], которые сопровождаются заметными анизотропными (сдвиговыми) искажениями внутренних напряжений в звезде. Из физики конденсированных состояний известно, что такие колебания способны поддерживаться только твердотельно-упругими средами, но не газовой-жидкостными. Убедительным свидетельством в пользу того, что ядерная материя нейтронных звезд обладает свойствами твердой (практически несжимаемой) среды, служит феномен звездотрясений, регистрируемый как внезапный сбой в регулярных пульсациях радиоизлучения пульсаров (см. [3],

с.71). В двухкомпонентной модели вращающейся намагниченной нейтронной звезды наблюдаемый сбой связывается с возникновением критических упругих напряжений в жесткой периферийной коре, в результате чего теряется ее устойчивая связь с внутренним более плотным остовом [42] (см. также [8,13]). Высокая степень несжимаемости ядерной материи, затрудняющая возбуждение радиальных пульсаций, указывает на то, что крупномасштабные (сейсмические) флуктуации вещества в недрах нейтронных звезд, так же, как и в белых карликах, должны носить нерадиальный эластодинамический характер [111—115]*. В настоящем обзоре мы представляем один из возможных подходов к этой проблеме.

Особое внимание мы обращаем на выводы сравнительно недавних исследований, проведенных в лабораторной ядерной физике, цель которых состояла в объяснении регулярных эмпирически установленных закономерностей в систематике данных по гигантским резонансам и делению. При описании резонансного отклика атомного ядра, моделируемого малой частицей сплошной среды, было обнаружено, что оно проявляет свойства, присущие упругому шару, а не капле несжимаемой жидкости, как полагалось ранее. В современной макроскопической теории ядерных коллективных движений гигантские электрические и магнитные резонансы трактуются как быстрые (диабатические) процессы возбуждения, соответственно, упругих сфероидальных и торсионных квазистатических волн (или, другими словами, длинноволновых нерадиальных эластодинамических колебаний) [46-56]. Едва ли не главным достижением этого направления лабораторной ядерной теории является строгая формулировка фундаментальных уравнений, моделирующих упругоподобный характер поведения ядерной сплошной среды – уравнений ядерной эластодинамики. Полученное в этой теории выражение для потенциальной энергии эластодинамических колебаний ядерной макрочастицы имеет вид макроскопической энергии упругих деформаций, подчиняющихся классическому закону Гука, хотя микроскопическая природа этой энергии имеет существенно квантовое происхождение, обусловленное анизотропными искажениями ферми-сферы (см., например, [54,56]). Один из основных результатов эластодинамического подхода состоит в прозрачной физической трактовке и точном количественном описании скейлинговых закономерностей**, отчетливо прослеживаемых в экспериментальных данных по интегральным

*Особенности радиальных колебаний нейтронных звезд обсуждались в работах [43—45]. Однако по имеющимся на сегодняшний день данным можно заключить, что нейтронные звезды не обнаруживают признаков радиальных пульсаций. Следует подчеркнуть, что методы описания нерадиальных гравитационных колебаний звезд остаются менее продвинутыми по сравнению с теорией радиальных пульсаций [111—115].

**Под скейлинговыми законами понимают гладкие систематические зависимости энергии, полной вероятности возбуждения и ширины гигантского резонанса от массового числа.

характеристическим параметрам гигантских резонансов. Косвенные свидетельства в пользу упругоподобного поведения макроскопической ядерной материи получены в исследованиях адиабатических (медленных) коллективных процессов, таких, как ядерное слияние [57—59] и деление ядер тяжелых и сверхтяжелых элементов [60].

Поскольку нейтронная звезда является объектом крупномасштабного распределения ядерной материи, то представляется совершенно естественным исследовать континуальную механику ядерного вещества в собственном гравитационном поле на основе уравнений ядерной эластодинамики, предполагая, таким образом, что законы движения ядерной сплошной среды, установленные в лабораторных экспериментах на атомном ядре, сохраняют свою силу для его гигантского космического двойника. Такие исследования были проведены в работах [61—66], систематическому изложению которых посвящена первая половина настоящего обзора.

Нет никаких сомнений в том, что электромагнитная активность пульсара связана с аномально высокой намагниченностью вещества в его недрах [67, 68]. Прямым наблюдаемым свидетельством наличия магнитного поля в нейтронной звезде является сильная линейная поляризация радиоизлучения пульсаров. Физическую причину сверхмощного намагничивания нейтронных звезд можно объяснить, предположив [69, 70], что даже слабо намагниченное звездное вещество в процессе эволюции остается в ионизированном (плазменном) состоянии, а коллапс звезд протекает с сохранением магнитного потока. Характерным динамическим свойством замагниченной и скомпенсированной плазмы является способность поддерживать магнитоплазменные (альфвеновские) осцилляции, на возможность распространения которых в нейтронной звезде, видимо, впервые было указано в работах [71, 72]. В [71] было показано, что энергетику Крабовидной туманности можно понять, предположив, что в ее центре находится нейтронная звезда, высвобождающая магнитную энергию, запасенную в контракционный период ее рождения, посредством преобразования энергии остаточных (после взрыва сверхновой) гидромагнитных колебаний в энергию электромагнитного излучения. Однако, как нам кажется, эта идея не получила должного конструктивного развития. В данном обзоре мы представляем систематическое изложение теории нерадиальных альфвеновских колебаний в нейтронной звезде, сформулированной в [73—76], и приводим подробный расчет периодов нерадиальных магнитогидродинамических колебаний, носящих существенно эластодинамический характер.

Далее мы придерживаемся следующего плана изложения. Во второй части введения приводятся краткие сведения о нейтронных звездах. В разд. 2 представлена эластодинамическая модель глобальных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний нейтронных звезд, которые могут индуцироваться массивным компаньоном в двойной системе, либо сохраняться как остаточный эффект имплозийного рождения пульсара. В разд. 3 мы проводим кон-

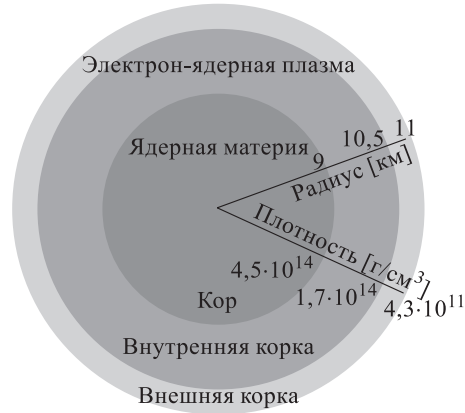


Рис. 1. Схематическая картина сечения нейтронной звезды с радиусом 11 км и массой $1,4 M_{\odot}$. Степень затемнения отражает стратифицированный характер распределения вещества в недрах нейтронной звезды. Внутренняя часть — массивный кор с радиусом 9 км, вещество которого представляет собой ядерную (в основном нейтронную) материю со средней плотностью $1,5 \rho_N$ (ρ_N — нормальная плотность ядерного вещества). В периферийной области звезды вещество находится в состоянии сильно вырожденной электрон-ядерной плазмы (Ae -фаза), причем внутренняя корка толщиной около 1,5 км образована атомными ядрами, переобогащенными нейтронами (с незначительной примесью вырожденных электронов). Внешняя корка глубиной 0,5 км состоит из свободных электронов и образующих квазикристаллическую решетку ядер железа

структивное сравнение гидродинамического и эластодинамического подходов к описанию самогравитирующей ядерной материи и обсуждаем проявления нерадиальных гравитационных колебаний нейтронных звезд в электромагнитной активности пульсаров. Изложению теории магнитоплазменных квазистатических волн в нейтронной звезде посвящены разд. 4 и 5. Подчеркивая эластодинамическую природу альфвеновских колебаний, мы приводим детальные вычисления периодов магнитоплазменных осцилляций. В заключении сделаны выводы из представленного анализа.

Нейтронные звезды. Сформировавшаяся нейтронная звезда (пульсар) представляется сферическим замагниченным компактным объектом с радиусом $R \sim 10 - 15$ км (для сравнения $R_{\odot} = 695980$ км) и массой $0,3 - 2,5 M_{\odot}$ ($M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33}$ г), в недрах которого вещество сконденсировано силами собственного тяготения до плотностей, близких к нормальной ядерной плотности $\rho \sim 2,8 \cdot 10^{14}$ г/см³. Момент инерции нейтронной звезды составляет $J = (2/5)MR^2 \sim 10^{44} - 10^{45}$ г·см². Наиболее характерной особенностью ядерной среды нейтронных звезд является сверхмощная намагниченность и высокая степень проводимости. Интенсивность магнитного поля на поверх-

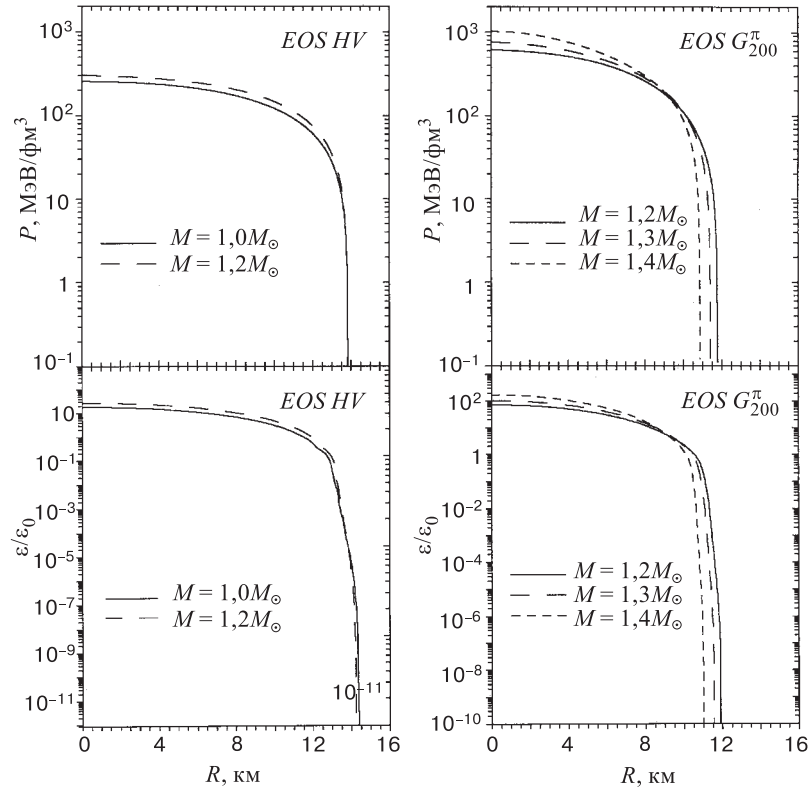


Рис. 2. Профили плотности и давления (в единицах плотности энергии ядерной материи $\epsilon_0 = 140 \text{ МэВ/фм}^3$), рассчитанные на основе уравнения равновесия Толмена—Оппенгеймера—Волкова и реалистических уравнений состояния ядерной материи (табл. 3) для моделей нейтронных звезд с указанной массой

ности звезды достигает величины $B \sim 10^{11} \div 10^{13} \text{ Гс}$ [67]. Величина среднего магнитного момента равна $\mu_{\text{NS}} \sim 10^{30} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$, а средняя величина коэффициента электропроводности составляет $\sigma \sim 6 \cdot 10^{22} \text{ с}^{-1}$. Пространственное распределение пульсаров обнаруживает четко выраженное сгущение к плоскости галактического диска толщиной около 500 пс, а средний возраст активности в радиодиапазоне оценивается величиной $\tau \sim 10^6 - 10^8 \text{ лет}$ [8, 13]. По современным оценкам нейтронная звезда рождается каждые 15–20 лет [9]. Характерные периоды радиоизлучения пульсаров лежат в интервале от 1,6 мс (PSR 1937+21 – самый быстрый на данный момент пульсар) до 4,3 с (PSR 1845–19 – самый медленный). Обнаружение пульсара Краб, в окрестности которого отчетливо просматриваются признаки распыленного взрывом вещества, под-

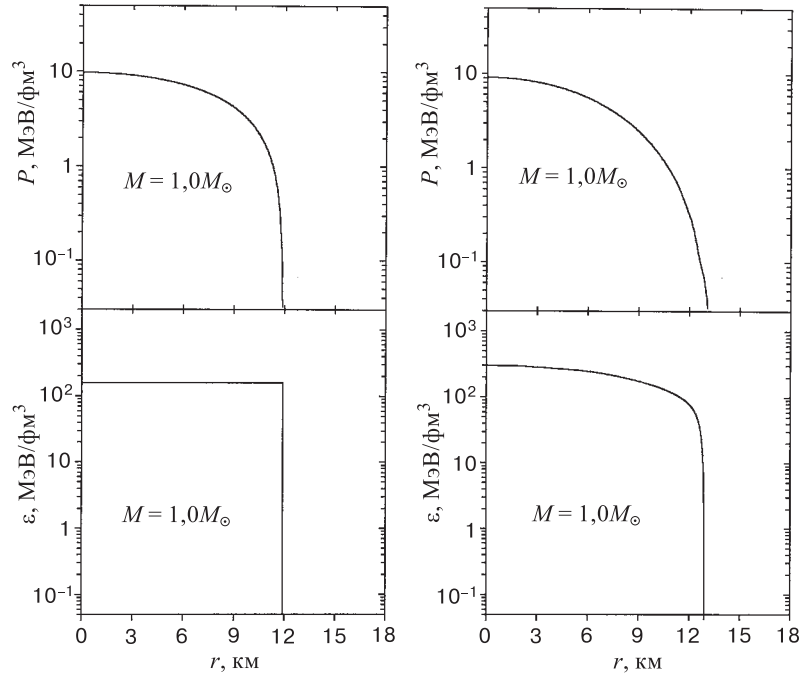


Рис. 3. Сравнение профилей плотности и давления для нейтронной звезды с массой, равной одной солнечной массе, со средней плотностью, равной двукратной ядерной плотности, в однородной модели (правая часть рисунка) и в неоднородной модели, построенной на основе реалистического уравнения состояния ядерной материи

твердило гипотезу Бааде и Цвикки [77] о генетической связи нейтронных звезд со вспышками сверхновых [5]. Качественную картину рождения этого пульсара объясняет магниторотационный сценарий импlosionного рождения во вспышке сверхновой в 1054 г. [31, 78, 79]. В критический момент исчерпания запасов ядерного топлива гравитационная неустойчивость, возникающая в слабо намагниченной медленно вращающейся звезде-предшественнице*, развивается таким образом, что стремительное падение вещества на центр (импlosionия – взрыв вовнутрь) сопровождается его уплотнением до тех пор, пока силы гравитационного сжатия не будут приведены в равновесие давлением вырожденного нейтронного ферми-континуума. Образующийся в центре сильно

*Согласно теории звездной эволюции нейтронными могут стать массивные звезды главной последовательности с массой $M \sim 4 - 8M_{\odot}$, но не выше десяти солнечных масс. Конечной стадией эволюции звезд с массами, превышающими $10 M_{\odot}$, являются черные дыры [80].

Таблица 1. Параметры уравнений состояния (УС) ядерной материи, используемые при построении (на основе уравнений ОТО) реалистических моделей нейтронных звезд [22]

УС	E/A , МэВ	n , фм ⁻³	K , МэВ	m^*/m	a_{sy} , МэВ
G_{200}^{π}	-15,95	0,145	200	0,80	36,8
HV	-11,5	0,175	202	0,79	29,3
UVII	-15,98	0,145	285	0,77	36,8

E/A — энергия связи на нуклон при средней плотности частиц n , K — коэффициент сжимаемости, m^*/m — отношение эффективной массы нуклона m^* в ядерной материи при указанной плотности насыщения к массе свободного нуклона m , a_{sy} — энергия симметрии

намагниченный и быстро вращающийся компактный объект в конечном итоге формируется как нейтронная звезда – пульсар [81], а остальная (значительно бо́льшая, порядка 2 – 6 M_{\odot}) часть массы первоначальной звезды отбрасывается магнитным давлением в окружающее пространство в виде быстро остывающей радиоизлучающей туманности. В процессе формирования нейтронная звезда разогревается до температуры 10^{11} К (10 МэВ) и затем быстро остывает до температуры $T \sim 10^7 - 10^8$ К (10–100 кэВ) [82].

На рис.1 схематически изображена модель нейтронной звезды, построенная на основе релятивистского уравнения гравитационного равновесия Толмена—Оппенгеймера—Волкова с типичными параметрами уравнения состояния ядерной материи, приведенными в табл. 1, рассчитанными с учетом гетерофазности ядерного статистического равновесия. Подробное обсуждение уравнений состояния дается в [8, 21, 22]). На рис. 2 и 3 представлены профили плотности и давления, рассчитанные методом Хартри—Фока, для перечисленных выше уравнений состояния [22].

2. ЭЛАСТОДИНАМИКА САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ

Утверждение об упругоподобном поведении материального континуума нейтронных звезд конструктивно выражается в том, что его движения описываются уравнениями ядерной эластодинамики [56, 63]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{dV_i}{dt} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{dP_{ij}}{dt} + P_{ik} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + P_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.3)$$

где ρ – плотность ядерной среды, V_i – компоненты поля скорости упругих смещений и P_{ij} – тензор упругих напряжений (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Первое из уравнений, (2.1), представляет собой хорошо известное уравнение непрерывности. Уравнение (2.2) описывает движение потока ядерного вещества. Уравнение (2.3) контролирует динамику внутренних напряжений. Такая терминология связана с данным выше определением массовой плотности ρ , трех компонент скорости потока V_i и девятикомпонентного тензора упругих напряжений P_{ij} как, соответственно, нулевого, первого и второго импульсных моментов одночастичной функции распределения в фазовом пространстве. Мы рассматриваем движения ядерной среды на таких масштабах, где доминирующую роль играют объемные силы собственного (ньютоновского) тяготения. Поэтому в уравнении (2.2) под U понимается гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi G\rho, \quad (2.4)$$

где G – гравитационная постоянная. В результате приходим к замкнутой системе уравнений (2.1)–(2.4), описывающей динамику идеально упругой сплошной среды (эффекты эластопластичности игнорируются) в поле собственного тяготения. В последующем изложении эти уравнения рассматриваются как фундаментальные уравнения эластодинамики самогравитирующей ядерной материи. Введение уравнения (2.3) обеспечивает возможность описания как гидродинамических, так и эластодинамических свойств ядерной среды в рамках единой схемы, проявление которых связано с характером локальных искажений равновесного ферми-распределения. В качестве конструктивной демонстрации последнего утверждения рассмотрим процесс распространения плосковолновых возмущений в однородном и изотропном ферми-континууме.

Нуль-температурные волны в изотропной ядерной материи. Под однородной изотропной нейтронной материей понимается сплошная среда, в которой распределение внутренних напряжений P_{ij} при нулевой температуре задается давлением P полностью вырожденного по спину и изоспину ферми-газа, сконденсированного до нормальной ядерной плотности ρ . В приближении Томаса—Ферми равновесные параметры такой среды задаются следующими эквивалентными выражениями:

$$P_{ij} = \delta_{ij} P, \quad P = \frac{\rho v_F^2}{5}, \quad v_F = \frac{\hbar k_F}{m^*}, \quad \rho = n m^*, \quad n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}, \quad (2.5)$$

$$P = \frac{2}{3}\mathcal{E}_N, \quad \mathcal{E}_N = \frac{3}{5}n\epsilon_F, \quad \epsilon_F = \frac{1}{2}m^*v_F^2. \quad (2.6)$$

Более полное описание равновесных свойств нуклонной материи с учетом неоднородности распределения плотности дано в [51].

В импульсном пространстве изотропному распределению напряжений отвечает сферически-симметричное заполнение нуклонами одночастичных орбиталей (уравнение (2.5), переписанное в виде $p_F^2/m^{*2} = 5P/\rho = \text{const}$, есть уравнение ферми-сферы). Сферически-симметричному сжатию и растяжению ферми-сферы в импульсном пространстве соответствуют изотропные изменения напряжений в объеме среды:

$$P_{ij} \rightarrow (P + \delta P) \delta_{ij}. \quad (2.7)$$

В идеальной жидкости или газе возмущения распространяются без разрушения изотропии равновесного изотропного распределения напряжений, т.е. без возникновения касательных напряжений. Математически это свойство отражается условием сферичности тензора напряжений (2.7) (все нормальные напряжения в среде выражены через одну скалярную величину — давление). В отличие от жидкости возмущение изотропной твердотельно-упругой среды сопровождается возникновением анизотропных напряжений. Такие возмущения описываются тензором

$$P_{ij} \rightarrow P\delta_{ij} + \delta P_{ij}. \quad (2.8)$$

Анизотропность выражена тензором δP_{ij} , который содержит ненулевые недиагональные элементы. В импульсном пространстве подстановке (2.8) отвечает анизотропная квадрупольная деформация равновесного ферми-распределения или, говоря иначе, квадрупольная деформация ферми-сферы.

Согласно современной теории сплошных сред реология материального континуума определяется динамикой внутренних напряжений, которые проявляются в способности среды поддерживать распространение возмущений в виде волн, специфических для данного типа среды. Покажем, что при линейных возмущениях томас-фермиевской нейтронной материи, которые сопровождаются исключительно изотропными (компрессионными) искажениями ферми-распределения в импульсном пространстве, она проявляет свойства, присущие идеальной ферми-жидкости, т.е. среде, способной поддерживать распространение только продольных колебаний с фазовой скоростью $c_L = v_F/\sqrt{3}$. Между тем при возмущениях, вызывающих деформацию равновесного ферми-распределения нейтронов в импульсном пространстве, нейтронная материя проявляет свойства упругого ферми-континуума, т.е. среды, способной поддерживать эластодинамические нуль-температурные волны, а именно продольную, распространяющуюся с фазовой скоростью $c_l = (3/5)^{1/2}v_F$, и поперечную с фазовой скоростью $c_t = v_F/\sqrt{5}$.

Гидродинамический нулевой звук в вырожденной ядерной материи. Рассмотрим линейные возмущения сжимаемой нейтронной материи, находящейся в покое, при которых ферми-сфера претерпевает изотропные искажения. При этом мы рассматриваем только возмущения, не приводящие к перестройке

исходного ферми-распределения, структура которого определяется средним полем U . Фактически это означает, что при этих движениях потенциал среднего поля не меняется, т.е. $\delta U = 0$. При этих условиях уравнения (2.1)—(2.3) линеаризуются подстановкой вида

$$\rho \rightarrow \rho + \delta\rho, \quad V_i \rightarrow V_i(=0) + \delta V_i, \quad P_{ij} \rightarrow \left[P \left(= \frac{\rho v_F}{5} \right) + \delta P \right] \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

В результате приходим к замкнутой системе уравнений линейной гидродинамики вязкой ферми-жидкости

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \delta V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{\partial \delta V_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial x_i} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \frac{5}{3} P \frac{\partial \delta V_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2.12)$$

Если продифференцировать уравнение (2.11) по времени, то с учетом (2.12) сразу получаем уравнение продольной гидродинамической волны

$$\delta \ddot{\mathbf{V}} - c_L^2 \Delta \delta \mathbf{V} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_L = c_L k, \quad c_L = \sqrt{\frac{5P}{3\rho}} = \frac{v_F}{\sqrt{3}}, \quad (2.13)$$

выражающее один из главных выводов теории ферми-жидкости, который состоит в том, что идеальная ферми-жидкость способна поддерживать распространение продольных звуковых волн (k — волновой вектор) при нулевой температуре. Как видно из уравнения (2.13), продольная нуль-звуковая волна характеризуется бездисперсным законом распространения с фазовой скоростью c_L . Существенно квантовая природа нулевого звука Ландау состоит в том, что он может возбуждаться при нулевой температуре, т.е. в полностью вырожденном ферми-континууме. В классическом идеальном газе распространение звуковых волн невозможно, поскольку равновесное давление пропорционально T (уравнение состояния классического идеального газа $P = nk_B T$, где k_B — константа Больцмана).

Нуль-температурные эластодинамические волны в вырожденной нейтронной материи. Теперь рассмотрим линейные возмущения в сжимаемой нейтронной среде, при которых ферми-сфера претерпевает анизотропные искажения. В этом случае уравнения (2.1)—(2.3) линеаризуются подстановкой вида

$$\rho \rightarrow \rho + \delta\rho, \quad V_i \rightarrow V_i(=0) + \delta V_i, \quad P_{ij} \rightarrow P \left(= \frac{\rho v_F}{5} \right) \delta_{ij} + \delta P_{ij}, \quad (2.14)$$

которая приводит к следующей системе уравнений бездиссипативных линейных флуктуаций:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \delta V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.15)$$

$$\rho \frac{\partial \delta V_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial t} + P \left[\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta V_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \frac{\partial \delta V_k}{\partial x_k} \right] = 0. \quad (2.17)$$

В данном случае удобно перейти к полю смещений $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, связанному с полем скорости $\delta \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ соотношением

$$\delta V_i(\mathbf{r}, t) = -\dot{D}_i(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.17), получим

$$\delta P_{ij} = P \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_j} + \frac{\partial D_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \frac{\partial D_k}{\partial x_k} \right). \quad (2.19)$$

Сравнивая данное выражение для напряжений в нейтронной материи (индуцированных искажениями ферми-распределения в импульсном пространстве) с выражением для напряжений, подчиняющихся закону Гука для изотропного идеально упругого материала [85]:

$$\delta P_{ij} = \mu \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_j} + \frac{\partial D_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial D_k}{\partial x_k}, \quad (2.20)$$

можно заключить, что нейтронный ферми-континуум ведет себя как идеально упругая среда, в которой модуль упругости λ и модуль сдвига μ (параметры Ламэ) равны друг другу, а по абсолютной величине эти модули совпадают с давлением $\lambda = \mu = P$. Более того, подставляя (2.18) и (2.19) в уравнение движения для поля скорости упругих деформаций δV_i (2.16), находим, что это уравнение

$$\rho \ddot{\mathbf{D}} = 2P \text{grad div } \mathbf{D} + P \Delta \mathbf{D} \quad (2.21)$$

совпадает с уравнением Ламэ

$$\rho \ddot{\mathbf{D}} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{D} + \mu \Delta \mathbf{D}, \quad (2.22)$$

описывающим линейную эластодинамику идеально упругой изотропной сплошной среды. Установленная аналогия между уравнениями движения

нейтронного ферми-континуума, возмущения которого сопровождаются анизотропными искажениями ферми-распределения, и уравнениями Ламе позволяет воспользоваться классификацией волновых движений, принятой в линейной теории упругости. Согласно последней в идеально упругой среде может распространяться как продольная, так и поперечная волна упругих смещений [85]. Процедура разделения эластодинамических волн на продольную и поперечную достаточно подробно описана в литературе, поэтому мы ограничимся лишь основными результатами такого разделения, которое вытекает из представления векторного поля упругих смещений в виде суммы

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_l + \mathbf{D}_t; \quad (2.23)$$

\mathbf{D}_l подчиняется уравнению продольной волны

$$\ddot{\mathbf{D}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{D}_l = 0, \quad \text{rot } \mathbf{D}_l = 0, \quad (2.24)$$

которая распространяется с фазовой скоростью

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{3}{5}} v_F. \quad (2.25)$$

Уравнение поперечных волновых движений имеет вид

$$\ddot{\mathbf{D}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{D}_t = 0, \quad \text{div } \mathbf{D}_t = 0. \quad (2.26)$$

Эта волна распространяется со скоростью

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{v_F}{\sqrt{5}}. \quad (2.27)$$

Поперечная волна не создает сжатий и разряжений и поэтому может распространяться в несжимаемой нейтронной (ядерной) среде.

Стандартная модель нейтронной звезды. Эвристическая ценность стандартных звездных моделей состоит в том, что они позволяют в аналитической форме получить оценки равновесных и динамических параметров звезд [34]. В стандартной модели нейтронная звезда идеализируется сферической однородной массой несжимаемого вещества, обладающего свойствами нерелятивистского вырожденного нейтронного ферми-континуума, сконденсированного силами собственного тяготения до плотностей, близких к нормальной ядерной плотности.

Равновесное распределение поля собственной гравитации выражается хорошо известным решением уравнения (2.4):

$$U_0^{in} = -\frac{2\pi}{3} G \rho_0 (r^2 - 3R^2), \quad r \leq R, \quad (2.28)$$

$$U_0^{ex} = \frac{4\pi R^3}{3r} G \rho_0, \quad r > R, \quad (2.29)$$

где индексом нуль помечены равновесные характеристики.

Следствием сферической симметрии гравитационного взаимодействия является изотропное равновесное распределение напряжений (давления) в объеме звезды:

$$P_{ij}^0(r) = P_0(r)\delta_{ij}. \quad (2.30)$$

Радиальная зависимость давления определяется из уравнения равновесия с граничным условием, согласно которому давление в центре звезды определяется внутренним давлением ядерного вещества $P_N(\rho_0)$:

$$\nabla P_0(r) = \rho_0 \nabla U_0^{in}(r), \quad P_0(r=0) = P_N(\rho_0). \quad (2.31)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P_0(r) = P_N(\rho_0) - (2\pi/3) G \rho_0^2 r^2. \quad (2.32)$$

Отметим, что $P_N(\rho_0)$ есть основная характеристика, несущая информацию об уравнении состояния ядерной материи и, таким образом, связывающая ядерную физику с физикой нейтронных звезд. В стандартной модели под $P_N(\rho_0)$ понимается давление вырожденного нейтронного вещества [8]:

$$P_N(\rho_0) = (2/3)\mathcal{E}_N(\rho_0) = K \rho_0^{5/3}, \quad \rho_0 = m^* \frac{2}{3\pi^2} k_F^3, \quad K = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m^{*8/3}}. \quad (2.33)$$

Сравнение рис.2 и 3 дает представление о степени достоверности приближения резкого края для профиля плотности, лежащего в основе стандартной модели нейтронной звезды. При заданной плотности из (2.32) легко получить оценку радиуса нейтронной звезды, который определяется как радиус свободной от напряжений сферической поверхности $P_0(r=R) = 0$, то есть поверхности, где упругие напряжения, обусловленные собственной гравитацией, уравновешиваются внутренним давлением нейтронного ферми-континуума. Из условия

$$P_0(R) = P_N(\rho_0) - (2\pi/3) G \rho_0^2 R^2 = 0 \quad \rightarrow \quad P_N = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2, \quad (2.34)$$

находим, что равновесный радиус и масса нейтронной звезды в стандартной модели определяются выражениями

$$R = \sqrt{\frac{3P_N}{2\pi G \rho_0^2}}, \quad M = (4\pi/3)\rho_0 R^3. \quad (2.35)$$

В табл.3 приводятся численные значения для M и R , рассчитанные по этим формулам, а на рис.2 изображены профили плотности и давления. Эти

Таблица 2. Периоды P_L нерадиальных гравитационных сфероидальных (s -мода) и торсионных (t -мода) эластодинамических колебаний для реалистических (неоднородных) моделей нейтронных звезд, построенных на основе уравнения гидростатического равновесия Толмена—Оппенгеймера—Волкова и трех вариантов уравнений состояний ядерной материи с параметрами, представленными в табл.1

Неоднородная модель			Гравитационная s -мода			Гравитационная t -мода		
Уравнение сост.	M/M_\odot	R , км	$P_{2,мс}$	$P_{3,мс}$	$P_{4,мс}$	$P_{2,мс}$	$P_{3,мс}$	$P_{4,мс}$
HV	1,0	14,38	0,41	0,30	0,25	0,60	0,44	0,36
HV	1,2	14,23	0,37	0,27	0,22	0,54	0,39	0,33
HV	1,9	11,28	0,14	0,11	0,09	0,21	0,15	0,13
G_{200}^π	1,2	11,95	0,26	0,19	0,17	0,39	0,29	0,24
G_{200}^π	1,3	11,59	0,23	0,17	0,15	0,35	0,26	0,22
G_{200}^π	1,4	11,03	0,20	0,15	0,13	0,30	0,22	0,18
UVII	2,1	9,20	0,09	0,07	0,06	0,14	0,10	0,08

Таблица 3. Периоды P_L нерадиальных гравитационно-упругих сфероидальных (s -мода) и торсионных (t -мода) пульсаций, вычисленные на основе стандартной однородной модели нейтронной звезды (самогравитирующей сферической массы вырожденной нейтронной материи)

Однородная модель		Сфероидальная мода			Торсионная мода		
M/M_\odot	R км	P_2 , мс	P_3 , мс	P_4 , мс	P_2 , мс	P_3 , мс	P_4 , мс
0,89	12,34	0,14	0,11	0,08	0,20	0,14	0,12
0,95	12,10	0,13	0,10	0,08	0,19	0,13	0,11
1,00	11,89	0,13	0,09	0,07	0,18	0,13	0,10
1,04	11,70	0,12	0,09	0,07	0,17	0,12	0,10
1,09	11,54	0,12	0,08	0,07	0,16	0,12	0,09
1,14	11,38	0,11	0,08	0,06	0,16	0,11	0,09
1,18	11,24	0,10	0,08	0,06	0,15	0,11	0,09
1,22	11,12	0,10	0,07	0,06	0,15	0,10	0,08
1,26	11,00	0,10	0,07	0,06	0,14	0,10	0,08
1,30	10,89	0,09	0,07	0,06	0,14	0,09	0,08
1,34	10,78	0,09	0,07	0,05	0,13	0,09	0,08
1,37	10,69	0,09	0,06	0,05	0,13	0,09	0,07
1,41	10,59	0,09	0,06	0,05	0,13	0,09	0,07
1,44	10,51	0,09	0,06	0,05	0,12	0,09	0,07
1,48	10,43	0,09	0,06	0,05	0,12	0,09	0,07

оценки удовлетворительно согласуются с результатами расчетов массы и радиуса, полученными в релятивистских моделях нейтронных звезд и представленными в табл.2.

В литературе неоднократно отмечалось [13], что поскольку радиус нейтронной звезды R соизмерим с ее гравитационным радиусом $R_G = 2GM/c^2 \sim$

3 км, то надежные результаты могут быть получены лишь с учетом эффектов общей теории относительности. Тем не менее вышеприведенные оценки убеждают в том, что стандартная модель, основанная на ньютоновской гравитации и использующая в качестве уравнения состояния ядерного вещества уравнение чисто нейтронной материи, приводит к значениям интегральных равновесных параметров (массы, радиуса, момента инерции), хорошо согласующимся с предсказаниями реалистических моделей нейтронных звезд [21,22]. Это позволяет надеяться, что использование уравнения нерелятивистской теории гравитации не приведет к серьезным ошибкам и при вычислении периодов нерадиальных гравитационно-упругих мод.

Нерадиальные гравитационно-упругие колебания нейтронной звезды. В несжимаемой упругой среде нерадиальные длинноволновые колебания (квазистатические упругие волны) являются единственно возможным типом динамической активности. Фундаментальные частоты нерадиальных колебаний могут быть вычислены аналитически на основе энергетического вариационного принципа [84]. Предполагая, что поток массы в равновесном состоянии отсутствует, и используя стандартную процедуру линеаризации

$$\rho \rightarrow \rho_0 + \delta\rho (= 0), \quad V_i \rightarrow V_i^0 (= 0) + \delta V_i, \quad P_{ij} \rightarrow \delta_{ij} P_0 + \delta P_{ij}, \quad U \rightarrow U_0 + \delta U,$$

уравнения (2.1)—(2.4) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.36)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta V_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial x_j} - \rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial x_i} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial t} + P_0 \left(\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta V_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\delta V_k \frac{\partial P_0}{\partial x_k} \right) = 0, \quad (2.38)$$

$$\Delta \delta U = 0. \quad (2.39)$$

Далее, умножая скалярно уравнение (2.37) на δV_i и интегрируя по объему звезды, получаем уравнение энергетического баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \rho_0 \delta V^2 d\tau - \int_V \delta P_{ij} \frac{\partial \delta V_i}{\partial x_j} d\tau - \oint_S [\rho_0 \delta U \delta V_i - \delta P_{ij} \delta V_j] d\sigma_i = 0, \quad (2.40)$$

которое контролирует сохранение энергии в процессе колебаний. Флуктуации скорости возмущенного потока δV_i и потенциала самогравитации δU представим в виде

$$\delta V_i(\mathbf{r}, t) = -\xi_i^L(\mathbf{r}) \dot{\alpha}_L(t), \quad \delta U(\mathbf{r}, t) = \phi^L(\mathbf{r}) \alpha_L(t), \quad (2.41)$$

где L — мультипольный порядок колебания. Нормальная координата $\alpha_L(t)$ определяет зависимость от времени флуктуирующих переменных. Через $\xi^L(\mathbf{r})$ обозначено поле мгновенных упругих смещений. Подставляя (2.41) в (2.38), находим, что флуктуации в напряжениях определяются тензором

$$\delta P_{ij}(\mathbf{r}, t) = \left[P_0(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \xi_i^L(\mathbf{r})}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L(\mathbf{r})}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\xi_k^L(\mathbf{r}) \frac{\partial P_0(\mathbf{r})}{\partial x_k} \right) \right] \alpha_L(t). \quad (2.42)$$

Линейная связь тензора упругих напряжений δP_{ij} (являющегося динамической характеристикой упругости материала) с тензором упругих деформаций U_{ij} (кинематической характеристикой эластодинамических смещений):

$$\delta P_{ij} \sim 2P(r)U_{ij}, \quad U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L}{\partial x_i} \right) \alpha_L(t) \quad (2.43)$$

говорит о том, что распространение упругих искажений в ядерной среде подчиняется закону Гука [85]. Благодаря разделению пространственной и временной зависимости флуктуирующих переменных, подстановка (2.41) и (2.42) в уравнение энергетического баланса (2.40) преобразует его к виду:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0, \quad \mathcal{H} = \frac{\mathcal{M}_L \dot{\alpha}_L^2}{2} + \frac{\mathcal{K}_L \alpha_L^2}{2}, \quad (2.44)$$

где параметры инерции \mathcal{M}_L и жесткости \mathcal{K}_L определены следующим образом:

$$\mathcal{M}_L = \int_V \rho_0 \xi_i^L \xi_i^L d\tau, \quad \mathcal{K}_L = \frac{1}{2} \int_V P_0 \left(\frac{\partial \xi_i^L}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^L}{\partial x_i} \right)^2 d\tau. \quad (2.45)$$

При выводе выражения для жесткости \mathcal{K}_L мы пренебрегли поверхностными эффектами. Данное приближение можно трактовать как эластодинамический аналог гидродинамического приближения Каулинга [36]. Конструктивно приближение Каулинга может быть выражено соотношением

$$\left[\rho_0 \Phi - \xi_k \frac{\partial P_0}{\partial x_k} \right]_R = 0, \quad (2.46)$$

которое в дальнейшем используется в качестве граничного условия для нахождения произвольных констант интегрирования при вычислении поля упругих смещений.

Из выражений для инерции \mathcal{M}_L и жесткости \mathcal{K}_L следует, что поле мгновенных смещений $\xi(\mathbf{r})$ является единственной подлежащей определению величиной, необходимой для вычисления частот собственных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний. В работе [83] было показано, что поля

мгновенных смещений, возникающих при нерадиальных колебаниях сферической массы упругой материи, определяются как решения векторного уравнения Лапласа:

$$\Delta \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.47)$$

В соответствии с трактовкой Ламба [86] собственных мод идеально упругого шара они могут быть классифицированы как сфероидальные моды, описываемые полюидальным решением уравнения (2.47):

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = \frac{N_p}{L+1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{r} r^L P_L(\mu) = N_p \operatorname{grad} r^L P_L(\mu), \quad \mu = \cos \theta, \quad (2.48)$$

и торсионные моды, соответствующие тороидальным решениям вида

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = N_t \operatorname{rot} \mathbf{r} r^L P_L(\mu). \quad (2.49)$$

Здесь через $P_L(\mu)$ обозначены полиномы Лежандра мультипольного порядка L . Наиболее важной чертой сформулированного вариационного метода является то, что частоты $\omega^2 = \mathcal{K}_L/\mathcal{M}_L$ обеих ветвей сфероидальных (s -мода) и торсионных (t -мода) колебаний могут быть вычислены с единых позиций как собственные моды осцилляторного гамильтониана (2.44). Отметим, что в приближении Каулинга конкретный вид произвольных констант N_p и N_t непринципиален, поскольку они входят квадратичными множителями как в \mathcal{M}_L , так и в \mathcal{K}_L .

Периоды сфероидальных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний: s -мода. При сфероидальных мультипольных колебаниях произвольная сферическая поверхность в объеме звезды приобретает формы гармонических сфероидов, задаваемых в системе координат с фиксированной полярной осью уравнением

$$r'(t) = r[1 + \alpha_L(t)P_L(\cos \theta)]. \quad (2.50)$$

Здесь r — радиус невозмущенной сферической поверхности. На рис.4 показаны сфероидальные квадрупольные и октупольные колебания формы звезды. Чтобы зафиксировать произвольную константу N_p в выражении для полюидального поля мгновенных смещений (2.48), мы наложим следующее (динамическое) граничное условие:

$$\left[\rho \phi^L - \xi_r^L \frac{\partial P_0}{\partial r} \right]_{r=R_0} = 0, \quad (2.51)$$

в котором единственной неизвестной величиной пока остается функция ϕ^L , определяющая поверхностные флуктуации гравитационного потенциала (2.41).

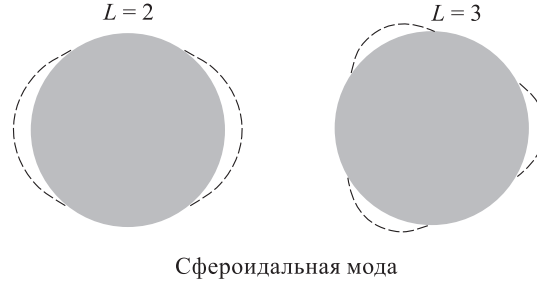


Рис. 4. Схематическое изображение движений ядерной материи в нейтронной звезде при ее сфероидальных квадрупольных ($L=2$) и октупольных ($L=3$) нерадиальных гравитационно-упругих колебаниях

Вариация δU , удовлетворяющая уравнению Лапласа, определяется следующими решениями последнего:

$$\delta U^{in} = B_L r^L P_L(\cos \theta) \alpha_L, \quad r \leq R, \quad (2.52)$$

$$\delta U^{ex} = C_L r^{-(L+1)} P_L(\cos \theta) \alpha_L, \quad r > R. \quad (2.53)$$

Произвольные константы B_L и C_L фиксируются стандартными граничными условиями:

$$U_0^{in}(r') + \delta U^{in}(r') = U_0^{ex}(r') + \delta U^{ex}(r')|_{r'=R', (r=R)}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial U_0^{in}(r')}{\partial r'} + \frac{\partial \delta U^{in}(r')}{\partial r'} = \frac{\partial U_0^{ex}(r')}{\partial r'} + \frac{\partial \delta U^{ex}(r')}{\partial r'}|_{r'=R', (r=R)}. \quad (2.55)$$

Подставляя (2.52) и (2.53) в (2.54) и (2.55) и удерживая члены не выше первого порядка по α_L , получаем

$$\delta U^{in} = -\frac{4\pi}{R^{L-2}} \frac{G \rho_0}{(2L+1)} r^L P_L(\cos \theta) \alpha_L \quad (2.56)$$

и

$$\delta U^{ex} = -\frac{4\pi G \rho_0 R^{L+3}}{(2L+1)} r^{-(L+1)} P_L(\cos \theta) \alpha_L. \quad (2.57)$$

В результате находим, что ϕ^L на поверхности звезды дается выражением

$$\phi^L = -\frac{4\pi G \rho_0 R^2}{(2L+1)} P_L(\mu). \quad (2.58)$$

Подставляя (2.58), (2.48) и (2.32) в (2.51), находим

$$N_p = \frac{3}{L(2L+1)R^{L-2}}. \quad (2.59)$$

Компоненты полоидального поля в сферической системе координат имеют вид

$$\xi_r = N_p r^{L-1} P_L(\mu), \quad \xi_\theta = -N_p (1 - \mu^2)^{1/2} r^{L-1} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \quad \xi_\phi = 0. \quad (2.60)$$

Подстановка (2.60) в уравнение (2.45) и интегрирование по полному телесному углу приводит к следующим (крайне полезным в дальнейшем) выражениям для инерции и жесткости:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_L &= 4\pi L N_p^2 \int_0^{R_0} \rho_0(r) r^{2L} dr, \\ \mathcal{K}_L &= 8\pi N_p^2 L(L-1)(2L-1) \int_0^{R_0} P_0(r) r^{2L-2} dr. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Детали вычислений этих интегралов вынесены в приложение А. Окончательная формула для расчета частоты гравитационно-упругой s -моды имеет вид

$$\omega_s = \left[\frac{2(2L-1)(L-1) \int_0^{R_0} P_0(r) r^{2L-2} dr}{\int_0^{R_0} \rho_0(r) r^{2L} dr} \right]^{1/2}. \quad (2.62)$$

Можно легко заметить, что монополярная ($L = 0$) и дипольная ($L = 1$) моды в однородной модели оказываются исключенными. Возбуждение монополярных (чисто радиальных) пульсаций невозможно из-за несжимаемости звездной ядерной среды. Возмущение дипольного поля скорости упругих смещений может приводить лишь к движению центра масс звезды без изменения ее внутреннего состояния, поскольку коэффициент жесткости при $L = 1$ обращается в нуль*.

*Интересно отметить, что модель однородной самогравитирующей массы идеально упругого континуума с давлением

$$P_0 = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 (R^2 - r^2) \quad (2.63)$$

приводит к дискретному спектру частот s -моды вида [61]:

$$\omega_s^2 = 2\omega_G^2(L-1), \quad \omega_G^2 = (4\pi/3)G\rho_0, \quad (2.64)$$

где ω_G — фундаментальная частота гравитационных колебаний в однородных моделях. В таком представлении s -мода нерадиальных гравитационно-упругих колебаний по физическому содержанию аналогична гидродинамической f -моды Кельвина нерадиальных колебаний сферической массы невязкой несжимаемой жидкости.

Стандартная однородная модель приводит к следующим выражениям:

$$\mathcal{M}_L = \frac{27MR^2}{L(2L+1)^3},$$

$$\mathcal{K}_L = 36E_N \frac{L-1}{L(2L+1)^2} - 45E_G \frac{(L-1)(2L-1)}{L(2L+1)^3}, \quad (2.65)$$

где

$$E_G = (3/5)GM^2/R, \quad E_N = \mathcal{E}_N V, \quad \mathcal{E}_N = \frac{3}{10}\rho v_F^2 \quad (2.66)$$

— соответственно полная гравитационная и внутренняя энергии (M — масса, V — объем звезды). Выражение для жесткости в (2.65) явно отражает конструктивный вклад энергии упругих деформаций (пропорциональной E_N) и деструктивный вклад энергии гравитационного сжатия (пропорциональной E_G) в жесткость гравитационно-упругих колебаний. Ясно, что такое сочетание может привести к неустойчивости, провоцирующей звездотрясения. Нерadiaльные колебания остаются стабильными до тех пор, пока доминирующий вклад в энергию деформаций звезды вносит энергия упругих искажений ферми-сферы нейтронного вещества, противодействующая энергии собственной гравитации. Окончательное выражение для частоты s -моды может быть записано в виде

$$\omega_s^2 = \omega_0^2(2L+1)(L-1) \left[1 - \Gamma \frac{5(2L-1)}{4(2L+1)} \right],$$

$$\omega_0^2 = \frac{3E_N}{4MR^2}, \quad \Gamma = \frac{E_G}{E_N}. \quad (2.67)$$

Параметр Γ является мерой вибрационной устойчивости нейтронной звезды. Неустойчивость звезды относительно сфероидальных гравитационно-упругих деформаций возникает, когда $\mathcal{K}_{L=2} = 0$. Такое возможно, только когда отношение гравитационной энергии к внутренней достигает критической величины $\Gamma_{\text{cr}} = 4/3$. В результате приходим к следующему условию устойчивости сфероидальных колебаний нейтронной звезды:

$$\omega_s(L=2) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma \leq \frac{4}{3}. \quad (2.68)$$

Для всех моделей нейтронных звезд, представленных в табл. 2, это условие выполняется.

Собственные частоты сфероидальных мод в стандартной модели (где $P_N = \rho_0 v_F^2/5$) можно представить в иной (эквивалентной (2.67)) форме:

$$\omega_s^2 = \omega_F^2 \frac{2}{5}(2L+1)(L-1) - \omega_G^2 (2L-1)(L-1) =$$

$$= \omega_F^2 \frac{2}{5} (2L+1)(L-1) \left[1 - \beta \frac{5(2L-1)}{2(2L+1)} \right], \quad \beta = \left(\frac{\omega_F}{\omega_G} \right)^2. \quad (2.69)$$

Такое представление подчеркивает характерное отличие частоты квантовых упругих колебаний $\omega_F^2 = v_F^2/R^2$ от гравитационной частоты $\omega_G^2 = 4\pi G\rho_0/3$, которое состоит в том, что ω_F зависит от радиуса и плотности звезды, в то время как ω_G — только от ее плотности. В данном представлении β является параметром вибрационной стабильности гравитационно-упругих колебаний. Обратим внимание на тот факт, что первое слагаемое в (2.69) точно совпадает с выражением для частоты (связанной с энергией $E = \hbar\omega$) ядерных гигантских электрических резонансов мультипольного порядка $L \geq 2$, полученным в эластодинамической коллективной ядерной модели [47, 54, 56]. Как мы уже отмечали, в этой модели электрические гигантские резонансы трактуются как проявление сфероидальных нерадиальных колебаний ядерной макрочастицы, при которых восстанавливающая сила упругих деформаций (точно совпадающая с силой Гука линейной теории упругости) обусловлена реакцией ядра на анизотропные искажения ферми-сферы. В этом наблюдении просматривается сходство между нейтронной звездой и гигантским ядром с массовым числом $A \sim 10^{57}$.

В заключение этого раздела необходимо сделать одно важное замечание, касающееся потенциальных возможностей сформулированного вариационного метода. В основной формуле для частоты сфероидальных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний (2.62) профили плотности $\rho_0(r)$ и давления $P_0(r)$ присутствуют как входные параметры равновесной конфигурации. Имея это в виду, ограничение, связанное с использованием ньютоновского приближения, а также предположение об однородности распределения массы могут быть ослаблены. Для получения надежных оценок частоты s -моды эти локальные характеристики равновесия могут быть заимствованы из реалистических моделей нейтронных звезд. Результаты расчета периодов сфероидальных мод для нескольких реалистических моделей нейтронных звезд представлены в табл. 2. Сравнение этих расчетов с предсказаниями стандартной модели (см. табл. 3) показывает, что оценки последней определяют нижнюю границу значений периодов сфероидальных колебаний.

Периоды торсионных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний: t -мода. Свойство динамической упругости нейтронного ферми-континуума указывает на то, что нейтронная звезда может совершать поперечно-сдвиговые, крутильные (торсионные) колебания. Геометрическую картину торсионных колебаний проясняет следующее представление тороидального поля скорости упругих смещений:

$$\delta \mathbf{V} = N_t \text{rot } \mathbf{r} r^L P_L(\cos \theta) \dot{\alpha}_L(t) = [\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{r}], \quad (2.70)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = N_t \text{grad } r^L P_L(\cos \theta) \dot{\alpha}_L(t)$$

— поле угловой частоты дифференциально-вращательных колебаний. Нормальная координата $\alpha_L(t)$ в этом случае имеет смысл инфинитезимального угла кручения поля упругих смещений вокруг полярной оси. В сферической системе координат компоненты тороидального поля упругих смещений имеют вид

$$\xi_r = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \xi_\phi = -N_t r^L (1 - \mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}. \quad (2.71)$$

Граничное условие, фиксирующее произвольную константу N_t :

$$\delta \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \Big|_{r=R} = [\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}] \quad , \quad \boldsymbol{\Omega}_0 = \dot{\alpha}_L(t) \text{grad } P_L(\mu) \quad \rightarrow \quad N_t = \frac{1}{R^{L-1}}. \quad (2.72)$$

Остановимся подробнее на случае квадрупольных торсионных колебаний. Компоненты поля скорости этих движений даются выражениями: $\delta V_x = -\Omega_z y$, $\delta V_y = \Omega_z x$, $\delta V_z = 0$. Формально это поле совпадает по виду с полем скорости твердотельного вращения. Однако при квадрупольном кручении угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ не является постоянным вектором, а представляет собой векторное поле с компонентами $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = 0$, $\Omega_z = \dot{\alpha}z$. Декартовы компоненты тороидального поля квадрупольного кручения: $\xi_x = -yz$, $\xi_y = xz$, $\xi_z = 0$. Соответствующие таким смещениям колебательные движения представляют собой аксиально-симметричные осцилляции вокруг оси z в противофазе северного и южного полушарий звезды. Схематическая картина упругих смещений при дифференциально-вращательных квадрупольных и октупольных нерадиальных колебаниях нейтронной звезды изображена на рис.5.

Подставляя (2.71) в (2.45) и интегрируя по полному телесному углу, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_L &= 4\pi N_t^2 \frac{L(L+1)}{(2L+1)} \int_0^{R_0} \rho_0(r) r^{2L+2} dr, \\ \mathcal{K}_L &= 4\pi N_t^2 L(L^2-1) \int_0^{R_0} P_0(r) r^{2L} dr. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Снова подчеркнем, что такое представление позволяет рассчитать частоту

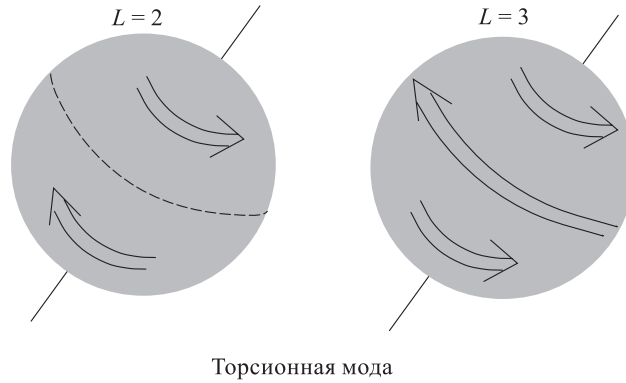


Рис. 5. Схематическое изображение торсионных квадрупольных ($L=2$) и октупольных ($L=3$) нерадиальных гравитационно-упругих колебаний нейтронной звезды

t -моды

$$\omega_t = \left[\frac{(2L+1)(L-1) \int_0^{R_0} P_0(r) r^{2L} dr}{\int_0^{R_0} \rho_0(r) r^{2L+2} dr} \right]^{1/2} \quad (2.74)$$

на основе профилей плотности и давления, заимствованных из реалистических моделей нейтронных звезд*.

Вычисления массового параметра и параметра жесткости в стандартной модели нейтронной звезды дают:

$$\mathcal{M}_L = 3MR_0^2 \frac{L(L+1)}{(2L+1)(2L+3)},$$

*В модели однородной массы идеально упругой материи с давлением

$$P_0 = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 (R^2 - r^2) \quad (2.75)$$

изложенный выше энергетический вариационный принцип приводит к следующему выражению для частоты t -моды [62]:

$$\omega_t^2 = \omega_G^2 (L-1), \quad \omega_G^2 = GM/R^3, \quad (2.76)$$

где ω_G – фундаментальная единица частоты гравитационных колебаний в однородных моделях. Следует отметить, что торсионные гравитационные колебания звезд изучались ранее в работах [87, 88], в которых впервые была сформулирована проблема дискретного спектра частот этих колебаний. В [62] было впервые показано, что применение вариационного принципа Рэля к уравнениям эластодинамики позволяет аналитически рассчитать дискретный спектр торсионных колебаний (см. также [83, 99, 115]).

$$\mathcal{K}_L = 2E_N \frac{L(L^2 - 1)}{(2L + 1)} - \frac{5}{2}E_G \frac{L(L^2 - 1)}{(2L + 3)}. \quad (2.77)$$

При $L = 1$ массовый параметр совпадает с моментом инерции абсолютно твердого шара $J_0 = (2/5)MR_0^2$. Из выражения для жесткости явно следует, что дипольное крутильное возбуждение не является собственной модой торсионных колебаний нейтронной звезды (поскольку в этом случае коэффициент жесткости обращается в нуль), а соответствует твердотельному вращению. Таким образом, мы приходим к заключению, что мультипольность нижней устойчивой торсионной моды $L = 2$. В стандартной модели частота t -моды глобальных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний нейтронной звезды дается выражением:

$$\omega_t^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2(2L + 3)(L - 1) \left[1 - \Gamma \frac{5(2L + 1)}{4(2L + 3)} \right], \quad (2.78)$$

где ω_0 и Γ были определены выше (см. уравнение (2.67)). Нейтронная звезда остается устойчивой относительно квадрупольной крутильной деформации тогда и только тогда, когда

$$\omega_t(L = 2) \geq 0 \quad \text{или} \quad \Gamma \leq 1,15. \quad (2.79)$$

Приведем еще одно эквивалентное представление формулы (2.78):

$$\begin{aligned} \omega_t^2 &= \omega_F^2 \frac{1}{5}(2L + 3)(L - 1) - \omega_G^2(2L + 1)(L - 1) = \\ &= \omega_F^2 \frac{1}{5}(2L + 3)(L - 1) \left[1 - \beta \frac{5(2L + 1)}{2(2L + 3)} \right], \end{aligned} \quad (2.80)$$

где фермиевская частота ω_F , гравитационная частота ω_G и параметр вибрационной устойчивости β были определены выше. В (2.80) первое слагаемое точно совпадает с выражением для частоты ядерных магнитных гигантских резонансов, которые в ядерной эластодинамике [56] описываются в терминах квазистатических торсионных волн, возбуждаемых в объеме ядра, моделируемого макрочастицей ядерной материи. Отмеченная аналогия еще раз свидетельствует о сходстве нейтронной звезды с ее микроскопическим двойником — атомным ядром. Еще раз подчеркнем, что торсионные (дифференциально-вращательные) колебания нейтронной звезды обусловлены исключительно динамической упругостью вырожденного ферми-континуума. В газовой среде звезд главной последовательности, описываемой уравнениями гидродинамики, такие моды не возникают.

В табл. 2 и 3 приведены численные значения периодов глобальных нерадиальных торсионных пульсаций нейтронной звезды для трех нижайших мультипольностей, рассчитанные как в стандартной, так и в реалистических

неоднородных моделях. Как видно из сравнения численных значений, приведенных в этих таблицах, оценки стандартной модели определяют нижнюю границу периодов торсионных гравитационно-упругих колебаний. Сравнение численных значений периодов нижайших крутильных мод с периодами сфероидальных мод показывает, что крутильные нерадиальные колебания замедлены по сравнению со сфероидальными. Заметим, что регистрируемый период пульсара Краб $P = 33,3$ мс, пульсара Вела $89,3$ мс и пульсара Геминга $273,1$ мс. Периоды всех известных на сегодняшний день пульсаров лежат в интервале $P \sim 1,6 \text{ мс} \div 4,3 \text{ с}$, в то время как наши оценки периодов гравитационно-упругих нерадиальных мод дают $P \sim 0,01 \div 0,1 \text{ с}$. Из этого сравнения следует, что нерадиальные гравитационные колебания, так же, как и ранее изученные радиальные колебания, не имеют отношения к пульсирующему радиоизлучению нейтронных звезд. Однако эти колебания могут иметь отношение к тонким деталям спектров так называемых сложных или *C*-пульсаров [7]. Характерной особенностью последних является то, что средний профиль импульсов этих пульсаров обнаруживает подструктуры, природа которых пока остается невыясненной. В частности, наряду с хорошо распознаваемым интеримпульсом, локализованным приблизительно между пиками основных импульсов, ясно отслеживаются структуры, называемые субимпульсами, с периодичностью порядка 10^{-4} с [7, 13]. Как видно из результатов расчетов, представленных в табл. 2 и 3, периоды нерадиальных колебаний оказываются того же порядка. Поэтому, как впервые было отмечено в [111], вариации интенсивности радиоизлучения, регистрируемые на временном интервале микроимпульсов, могут быть приписаны остаточным гравитационным колебаниям нейтронных звезд [111—115].

3. НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ: *f*-МОДА КЕЛЬВИНА

Чтобы проследить различия между эластодинамической и гидродинамической трактовками движений ядерной материи нейтронных звезд, приведем вывод спектра собственных колебаний сферической однородной массы несжимаемой невязкой жидкости, используя изложенный выше вариационный метод. Движения невязкой жидкости в поле собственного тяготения описываются уравнениями

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{dV_i}{dt} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad P_{ik} = P\delta_{ik}, \quad (3.2)$$

$$\Delta U = 4\pi G\rho. \quad (3.3)$$

Главным отличительным признаком гидродинамического описания от эластодинамического является то, что распределение внутренних напряжений в жидкости изотропно, поэтому оно описывается скалярной функцией давления P , а не тензором, как в случае упругого континуума (т.е., в жидкости всегда $P_{ij} = P\delta_{ij}$). Характерной особенностью динамического поведения жидкости является сохранение этого свойства в процессе распространения возмущений. Иначе говоря, внешние возмущения не разрушают изотропии равновесных внутренних напряжений. Поэтому при линеаризации уравнений гидродинамики используется замена: $P_{ij} \rightarrow (P + \delta P)\delta_{ij}$, и при малых возмущениях движения жидкости подчиняются линейным уравнениям

$$\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta V_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial x_i} + \rho_0 \frac{\partial \delta U}{\partial x_i} = 0, \quad (3.5)$$

$$\Delta \delta U = 0. \quad (3.6)$$

Следуя изложенному выше вариационному принципу, умножим скалярно линеаризованное уравнение Эйлера (3.5) на δV_i и проинтегрируем результат по объему звезды:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_0 \frac{\delta V^2}{2} d\tau + \oint_S (\delta P + \rho_0 \delta U) \delta V_i d\sigma_i = 0. \quad (3.7)$$

Далее, используя процедуру факторизации Рэлея, получаем стандартное уравнение нормальных колебаний:

$$\mathcal{M}_L \ddot{\alpha}_L^2 + \mathcal{K}_L \alpha_L^2 = 0, \quad (3.8)$$

где массовый параметр \mathcal{M}_L и параметр жесткости \mathcal{K}_L определяются выражениями:

$$\mathcal{M}_L = \int_V \rho_0 \xi_i^L \xi_i^L d\tau, \quad \mathcal{K}_L = \oint_S (p^L + \rho_0 \phi^L) \xi_i^L d\sigma_i. \quad (3.9)$$

Расчет флуктуаций скорости δV_i возбуждаемого потока и потенциала собственного тяготения δU проводится по схеме, описанной в предыдущем разделе. Однако в рассматриваемой гидродинамической модели поле смещений задается потенциальной функцией $\xi_i^L = \text{grad}_i \psi^L$. Такое представление является следствием того, что незатухающие возмущения в жидкости распространяются в виде продольных звуковых волн. Подставляя это поле в уравнение несжимаемости, получаем

$$\Delta \psi^L = 0, \quad \psi^L = N r^L P_L(\mu). \quad (3.10)$$

Константа N_L фиксируется хорошо известным граничным условием Неймана

$$\delta V_r(r') = r'|_{r'=R', (r=R)}, \quad \rightarrow \quad N = \frac{1}{LR^{L-2}}. \quad (3.11)$$

Окончательное выражение для поля смещений при сфероидальных гидродинамических колебаниях приобретает вид:

$$\xi^L = \frac{1}{LR^{L-2}} \nabla r^L P_L(\mu). \quad (3.12)$$

Единственной неизвестной переменной остается вариация давления δP . Действуя оператором дивергенции на уравнение (3.5) и учитывая (3.4) и (3.6), находим, что δP подчиняется уравнению Лапласа, которое дополняется условием отсутствия напряжений на вибрирующей поверхности:

$$\Delta \delta P = 0, \quad P_0(r') + \delta P(r')|_{r'=R', (r=R)} = 0. \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.13) имеет вид:

$$\delta P = p^L(\mathbf{r}) \alpha_L(t), \quad p^L(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3R^{L-2}} G \rho_0^2 r^L P_L. \quad (3.14)$$

Для инерции и жесткости находим [62]:

$$\mathcal{M}_L = \frac{4\pi \rho_0 R^5}{L(2L+1)}, \quad \mathcal{K}_L = \frac{32}{3} \pi^2 G \rho_0^2 R^5 \frac{(L-1)}{(2L+1)^2}. \quad (3.15)$$

В результате получаем хорошо известную формулу Кельвина [62, 84, 86, 89]:

$$(\omega_L^K)^2 = \omega_G^2 \frac{2L(L-1)}{2L+1}, \quad \omega_G^2 = GM/R^3, \quad (3.16)$$

характеризующую собственные частоты f -моды гравитационных нерадиальных колебаний звезды, моделируемой сферически-однородной самогравитирующей массой невязкой несжимаемой жидкости. Физическое содержание полученного нами выражения (2.64) для собственных сфероидальных мод самогравитирующего упругого шара во многом аналогично формуле Кельвина (3.16). В частности, нижайшее колебание в обеих моделях имеет мультипольный порядок $L = 2$. Подчеркнем, что отношение частот s -моды нерадиальных колебаний самогравитирующего упругого шара (2.64) к частотам кельвиновской f -моды (3.16) нерадиальных колебаний сферической массы несжимаемой невязкой жидкости подчиняется неравенству:

$$\frac{\omega_s^2}{(\omega_L^K)^2} = \frac{(2L+1)}{L} > 1, \quad \text{при } L \geq 2, \quad (3.17)$$

Таблица 4. Частоты квадрупольной ω_2 , октупольной ω_3 и гексадекапольной ω_4 нерадиальных сфероидальных гравитационных мод в однородной модели нейтронной звезды. Массы M (в единицах массы Солнца M_\odot) и радиусы R вычислены по формулам стандартной однородной модели на основе уравнения состояния для чисто нейтронной материи со средней плотностью ρ_0 , представленной в долях нормальной ядерной плотности ρ_N

Параметры модели			Ядерная эластодинамика			Классическая гидродинамика		
ρ_0/ρ_N	M/M_\odot	R , км	ω_2 , 10^4c^{-1}	ω_3 , 10^4c^{-1}	ω_4 , 10^4c^{-1}	ω_2 , 10^4c^{-1}	ω_3 , 10^4c^{-1}	ω_4 , 10^4c^{-1}
1,0	1,00	11,90	1,48	2,11	2,60	0,79	1,16	1,44
1,2	1,09	11,54	1,62	2,32	2,85	0,87	1,27	1,58
1,4	1,18	11,25	1,75	2,50	3,08	0,94	1,37	1,71
1,6	1,26	11,00	1,87	2,68	3,29	1,00	1,47	1,83
1,8	1,34	10,79	1,99	2,84	3,49	1,06	1,55	1,94
2,0	1,41	10,60	2,09	2,99	3,68	1,12	1,64	2,04
2,2	1,48	10,43	2,20	3,14	3,86	1,17	1,72	2,14
2,4	1,54	10,28	2,29	3,28	4,03	1,23	1,79	2,24
2,6	1,60	10,15	2,39	3,41	4,20	1,28	1,87	2,33
2,8	1,67	10,02	2,48	3,54	4,36	1,32	1,94	2,42
3,0	1,72	9,91	2,56	3,66	4,51	1,37	2,01	2,50

из которого следует, что $\omega_s \rightarrow \sqrt{2}\omega_L^K$ при $L \rightarrow \infty$. Таким образом, при одинаковых L и ρ_0 частоты сфероидальных нерадиальных колебаний самогравитирующего упругого шара всегда выше частот нерадиальных гравитационных колебаний сферической массы жидкости. Для сравнения в табл. 4 приведены численные значения частот, полученных в рамках ядерной эластодинамики (2.67) и классической гидродинамики (3.16). Видно, что оба подхода выявляют одинаковый характер роста частоты с увеличением мультипольного порядка колебания (периоды меняются при этом приблизительно по закону $P_L \sim 1/L$) — чем массивнее звезда, тем выше частоты гравитационных колебаний (периоды, соответственно, короче).

Приливные колебания. Современные эволюционные расчеты, основанные на реалистических уравнениях состояния, явно свидетельствуют о стратифицированном характере распределения адронного вещества в недрах нейтронных звезд. Плотность внутренней области приблизительно на три порядка выше, чем периферийной. Поэтому возмущения, индуцированные, например, остаточными флуктуациями вещества после взрыва сверхновой, вероятнее всего, будут сохраняться только в периферийном слое звезды. В этой связи можно поставить вопрос о том, насколько частоты колебаний поверхностного слоя отличаются от частот нерадиальных колебаний всего объема нейтронной звезды. Такая модель может оказаться полезной при дальнейшем изучении приливных колебаний в нейтронной звезде, которая является

объектом двойной системы, а приливы вызываются орбитальным движением массивного компаньона. Ниже мы приводим вычисления собственных мод сфероидальных колебаний поверхностного слоя в рамках гидродинамической теории.

Равновесные параметры модели. В модели динамического слоя стратифицированная структура нейтронной звезды трактуется упрощенно как жесткий инертный кор плотности ρ_c , окруженный динамическим слоем плотности $\rho \leq \rho_c$. Ниже радиусы кора и всей звезды обозначены R_c и R соответственно; $\Delta R = R - R_c$ — глубина внешней оболочки.

В рамках нерелятивистской модели распределение ньютоновской гравитации в звезде определяется уравнениями

$$\Delta U_1 = 4\pi G\rho_c, \quad r < R_c, \quad (3.18)$$

$$\Delta U = 4\pi G\rho, \quad R_c < r < R, \quad (3.19)$$

$$\Delta U_2 = 0, \quad r > R. \quad (3.20)$$

Используя стандартные граничные условия

$$U_1 = U|_{r=R_c}, \quad U = U_2|_{r=R}, \quad (3.21)$$

$$\frac{dU_1}{dr} = \frac{dU}{dr}\Big|_{r=R_c}, \quad \frac{dU}{dr} = \frac{dU_2}{dr}\Big|_{r=R}, \quad (3.22)$$

находим

$$U = \frac{2\pi}{3} G\rho \left(r^2 - 3R^2 + \frac{2R_c^3}{r} \right) - \frac{4\pi}{3} G\rho_c \frac{R_c^3}{r}. \quad (3.23)$$

Легко проверить, что в пределе $R_c \rightarrow 0$ (вместе с $\rho_c \rightarrow 0$) изучаемая модель воспроизводит потенциал однородной модели. Локально равновесное давление P в периферийном слое может быть вычислено из уравнения гидростатического равновесия с граничным условием свободной от натяжений поверхности:

$$\nabla P = -\rho \nabla U, \quad P(R) = 0, \quad (3.24)$$

где $U = U_2$ — потенциал внутри внешнего слоя звезды. Решение (3.24) имеет вид

$$P(r) = \frac{2\pi}{3} G\rho^2 (R^2 - r^2) + \frac{4\pi}{3} G \frac{R_c^3}{R} \rho (\rho_c - \rho) \frac{R - r}{r}. \quad (3.25)$$

Отметим снова, что при $R_c = 0$ получаем давление в однородной модели.

Периоды приливных колебаний. Для нахождения собственных мод нормальных колебаний представим флуктуирующие переменные в сепарабельной

форме:

$$\delta V_i(\mathbf{r}, t) = \xi_i^L(\mathbf{r}) \dot{\alpha}_L(t), \quad \delta P(\mathbf{r}, t) = p^L(\mathbf{r}) \alpha_L(t), \quad \delta U(\mathbf{r}, t) = \phi^L(\mathbf{r}) \alpha_L(t). \quad (3.26)$$

Поле мгновенных смещений $\xi_L(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению

$$\operatorname{div} \xi_L = 0, \quad (3.27)$$

решение которого будем искать в виде полоидального векторного поля:

$$\xi_L = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{r} \chi_L, \quad \chi_L = [A_L^1 r^L + A_L^2 r^{-L-1}] P_L(\mu). \quad (3.28)$$

Для нахождения констант, входящих в выражения для скорости потока при нерадальных колебаниях поверхностного слоя, воспользуемся условием непроницаемости кора

$$\delta V_r|_{r=R_c} = 0, \quad \dot{R}_c = 0, \quad (3.29)$$

отражающим также его инертность. На поверхности звезды накладываем стандартное граничное условие Неймана:

$$\delta V_r|_{r=R} = \dot{R}(t) = R \dot{\alpha}_L(t) P_L(\mu), \quad R(t) = R(1 + \alpha_L(t) P_L(\mu)). \quad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30) находим явный вид констант A_L^1 и A_L^2 :

$$A_L^1 = \frac{A_L}{L(L+1)}, \quad A_L^2 = -\frac{A_L}{L(L+1)} R_c^{2L+1}, \quad A_L = \frac{R^{L+3}}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}}. \quad (3.31)$$

Сферические компоненты поля мгновенных смещений ξ_L представляются в виде

$$\xi_r = A_L \frac{r^{2L+1} - R_c^{2L+1}}{r^{L+2}} P_L(\mu), \quad (3.32)$$

$$\xi_\theta = -\frac{A_L}{L(L+1)} \frac{(L+1)r^{2L+1} + LR_c^{2L+1}}{r^{L+2}} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \quad (3.33)$$

$$\xi_\phi = 0. \quad (3.34)$$

В изучаемом случае вариация потенциала ϕ^L на поверхности звезды дается общим решением уравнения Лапласа [65]:

$$\phi^L = -\frac{4\pi}{2L+1} \rho G R^2 \left[1 + \frac{\rho_c - \rho}{\rho} \left(\frac{R_c}{R} \right)^{L+3} \right] P_L(\mu). \quad (3.35)$$

Для флуктуирующего поверхностного давления имеем [65]:

$$p^L = \frac{4\pi}{3} \rho^2 G R^2 \left[1 + \frac{\rho_c - \rho}{\rho} \left(\frac{R_c}{R} \right)^3 \right] P_L(\mu). \quad (3.36)$$

Параметры инерции и жесткости малых колебаний оболочки нейтронной звезды даются выражениями:

$$M_L = \frac{4\pi\rho R^5}{L(2L+1)} \left[1 + \frac{2L+1}{L+1} \frac{R_c^{2L+1}}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}} \right], \quad (3.37)$$

$$K_L = \frac{16\pi^2 G}{3(2L+1)} \rho^2 R^5 \left[\frac{2(L-1)}{2L+1} + \frac{\rho_c - \rho}{\rho} \left(\frac{R_c}{R} \right)^3 \left(1 - \frac{3}{2L+1} \left(\frac{R_c}{R} \right)^L \right) \right]. \quad (3.38)$$

Приведем численные оценки собственных частот колебаний внешней оболочки для типичной нейтронной звезды радиуса $R \approx 10$ км. Глубину поверхностной коры, участвующей в колебаниях, положим равной $\Delta R \approx 0,5$ км, плотность вещества внутреннего остова $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{14}$ г·см⁻³, а внешнего слоя $\rho \approx 4,3 \cdot 10^{11}$ г·см⁻³. Из (3.37) и (3.38) получаем оценку периодов (в секундах) приливных колебаний:

$$P_1 = 7,9 \cdot 10^{-3}, \quad P_2 = 1,9 \cdot 10^{-3}, \quad P_3 = 1,1 \cdot 10^{-3}, \quad P_4 = 0,9 \cdot 10^{-3}. \quad (3.39)$$

Примечательным следствием неоднородной двухкомпонентной модели (при условии, что массивный кор остается невозмущенным) является вывод о том, что нижайшая мода оказывается дипольной. Обращает на себя внимание тот факт, что абсолютные значения частот нерадиальных колебаний периферийного слоя ниже, чем частоты в однородной модели звезды. Близость периодов приливных колебаний к периодам электромагнитного излучения пульсаров показывает, что приливные гравитационные флуктуации вещества в периферийном слое нейтронной звезды могут оказывать влияние на ее электромагнитную активность.

Полученные аналитические результаты позволяют сделать следующие выводы.

(i) Предельный случай $R_c \rightarrow 0$ соответствует колебаниям полной массы звезды:

$$M_L = \frac{4\pi\rho R^5}{L(2L+1)}, \quad K_L = \frac{32}{3} \pi^2 \rho^2 G R^5 \frac{(L-1)}{(2L+1)^2}, \quad (3.40)$$

и мы снова приходим к спектру Кельвина:

$$(\omega_L^K)^2 = \omega_G^2 \frac{2L(L-1)}{2L+1}, \quad \omega_G^2 = \frac{4\pi}{3} G\rho. \quad (3.41)$$

(ii) В пределе малой глубины $\Delta R = R - R_c \ll R_c$ имеем

$$\omega_L^2 = \omega_G^2 \frac{2L(L^2-1)}{2L+1} \frac{\Delta R}{R}. \quad (3.42)$$

(iii) В случае, когда $\rho_c = \rho$:

$$\omega_L^2 = \omega_G^2 \frac{2L(L-1)}{2L+1} \left[1 + \frac{2L+1}{L+1} \frac{R_c^{2L+1}}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}} \right]^{-1}. \quad (3.43)$$

Из (3.43) следует, что при однородной плотности звезды частоты колебаний периферийного слоя конечной глубины ниже, чем частоты колебаний всей массы. Представленное сравнение однородной и неоднородной моделей нейтронной звезды показывает, что характерным динамическим проявлением неоднородности в радиальном распределении массы вещества является наличие в спектре гравитационных колебаний звезды дипольной f -моды, которая появляется только благодаря неоднородности профиля плотности и является нижайшей устойчивой модой. Как показано в [66], данный вывод не зависит от конкретного вида неоднородности профиля плотности. Это позволяет заключить, что присутствие дипольной моды является главной отличительной чертой неоднородной двухкомпонентной модели от однородной модели Кельвина, в которой нижайшей устойчивой модой является квадрупольная.

Резюмируя проведенное сравнение гидродинамического и эластодинамического подходов, отметим следующее. Частоты, предсказываемые эластодинамической моделью, приблизительно в 1,5—2 раза выше частот, полученных в гидродинамическом подходе. Это различие имеет исключительно динамическое происхождение и обусловлено тем, что восстанавливающая сила колебаний сферической массы жидкости в поле собственного тяготения определяется только поверхностными флуктуациями поля гравитации и гравитационного давления, в то время как в эластодинамической модели устойчивость равновесной формы нейтронной звезды и восстанавливающая сила колебаний определяются балансом сил упругих деформаций в вырожденном ферми-континууме и сил собственного тяготения. Это адекватно отражает твердо установленный факт, что устойчивость нейтронной звезды относительно деформаций малой амплитуды (так же, как и абсолютная устойчивость равновесной конфигурации) определяется конкуренцией между деструктивным давлением гравитационного сжатия звезды и конструктивным давлением вырожденной ядерной материи, препятствующим коллапсу звезды. Это одна из причин того, почему эластодинамическая модель континуальной механики представляется более правдоподобной и подходящей для описания собственных движений самогравитирующей ядерной материи, чем гидродинамическая. Вместе с тем приведенные выше гидродинамические оценки могут оказаться полезными при анализе сейсмологии компактных объектов.

В заключение мы хотели бы отметить одно наблюдение, непосредственно связанное с эластодинамической трактовкой движения материи в нейтронных звездах. Двухкомпонентная модель нейтронной звезды (жесткая периферийная оболочка, совершающая упругие колебания относительно более плотного

остова) позволяет взглянуть на сбой в радиоизлучении пульсара как на звездотрясение, вызванное прохождением компаньоном периастра двойной системы. В такой ситуации приливное возмущение периферийной оболочки нейтронной звезды, вызванное приближением компаньона, должно, вероятнее всего, приводить к быстрозатухающим нерадиальным торсионным колебаниям внешней коры относительно остова. Не исключено, что повторяющиеся сбои пульсирующего радиоизлучения нейтронных звезд как раз свидетельствуют о том, что эти пульсары являются компонентами двойных систем.

4. МАГНИТОПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

Гинзбург [69] и Вольтер [70] еще до открытия пульсаров показали, что физическую причину сильного намагничивания нейтронной звезды можно понять, допустив, что процесс коллапса слабо намагниченных массивных звезд главной последовательности (с $B \sim 1 - 10^3$ Гс) с размерами порядка солнечного ($R \sim 10^5 - 10^6$ км) протекает с сохранением магнитного потока. В этом случае, при условии полной вмороженности силовых линий магнитного поля в вещество звезды, катастрофическое уменьшение размеров до 10 км должно сопровождаться усилением магнитного поля до значений $10^{11} - 10^{13}$ Гс [67]. Принятие этой гипотезы фактически означает, что ядерное вещество сформировавшейся нейтронной звезды должно оставаться ионизированным (хотя бы частично), т.е. обладать свойствами замагниченной скомпенсированной плазмы. Одним из характерных признаков последней является ее способность поддерживать незатухающие магнитогидродинамические (МГД) волны Альфвена [84,90]. В физике нейтронных звезд на это обстоятельство впервые обратили внимание Хойл, Нарликар и Уилер [71]. В этой работе показано, что магнитная энергия, запасенная на стадии коллапса, после формирования нейтронной звезды должна высвобождаться посредством преобразования энергии остаточных магнитоплазменных осцилляций внутри звезды в энергию электромагнитного излучения в окружающее пространство. Возможность высвобождения магнитной энергии посредством излучения была также указана Пачини [91]. Однако позднее эта идея, как отмечается в [92], была незаслуженно забыта. В данном разделе мы приведем вариационный метод расчета и численные оценки периодов МГД-мод, на основе которых можно сделать вывод о непротиворечивости гипотезы магнитоплазменного механизма электромагнитной активности нейтронных звезд.

Однако, прежде чем обсуждать физику магнитоплазменных нерадиальных колебаний в нейтронных звездах, мы хотели бы особо отметить наблюдения, сделанные в работах [93,94]. В них приведены аргументы в пользу того, что нейтронная фракция вещества пульсара находится в ферромагнитной фазе. В частности, в [93] показано, что спонтанная ориентация магнитных момен-

тов нейтронов может сформировать стабильную намагниченность сферической массы нейтронной материи с величиной полного магнитного момента, достаточной для объяснения феномена пульсирующего излучения магнитодипольным радиоизлучением вращающейся нейтронной звезды в модели маяка [7,11,12,95-97]. В недавней работе [94] приведены дополнительные аргументы в пользу магнитоупорядоченного состояния, главным из которых служит самосогласованная оценка средней напряженности магнитного поля и плотности нейтронной звезды. Одним из примечательных следствий этой гипотезы является предсказание электромагнитной активности нейтронной звезды, обусловленной спиновыми колебаниями. По оценкам работы [94], периоды этих колебаний попадают в миллисекундный диапазон пульсарной шкалы времени.

Уместно также добавить, что, согласно современным расчетам структуры нейтронной звезды, только периферийный слой можно ассоциировать с *Ae*-фазой, в то время как структурное содержание более глубоких областей, видимо, представлено нейтронным веществом, обладающим свойствами *B*-фазы* сверхтекучего ${}^3\text{He}$. Характерной особенностью сверхтекучего вращения является то, что оно может сопровождаться образованием квантовых вихрей [98]. В поддержку такого представления свидетельствуют выводы квантово-макроскопической теории сбоев радиоизлучения пульсаров, предложенной в [99], согласно которой резкие всплески в частоте радиоизлучения можно объяснить потерей устойчивого сцепления вихревой решетки Ткаченко (образованной замагниченными вихревыми нитями, выстроенными вдоль оси вращения), или, другими словами, откалыванием замагниченных вихревых нитей от периферийной коры [100].

Нерадиальные МГД-колебания нейтронной звезды в однородной модели. В настоящем разделе мы рассматриваем движения ионизированного вещества нейтронных звезд, обусловленные присутствием в ее недрах сильного магнитного поля. В основе рассматриваемой модели лежит предположение о том, что *Ae*-фаза обладает свойствами скомпенсированной магнитоактивной плазмы. Как известно, динамика вещества в плазменном агрегатном состоянии описывается уравнениями магнитной гидродинамики: [84]

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla W + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}, \quad W = P + \frac{B^2}{8\pi}, \quad (4.1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (4.2)$$

*Сверхтекучесть нейтронной материи, вероятнее всего, может быть обусловлена спариванием нейтронов в 3P_2 -состоянии. Эта фаза аналогична анизотропной *B*-фазе ${}^3\text{He}$.

где ρ — плотность, \mathbf{V} — скорость среды, \mathbf{B} — напряженность магнитного поля и W — магнитогидростатическое давление (d/dt — субстанциональная производная).

При условии несжимаемости линеаризованные МГД-уравнения, содержащие решение, отвечающее распространению обыкновенной магнитогидродинамической волны, могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \delta V_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \delta B_k}{\partial x_k} = 0, \quad (4.3)$$

$$\rho \frac{\partial \delta V_i}{\partial t} - \frac{B_k}{4\pi} \frac{\partial \delta B_i}{\partial x_k} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \delta B_i}{\partial t} - B_k \frac{\partial \delta V_i}{\partial x_k} = 0, \quad (4.5)$$

где δV_k и δB_k — компоненты флуктуаций скорости и напряженности магнитного поля. При получении уравнений (4.3)—(4.5) было использовано тривиальное решение уравнения Лапласа $\Delta \delta W = 0$ для флуктуаций давления: $\delta W = 0$. Это соответствует случаю, когда гравитационные колебания не возбуждаются, и магнитоплазменные осцилляции являются единственной степенью активности плазменной среды.

Чандрасекхар и Ферми [101] показали, что присутствие однородного поля в звезде производит такой же эффект, как ее вращение, т.е. приводит к сплющиванию звезды в направлении полюсов. Для однородной самогравитирующей сферической массы с радиусом R и массой M , с однородным внутри звезды полем с напряженностью B степень сплюснутости звезды оценивается отношением $\epsilon \sim E_{\text{mag}}/E_{\text{gr}}$, где $E_{\text{mag}} \sim B^2 R^3$ — магнитная и $E_{\text{gr}} \sim GM^2/R$ — гравитационная энергии. Для нейтронных звезд $\epsilon \sim 10^{-5}$, поэтому мы пренебрежем несферичностью, вызванной присутствием магнитного поля, и проведем вычисления частот МГД-колебаний для сферической равновесной конфигурации.

Мы интересуемся спектром собственных частот нерадиальных альфвеновских колебаний*. Собственные частоты этих колебаний могут быть вычислены на основе энергетического вариационного принципа по следующей схеме. Скалярное умножение (4.4) на δV_i и интегрирование по объему звезды (на поверхности звезды принимается, что $\delta \mathbf{B}|_{r=R} = 0$) приводит к уравнению

*Радиальные магнитоплазменные колебания звезды с идеализируемой сферической массой идеально проводящей жидкости изучались М. Шварцшильдом [103] (см. также [34]) задолго до открытия пульсаров.

энергетического баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho \delta V^2}{2} d\tau - \frac{\mu}{4\pi} \int_V \delta V_i B_k \frac{\partial \delta B_i}{\partial x_k} d\tau = 0. \quad (4.6)$$

Малые отклонения скорости потока и напряженности магнитного поля удобно представить в виде

$$\delta V_i = \xi_i(\mathbf{r}) \dot{\alpha}(t), \quad \delta B_i = h_i(\mathbf{r}) \alpha(t). \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.5), находим

$$h_i = B_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}. \quad (4.8)$$

Подстановка (4.7) в (4.6) дает

$$M_L \ddot{\alpha} + K_L \alpha = 0, \quad (4.9)$$

где M_L — инерция и K_L — жесткость гидромагнитных колебаний [73]:

$$M_L = \int_V \rho \xi_i \xi_i d\tau, \quad K_L = \frac{\mu}{4\pi} \int_V h_i h_i d\tau. \quad (4.10)$$

Из приведенных формул следует, что для определения частоты $\omega^2 = K_L/M_L$ необходимо знать только поле смещений. Ниже мы рассмотрим случай, когда напряженность однородного внутри звезды магнитного поля \mathbf{B} направлена по оси z :

$$B_r = \mu B, \quad B_\theta = -(1 - \mu^2)^{1/2} B, \quad B_\phi = 0, \quad \mu = \cos \theta. \quad (4.11)$$

Заметим, что именно такая конфигурация поля внутри звезды была рассмотрена в работе [101].

Эластодинамический характер МГД-колебаний. При изучении процессов распространения МГД-волн в магнитоактивной плазме часто используется механическая аналогия, указанная Альфвеном [90], между магнитоплазменной (существенно поперечной) волной, бегущей вдоль силовых линий магнитного поля, замороженных в идеально проводящую среду, и поперечной волной упругих напряжений, распространяющейся вдоль натянутой струны. Эта аналогия подчеркивает тот факт, что присутствие однородного магнитного поля внутри бесконечно проводящей скомпенсированной плазмы придает ей свойства упругого континуума, в том смысле, что распространение поперечной волны служит основным динамическим признаком упругой сплошной среды [84,90]. Придерживаясь этой аналогии, мы полагаем, что гидромагнитные колебания в

сферическом объеме звезды с постоянным магнитным полем внутри развиваются подобно эластодинамическим колебаниям сферической массы упругого континуума. Другими словами, мы полагаем, что поля смещений в звезде при ее МГД-колебаниях описываются полоидальным и тороидальным полями смещений, такими же, как и в случае сфероидальных и торсионных гравитационных колебаний*.

Полоидальная МГД-мода. Рассмотрим возмущения, связанные с возбуждением полоидального поля скорости:

$$\delta \mathbf{V}_p = \frac{N_p}{L+1} \mathbf{rot rot r} r^L P_L(\mu) \dot{\alpha}_L(t) = N_p \mathbf{grad} r^L P_L(\mu) \dot{\alpha}_L(t),$$

$$N_p = \frac{1}{LR^{L-2}}. \quad (4.12)$$

Сферические компоненты поля мгновенных смещений имеют вид

$$\xi_r = \frac{r^{L-1}}{R^{L-2}} P_L(\mu), \quad \xi_\theta = -\frac{r^{L-1}}{LR^{L-2}} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{\partial P_L(\mu)}{\partial \mu}, \quad \xi_\phi = 0. \quad (4.13)$$

Пространственная зависимость флуктуаций магнитного поля определяется выражениями (см. приложение Б):

$$h_r = (L-1) \frac{Br^{L-2}}{R^{L-2}} P_{L-1}(\mu), \quad h_\theta = \frac{-Br^{L-2}}{R^{L-2}} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{\partial P_{L-1}(\mu)}{\partial \mu},$$

$$h_\phi = 0. \quad (4.14)$$

Подставляя (4.13) и (4.14) в (4.10), находим

$$M_L = \frac{4\pi\rho R^5}{L(2L+1)}, \quad K_L = B^2 R^3 \frac{L-1}{2L-1}. \quad (4.15)$$

В результате для частоты полоидальной МГД-моды получаем

$$\omega^2 = \Omega_A^2 L(L-1) \frac{2L+1}{2L-1}, \quad \Omega_A^2 = \frac{V_A^2}{R^2} = \frac{B^2}{4\pi\rho R^2}, \quad (4.16)$$

где Ω_A — естественная единица частоты альфвеновских магнитоплазменных осцилляций.

*Эти аргументы были недавно использованы при построении модели магнитного желе, предложенной в [102], для описания электромагнитного отклика замагниченных сферических частиц (кластеров) полуметаллов и немагнитных диэлектриков в терминах альфвеновских нерадиальных колебаний скомпенсированной электрон-дырочной твердотельной плазмы.

Тороидальная МГД-мода. Отмеченная выше физическая аналогия поведения замагниченной плазмы и упругого континуума указывает на возможность возбуждения тороидальной гидромагнитной моды. Напомним, что тороидальное поле скорости упругих смещений в системе с фиксированной полярной осью представляется в виде

$$\delta \mathbf{V}_t = N_t \mathbf{rot} \mathbf{r} r^L P_L(\mu) \dot{\alpha}_L(t) = [\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{r}], \quad (4.17)$$

где

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) = N_t \mathbf{grad} r^L P_L(\mu) \dot{\alpha}_L(t), \quad N_t = \frac{1}{R^{L-1}} \quad (4.18)$$

— поле угловой частоты локальных крутильных колебаний. Сферические компоненты тороидального поля смещений записываются следующим образом:

$$\xi_r = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \xi_\phi = -\frac{r^L}{R^{L-1}} (1 - \mu^2)^{1/2} \frac{\partial P_L(\mu)}{\partial \mu}, \quad (4.19)$$

а соответствующие флуктуации интенсивности магнитного поля равны

$$h_r = 0, \quad h_\theta = 0, \quad h_\phi = B(L+1) \frac{r^{L-1}}{R^{L-1}} (1 - \mu^2)^{1/2} \frac{\partial P_{L-1}(\mu)}{\partial \mu}. \quad (4.20)$$

Вычисления массового параметра и параметра жесткости тороидальных МГД-колебаний дают:

$$M_L = 4\pi\rho R^5 \frac{L(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}, \quad K_L = B^2 R^3 \frac{L(L-1)(L+1)^2}{(2L+1)(2L-1)}. \quad (4.21)$$

В результате дискретный спектр частот тороидальных МГД-колебаний можно представить в виде

$$\omega_t^2 = \Omega_A^2 (L^2 - 1) \frac{2L+3}{2L-1}, \quad (4.22)$$

где альфвеновская частота Ω_A была определена выше.

Спектральные формулы (4.16) и (4.22) являются главным результатом развитой теории. Из этих выражений следует, что собственные частоты гидромагнитных мод нейтронной звезды пропорциональны интенсивности магнитного поля внутри звезды B и обратно пропорциональны ее радиусу R . Периоды МГД-колебаний P_{hm} (как полоидальных, так и тороидальных) монотонно убывают с ростом мультипольного порядка L как $P_{hm} \sim 1/L$.

В табл. 5 приведены численные оценки периодов $P_L = 2\pi/\omega_L$ магнитоплазменных полоидальных и тороидальных осцилляций нижайшего мультипольного порядка, рассчитанные для семейства однородных моделей нейтронных звезд с простейшей конфигурацией постоянного магнитного поля

Таблица 5. Периоды P_L глобальных нерадиальных полоидальных и тороидальных магнитогидродинамических (МГД) колебаний, вычисленные в приближении постоянного поля для семейства однородных моделей нейтронных звезд с параметрами, указанными в первых четырех колонках таблицы

Параметры модели				Полоидальная МГД-мода			Тороидальная МГД-мода		
M/M_\odot	R , км	ρ/ρ_N	B , 10^{13} Гс	$P_{2,c}$	$P_{3,c}$	$P_{4,c}$	$P_{2,c}$	$P_{3,c}$	$P_{4,c}$
0,5	9,8	0,9	0,1	31,70	19,40	14,20	20,80	14,70	11,50
			2,0	1,51	0,93	0,68	0,99	0,70	0,55
			4,0	0,77	0,47	0,35	0,51	0,36	0,28
			6,0	0,52	0,32	0,23	0,34	0,24	0,19
			8,0	0,39	0,24	0,18	0,26	0,18	0,14
0,7	11,0	0,9	0,1	35,60	21,80	15,90	23,30	16,50	12,90
			2,0	1,70	1,04	0,76	1,11	0,79	0,61
			4,0	0,87	0,53	0,39	0,57	0,40	0,31
			6,0	0,58	0,36	0,26	0,38	0,27	0,21
			8,0	0,44	0,27	0,20	0,29	0,20	0,16
0,9	10,6	1,3	0,1	40,60	24,90	18,20	26,60	18,80	14,70
			2,0	1,93	1,18	0,86	1,27	0,90	0,70
			4,0	0,99	0,61	0,44	0,65	0,46	0,36
			6,0	0,67	0,41	0,30	0,44	0,31	0,24
			8,0	0,50	0,31	0,22	0,33	0,23	0,18
1,1	10,6	1,6	0,1	46,00	28,20	20,60	30,10	21,30	16,60
			2,0	2,19	1,34	0,98	1,43	1,01	0,79
			4,0	1,12	0,69	0,50	0,74	0,52	0,41
			6,0	0,75	0,46	0,34	0,49	0,35	0,27
			8,0	0,57	0,35	0,25	0,37	0,26	0,21
1,4	10,2	2,3	0,1	53,20	32,60	23,80	34,80	24,60	19,20
			2,0	2,53	1,55	1,13	1,66	1,17	0,92
			4,0	1,30	0,80	0,58	0,85	0,60	0,47
			6,0	0,87	0,53	0,39	0,57	0,40	0,32
			8,0	0,66	0,40	0,29	0,43	0,30	0,24

внутри (и дипольного вне) звезды. Периоды полоидальных магнитоплазменных осцилляций всегда оказываются несколько больше (в среднем $P_p/P_t \sim 1,2 - 1,6$) периодов тороидальных альфвеновских мод. По данным табл. 5 также можно проследить общие тенденции изменения периодов в зависимости от параметров модели звезды. Для обеих мод длительность периода растет при уплотнении вещества звезды. Иными словами, чем тяжелее звезда, тем больше периоды ее гидромагнитных осцилляций. Главным обращающим на себя внимание результатом является то, что при интенсивности поля выше 10^{13} Гс периоды альфвеновских осцилляций перекрывают интервал периодов радиоизлучения пульсаров: $0,016 < P < 5$ с [67]. С уменьшением B периоды МГД-осцилляций удлиняются (частоты, соответственно, уменьшаются). Иначе говоря, периоды альфвеновских осцилляций должны расти по мере де-

прессии магнитного поля звезды. Такие выводы следуют из предположения, что интенсивность магнитного поля достигает значений, указанных в табл. 5. Для меньших значений $B \sim 10^{12}$ Гс (такие поля предполагаются в модели наклонного ротатора) периоды альфвеновских осцилляций попадают в интервал $5 < P < 50$ с. Излучение, обусловленное магнитоплазменными колебаниями с такими периодами, накладываясь на магнитодипольное излучение из-за вращения, может проявиться в модуляциях амплитуды последнего. Нельзя также забывать, что данные выводы получены в модели однородного распределения скомпенсированной плазмы по всему сферическому объему нейтронной звезды. Между тем из расчетов структуры этого компактного объекта следует, что Ae-фаза локализована главным образом в периферийной коре звезды, где плотность вещества ниже, чем в более глубоких областях (см. рис.1). В этой связи представляется целесообразным провести переоценку частот МГД-колебаний в рамках модели, учитывающей это последнее обстоятельство.

5. АЛЬФВЕНОВСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПЕРИФЕРИЙНОЙ КОРЕ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

В этом разделе мы приводим вариационный расчет и численные оценки частот собственных МГД-колебаний, локализованных во внешней коре нейтронной звезды, т.е. в наиболее вероятной области существования электрон-ядерной плазмы. Нейтронная звезда идеализируется двухкомпонентным объектом, в полной аналогии с упомянутой выше моделью Бейма—Петика—Пайнса—Рудермана [42] (см. также [8, 13]), объясняющей сбои пульсаров сдвиговыми сейсмическими колебаниями внешней (менее плотной) коры относительно более плотного кора. Мы также будем опираться на аргументы работы [94], предполагая, что переобогащенная нейтронами ядерная материя массивного кора находится в ферромагнитной фазе. По крайней мере, это делает понятным физическое происхождение сильного магнитного поля в поверхностной скомпенсированной электрон-ядерной плазме, на фоне которого и могут развиваться альфвеновские колебания.

Полоидальная мода. В изучаемом случае полоидальных МГД-колебаний для нахождения поля скорости упругих смещений на поверхности внутреннего кора радиуса R_c наложим условие непроницаемости:

$$\delta V_r|_{r=R_c} = 0, \quad R_c = 0. \quad (5.1)$$

На поверхности звезды налагаем стандартное граничное условие:

$$\delta V_r|_{r=R} = \dot{R}(t) = R P_L(\mu) \dot{\alpha}_L(t), \quad (5.2)$$

где $R(t) = R [1 + \alpha_L(t) P_L(\mu)]$, L — мультипольный порядок сфероидальных искажений поверхности. Для полоидального векторного поля:

$$\xi_L = \text{rot rot } \mathbf{r} \chi_L, \quad \chi_L = [A_L^1 r^L + A_L^2 r^{-L-1}] P_L(\mu). \quad (5.3)$$

Из (5.1) и (5.2) находим явный вид произвольных констант A_L^1 и A_L^2 :

$$A_L^1 = \frac{A_L}{L(L+1)}, \quad A_L^2 = -\frac{A_L}{L(L+1)} R_c^{2L+1}, \quad A_L = \frac{R^{L+3}}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}}. \quad (5.4)$$

Компоненты поля мгновенных смещений ξ_L в сферической системе координат представляются в виде:

$$\xi_r = A_L \frac{r^{2L+1} - R_c^{2L+1}}{r^{L+2}} P_L(\mu), \quad (5.5)$$

$$\xi_\theta = \frac{-A_L}{L(L+1)} \frac{(L+1)r^{2L+1} + LR_c^{2L+1}}{r^{L+2}} P_L^1(\mu), \quad (5.6)$$

$$\xi_\phi = 0, \quad (5.7)$$

где $P_L^1(\mu) = (1 - \mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}$ — присоединенный полином Лежандра первого порядка. Параметр инерции M , рассчитанный с этим полем, равен [65]:

$$M = \frac{4\pi\rho}{L(2L+1)} A_L^2 R^{2L+1} \left[1 + \frac{L}{L+1} X^{2L+1} \right] (1 - X^{2L+1}), \quad X = R_c/R, \quad (5.8)$$

где X меняется в пределах $0 < X < 1$. Подчеркнем, что здесь ρ — плотность электрон-ядерной плазмы (Ae -фазы), локализованной в периферийной коре звезды.

Далее, подставляя (4.11) и (5.3) в (4.8), находим, что компоненты флуктуаций напряженности магнитного поля приобретают вид

$$h_r = \frac{A_L B}{r^{L+3}} [(L-1)r^{2L+1} P_{L-1}(\mu) + (L+2)R_c^{2L+1} P_{L+1}(\mu)], \quad (5.9)$$

$$h_\theta = \frac{A_L B}{r^{L+3}} [r^{2L+1} P_{L-1}^1(\mu) - R_c^{2L+1} P_{L+1}^1(\mu)], \quad h_\phi = 0. \quad (5.10)$$

Тогда для жесткости гидромагнитных полоидальных колебаний получаем следующее выражение:

$$K = A_L^2 B^2 R^{2L-1} \left[\frac{L-1}{2L-1} + \frac{2L+1}{(2L+3)(2L-1)} X^{2L-1} - \frac{L+2}{2L+3} X^{2(2L+1)} \right]. \quad (5.11)$$

Легко видеть, что в пределе $X \rightarrow 0$ мы воспроизводим результат однородной модели

$$\omega_p^2 = \Omega_A^2 L(L-1) \frac{2L+1}{2L-1}. \quad (5.12)$$

Тороидальная мода. Рассмотрим теперь нерадиальные тороидальные МГД-колебания. В системе с фиксированной полярной осью z тороидальное поле скорости имеет вид

$$\delta \mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{r} \chi_L \dot{\alpha}_L(t), \quad \chi_L = [A_L^1 r^L + A_L^2 r^{-L-1}] P_L(\mu). \quad (5.13)$$

Произвольные константы A_L^1 и A_L^2 фиксируются граничными условиями, аналогичными использованным выше при изучении сфероидальных колебаний. При дифференциально-вращательных колебаниях искажения поверхности звезды заданы уравнением: $R(t) = R[1 + \alpha_L(t) P_L^1(\mu)]$, поэтому при $r = R$ следует положить

$$\delta V_\phi|_{r=R} = \dot{R}(t) = R P_L^1(\mu) \dot{\alpha}_L(t). \quad (5.14)$$

Предполагаем, что внутренняя граница остается в покое:

$$\delta V_\phi|_{r=R_c} = 0 \quad \dot{R}_c = 0. \quad (5.15)$$

В результате получаем

$$A_L^1 = A_L, \quad A_L^2 = -A_L R_c^{2L+1}, \quad A_L = \frac{R^L}{R^{2L+1} - R_c^{2L+1}}. \quad (5.16)$$

Используя для поля скорости крутильных колебаний (5.14) сепарабельное представление (4.7), находим компоненты тороидального поля мгновенных смещений:

$$\xi_r = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \xi_\phi = A_L \left[r^L - \frac{R_c^{2L+1}}{r^{L+1}} \right] P_L^1(\mu). \quad (5.17)$$

Подстановка (4.11) и (5.17) в (4.8) приводит к следующим выражениям для компонент флуктуирующей напряженности магнитного поля (см. также приложение Б):

$$h_r = 0, \quad h_\theta = 0, \quad h_\phi = A_L B \left[(L+1)r^{L-1} P_{L-1}^1(\mu) + L \frac{R_c^{2L+1}}{r^{L+2}} P_{L+1}^1(\mu) \right]. \quad (5.18)$$

Вычисления коэффициентов инерции и жесткости тороидальных МГД-колебаний дают:

$$M = A_L^2 \frac{4\pi\rho L(L+1)R^{2L+3}}{(2L+1)(2L+3)} \times$$

$$\times \left[1 - (2L + 3)X^{2L+1} + \frac{(2L + 1)^2 X^{2L+3}}{2L - 1} - \frac{(2L + 3)}{2L - 1} X^{2(2L+1)} \right],$$

$$K = A_L^2 B^2 \frac{L(L + 1)R^{2L+1}}{(2L + 1)} \times$$

$$\times \left[\frac{L^2 - 1}{2L - 1} + \frac{3X^{2L+1}}{(2L - 1)(2L + 3)} - \frac{L(L + 2)}{2L + 3} X^{2(2L+1)} \right]. \quad (5.19)$$

Как и следовало ожидать, при $X(= R_c/R) \rightarrow 0$ приходим к результату однородной модели [73]:

$$\omega_t^2 = \Omega_A^2 (L^2 - 1) \frac{2L + 3}{2L - 1}, \quad (5.20)$$

где основная (альфвеновская) частота Ω_A определена выше.

Двухкомпонентная модель позволяет получить нижнюю и верхнюю предельные оценки частот собственных альфвеновских МГД-колебаний нейтронной звезды. Приводимые в литературе параметры нейтронной звезды, полученные с использованием различных уравнений состояния ядерной материи, лежат в следующих пределах:

- i) глубина периферийной коры $\Delta R = R - R_c = R(1 - X)$: $0,3 < \Delta R < 0,8$ км;
- ii) средняя плотность поверхностной коры $10^8 < \rho < 10^{11}$ г/см³;
- iii) поверхностная напряженность магнитного поля $10^{10} < B < 10^{13}$ Гс.

Результаты численного анализа модели представлены на рис.6 и 7. На рис.6 изображена (часто приводимая в литературе [67, 92, 104]) диаграмма период — интенсивность магнитного поля. Расчеты периодов нерадиальных полоидальных и тороидальных МГД-осцилляций в поверхностной коре глубиной $\Delta R = 0,5$ км изображены на рис.7 линиями, нумерация которых соответствует различным значениям плотности вещества в области локализации Ae -фазы. Видно, что предсказания модели довольно хорошо вписываются в квадрат, которым обозначена область пульсаров на данной диаграмме. На рис.7 приведена зависимость рассчитанных периодов от глубины слоя, в котором возбуждаются альфвеновские колебания нижайших мультипольностей. Представленные оценки демонстрируют близость рассчитанных периодов МГД-осцилляций к периодам электромагнитного излучения радиопулсаров. Мы склонны полагать, что совпадение периодов МГД-колебаний с основными периодами радиопулсаций нейтронных звезд не является случайным и поддерживает упомянутую гипотезу Хойла—Нарликара—Уилера [71] о том, что низкочастотные гидромагнитные осцилляции, возникающие как остаточный эффект взрыва сверхновой второго типа, могут оказаться эффективным источником электромагнитной активности нейтронных звезд. Анализ эволюции пульсаров показывает, что первоначальное магнитное поле должно

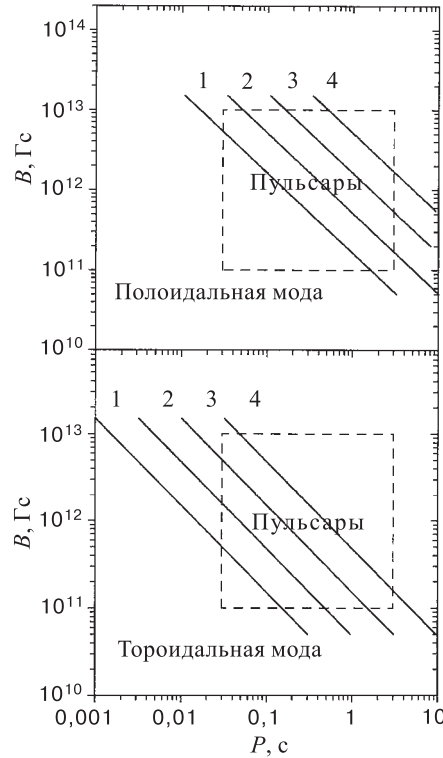


Рис. 6. Диаграмма период — интенсивность магнитного поля: $P - B$. Рассчитанные периоды квадрупольных полоидальных и тороидальных МГД-колебаний представлены линиями, соответствующими различным значениям плотности электрон-ядерной плазмы (Ae -фазы), локализованной во внешней коре глубиной $\Delta R = 0,5$ км: 1 — $\rho = 10^8$, 2 — $\rho = 10^9$, 3 — $\rho = 10^{10}$, 4 — $\rho = 10^{11}$ г/см³. Квадратом обозначена область значений P и B реально наблюдаемых пульсаров

разрушаться за время порядка $\tau_m \sim 2 \cdot 10^6$ лет [104]. Поскольку периоды гидромагнитных осцилляций обратно пропорциональны интенсивности магнитного поля ($P_{hm} \sim 1/B$), то адиабатическая депрессия последнего должна приводить к увеличению периодов альфвеновских колебаний. Поэтому когерентный характер магнитоплазменных осцилляций внутри нейтронной звезды должен проявлять себя вне звезды в виде импульсов, распространяющихся вдоль силовых линий магнитного поля и порождающих пульсирующее электромагнитное излучение сгустками заряженных частиц, выбрасываемых с поверхности звезды. Известно [105, 106], что магнитогидродинамические волны в межзвездном пространстве могут ускорять заряженные частицы вдоль сило-

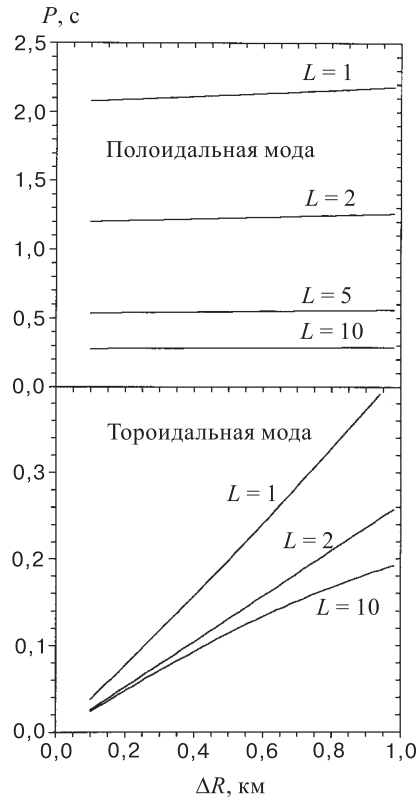


Рис. 7. Периоды полоидальных и тороидальных мультипольных МГД-колебаний, возбуждаемых в Ae -фазе, рассчитанные в зависимости от толщины внешней коры $\Delta R = R - R_c$, при средней плотности вещества Ae -фазы $\rho = 4,3 \cdot 10^{11}$ г/см³ и напряженности магнитного поля $B = 0,5 \cdot 10^{13}$ Гс

вых линий поля, и, таким образом, породить излучение (синхротронное или изгибное).

По нашему мнению, одним из решающих аргументов, подтверждающих гипотезу о том, что магнитоплазменные осцилляции нейтронной звезды могут быть столь же эффективным, как и вращение, источником пульсирующего радиоизлучения в окружающее пространство, могло бы стать наблюдение долгоживущих сверхбыстрых пульсаров с периодом пульсаций $P < 0,5$ мс. При указанных значениях периодов радиопульсаций частота излучения заметно превосходит кеплеровскую предельную частоту, определяющую

гравитационно-вращательную устойчивость звезды*. Поэтому существование таких пульсаров исключается моделью униполярного генератора, в которой намагниченная нейтронная звезда порождает магнитодипольное радиоизлучение с периодом, равным периоду собственного вращения [81, 107, 108]. В этой связи наиболее важными нам представляются проводимые в настоящее время наблюдения по программе МАНИЯ (многокальный анализ наносекундных изменений яркости), одной из целей которой является поиск пульсаров с переменностью излучения за время $10^{-7} - 10^{-2}$ с [109].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном обзоре изложена теория гравитационных и магнито-плазменных нерадиальных колебаний нейтронных звезд, основанная на представлении о ядерном веществе как упругом ферми-континууме, обладающем свойствами скомпенсированной магнитоактивной плазмы. В качестве фундаментальных динамических уравнений, моделирующих движения вещества в недрах нейтронных звезд, используются уравнения ядерной эластодинамики, предложенные в макроскопической теории коллективных процессов лабораторной ядерной физики, таких, как деление и гигантские резонансы.

Проведено конструктивное сравнение выводов гидродинамической и эластодинамической моделей поведения ядерной сплошной среды с данными астрофизических наблюдений. В рамках гидродинамического подхода показано, что присутствие дипольной моды является характерным признаком неоднородности профиля плотности звезды. Однако гидродинамическая модель не позволяет описать главные физические факторы, управляющие собственными колебаниями нейтронных звезд. Вибрационная устойчивость нейтронной звезды определяется конкуренцией конструктивных сил упругих деформаций вырожденного ферми-континуума и деструктивных сил гравитационного сжатия. Данное обстоятельство совершенно отчетливо отражено в эластодинамической теории нерадиальных колебаний и абсолютно отсутствует в гидродинамической теории, что свидетельствует о неадекватности гидродинамической парадигмы ядерной сплошной среды. Одним из главных выводов развитой эластодинамической модели нерадиальных пульсаций является вывод о том, что вибрационная динамика нейтронной звезды характеризуется двумя ветвями собственных гравитационно-упругих нерадиальных колебаний:

*По современным оценкам [110], предельное значение частоты вращения вокруг своей оси сформировавшейся нейтронной звезды оценивается как 1800 об/с. Самые быстрые на сегодняшний день пульсары PSR 1937 и PSR 1957, согласно модели жесткого ротатора, должны делать приблизительно 600 оборотов в секунду.

сфероидальной (s -мода) и торсионной (t -мода). Торсионные дифференциально-вращательные колебания нейтронной звезды обусловлены исключительно динамической упругостью вырожденного ферми-континуума. В газовой среде звезд главной последовательности, движения которой подчиняются уравнениям гидродинамики, такие моды отсутствуют.

На основе энергетического вариационного принципа разработан метод вычисления частот (периодов) этих колебаний. Эффективность метода проиллюстрирована аналитическими расчетами периодов глобальных нерадиальных гравитационно-упругих мод в рамках стандартной модели нейтронной звезды (моделируемой сферической массой однородного нейтронного ферми-континуума, сконденсированного силами собственного тяготения до плотностей порядка нормальной ядерной плотности). Реалистические оценки периодов сфероидальных и торсионных гравитационных мод получены в рамках моделей нейтронных звезд, построенных на основе релятивистского уравнения равновесия с использованием уравнений состояния ядерной материи, учитывающих гетерофазность ядерного статистического равновесия. Проведен анализ вибрационной (сейсмической) устойчивости нейтронной звезды относительно упругих деформаций, сопровождающих глобальные гравитационные колебания, и показано, что при линейных деформациях, подчиняющихся закону Гука, не возникает неустойчивых напряжений, которые могли бы спровоцировать звездотрясения. Полученные оценки периодов гравитационных нерадиальных мод дают основания предположить, что эти колебания могут быть ответственны за вариации интенсивности микроимпульсов, наблюдаемые в миллисекундном диапазоне спектра пульсаров.

Проведено детальное изучение нерадиальных магнитоплазменных осцилляций, предположительно индуцируемых в Ae -фазе вспышкой сверхновой при рождении пульсара или компаньоном в двойной системе. При этом обнаружено, что длительность альфвеновских МГД-колебаний перекрывает пульсарную шкалу времени. Совпадение рассчитанных периодов магнитоплазменных колебаний с наблюдаемыми периодами радиоизлучения пульсаров интерпретируется как подтверждение гипотезы Хойла—Нарликара—Уилера о том, что слабозатухающие магнитоплазменные колебания могут быть источником пульсирующего (линейно поляризованного) излучения, которое формируется в окружающей звезду магнитосфере. В рамках магнитоплазменной модели электромагнитной активности нейтронных звезд регистрируемое удлинение периодов радиоимпульсов можно объяснить как результат медленной депрессии магнитного поля пульсаров. Этот вывод является еще одним аргументом в пользу того, что магнитогидродинамический механизм преобразования энергии альфвеновских колебаний в энергию электромагнитного излучения может быть эффективным источником пульсирующего радиоизлучения нейтронных звезд наряду с униполярной индукцией, порождающей геометрический эффект такого излучения.

Таким образом, накопленные на сегодняшний день данные астрофизических обсерваторий об электромагнитной активности нейтронных звезд, а также экспериментальные данные лабораторной ядерной физики свидетельствуют о том, что ядерная сплошная среда является упругим ферми-континуумом, движения которого в собственном гравитационном и магнитном полях адекватно описываются уравнениями ядерной эластодинамики и магнитогидродинамики.

Работа выполнена в рамках договора о сотрудничестве между ЛВТА ОИЯИ (Дубна), Ереванским университетом (Армения), Саратовским госуниверситетом (Россия), Институтом теоретической физики Университета Людвиг-Максимилиана (Мюнхен, Германия) и частично поддержана грантом программы Гейзенберг—Ландау ЛТФ ОИЯИ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом приложении мы приводим сводку полезных формул, использование которых значительно облегчает аналитические вычисления периодов собственных нерадиальных гравитационно-упругих колебаний. Наименее трудоемко вычисления могут быть выполнены в сферической системе координат с фиксированной полярной осью z .

Производные поля смещений в тензоре упругих напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \xi_r}{\partial r}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= -\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \mu} + \frac{\xi_r}{r}, & \mu &= \cos \theta, \\
 \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} &= \frac{1}{r(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} + \frac{\xi_r}{r} + \frac{\xi_\theta}{r} \frac{\mu}{(1-\mu^2)^{1/2}}, \\
 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= -\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \mu} - \frac{\xi_\theta}{r}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r}, \\
 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} &= \frac{1}{r(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{\partial \xi_r}{\partial \phi} - \frac{\xi_\phi}{r}, & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r}, \\
 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} &= \frac{1}{r(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} - \frac{\xi_\phi}{r} \frac{\mu}{(1-\mu^2)^{1/2}}, & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} &= -\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{r} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \mu}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Выражение для жесткости упругих нерадиальных колебаний, непосредственно подлежащее интегрированию, представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{2} \int_v P(r) \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)^2 dV = \int_v P(r) \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} dV = \\
 &= \int_v P(r) \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] dV. \quad (\text{A.2})$$

В вычислениях использовалось следующее представление полоидального поля упругих смещений:

$$\begin{aligned} \xi_p &= \frac{N_p}{L+1} \mathbf{rot} \mathbf{rot} r^L P_L(\mu) : \xi_r = L N_p r^{L-1} P_L(\mu), \\ \xi_\theta &= -N_p (1-\mu^2)^{1/2} r^{L-1} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \quad \xi_\phi = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

и их производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= N_p L(L-1) r^{L-2} P_L(\mu), \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= N_p r^{L-2} \left[\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} - L^2 P_L(\mu) \right], \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} &= N_p r^{L-2} \left[L P_L(\mu) - \mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} \right], \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= -N_p (L-1) r^{L-2} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= -N_p (L-1) r^{L-2} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} &= 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Сферические компоненты тороидального поля упругих торсионных смещений и их производных имеют вид

$$\xi_t = \frac{N_P}{L+1} \mathbf{rot} r^L P_L(\mu) : \xi_r = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \xi_\phi = N_t r^L (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} &= -N_t r^{L-1} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} &= L N_t r^{L-1} (1-\mu^2)^{1/2} \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} &= -N_t r^{L-1} \mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu}, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} &= -N_t r^{L-1} \left[\mu \frac{dP_L(\mu)}{d\mu} - L(L+1) P_L(\mu) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

При вычислении вариации магнитного поля при магнитоплазменных осцилляциях следует иметь в виду, что компоненты производных полей упругих смещений по направлению постоянного магнитного поля внутри звезды

$$h_i = B_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \quad (\text{Б.1})$$

в сферических координатах представляются в следующей явной форме:

$$\begin{aligned} h_r &= \left[B_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{B_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \xi_r - \frac{B_\theta \xi_\theta + B_\phi \xi_\phi}{r}, \\ h_\theta &= \left[B_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{B_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \xi_\theta + \frac{B_\theta \xi_r - B_\phi \xi_\phi \operatorname{ctg} \theta}{r}, \quad (\text{Б.2}) \\ h_\phi &= \left[B_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{B_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \xi_\phi + \frac{B_\phi \xi_r + B_\theta \xi_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hewish A., Bell S.J., Pilkington J.D.H., Scott P.F., Collins R.A. — Nature, 1968, v.217, p.709; УФН, 1968, т.95, с.705.
2. Taylor J.M., Manchester R.N., Lyne A.G. — Astrophys. J. Suppl., 1993, v.88, p.529.
3. Пульсары. — Сб. статей, М.: Мир, 1971.
4. Дайсон Ф., Тер Хаар Д. — Нейтронные звезды и пульсары. М.: Мир, 1973.
5. Шкловский И.С. — Сверхновые звезды. М.: Наука, 1976.
6. Smith F.G — Pulsars. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.
7. Manchester R.N., Taylor J.H. — Pulsars. San Francisco: Freeman, 1977.
8. Shapiro S.L., Teukolsky S.A. — Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, New York: Wiley, 1983.
9. Липунов В.М. — Астрофизика нейтронных звезд. М.: Наука, 1987.
10. Физика нейтронных звезд. Пульсары и барстеры. — Сб. статей. Л, 1989.
11. Пульсары. — Труды ФИАН, 1989, т.199, с.83.
12. Beskin V.S., Gurevich A.V., Istomin Ya.N. — Physics of Pulsar Magnetosphere. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
13. Саакян Г.С. — Физика нейтронных звезд. Дубна: ОИЯИ, 1995.
14. Мигдал А.Б., Воскресенский Д.Н., Саперштейн Е.Е., Троицкий М.А. — Пионные степени свободы в ядерной материи. М.: Наука, 1991.
15. Weber F., Glendenning N.K. — In: Nuclear Physics in the Universe. Proc. of Symposium, Tennessee, Oak Ridge, 1992 (ed. by Guidri M.W. and Strayer M.R.). Bristol: IOP, UK, 1993, p.127.

16. **Weber F., Glendenning N.K.** — *Astrophysics and Neutrino Physics*. Singapore: World Scientific, 1993.
17. **The Structure and Evolution of Neutron Stars** — Pines D., Tamagaki R., Tsuruta S. eds., New York: Addison-Wesley, 1992.
18. **Neutron Stars: Theory and Observations.** — Ventura J. and Pines D. eds., Dordrecht: Kluwer, 1992.
19. **Hot and Dense Nuclear Matter.** — Greiner W., Stöcker H., Gammann A. eds., NATO ASI Series B: Physics, 1994, v.335, New York: Plenum Press.
20. **The Lives of Neutron Stars.** — Ali Alpar M., Kiziloglu Ü., van Paradijs J. eds., Dordrecht: Kluwer, 1995.
21. **Glendenning N.K.** — *Compact Stars*. Berlin: Springer, 1996.
22. **Weber F.** — *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. Bristol: IOP, 1998.
23. **Bodmer A.R.** — *Phys. Rev.*, 1971, v.D4, p.1601.
24. **Terazawa H.** — *INS-Report-338*, Tokyo: Tokyo University Press, 1979.
25. **Witten E.** — *Phys. Rev.*, 1984, v.D30, p.272.
26. **Glendenning N.K., Kettner Ch., Weber F.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1995, v. 74, p. 3519; *Astrophys. J.*, 1995, v.450, p.253.
27. **Пиблс Ф.Дж.Э.** — *Структура Вселенной в больших масштабах*. М.: Мир, 1983.
28. **Bogdanov M.B., Cherepaschuck A.M., Sazhin M.V.** — *Astrophys. and Space Sci.*, 1996, v.235, p.219.
29. **Гуревич А.В., Зыбин К.П., Сирота В.А.** — *УФН*, 1997, т.167, с.913.
30. **Масевич А.Г., Тутуков А.Б.** — *Эволюция звезд: теория и наблюдения*. М.: Наука, 1988.
31. **Бисноватый-Коган Г.С.** — *Физические вопросы теории звездной эволюции*. М.: Наука, 1989.
32. **Ledoux P.** — In: *Handbuch der Physik* (Ed. by S. Flügge). Berlin: Springer, 1958, v.51, p.605.
33. **Жевакин С.А.** — В кн: *Пульсирующие звезды* (под. ред. Б.В. Кукаркина). М.: Наука, 1970.
34. **Ledoux P., Walraven Th.** — In: *Handbuch der Physik* (Ed. by S. Flügge) Berlin: Springer, 1958, v.51, p.353; *ibid* p. 605.
35. **Rosseland S.** — *The Pulsation Theory of Variable Stars*. Oxford: Clarendon, 1964.
36. **Cox J.P.** — *Theory of Stellar Pulsations*. Princeton: Princeton University Press, 1980.
37. **Koester D., Ghanmungam G.** — *Rep. Prog. Phys.*, 1990, v. 53, p.837.
38. **Ledoux P.** — In: *Nonradial Oscillations of Stars* (Ed. by P. Ledoux, A. Noels, A.W. Rodgers). Dordrecht: Reidel, 1974, p.135.
39. **Hansen C.J., Van Horn H.M.** — *Astrophys. J.*, 1979, v.233, p.253.
40. **Hansen C.J.** — In: *Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsations* (ed. by Hill H.A., Dziembowski W.A.). *Lecture Notes in Physics*, Berlin: Springer. 1980, v.125, p.445.
41. **Unno W., Osaki Y., Ando H., Shibahashi H.** — *Nonradial Oscillations of Stars*. Tokyo: Tokyo University Press, 1979.
42. **Baym G., Pethick C., Pines D., Ruderman M.** — *Nature*, 1969, v.224, p.872.
43. **Thorne K.S., Ipser J.R.** — *Astrophys. Lett.*, 1968, v.152, p.L71.
44. **Faulkner J., Griffin J.** — *Nature*, 1968, v.218, p.738.

45. Папоян В.В., Седракян Д.М., Чубарян Е.В. — *Астрофизика*, 1969, т.5, с.415.
46. Bertsch G.F. — *Ann. Phys.*, 1974, v.86, p.138; *Nucl. Phys.*, 1975, v.A249, p.253.
47. Nix J.R., Sierk A.J. — *Phys. Rev.*, 1980, v.C21, p.396.
48. Stringari S. — *Ann. Phys.*, 1983, v.151, p.35.
49. Holzwarth G. — In: *Density Functional Methods in Physics* (ed. by R.M. Dreizler, J.P. da Providência) New York: Plenum Press, 1985, p.381.
50. Бальбуцев Е.Б., Михайлов И.Н. — Коллективная ядерная динамика (под ред. Р.В. Джолоса). Л.: Наука, 1990, с.3.
51. Коломиец В.М. — Приближение локальной плотности в атомной и ядерной физике. Киев: Наукова думка, 1990; см. также [49] с.89.
52. Бальбуцев Е.Б. — *ЭЧАЯ*, 1991, т.22, вып.2, с.333.
53. Speth J., Wambach J. — In: *Electric and Magnetic Giant Resonances*. Singapore: World Scientific, 1991, ch.1, p.3.
54. Bastrukov S.I., Misicu S., Sushkov A.V. — *Nucl. Phys.*, 1993, v.A562, p.191.
55. Бастрюков С.И., Молодцова И.В. — *ЭЧАЯ*, 1995, т.26, с.145.
56. Bastrukov S.I., Libert J., Molodtsova I.V. — *Int. J. Mod. Phys.*, 1997, v.E6, p.89.
57. Nörenberg W. — In: *New Vistas in Nuclear Dynamics*. (ed by Brussard P.J., Koch J.H.) New York: Plenum Press, 1986.
58. Swiatecki W.J. — *Nucl. Phys.*, 1988, v.A488, p.375c.
59. Mikhailov I.N., Mikhailova T.I., Di Toro M., Baran V., Briancon Ch. — *Nucl. Phys.*, 1996, v.A604, p.358.
60. Bastrukov S.I., Podgainy D.V., Molodtsova I.V., Kosenko G.I. — *J. Phys. G.*, 1998, v.24, p.L1.
61. Bastrukov S.I. — *Mod. Phys. Lett.*, 1993, v.A8, p.711.
62. Bastrukov S.I. — *Phys. Rev.* 1996, v.E53, p.1917.
63. Bastrukov S.I., I.V. Molodtsova, Papoyan V.V., Weber F. — *J. Phys. G.* 1996, v.22, p. L33.
64. Bastrukov S.I., Weber F., Podgainy D.V. — *J Phys. G.*, 1999, v.25, p.107.
65. Bastrukov S.I. — *Int. J. Mod. Phys.*, 1996, v.D 5, p. 45.
66. Подгайный Д.В., Бастрюков С.И., Молодцова И.В., Папоян В.В. — *Астрофизика*, 1996, т.39, с.475, *ibid.*, 1999, т.42, с.235.
67. Chanmugam G. — *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 1992, v.30, p.143.
68. Либерман М.А., Йоханссон Б. — *УФН*, 1995, т.165. вып.4. с.1058.
69. Гинзбург В.Л. — *ДАН СССР*, 1964, 1, т.70, с.329.
70. Woltjer L. — *Astrophys. J.*, 1964, v.140, p.1309.
71. Hoyle F., Narlikar J.V., Wheeler J.A. — *Nature*, 1964, v.203, p.914.
72. Wheeler J.A. — *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 1966, v.4, p.393.
73. Bastrukov S.I., Podgainy D.V. — *Phys. Rev. E*, 1996, v.54, p.4465.
74. Бастрюков С.И., Подгайный Д.В. — *Астроном. журнал*, 1997, т.74, с.910.
75. Бастрюков С.И., Папоян В.В., Подгайный Д.В. — *Письма в ЖЭТФ*, 1996, т.64, с.593.
76. Бастрюков С.И., Молодцова И.В., Папоян В.В., Подгайный Д.В. — *Астрофизика*, 1997, т.40, с.77.

77. **Baade W., Zwicky F.** — Phys. Rev., 1934, v.45, p.138.
78. **Кардашев Н.С.** — Астроном. журнал, 1964, т.41, с.807.
79. **Арделян Н.В., Бисноватый-Коган Г.С., Моисеенко С.Г.** — УФН, 1997, т.167, с.1128.
80. **Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.** — Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.
81. **Gold T.** — Nature, 1968, v.218, p.731; 1969, v.221, p.25.
82. **Schaab Ch., Weber F., Voskresensky D., Sedrakian A., Weigel M.K.** — Astron. and Astrophys., 1997, v.321, p.591.
83. **Bastrukov S.I.** — Phys. Rev., 1994, v.E49, p.3166.
84. **Chandrasekhar S.** — Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, Oxford, 1961.
85. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Теория упругости. М.: Наука, 1986.
86. **Ламб Н.** — Гидродинамика: Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1947.
87. **Plumpton C, Ferraro V.C.A.** — Astrophys. J., 1955, v.121, p.168.
88. **Cowling T.G.** — Proc. Roy. Soc., 1955, v.233, p.319.
89. **Aizerman M.L., Smeysters P.** — Astrophys. and Space Science, 1976, v.48, p.123.
90. **Альвен Г., Фельтхаммар К.Г.** — Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.
91. **Rasini F.** — Nature, 1968, v.219, p.145.
92. **Trimble V.** — Beam Line. Stanford, 1995, v.25, No.4, p.41.
93. **Седракян Д.Н., Шахбазян К.М., Мовсесян А.Г.** — Астрофизика, 1984, т.21, с.547.
94. **Ахизер А.И., Ласкин Н.В., Пелетминский С.В.** — ЖЭТФ, 1996, т.109, с.1981.
95. **Michel F.G.** — Rev. Mod. Phys., 1982, v.54, p.1.
96. **Малов В.Ф.** — Пульсары. Труды ФИАН (под ред. А.Д. Кузмина), 1989, т.199, с.83.
97. **Beskin V.S.** — Contemporary Physics, 1993, v.34, p.131.
98. **Гинзбург В.Л., Киржниц Д.А.** — ЖЭТФ, 1964, т.47, с.2007.
99. **Ruderman M.** — Nature, 1970, v.225, p.619; Ann. Rev. Astron. Astrophys., 1972, v.10, p.427.
100. **Sonin E.B.** — Rev. Mod. Phys., 1987, v.59, p.87.
101. **Chandrasekhar S., Fermi E.** — Astrophys. J., 1953, v.118, p.116.
102. **Bastrukov S.I., Podgainy D.V.** — Phys. Lett. A, 1997, v.226, p.93.
103. **Schwarzschild M.** — Ann. d'Astrophys., 1949, v.12, p.148.
104. **Radhakrishnan V.** — Contemporary Physics, 1982, v.23, p.207.
105. **Thompson W.B.** — Proc. Roy. Soc., 1955, v.233, p.402.
106. **Железняков В.В.** — Электромагнитные волны в космической плазме. М.: Наука, 1977.
107. **Goldreich P., Julian, W.H.** — Astrophys. J., 1969, v.157, p.689.
108. **Striker J.P., Gunn J.E.** — Astrophys. J., 1969, v.157, p.1395.
109. **Бескин Г.М., Митронова С.Н., Неизвестный С.И., Плохотниченко В.Л., Попова М.Ю.** — УФН, 1994, т.164, с.660.
110. **Weber F., Glendenning N.K.** — Astrophys. J., 1992, v.390, p.541.
111. **Boriakoff V.** — Astrophys. J. (Letters), 1976, v.208, p.L43.
112. **Van Horn H.M.** — Astrophys. J., 1980, v.236, p.899.
113. **Lindblom L., Detweiler.** — Astrophys. J. Suppl., 1983, v.53, p.73.
114. **McDermott P.N., Van Horn H.M., Hansen C.J.** — Astrophys. J. 1988, v.325, p.725.
115. **Anderson N., Kojima Y. Kokkotas K.D.** — Astrophys. J., 1996, v.462, p.855.