«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 2

538.915;538.954

ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ—ФОКА—БОГОЛЮБОВА В МОДЕЛЯХ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Н.Н.Боголюбов (мл.)

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 2

УДК 538.915;538.954

ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ—ФОКА—БОГОЛЮБОВА В МОДЕЛЯХ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Н.Н.Боголюбов (мл.)

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва

Рассмотрена точно решаемая модель с парным четырехфермионным взаимодействием, представляющая интерес в теории сверхпроводимости. Показано, что можно построить асимптотически точное решение для этой модели, используя метод аппроксимирующих гамильтонианов. Доказана теорема, позволяющая вычислить асимптотически точно в термодинамическом пределе плотность свободной энергии при достаточно общих условиях, наложенных на параметры модельной системы. Предложен приближенный метод исследования моделей с четырехфермионным взаимодействием общего вида, основанный на идее построения некоторого аппроксимирующего гамильтониана и позволяющий исследовать термодинамические свойства этих моделей и корреляционные функции. Указанный метод объединяет стандартный для метода аппроксимирующего гамильтониана подход к исследованию моделей с сепарабельным взаимодействием со схемой приближенных вычислений Хартри—Фока—Боголюбова, основанной на идее самосогласованности. В качестве иллюстрации эффективности предлагаемого подхода рассмотрена модель Бардина—Купера—Шриффера, играющая важную роль в теории сверхпроводимости.

An exactly solvable model with four-fermion interaction which is of interest in the theory of superconductivity is considered. It is shown that the asymptotically exact solution for this model can be constructed in terms of an approximating Hamiltonian method. A theorem is proved that enables one to calculate the asymptotically exact expression for the free energy in the thermodynamic limit under sufficiently general conditions imposed on the parameters of a model system under discussion. An approximate method for the investigation of the general models with four-fermion interactions is also proposed, which combine the ideas of the above approximating Hamiltonian scheme for the models with separable interactions and the Hartree—Fock—Bogolubov method based on the idea of self-consistency. The BCS model for ordinary superconductivity is treated by the way of illustration.

1. ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Обсудим кратко основы метода аппроксимирующего гамильтониана применительно к анализу моделей с четырехфермионным взаимодействием [1–12]. Из обширного разнообразия этих моделей мы, в свою очередь, выделим прежде всего те модели достаточно общего вида, для которых может быть найдено точное решение. Модели, описывающие системы взаимодействующих фермионов с четырехфермионным парным взаимодействием, представляют собой важный пример такого рода моделей. Асимптотически точные решения таких моделей были исследованы в работе Н.Н.Боголюбова, Д.Н.Зубарева и Ю.А.Церковникова [1]. В этой работе был предложен приближенный метод, основанный на использовании аппроксимирующих (пробных) гамильтонианов, и был приведен ряд аргументов, свидетельствующих в пользу предположения о том, что полученное этим методом решение является асимптотически точным в обычном термодинамическом пределе $V \to \infty$. В работе [1] была рассмотрена модель с гамильтонианом

$$H = H_0 + H_{\rm int}, \qquad H_0 = \sum_{(p,s)} (E(p) - \mu) a^{\dagger}_{ps} a_{ps},$$
$$H_{\rm int} = -\frac{1}{V} \sum_{(p,p')} J(p,p') a^{\dagger}_{-p,-1/2} a^{\dagger}_{p,1/2} a_{p',1/2} a_{-p',-1/2}, \tag{1.1}$$

где $a^{\dagger}_{p,\pm 1/2}, a_{p,\pm 1/2}$ — ферми-операторы и V — объем системы. Предполагается, что ядро $J(p,p')$ является вещественной ограниченной функцией, которая равна нулю за пределами некоторой области изменения своих аргументов. Суммирование в $H_{\rm int}$ по квазиимпульсам p, p' осуществляется в пределах энергетического слоя $E_F - \omega < E(p) < E_F + \omega$.

Как известно, для гамильтонианов этого типа можно получить приближенное выражение для свободной энергии, которое становится асимптотически точным в пределе $V \to \infty$. Эта идея может быть реализована посредством введения так называемого «пробного гамильтониана» $H_0(C)$, который является квадратичной по ферми-операторам формой, содержащей произвольные комплексные параметры C. Этот гамильтониан может быть легко диагонализован, и соответствующая свободная энергия может быть вычислена явно.

В работе [1] были высказаны предположения о том, что приближенная свободная энергия $F_0(C)$ равна точной свободной энергии F в пределе $V \to \infty$. Изначально этот результат был получен методами теории возмущений. Обоснование вывода о равенстве свободных энергий базировалось на том факте, что каждый член ряда теории возмущений, построенного для вычисления поправок к данному приближенному решению, асимптотически мал в пределе $V \to \infty$. Однако вопрос о сходимости ряда теории возмущений не был детально исследован. В работе [2] та же проблема была проанализирована без использования методов теории возмущений. Исследовалась модель типа модели Бардина—Купера—Шриффера (БКШ) [6]:

$$H = \sum_{(f)} T_f a^{\dagger}_f a_f - \frac{1}{2V} \sum_{(f,f')} J(f,f') a^{\dagger}_f a^{\dagger}_{-f} a_{-f'} a_{f'} + \nu\, \mathcal{A}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{(f)} W(f) (a_{-f} a_f + a^{\dagger}_f a^{\dagger}_{-f}), \qquad \nu \geq 0,$$

где $f=(p,\sigma)$, $-f=(-p,-\sigma)$, здесь σ — спиновое квантовое число, принимающее значения $1/2$ или $-1/2$, и p — квазиимпульс, принимающий обычные квазидискретные значения $p_{(d)}=\frac{2\pi n_{(d)}}{L}$, где для фиксированной величины L $(L^3=V)$ индекс $n_{(d)}$ пробегает последовательность целых чисел. $T_f=\frac{p^2}{2m}-\mu$, μ — химический потенциал и a_f, $a_f^\dagger$ — операторы, удовлетворяющие обычным антикоммутационным соотношениям статистики Ферми—Дирака. Функции $J(f,f')$, $W(f)$ являются вещественными функциями со свойствами

$$J(f,f')=J(f',f)=-J(-f,f'),\qquad W(-f)=-W(f).$$

Например,

$$J(f,f')=\frac{1}{2}J(p,p')\{\delta(\sigma-\sigma')-\delta(\sigma+\sigma')\},\qquad J(p,p')=J(p',p)=J(-p,p'),$$

где $\delta(\sigma-\sigma')$ — символ Кронекера. Вспомогательный член $\nu\mathcal{A}$ в (1.2), нарушающий симметрию, введен с целью отбора физически содержательных решений. В работе [2] была исследована цепочка уравнений для функций Грина. Было показано, что функция Грина для точно решаемой модели с гамильтонианом H_0 удовлетворяет аналогичной цепочке уравнений, полученной для точного гамильтониана H с ошибкой порядка $1/V$. Однако со строго математической точки зрения аргументы такого рода нельзя было признать исчерпывающе убедительными. Тем не менее работы [1, 2] внесли значительный вклад в исследование асимптотически точных решений. В то же время мы должны отметить, что строгое доказательство асимптотической точности результатов, полученных в [1, 2], столкнулось с существенными математическими трудностями. Проблема существования асимптотически точного решения, как чисто математическая проблема, была впервые исследована Н.Н.Боголюбовым для частного случая нулевой температуры [3]. Он исследовал модель, описываемую гамильтонианом (1.2), в предположении, что ядро $J(f,f')$ может быть факторизовано, т. е.

$$J(f,f')=\lambda(f)\cdot\lambda(f')\,.$$

Кроме того, предполагалось, что функции $\lambda(f)$, $T(f)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda(-f)=-\lambda(f),\qquad T(-f)=T(f),$$

$$\left.\begin{array}{c}|\lambda(f)|\le\mathrm{const}\\ T(f)\to\infty\end{array}\right\},\qquad \text{если}\qquad |f|\to\infty, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{V}\sum_{(f)}\frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)x+T^2(f)}}>1$$

для достаточно малого положительного x. Именно эта модель была всесторонне исследована в случае нулевой температуры [3]. Было показано, что модель является точно решаемой в пределе $V \to \infty$, в том смысле, что асимптотические значения энергии основного состояния, функций Грина и корреляционных функций, характеризующих динамическое поведение системы, могут быть точно вычислены в этом пределе. Вычисление указанных величин в случае произвольной температуры $\theta \neq 0$ также представляет значительный интерес. Однако для этого случая прямое использование подхода [3] оказалось невозможным.

Таким образом, данный подход был изначально применим только для исследования свойств основного состояния системы. Некоторые из последующих работ, в частности [4, 5], были посвящены более сложной проблеме обобщения метода на случай модельных гамильтонианов типа (1.2) при ненулевой температуре.

Обратимся теперь к более детальному рассмотрению модельных ферми-систем с притяжением с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{(f)} T_f a_f^\dagger a_f - \frac{1}{2V} \sum_{(f,f')} \lambda(f)\lambda(f')\, a_f^\dagger a_{-f}^\dagger a_{-f'} a_{f'}. \tag{1.4}$$

Мы используем традиционные обозначения $f = (p, \sigma)$, $-f = (-p, -\sigma)$ для совокупности четырех квантовых чисел — импульса p и проекции спина σ, которые определяют состояние свободного фермиона.

$$V = L^3, \quad p_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad p_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad p_z = \frac{2\pi n_z}{L},$$

n_x, n_y, n_z – целые числа, $T_f = \frac{p^2}{2m} - \mu$, где μ — химический потенциал. Для стандартной модели БКШ [6] предполагается, что

$$\lambda(f) = \begin{cases} J\varepsilon(\sigma) = \text{const}, & \left|\frac{p^2}{2m} - \mu\right| \leq 0, \\ 0 \qquad \text{для} & \left|\frac{p^2}{2m} - \mu\right| > 0, \end{cases} \qquad \varepsilon(\sigma) = \pm 1. \tag{1.5}$$

В данной работе мы не опираемся буквально на эти сильные ограничения, наложенные на функции T_f, $\lambda(f)$. Для наших целей достаточно наложить более слабые условия: функции $\lambda(f)$, T_f вещественны и $\lambda(-f) = -\lambda(f)$,

$$\frac{1}{2V} \sum_{(f)} |\lambda_f| \leq k_1 = \text{const}, \qquad \frac{1}{V} \sum_{(f)} |T_f \cdot \lambda_f| \leq k_2 = \text{const}, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{V} \sum_{(f)} \lambda_f^2 \leq k_3 = \text{const}, \qquad \text{если} \qquad V \to \infty.$$

Эти условия гарантированно выполняются в случае (1.5). Уместно также отметить, что в этом случае удельная свободная энергия соответствующей системы, состоящей из невзаимодействующих фермионов, конечна.

Выполнив тождественное преобразование, мы можем переписать (1.4) в виде

$$H = H^0 + H_1,$$

где «аппроксимирующий гамильтониан» H^0 имеет вид

$$H^0 = \sum_{(f)} T_f a_f^\dagger a_f - \left\{ \sum_{(f)} (C a_{-f} a_f + C^* a_f^\dagger a_{-f}^\dagger) \right\} + 2VC^*C\,,$$

$$H_1 = -2V \left(\frac{1}{2V} \sum_{(f)} \lambda_f a_f^\dagger a_{-f}^\dagger - C \right) \left(\frac{1}{2V} \sum_{(f)} \lambda_f a_{-f} a_f - C^* \right)$$

и C, C^* являются c-числами. Так как H^0 квадратичен по ферми-операторам, то он может быть диагонализован посредством $(u - v)$-преобразования:

$$a_f = u(f)\alpha_f - v(f)\alpha_{-f}^\dagger,$$

и удельная свободная энергия, определяемая как

$$f_{H_0}(C) = -\frac{\theta}{V} \ln \mathrm{Sp}\ \mathrm{e}^{-\frac{H^0}{\theta}},$$

может быть легко вычислена. Здесь $\theta = kT$ — температура в энергетических единицах, V — объем системы. В дальнейшем используется также обратная температура $\beta = 1/kT$. Комплексный параметр C, присутствующий в пробном гамильтониане H^0, определяется из условия абсолютного минимума удельной свободной энергии $f_{H^0}(C)$:

$$f_{H^0}(C) = \min,$$

которое приводит к уравнению

$$\frac{\partial f_{H^0}}{\partial C} = 0, \qquad C = \langle J \rangle_{H^0} = \frac{\mathrm{Sp}\ J\ \mathrm{e}^{-\frac{H^0}{\theta}}}{\mathrm{Sp}\ \mathrm{e}^{-\frac{H^0}{\theta}}}, \tag{1.7}$$

где

$$J = \frac{1}{2V} \sum_{(f)} \lambda(f)\, a_f^\dagger a_{-f}^\dagger.$$

Мы разрабатываем метод, который позволяет доказать асимптотическую малость разности $f_{H^0} - f_H$ свободных энергий, вычисленных на основе аппроксимирующего и модельного гамильтонианов, соответственно, при произвольной температуре. В этих целях удобно будет рассмотреть вспомогательную модельную систему с гамильтонианом, содержащим источники, интенсивность которых характеризуется параметром ν:

$$\Gamma = T - 2VJ \cdot J^{\dagger} - V\,(\nu J + \nu^* J^{\dagger}). \tag{1.8}$$

Гамильтониан (1.8) совпадает для $\nu = 0$ с гамильтонианом H, где

$$T = \sum_{(f)} T_f a_f^{\dagger} a_f.$$

Соответствующий пробный (аппроксимирующий) гамильтониан имеет вид

$$\Gamma^0 = T - 2V(CJ^{\dagger} + C^* J) - V(\nu J + \nu^* J^{\dagger}) + 2V|C|^2. \tag{1.9}$$

Отсюда очевидно, что

$$\Gamma = \Gamma^0 + \mathcal{U},$$

где

$$\mathcal{U} = -2V(J - C)(J^{\dagger} - C^*). \tag{1.10}$$

Вычислим теперь вышеупомянутую разность между удельными свободными энергиями. Для этого заметим, что $\Gamma = \Gamma^0 + \mathcal{U}$, и введем промежуточный вспомогательный гамильтониан:

$$\Gamma^t = \Gamma^0 + t\,\mathcal{U},$$

который совпадает с пробным гамильтонианом Γ^0, если $t = 0$, и с исходным гамильтонианом Γ, если $t = 1$. Предполагается, что параметр C в промежуточном гамильтониане фиксирован и не зависит от t. Рассмотрим статсумму и свободную энергию для промежуточного гамильтониана:

$$f_t(C) = -\frac{\theta}{V} \ln Q_t, \qquad Q_t = \mathrm{Sp}\, \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}}, \qquad Q_t = \mathrm{e}^{-\frac{V \cdot f_t}{\theta}}. \tag{1.11}$$

Заметим, что $f_{t=1}(C) = f_{\Gamma}$ и, следовательно, не зависит от C. Дифференцируя (11) дважды по t, мы имеем

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial t^2} = -\frac{V}{\theta} \frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} Q_t + \frac{V^2}{\theta^2} \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \right)^2 Q_t.$$

С другой стороны, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial t^2} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^1 \mathrm{Sp}\, \left\{ \mathcal{U} \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}\tau} \mathcal{U} \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)} \right\} d\tau,$$

мы получаем

$$-\frac{V}{\theta}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2}+\frac{V^2}{\theta^2}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{\theta^2 Q}\int_0^1 \mathrm{Sp}\ \left\{\mathcal{U}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}\tau}\mathcal{U}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)}\right\}d\tau.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{Sp}\,\mathcal{U}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}}}{\mathrm{Sp}\ \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}}}=\frac{1}{V}\langle\mathcal{U}\rangle,$$

мы также находим, что

$$-\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2}=\frac{1}{\theta V}\left\{\frac{1}{Q}\int_0^1 \mathrm{Sp}\,\mathcal{U}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}\tau}\mathcal{U}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)}d\tau-\langle\mathcal{U}\rangle^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{\theta V Q}\int_0^1 \mathrm{Sp}\ \left\{\mathcal{B}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}\tau}\mathcal{B}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma^t}{\theta}(1-\tau)}\right\}d\tau,$$

где $\mathcal{B}=\mathcal{U}-\langle\mathcal{U}\rangle$. Переходя к матричному представлению, в котором гамильтониан диагонален, мы получаем

$$-\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2}=\frac{1}{\theta V Q}\int_0^1\sum_{(n,m)}\mathcal{B}_{nm}\cdot\mathcal{B}_{mn}\mathrm{e}^{-\frac{(E_m^t-E_n^t)}{\theta}\tau}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{E_n^t}{\theta}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\theta V Q}\int_0^1\sum_{(n,m)}|\mathcal{B}_{nm}|^2\mathrm{e}^{-\frac{(E_m^t-E_n^t)}{\theta}\tau}\mathrm{e}^{-\frac{E_n^t}{\theta}}d\tau\geq 0,$$

$$-\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2}\geq 0.$$

Отсюда следует, в частности, что

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}\ \equiv\ \frac{1}{V}\,\langle\mathcal{U}\rangle_t$$

убывает с увеличением параметра t. Таким образом, мы имеем

$$f_{\Gamma^0}(C)-f_\Gamma=-\int_0^1\frac{\partial f_t}{\partial t}dt=-\int_0^1\frac{\langle\mathcal{U}\rangle}{V}dr\geq 0.$$

Так как это соотношение выполняется для произвольного C, то

$$\min_{(C)}f_{\Gamma^0}(C)\geq f_\Gamma,\qquad f_{\Gamma^0}\geq f_\Gamma.$$

Проинтегрируем обе стороны следующего неравенства:

$$\langle\mathcal{U}\rangle_t\geq\langle\mathcal{U}\rangle_\Gamma,\qquad 0\leq t\leq 1.$$

Подставляя (1.10) вместо $\mathcal{U}$, мы видим, что для любого $C = C'$ выполняется следующее неравенство:

$$f_{\Gamma^0}(C) - f_\Gamma \le 2\langle (J - C)(J^\dagger - C^*)\rangle_\Gamma.$$

В частности, положим $C = \langle J\rangle_\Gamma$ и заметим, что

$$f_{\Gamma^0} = \min_{(C)} f_{\Gamma^0}(C) \le f_{\Gamma^0}(\langle J\rangle_\Gamma).$$

Таким образом,

$$f_{\Gamma^0} - f_\Gamma \le f_{\Gamma^0}(\langle J\rangle_\Gamma) - f_\Gamma \le 2\langle (J - \langle J\rangle_\Gamma)(J^\dagger - \langle J^\dagger\rangle_\Gamma)\rangle_\Gamma$$

и в итоге

$$0 \le f_{\Gamma^0} - f_\Gamma \le 2\langle (J - \langle J\rangle)(J^\dagger - \langle J^\dagger\rangle)\rangle. \tag{1.12}$$

Вернемся к нашей основной проблеме. Мы хотим показать, что разность $f_{\Gamma^0} - f_\Gamma$ асимптотически мала в пределе $V \to \infty$. Как следует из (1.12), для того чтобы это утверждать, мы должны доказать асимптотическую малость термодинамического среднего в правой части (1.12). Обрисуем общий метод оценки этого среднего. Прежде всего отметим, что

$$|\Gamma J - J\Gamma| \le K = \text{const},$$

где $K = |\nu| k_3 + k_2 + 2k_1 k_3$. Учитывая, что энергия системы Γ пропорциональна V, естественно предположить, что операторы Γ и $J, J^\dagger$ асимптотически коммутируют в пределе $V \to \infty$. Таким образом, если бы мы пренебрегли некоммутативностью оператора Γ с операторами $J, J^\dagger$ для любого конечного V, то, дифференцируя свободную энергию по ν и ν^*, могли бы получить

$$-\theta \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*} = V \frac{\mathrm{Sp}\,(J \cdot J^\dagger \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}})}{\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}}} - V \frac{(\mathrm{Sp}\,J\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}})(\mathrm{Sp}\,J^\dagger \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}})}{(\mathrm{Sp}\,\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}})^2} =$$
$$= V\langle (J - \langle J\rangle)(J^\dagger - \langle J^\dagger\rangle)\rangle,$$

или, что эквивалентно,

$$-\frac{\theta}{V}\frac{\partial f^2}{\partial\nu\partial\nu^*} = \langle (J - \langle J\rangle)(J^\dagger - \langle J^\dagger\rangle)\rangle. \tag{1.13}$$

Наша проблема будет решена, если докажем, что производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*}$ ограничены. Но мы не можем доказать это утверждение непосредственно. Все, что можно сделать, так это исходить из очевидной ограниченности первых производных:

$$\frac{\partial f}{\partial\nu} = \langle J\rangle, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial\nu}\right| \le |\langle J\rangle| \le \frac{1}{2V}\sum_{(f)} |\lambda_f| = k_1 = \text{const}.$$

Кроме того, как мы уже отмечали, операторы J и $J^\dagger$ на самом деле не коммутируют и, следовательно, равенство (1.13) должно быть скорректировано.

Асимптотическая малость разности двух вышеупомянутых удельных свободных энергий может быть доказана в два этапа. Сначала мы должны построить оценку для среднего (1.13), выраженную через производную второго порядка свободной энергии $\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*}$ с учетом некоммутативности операторов Γ и J, $J^\dagger$. Затем, исходя строго из этой оценки и избегая гипотезы о том, что производные свободной энергии второго порядка ограничены, мы предложим метод, с помощью которого докажем асимптотическую малость разности $f_{\Gamma^0} - f_\Gamma$ в пределе $V \to \infty$.

Дифференцируя соответствующее выражение для свободной энергии, мы имеем

$$-\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*} = \frac{V}{\theta^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{Sp}\,(De^{-\frac{\tau}{\theta}\Gamma}D^\dagger e^{-\frac{(1-\tau)}{\theta}\Gamma})d\tau}{\mathrm{Sp}\,e^{-\frac{\Gamma}{\theta}}}, \tag{1.14}$$

где $D = J - \langle J\rangle$. Переходя к матричному представлению, в котором гамильтониан Γ диагонален, находим, что

$$-\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*} = \frac{V}{\theta}\int_0^1 D_{nm}e^{-\frac{\tau}{\theta}E_m}D^\dagger_{mn}e^{-\frac{(1-\tau)}{\theta}E_n}d\tau\cdot Q^{-1} =$$

$$= \frac{V}{\theta^2}\sum_{(n,m)}|D_{nm}|^2\int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\theta}E_m}e^{-\frac{(1-\tau)}{\theta}E_n}d\tau\cdot Q^{-1} =$$

$$= \frac{V}{\theta}\frac{1}{Q}\sum_{(n,m)}\frac{|D_{nm}|^2}{E_n - E_m}\left(e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}}\right).$$

Таким образом, мы видим, что

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*} = V\sum_{(n,m)}\frac{|D_{nm}|^2}{Q}\frac{e^{-\frac{E_m}{\theta}} - e^{-\frac{E_n}{\theta}}}{E_n - E_m} \geq 0. \tag{1.15}$$

Воспользуемся неравенством Гельдера*, которое в нашем случае удобно записать в виде:

$$\sum_{(k)}|u_k|^2 \leq \left(\sum_{(k)}\frac{|u_k|^2}{p_k}\right)^{2/3}\cdot\left(\sum_{(k)}|u_k|^2p_k^2\right)^{1/3} \tag{1.16}$$

---

*Неравенство Гельдера:

$$\left|\sum ab\right| \leq \left(\sum|a|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum|b|^q\right)^{1/q},$$

где $p > 0$ и $q > 0$, $1/p + 1/q = 1$. Следовательно, $p > 1$ и $q > 1$. Выберем $p = 3/2$ и $q = 3$.

$$\left(p_k \geq 0, \qquad \left|\frac{u_k}{\sqrt{p}_k}\right| = \text{finite}\right),$$

$$\sum_{(k)} |u_k|^2 = \sum_{(k)} \left(\frac{|u_k|^{1/3}}{p^{2/3}}\right) \left(|u_k|^{2/3} \cdot p^{2/3}\right),$$

$$p = |E_n - E_m|,$$

$$|u_k|^2 = |J_{nm}|^2 \cdot |\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} - \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}| \cdot V \cdot Q^{-1}.$$

Подставляя два последних выражения для p и $|u_n|^2$ в (1.16), мы получаем:

$$\frac{V}{Q} \sum_{(n,m)} |D_{nm}|^2 \cdot |\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} - \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}| \leq$$

$$\leq \left(\frac{V}{Q} \sum_{(n,m)} \frac{|D_{nm}|^2 \cdot |\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} - \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}|}{|E_n - E_m|}\right)^{2/3} \times$$

$$\times \left(\frac{V}{Q} \sum_{(n,m)} |D_{nm}|^2 \cdot |E_n - E_m|^2 \cdot |\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} - \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}|\right)^{1/3}.$$

Ввиду (1.15) имеем

$$\frac{V}{Q} \sum_{(n,m)} |D_{nm}|^2 \cdot |\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} - \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}| \leq \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \nu^*}\right)^{2/3} \times$$

$$\times \left(\frac{V}{Q} \sum_{(n,m)} |D_{nm}| \cdot |E_n - E_m|^2 (\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} - \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}})\right)^{1/3}.$$

Проделаем простое преобразование:

$$\frac{V}{Q} \sum_{(n,m)} |D_{nm}|^2 \cdot |E_n - E_m| \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} + \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}\right) =$$

$$= \frac{V}{Q} \mathrm{Sp}\, \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}} \left\{(\Gamma D - D\Gamma)(D^\dagger \Gamma - \Gamma D^\dagger) + (D^\dagger \Gamma - \Gamma D^\dagger)(\Gamma D - D\Gamma)\right\} =$$

$$= V \langle (\Gamma J - J\Gamma)(\Gamma J - J\Gamma)^\dagger + (\Gamma J - J\Gamma)^\dagger (\Gamma J - J\Gamma)\rangle \leq 2VK^2,$$

с помощью которого можно показать, что

$$\frac{V}{Q} \sum_{(n,m)} |D_{nm}|^2 \cdot |E_n - E_m| \cdot \left|\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}} - \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}\right| \leq \left(-\frac{\partial f}{\partial \nu \partial \nu^*}\right)^{2/3} \cdot (2VK^2)^{1/3}.$$

Заметим, далее, что

$$\frac{V}{Q}\sum_{(n,m)}|D_{nm}|^2 \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}} \le \theta\frac{V}{Q}\sum_{(n,m)}\frac{|D_{nm}|^2}{(E_n-E_m)}\left(\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}}-\mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}\right)+$$

$$+\sum_{(n,m)}|D_{nm}|^2\cdot|\mathrm{e}^{-\frac{E_m}{\theta}}-\mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}}|,$$

где

$$\frac{V}{Q}\sum_{(n,m)}|D_{nm}|^2 \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{\theta}} = \frac{V}{Q}\mathrm{Sp}\, D\cdot D^{\dagger}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}} = V\langle D\cdot D^{\dagger}\rangle =$$

$$= V\langle (J-\langle J\rangle)(J^{\dagger}-\langle J^{\dagger}\rangle)\rangle.$$

В результате мы приходим к неравенству

$$\langle (J-\langle J\rangle)(J^{\dagger}-\langle J^{\dagger}\rangle)\rangle \le -\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*}\frac{\theta}{V}+\frac{(2K^2)^{1/3}}{V^{2/3}}\cdot\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*}\right)^{2/3}. \quad (1.17)$$

Из (1.12) и (1.17) видно, что наша проблема была бы решена, если бы мы могли показать, что производные второго порядка ограничены в пределе $V\to\infty$. К сожалению, прямое доказательство этого утверждения отсутствует, вследствие чего мы вынуждены полагаться лишь на ограниченность производных первого порядка. Поэтому мы должны разработать метод, не опирающийся на свойство ограниченности производных второго порядка, при помощи которого могли бы доказать асимптотическую малость разности удельных свободных энергий

$$f_{\Gamma^0}-f_{\Gamma}.$$

Заметим, что $f(\nu,\nu^*)$ зависит только от абсолютного значения $r=|\nu|$: $f(\nu,\nu^*)=f(r)$ и не зависит от фазового множителя параметра ν. Следовательно, $f(\nu,\nu^*)=f(\sqrt{\nu\nu^*})$. Дифференцируя f по ν и ν^*, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial\nu^*}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{\nu^*}}f'_r(r), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\partial\nu^*}=\frac{1}{4r}(f'_r+f''_r r)=\frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)\le 0.$$

Так как $|\Gamma J-J\Gamma|\le K=\mathrm{const}$, то мы можем переписать неравенство (1.17) в виде

$$D(r)\le\frac{\theta}{4V}\left(-f''_r-\frac{1}{r}f'_r\right)+\left(-f''_r-\frac{1}{r}f'_r\right)^{2/3}\frac{K^{2/3}}{2V^{2/3}},$$

где ввели обозначения

$$D(r)=\langle (J-\langle J\rangle)(J^{\dagger}-\langle J^{\dagger}\rangle)\rangle.$$

Проинтегрируем (1.17) по r и покажем, что

$$\int_{r_0}^{r_1} rD(r)dr \to 0, \qquad \text{если} \qquad V \to \infty.$$

Фактически, мы имеем

$$\int_{r_0}^{r_1} rD(r)dr \leq \frac{\theta}{4V} r \frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r_1}^{r_0} + \frac{K^{2/3}}{2V^{2/3}} \int_{r_0}^{r_1} r^{1/3} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right)^{2/3} dr \equiv$$

$$\equiv \int_{r_0}^{r_1} u(r)v(r)dr,$$

где

$$u(r) = r^{1/3}, \qquad v(r) \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right)^{2/3}.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера в форме

$$\int |uv|dr \leq \left(\int |u|^3 dr \right)^{1/3} \cdot \left(\int |v|^{3/2} dr \right)^{2/3},$$

с тем чтобы преобразовать правую часть последнего неравенства. Замечая, что

$$\left| \frac{\partial f}{\partial r} \right| \leq 2k_1, \tag{1.18}$$

мы получаем

$$\int_{r_0}^{r_1} rD(r)dr \leq \frac{\theta}{2V} k_1 (r_0 + r_1) + \frac{1}{2V^{2/3}} \left(2k_1 K (r_0 + r_1) \right)^{2/3} \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \right)^{1/3}. \tag{1.19}$$

Откуда следует, что этот интеграл асимптотически убывает по мере того, как $V \to \infty$. Вернемся к неравенству (1.12):

$$0 \leq f_{\Gamma^0} - f_{\Gamma} \leq 2 \langle (J - \langle J \rangle)(J^\dagger - \langle J^\dagger \rangle) \rangle.$$

Обозначая $a = f_{\Gamma^0} - f_{\Gamma}$ и используя соотношение (1.19), мы находим, что

$$\int_{r_0}^{r_1} ra(r)dr \leq \frac{\theta k_1 (r_0 + r_1)}{V} + \frac{(2kK(r_0 + r_1)^{2/3} \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \right)^{1/3}}{V^{2/3}}.$$

Помня о том, что первые производные $\frac{\partial f}{\partial r}$ ограничены (см. (1.18)) и $|a_r'(r)| \leq$ $\leq 4k_1$, положим $r_0 = r + l$, $r_1 = r + 2l$ и воспользуемся следующим равенством:

$$a(\xi) \int_{r+l}^{r+2l} rdr = \int_{r+l}^{r+2l} ra(r)dr,$$

где $r+l \le \xi \le r+2l$. Ввиду очевидного тождества:

$$a(r) = a(\xi) - \int_r^\xi a'_r dr,$$

можно показать, что

$$a(\xi) \le \frac{\int_{r+l}^{r+2l} ra(r)dr}{\frac{1}{2}\left[(r+2l)^2 - (r+l)^2\right]} + 4k_1 2l \le 8kl + \frac{2\theta k}{VL} + \frac{(4kK)^{2/3}}{l^{2/3}V^{2/3}}.$$

Выбирая l из условия

$$8kl = \frac{(4kK)^{2/3}}{l^{2/3}V^{2/3}}, \qquad l = \frac{K^{2/5}}{2V^{2/5}k^{1/5}},$$

мы в итоге находим

$$0 \le f_{\Gamma^0} - f_\Gamma \le \frac{8(k^2K)^{2/5}}{V^{2/5}} + \frac{4\theta\left(\frac{k^3}{K}\right)^{2/5}}{V^{3/5}} \le \frac{L}{V^{2/5}}, \qquad L = \text{const}. \tag{1.20}$$

Таким образом, разность $f_{\Gamma^0} - f_\Gamma$ стремится к нулю в пределе $V \to \infty$. Можно также перейти к пределу $r = |\nu| \to 0$ в неравенстве (1.20). В этом случае

$$0 \le f_{H^0} - f_H \le \frac{L}{V^{2/5}}, \qquad L = \text{const}.$$

Ясно, что эта оценка равномерна по отношению к $\theta \ge 0$ и, следовательно, она имеет место и для $\theta = 0$. Полученная оценка для разности свободных энергий (1.20) является частным случаем более общей теоремы, которая обсуждается ниже [4, 5]. Вариант метода с некоторыми модификациями, в частности, касающимися применения неравенства Гельдера в мажорационных оценках, был также рассмотрен в работе [8].

Отметим в заключение, что в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов для данной модели можно также асимптотически точно вычислить корреляционные функции и функции Грина. В частности, можно показать, что

$$|\langle A(t)B(\tau)\rangle_\Gamma - \langle A(t)B(\tau)\rangle_{\Gamma^0}| \le \eta\left(\frac{1}{V},\delta\right)|t-\tau| + \eta'\left(\frac{1}{V},\delta\right), \tag{1.21}$$

где $A, B = a_f, a_f^\dagger, a_{-f}, a_{-f}^\dagger$. Здесь $r = |\nu| \ge \delta$ и

$$\eta\left(\frac{1}{V},\delta\right) \to 0, \qquad \eta'\left(\frac{1}{V},\delta\right) \to 0, \quad \text{если} \quad V \to \infty,$$

для любого фиксированного значения $\delta > 0$. Подчеркиваем, что эти неравенства выполняются для $r \geq \delta$. Среднее $\langle A(t)B(\tau)\rangle_{\Gamma^0}$ может быть легко вычислено, и мы видим, что

$$\lim_{r\to 0}\left\{\lim_{V\to\infty}\langle A(t)B(\tau)\rangle_{\Gamma^0}\right\} = \lim_{V\to\infty}\langle A(t)B(\tau)\rangle_{H^0}.$$

В наших работах [4, 5] был рассмотрен более широкий класс модельных систем, в которых на операторы накладывались некоторые специальные ограничения. Приведем в качестве примера модельную систему с отрицательным взаимодействием, описываемую гамильтонианом:

$$H = T - 2V\sum_{(1\leq\alpha\leq s)} g_\alpha J_\alpha J_\alpha^\dagger, \tag{1.22}$$

где все параметры g_α положительны. Если мы выберем операторы T и J_α в форме

$$J_\alpha = \frac{1}{2V}\sum_{(f)}\lambda_\alpha(f)a_f^\dagger a_{-f}^\dagger, \qquad T = \sum_{(f)} a_f^\dagger a_f, \tag{1.23}$$

то придем к гамильтониану типа модели БКШ. Фактически, как будет видно из последующего рассмотрения, необязательно задавать операторы T и J_α строго в форме (1.23).

Теорема 1. Пусть операторы T и J_α в гамильтониане (1.22) удовлетворяют условиям

$$|J_\alpha| \leq M_1, \qquad T = T^\dagger, \qquad |TJ_\alpha - J_\alpha T| \leq M_2,$$

$$|J_\alpha J_\beta - J_\beta J_\alpha| \leq \frac{M_3}{V}, \qquad |J_\alpha^\dagger J_\beta - J_\beta J_\alpha^\dagger| \leq \frac{M_3}{V}, \tag{1.24}$$

где M_1, M_2, M_3 — являются постоянными в пределе $V \to \infty$ при $1 \leq \alpha \leq s$ и $1 \leq \beta \leq s$. И пусть удельная свободная энергия, вычисленная для гамильтониана T, ограничена некоторой постоянной:

$$|f(T)| \leq M_0. \tag{1.25}$$

Тогда, если построить пробный гамильтониан в виде

$$H(C) = T - 2V\sum_{(\alpha)} g_\alpha(C_\alpha J_\alpha^\dagger + C^* J_\alpha - C_\alpha C_\alpha^*), \tag{1.26}$$

где $C_1, ..., C_s$ — комплексные параметры, то имеет место следующее неравенство:

$$0 \leq \min_{(C)} f(H_0(C)) - f(H) \leq \mathcal{E}\left(\frac{1}{V}\right), \tag{1.27}$$

и $\mathcal{E}\left(\frac{1}{V}\right) \to 0$ в пределе $V \to \infty$ равномерно по отношению к θ на любом интервале $0 < \theta \leq \theta_0$, где θ_0 — произвольная фиксированная температура*.

Эта теорема нашла многочисленные приложения. Так, с ее помощью Хертель и Тирринг вычислили свободную энергию в термодинамическом пределе для модели, описывающей систему притягивающихся фермионов [9].

Мы также должны отметить, что существование предела свободной энергии, вычисленной для гамильтониана (1.22),

$$\lim_{V \to \infty} f(H), \tag{1.27a}$$

само по себе не следует из вышеупомянутых неравенств.

Рассмотрим теперь случай, когда операторы T и J_α в (1.22) имеют вид (1.23). Тогда условия теоремы выполнены, если потребуем

$$\frac{1}{V}\sum_{(p)} |T(p)\lambda_\alpha(p,\sigma)| \leq Q_0\,, \quad \frac{1}{V}\sum_{(p)} |\lambda_\alpha(p,\sigma)| \leq Q_1, \quad \frac{1}{V}\sum_{(p)} |\lambda_\alpha(p,\sigma)|^2 \leq Q_2\,, \tag{1.28}$$

где Q_0, Q_1, Q_2 — некоторые постоянные** . Кроме того, будем предполагать следующие ограничения:

$$|\lambda_\alpha(p,\sigma)| \leq \bar{Q} = \text{const} \qquad (\alpha = 1, 2, ..., s)\,.$$

Далее мы сформулируем теорему, которая позволяет более детально исследовать свойства свободных энергий, соответствующих гамильтонианам (1.22) и (1.26), а также доказать существование предела (1.27*a*).

Теорема 2. Пусть операторы T и J_α в гамильтониане (1.22) имеют вид (1.23) и функции $T(f)$, $\lambda_\alpha(p,\sigma)$ удовлетворяют условиям (1.28). Предположим, что функции $\lambda_\alpha(p,\sigma)$ непрерывны в пространстве E, за исключением, возможно, множества меры нуль. Тогда

$$|f_V\{H(C)\} - f_\infty\{H(C)\}| \leq \delta_V$$

---

*Мы обозначаем удельную свободную энергию для произвольного гамильтониана H как $f(H)$ или, если мы хотим подчеркнуть факт зависимости от объема V, как $f_V(H)$.
Под $\min_{(C)} f(C)$ мы всегда подразумеваем абсолютный минимум функции $f(C)$ в пространстве комплексных параметров C.

**Можно согласовать выбор этих постоянных с соответствующими постоянными в неравенствах (1.24):

$$M_1 = Q_1, \qquad M_2 = 2Q_0, \qquad M_3 = Q_2.$$

Условия (1.28) очевидно выполняются, если

$$|\lambda_\alpha(p,\sigma)| \leq \frac{A}{(p^2+B)^3},$$

где A и B — некоторые положительные постоянные.

для $|C_\alpha| \leq 2M_1$, $\alpha = 1, 2, ..., s$, и это неравенство равномерно по отношению к θ на любом интервале вида $0 < \theta < \theta_0$. $f_\infty\{H(C)\}$ определена как обычно и обладает непрерывными частными производными произвольного порядка по комплексным переменным $C_1, ..., C_s, \quad C_1^*, ..., C_s^*$. Кроме того, можно показать, что

а) эти функции достигают абсолютного минимума в пространстве комплексных чисел (C) в некоторых точках $C = \bar{C}$, т. е.

$$\min_{(C)} f_\infty\{H(C)\} = f_\infty\{H(\bar{C})\};$$

б) выполняется неравенство

$$|f_V(H) - f_\infty\{H(\bar{C})\}| \leq \bar{\delta}_V \tag{1.29}$$

и

$$\bar{\delta} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{V}\right) + \delta_V \to 0$$

равномерно по отношению к θ на любом интервале $0 < \theta \leq \theta_0$.
Эта теорема была впервые доказана в [4].

Для конкретного выбора операторов в форме (1.23) аппроксимирующий гамильтониан, упоминаемый в теореме 2, принимает вид

$$H_0(C) = \sum_{(f)} T(f) a_f^\dagger a_f - \frac{1}{2} \sum_{(f)} \left\{\Lambda^*(f) a_{-f} a_f + \Lambda(f) a_f^\dagger a_{-f}^\dagger\right\} + 2V \sum_{(\alpha)} g_\alpha C_\alpha C_\alpha^*, \tag{1.30}$$

где $\Lambda^*(f) = 2\sum_{(\alpha)} C_\alpha \lambda_\alpha^*(f)$. Вводя новые ферми-операторы α_f, $\alpha_f^\dagger$, такие, что

$$a_f = u_f \alpha_f - v_f \alpha_{-f}^\dagger,$$

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{T_f}{E_f}}, \quad v_f = -\frac{\Lambda(f)}{\sqrt{2}|\Lambda(f)|}\sqrt{1 - \frac{T_f}{E_f}}, \quad E_f = \sqrt{T^2(f) + |\Lambda(f)|^2},$$

перепишем (1.30) в виде

$$H_0(C) = \sum_{(f)} E_f \alpha_f^\dagger \alpha_f + V\left\{2\sum_{(\alpha)} g_\alpha C_\alpha^* C_\alpha - \frac{1}{2V}\sum_{(f)} (E_f - T_f)\right\}.$$

Удельная свободная энергия, соответствующая этому гамильтониану, представима в форме

$$f_V = 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha C_\alpha C_\alpha^* - \frac{1}{2V}\sum_{(f)} (E(f) - T(f)) + \frac{\theta}{V}\sum_{(f)} \ln(1 + \mathrm{e}^{-\frac{E(f)}{\theta}}). \tag{1.31}$$

Как следует из теоремы 2, f_V аппроксимируется в пределе $V \to \infty$ предельной свободной энергией*:

$$f_\infty\{H_0(C)\} = 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha C^*_\alpha C_\alpha - \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \{E(f) - T(f) - 2\theta \ln(1 + \mathrm{e}^{-\frac{E(f)}{\theta}})\} d\vec{f}. \tag{1.32}$$

2. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим теперь более общую модель с четырехфермионным взаимодействием [11]:

$$H = \sum_{(f,f')} \Omega(f',f) a^\dagger_f a_{f'} + \frac{1}{2} \sum_{(f_1,f_2,f'_2,f'_1)} U(f_1,f_2,f'_2,f'_1) a^\dagger_{f_1} a^\dagger_{f_2} a_{f'_2} a_{f'_1} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{(f,f')} j_-(f',f,t) a^\dagger_f a^\dagger_{f'} + \frac{1}{2}\sum_{(f,f')} j_+(f',f,t) a_f a_{f'}, \tag{2.1}$$

где $U(f_1, f_2, f'_2, f'_1)$ — симметричные функции по отношению к перестановке аргументов:

$$(1 \leftrightarrow 2): \quad \{f_1 \leftrightarrow f_2, \quad f'_1 \leftrightarrow f'_2\}$$

и $\Omega(f', f) = \Omega_0(f', f) + j(f', f, t)$. Эта модель включает как частный случай модель, рассмотренную выше. Отметим, что в (2.1) мы ввели вспомогательные источники:

$$\frac{1}{2}\sum_{(f,f')} j_-(f',f,t) a^\dagger_f a^\dagger_{f'}, \qquad \frac{1}{2}\sum_{(f,f')} j_+(f',f,t) a_f a_{f'} \ \text{ и } \ \sum_{(f,f')} j(f',f,t) a^\dagger_f a_{f'},$$

которые выбраны таким образом, чтобы выполнялся закон сохранения полного импульса и в то же время нарушался закон сохранения числа частиц.

Для модели (2.1) введем некоторый аппроксимирующий гамильтониан, который строится аналогично аппроксимирующему гамильтониану упрощенной модели, рассмотренной выше. В основе построения лежит следующее приближение:

$$a^\dagger_{f_1} a^\dagger_{f_2} a_{f'_2} a_{f'_1} \to \langle a^\dagger_{f_1} a_{f'_1}\rangle a^\dagger_{f_2} a_{f'_2} - \langle a^\dagger_{f_1} a_{f'_2}\rangle a^\dagger_{f_2} a_{f'_1} + \langle a^\dagger_{f_2} a_{f'_2}\rangle a^\dagger_{f_1} a_{f'_1} - \\ - \langle a^\dagger_{f_2} a_{f'_1}\rangle a^\dagger_{f_1} a_{f'_2} + \langle a^\dagger_{f_1} a^\dagger_{f_2}\rangle a_{f'_2} a_{f'_1} + \langle a_{f'_2} a_{f'_1}\rangle a^\dagger_{f_1} a^\dagger_{f_2}. \tag{2.2}$$

*Альтернативный подход, в котором с самого начала объем V полагается бесконечным, с тем чтобы избежать анализа процедуры предельного перехода $V \to \infty$, был разработан в [10].

Определим функцию

$$W(f_1, f_2; f_2', f_1') = U(f_1, f_2; f_2', f_1') - U(f_1, f_2; f_1', f_2'),$$

которая антисимметрична в том смысле, что

$$W(f_1, f_2; f_2', f_1') = -W(f_2, f_1; f_2', f_1'),$$
$$W(f_1, f_2; f_2', f_1') = -W(f_1, f_2; f_1', f_2').$$

Тогда аппроксимирующий гамильтониан для модели (2.1) имеет вид

$$H_a = \sum_{(f,f')} K(f', f) a_f^\dagger a_{f'} + \frac{1}{2} \sum_{(f,f')} K_-(f', f) a_f^\dagger a_{f'}^\dagger + \frac{1}{2} \sum_{(f,f')} K_+(f', f) a_f a_{f'},$$
$$K(f', f) = j(f', f, t) + \Omega_0(f', f) + \sum_{(f_1,f_2)} W(f_1, f; f', f_2) \langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2} \rangle, \tag{2.3}$$

$$K_+(f', f) = j_+(f', f, t) + \frac{1}{2} \sum_{(f_1,f_2)} W(f_1, f_2; f, f') \langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger \rangle =$$
$$= j_+(f', f, t) + \sum_{(f_1,f_2)} U(f_1, f_2; f, f') \langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger \rangle,$$

так как $\langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger \rangle = -\langle a_{f_2}^\dagger a_{f_1}^\dagger \rangle$, и

$$K_-(f', f) = j_-(f', f, t) + \frac{1}{2} \sum_{(f_1,f_2)} W(f, f'; f_1, f_2) \langle a_{f_1} a_{f_2} \rangle =$$
$$= j_-(f', f, t) + \sum_{(f_1,f_2)} U(f, f'; f_1, f_2) \langle a_{f_1} a_{f_2} \rangle.$$

Уравнения движения для гамильтониана (2.3) представимы в виде

$$i\frac{da_f^\dagger}{dt} = -\sum_{(f')} \left\{ K(f, f') a_{f'}^\dagger + K_+(f, f') a_{f'} \right\},$$
$$i\frac{da_f}{dt} = \sum_{(f')} \left\{ K(f', f) a_{f'} + K_-(f', f) a_{f'}^\dagger \right\}. \tag{2.4}$$

Эти уравнения позволяют выписать соответствующие уравнения для корреляционных функций $\langle a_f^\dagger a_g \rangle, \quad \langle a_f a_g \rangle, \quad \langle a_f^\dagger a_g^\dagger \rangle$:

$$i\frac{d\langle a_f^\dagger a_g \rangle}{dt} = -\sum_{(f')} \left\{ K(f, f') \langle a_{f'}^\dagger a_g \rangle + K_+(f, f') \langle a_{f'} a_g \rangle \right\} +$$

$$+\sum_{(f')}\Big\{K(f',g)\langle a_f^\dagger a_{f'}\rangle + K_-(f',g)\langle a_f^\dagger a_{f'}^\dagger\rangle\Big\},$$

$$i\frac{d\langle a_f a_g\rangle}{dt} = \sum_{(f')}\Big\{K(f',f)\langle a_{f'}a_g\rangle + K_-(f',f)\langle a_{f'}^\dagger a_g\rangle\Big\} +$$

$$+\sum_{(f')}\Big\{K(f',g)\langle a_f a_{f'}\rangle + K_-(f',g)[\delta_{f,f'} - \langle a_{f'}^\dagger a_f\rangle]\Big\}, \tag{2.5}$$

$$i\frac{d\langle a_f^\dagger a_g^\dagger\rangle}{dt} = -\sum_{(f')}\Big\{K(f,f')\langle a_{f'}^\dagger a_g^\dagger\rangle + K_+(f,f')[\delta_{g,f'} - \langle a_g^\dagger a_{f'}\rangle]\Big\} -$$

$$-\sum_{(f')}\Big\{K(g,f')\langle a_f^\dagger a_{f'}^\dagger\rangle + K_+(g,f')\langle a_f^\dagger a_{f'}\rangle\Big\}.$$

Далее мы будем называть уравнения (2.5) системой уравнений Хартри—Фока—Боголюбова. Обозначим

$$\begin{aligned} a_f^\dagger(t)a_g(t) &= A_1(f,g,t), & j(f,g,t) &= \eta_1(f,g,t),\\ a_f^\dagger(t)a_g^\dagger(t) &= A_2(f,g,t), & j_+(f,g,t) &= \eta_2(f,g,t),\\ a_f(t)a_g(t) &= A_3(f,g,t), & j_-(f,g,t) &= \eta_3(f,g,t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Затем введем функции Грина в виде

$$\left\{\frac{\delta\langle A_\alpha(f,g,t)\rangle}{\delta\eta_\beta(g_1,g_2,\tau)}\right\}_{\eta=0} = \langle\langle A_\alpha(f,g,t)A_\beta(g_2,g_1,\tau)\rangle\rangle. \tag{2.7}$$

Запаздывающие и опережающие функции Грина вводятся стандартным образом [12]:

$$\begin{aligned} \langle\langle A_\alpha(t)A_\beta(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{ret}} &= \theta(t-\tau)\langle A_\alpha(t)A_\beta(\tau) + A_\beta(\tau)A_\alpha(t)\rangle,\\ \langle\langle A_\alpha(t)A_\beta(\tau)\rangle\rangle^{\mathrm{adv}} &= -\theta(\tau-t)\langle A_\alpha(t)A_\beta(\tau) + A_\beta(\tau)A_\alpha(t)\rangle,\\ \langle\langle A_\alpha(t)A_\beta(\tau)\rangle\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\langle\langle A_\alpha A_\beta\rangle\rangle_E \mathrm{e}^{-iE(t-\tau)}dE, \end{aligned} \tag{2.8}$$

и спектральное представление двухвременных корреляционных функций имеет вид

$$\begin{aligned} \langle A_\beta(\tau)A_\alpha(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha\beta}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}d\omega,\\ \langle A_\alpha(t)A_\beta(\tau)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha\beta}(\omega)\mathrm{e}^{\beta\omega}\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}d\omega. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если мы определим функцию

$$\langle\langle A_\alpha A_\beta \rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha\beta}(\omega) \frac{e^{\beta\omega}+1}{E-\omega} d\omega$$

на комплексной плоскости E, то

$$\langle\langle A_\alpha A_\beta \rangle\rangle_E^{\mathrm{ret}} = \langle\langle A_\alpha A_\beta \rangle\rangle_{E+i0}, \quad \langle\langle A_\alpha A_\beta \rangle\rangle_E^{\mathrm{adv}} = \langle\langle A_\alpha A_\beta \rangle\rangle_{E-i0}.$$

Варьируя уравнения Хартри—Фока—Боголюбова по источникам $\eta_\beta(t)$ (см. (2.6)) и полагая затем все источники равными нулю, мы приходим к системе уравнений для функций Грина:

$$E\langle\langle a_f^\dagger a_g; A_\beta(g_2, g_1) \rangle\rangle_E = -\sum_{(f')} \Omega_0(f, f') \langle\langle a_{f'}^\dagger a_g; A_\beta \rangle\rangle_E -$$

$$- \sum_{(f_1, f_2, f')} \Big\{ W(f_1, f'; f, f_2) \langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2} \rangle_0 \langle\langle a_{f'}^\dagger a_g; A_\beta \rangle\rangle_E + W(f_1, f'; f, f_2) \times$$

$$\times \langle a_{f'}^\dagger a_g \rangle_0 \langle\langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ U(f_1, f_2; f', f) \langle A_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger \rangle_0 \langle\langle a_{f'} a_g; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ U(f_1, f_2; f' f) \langle a_{f_1} a_g \rangle_0 \langle\langle a_{f_1}^\dagger a_{f-2}^\dagger; A_\beta \rangle\rangle_E \Big\} +$$

$$+ \sum_{(f')} \langle\langle a_f^\dagger a_{f'}; A_\beta \rangle\rangle \Omega_0(f', g) +$$

$$+ \sum_{(f_1, f_2, f')} \Big\{ W(f, g; f', f_2) \langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2} \rangle_0 \langle\langle a_f^\dagger a_{f'}; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ W(f_1, g; f', f_2) \langle a_f^\dagger a_{f'} \rangle_0 \langle\langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ U(g, f'; f_1, f_2) \langle a_{f_1} a_{f_2} \rangle_0 \langle\langle a_f^\dagger a_{f'}^\dagger; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ U(g, f'; f_1, f_2) \langle a_f^\dagger a_{f'}^\dagger \rangle_0 \langle\langle a_{f_1} a_{f_2}; A_\beta \rangle\rangle_E \Big\} + I_{1,\beta}, \tag{2.10}$$

$$E\langle\langle a_f a_g; A_\beta \rangle\rangle_E = \sum_{(f_1, f_2, f')} \Big\{ W(f_1, f; f', f_2) \langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2} \rangle_0 \langle\langle a_{f'} a_g; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ W(f_1, f; f', f_2) \times \langle a_{f'} a_g \rangle_0 \langle\langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ U(f, f'; f_1, f_2) \langle a_{f_1} a_{f_2} \rangle_0 \langle\langle a_{f'}^\dagger a_g; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+ U(f, f'; f_1, f_2) \langle a_{f_1}^\dagger a_g \rangle_0 \langle\langle a_{f_1} a_{f_2}; A_\beta \rangle\rangle_E +$$

$$+W(f_1,g;f',f_2)\langle a^\dagger_{f_1}a_{f_2}\rangle_0\langle\langle a_f a_{f'};A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+W(f_1,g;f',f_2)\langle a_f a_{f'}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_{f_1}a_{f_2};A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+U(g,f';f_1,f_2)(\delta_{f,f'}-\langle a^\dagger_f a_{f'}\rangle_0)\langle\langle a_{f_1}a_{f_2};A_\beta\rangle\rangle_E-U(g,f';f_1,f_2)\times$$

$$\times\langle a_{f_1}a_{f_2}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_f a_{f'};A_\beta\rangle_E\Big\}+$$

$$+I_{3,\beta}+\sum_{(f')}\Omega_0(f',f)\langle\langle a_{f'}a_g;A_\beta\rangle\rangle_E+\sum_{(f)}\Omega_0(f',g)\langle\langle a_f a_{f'};A_\beta\rangle\rangle_E,$$

$$E\langle\langle a^\dagger_f a^\dagger_g;A_\beta\rangle\rangle_E=$$

$$-\sum_{(f')}\Big\{\Omega_0(f,f')\langle\langle a^\dagger_{f'}a^\dagger_g;A_\beta\rangle\rangle_E+\Omega_0(g,f')\langle\langle a^\dagger_f a^\dagger_{f'};A_\beta\rangle\rangle_E\Big\}-$$

$$-\sum_{(f_1,f_2,f')}\Big\{W(f_1,f';f,f_2)\langle a^\dagger_{f_1}a_{f_2}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_{f'}a^\dagger_g;A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+W(f_1,f';f,f_2)\langle a^\dagger_{f'}a^\dagger_g\rangle_0\langle\langle a^\dagger_{f_1}a_{f_2};A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+U(f_1,f_2;f',f)[\delta_{g,f'}-\langle a^\dagger_g a_{f'}\rangle_0]\langle\langle a^\dagger-f_1a^\dagger_{f_2};A_\beta\rangle\rangle_E-$$

$$-U(f_1,f_2;f',f_2)\langle a^\dagger_{f_1}a^\dagger_{f_2}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_g a_{f'};A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+W(f_1,f';g,f_2)\langle a^\dagger_f a^\dagger_{f'}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_{f_1}a_{f_2};A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+W(f_1,f';g,f_2)\langle a^\dagger_{f_1}a_{f_2}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_f a^\dagger_{f'};A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+U(f_1,f_2;f',g)\langle a^\dagger_{f_1}a^\dagger_{f_2}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_f a_{f'};A_\beta\rangle\rangle_E+$$

$$+U(f_1,f_2;f',g)\langle a^\dagger_f a_{f'}\rangle_0\langle\langle a^\dagger_{f_1}a^\dagger_{f_2};A_\beta\rangle\rangle_E+I_{3,\beta}.$$

Здесь

$$I_{1,1}=-i\langle a^\dagger_{g_2}a_g\rangle_0\frac{\delta(f-g_1)}{2\pi}+i\langle a^\dagger_f a_{g_1}\rangle_0\frac{\delta(g-g_2)}{2\pi},$$

$$I_{3,1}=i\langle a_{g_1}a_g\rangle_0\frac{\delta(f-g_2)}{2\pi}+i\langle a^\dagger_f a_{g_1}\rangle_0\frac{\delta(g-g_2)}{2\pi},$$

$$I_{2,1}=i\langle a^\dagger_{g_2}a^\dagger_g\rangle_0\frac{\delta(f-g_1)}{2\pi}-i\langle a^\dagger_f a_{g_2}\rangle_0\frac{\delta(g-g_1)}{2\pi},$$

$$I_{1,2}=-i\langle a_{g_2}a_g\rangle\frac{\delta(f-g_1)}{2\pi},\qquad I_{2,3}=0,$$

$$I_{2,2}=-\frac{i}{2\pi}[\delta(g-g_2)-\langle a^\dagger_g a_{g_2}\rangle_0]\delta(f-g_1)-\frac{i}{2\pi}\langle a^\dagger_f a_{g_2}\rangle_0\delta(g-g_1),$$

$$I_{1,3} = \frac{i}{2\pi}\langle a_f^\dagger a_{g_1}^\dagger\rangle_0 \delta(g-g_2),$$

$$I_{2,3} = \frac{i}{2\pi}\langle a_{g_1}^\dagger a_g\rangle_0 \delta(f-g_2) + \frac{i}{2\pi}[\delta(f-g_1) - \langle a_{g_1}^\dagger a_f\rangle_0]\delta(g-g_2), \qquad I_{3,3} = 0.$$

Уравнения Хартри—Фока—Боголюбова без источников не позволяют корректно вычислить так называемые «нулевые» или «аномальные» средние:

$$\langle a_f^\dagger a_g\rangle_0, \qquad \langle a_f^\dagger a_g^\dagger\rangle_0, \qquad \langle a_f a_g\rangle_0.$$

Следовательно, необходимо переосмыслить саму процедуру вычисления таких средних. Например, можно воспользоваться аппроксимирующим гамильтонианом в форме (2.3), положив в нем $\eta = 0$:

$$H_{\text{app}}^0 = \sum_{(f,f')} K^{(0)}(f',f) a_f^\dagger a_{f'} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{(f,f')} K_-^{(0)}(f',f) a_f^\dagger a_{f'}^\dagger + \frac{1}{2}\sum_{(f,f')} K_+^{(0)}(f',f) a_f a_{f'} + \text{const},$$

где

$$K^{(0)}(f',f) = \Omega_0(f',f) + \sum_{(f,f_2)} W(f_1,f;f',f_2)\langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}\rangle_0,$$

$$K_+^{(0)}(f',f) = \sum_{(f,f_2)} U(f_1,f_2;f,f')\langle a_{f_1}^\dagger a_{f_2}^\dagger\rangle_0,$$

$$K_-^{(0)}(f',f) = \sum_{(f,f_2)} U(f,f';f_1,f_2)\langle a_{f_1} a_{f_2}\rangle_0.$$

В результате приближенные самосогласованные уравнения для вычисления аномальных средних будут иметь вид

$$\frac{\text{Sp}\,\left\{a_f^\dagger a_g \text{e}^{-\beta H_{\text{app}}^0}\right\}}{\text{Sp}\,\text{e}^{-\beta H_{\text{app}}^0}} = \langle a_f^\dagger a_g\rangle_0, \qquad \frac{\text{Sp}\,\left\{a_f^\dagger a_g^\dagger \text{e}^{-\beta H_{\text{app}}^0}\right\}}{\text{Sp}\,\text{e}^{-\beta H_{\text{app}}^0}} = \langle a_f^\dagger a_g^\dagger\rangle_0,$$

$$\frac{\text{Sp}\,\left\{a_f a_g \text{e}^{-\beta H_{\text{app}}^0}\right\}}{\text{Sp}\,\text{e}^{-\beta H_{\text{app}}^0}} = \langle a_f a_g\rangle_0.$$

Однако возможен также и альтернативный подход, основанный на технике функций Грина. Рассмотрим прежде всего случай $\eta \neq 0$ и выпишем динамические уравнения для следующих запаздывающих и опережающих функций Грина, построенных из ферми-операторов*:

$$G_1(f,t;f'\tau) = \langle\langle a_f^\dagger(t) a_{f'}(\tau)\rangle\rangle = \theta(t-\tau)\langle a_f^\dagger(t) a_{f'}(\tau) + a_{f'}(\tau) a_f^\dagger(t)\rangle,$$

$$G_2(f,t;f'\tau) = \langle\langle a_f(t) a_{f'}(\tau)\rangle\rangle = \theta(t-\tau)\langle a_f(t) a_{f'}(\tau) + a_{f'}(\tau) a_f(t)\rangle.$$

Мы получим следующую систему уравнений для этих функций Грина:

$$i\frac{\partial}{\partial t} G_{(1)} = -\left(\sum_{(g)} G_{(1)} K(f,g) + \sum_{(g)} G_{(2)} K_+(f,g)\right) + i\delta(t-\tau)\delta_{ff'},$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} G_{(2)} = -\sum_{(g)} G_{(2)} K(g,f) + \sum_{(g)} G_{(1)} K_-(g,f).$$

Здесь функция K зависит от t в общем случае и, таким образом, уместно обозначать ее как $K(g,f,t)$. Проанализируем теперь случай, когда источники равны нулю, т. е. $\eta = 0$. Тогда $G_{(\alpha)}$ зависит только от разности переменных $t-\tau$, что является следствием временной однородности:

$$G_{(\alpha)}(f,t;f',\tau) = G_{(\alpha)}(f,f',t-\tau).$$

Следовательно, удобно воспользоваться энергетическим E-представлением рассматриваемых функций Грина:

$$\langle\langle a_f^\dagger a_{f'}\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_{(1)}(f,f',t)\mathrm{e}^{iEt}dt,$$

$$\langle\langle a_f a_{f'}\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_{(2)}(f,f',t)\mathrm{e}^{iEt}dt$$

и соответствующим образом преобразовать динамические уравнения:

$$E\langle\langle a_f^\dagger a_{f'}\rangle\rangle_E + \sum_{(g)}\left\{K^{(0)}(f,g)\langle\langle a_g^\dagger a_{f'}\rangle\rangle_E + K_+^{(0)}(f,g)\langle\langle a_g a_{f'}\rangle\rangle_E\right\} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\delta(f-f'),$$

*Равным образом допустимо рассматривать причинные функции Грина:

$$G(f,t;f',\tau) = \langle T\{a_f^\dagger(t) a_{f'}(\tau)\}\rangle = \theta(t-\tau)\langle a_f^\dagger(t) a_{f'}(\tau)\rangle - \theta(\tau-t)\langle a_{f'}(\tau) a_f^\dagger(t)\rangle,$$

вместо опережающих и запаздывающих функций Грина.

$$E\langle\langle a_f a_{f'}\rangle\rangle_E + \sum_{(g)} \left\{ K^{(0)}(f,g)\langle\langle a_g a_{f'}\rangle\rangle_E + K_-^{(0)}(f,g)\langle\langle a_g^\dagger a_{f'}\rangle\rangle_E \right\} = 0.$$

Рассмотрим в качестве примера гамильтониан БКШ [6]. Мы воспользуемся спектральным E-представлением для корреляционных функций и функций Грина, состоящих из пар ферми-операторов a_f, $a_{f'}^\dagger$ и $a_g^\dagger$, в форме

$$\langle A(t)B(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{AB}(\omega)\mathrm{e}^{\frac{\omega}{\theta}}\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}d\omega,$$

$$\langle B(\tau)A(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{AB}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega(t-\tau)}d\omega, \qquad \langle AB\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{AB}(\omega)\mathrm{e}^{\frac{\omega}{\theta}}d\omega,$$

$$\langle\langle AB\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} J_{AB}(\omega)\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}+1}{E-\omega}d\omega.$$

Гамильтониан БКШ имеет вид

$$H = \sum_{(f)} T(p)\, a_f^\dagger a_f - \frac{1}{2V}\sum_{(f,f')} J(f)J(f')\, a_f^\dagger a_{-f}^\dagger a_{-f'} a_{f'},$$

где

$$f = (\vec{p},\sigma), \quad \sigma = \pm\frac{1}{2}, \quad \vec{p} = \left(\frac{2\pi n^{(1)}}{L}, \frac{2\pi n^{(2)}}{L}, \frac{2\pi n^{(3)}}{L}\right),$$

$$T(p) = \frac{p^2}{2m} - \lambda, \quad \lambda > 0,$$

$$J(f) = \varepsilon(\sigma_1 - \sigma_2)J(p), \qquad \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma > 0 \\ -1, & \sigma < 0 \end{cases}.$$

Предполагается, что $J(p)$ — симметричная функция, так что $J(-f) = -J(f)$.

Законы сохранения для импульса и проекции спина приводят к следующим правилам отбора для средних:

$$\langle a_f^\dagger a_{f'}\rangle = \delta(f-f')\langle a_f^\dagger a_f\rangle, \quad \langle a_f^\dagger a_{f'}^\dagger\rangle = \delta(f+f')\langle a_f^\dagger a_{-f}^\dagger\rangle,$$

$$\langle a_f a_{f'}\rangle = -\delta(f+f')\langle a_{-f} a_f\rangle$$

и аналогичным правилам отбора для функций Грина $\langle\langle a_f^\dagger a_{f'}\rangle\rangle_E$, $\langle\langle a_f^\dagger a_{f'}^\dagger\rangle\rangle$, $\langle\langle a_f a_{f'}\rangle\rangle_E$.

В случае модели БКШ мы, в частности, имеем

$$U(f_1,f_2;f_2',f_1') = -\frac{1}{V}J(f_1)J(f_1')\delta(f_1+f_2)\delta(f_1'+f_2'),$$

$$W(f_1,f_2;f_2',f_1') = -\frac{2}{V}J(f_1)J(f_1')\delta(f_1+f_2)\delta(f_1'+f_2')$$

и

$$K^{(0)}(f,f') = T(p)\delta(f-f') + \sum_{(f_1)} W(f_1,f;f',f_1)\langle a^\dagger_{f_1} a_{f_1}\rangle_0 =$$

$$= T(p)\delta(f-f') + \delta(f-f')\left(-\frac{2}{V}|J(f)|^2\langle a^\dagger_{-f} a_{-f}\rangle_0\right) = \delta(f-f')T(p).$$

$$K^{(0)}_+(f',f) = \delta(f+f')\left(\frac{1}{V}\sum_{(f_1)} J(f_1)\langle a^\dagger_{f_1} a^\dagger_{-f_1}\rangle_0\right) J(f) = -\delta(f+f')C^* J(f'),$$

$$K^{(0)}_-(f',f) = \sum_{(f_1)} U(f,f';-f_1,f_1)\langle a_{-f_1} a_{f_1}\rangle =$$

$$= \delta(f+f')\left(-\frac{1}{V}\sum_{(f_1)} J(f_1)\langle a_{-f_1} a_{f_1}\rangle\right) J(f) = -\delta(f+f')CJ(f).$$

Соответствующая система уравнений для модели БКШ имеет вид

$$\{E+T(p)\}\langle\langle a^\dagger_f a_f\rangle\rangle_E - C^* J(f)\langle\langle a_{-f} a_f\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi},$$

$$-CJ(f)\langle\langle a^\dagger_f a_f\rangle\rangle_E + \{E-T(p)\}\langle\langle a_{-f} a_f\rangle\rangle_E = 0,$$

откуда следует, что

$$\langle\langle a^\dagger_f a_f\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\frac{E-T(p)}{E^2-T^2(p)-|C|^2J^2},$$

$$\langle\langle a_{-f} a_f\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\frac{CJ(f)}{E^2-T^2(p)-|C|^2J^2}.$$

Положим

$$E(p) = \sqrt{T^2(p)+|C|^2|J|^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{E^2-E^2(p)} = \frac{1}{2E(p)}\left\{\frac{1}{E-E(p)} - \frac{1}{E+E(p)}\right\},$$

$$\langle\langle a^\dagger_f a_f\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\frac{E-T(p)}{2E(p)}\left\{\frac{1}{E-E(p)} - \frac{1}{E+E(p)}\right\},$$

$$\langle\langle a_{-f} a_f\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\frac{CJ(f)}{2E(p)}\left\{\frac{1}{E-E(p)} - \frac{1}{E+E(p)}\right\}.$$

После очевидных преобразований мы находим спектральные плотности в виде

$$J_{a_f^\dagger a_f}(\omega) = \frac{\omega - T(p)}{2E(p)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta\omega}} \left\{\delta(\omega - E(p)) - \delta(\omega + E(p))\right\},$$

$$J_{a_{-f} a_f}(\omega) = \frac{CJ(f)}{2E(p)(1+\mathrm{e}^{\beta\omega})} \left\{\delta(\omega - E(p)) - \delta(\omega + E(p))\right\}$$

и соответствующие выражения для средних:

$$\langle a_f^\dagger a_f\rangle_0 = \frac{E(p) - T(p)}{2E(p)} \frac{\mathrm{e}^{\beta E(p)}}{1+\mathrm{e}^{\beta E(p)}} + \frac{E(p) + T(p)}{2E(p)} \frac{\mathrm{e}^{-\beta E(p)}}{1+\mathrm{e}^{-\beta E(p)}},$$

$$\langle a_{-f} a_f\rangle = \frac{CJ(f)}{2E(p)} \left\{\frac{\mathrm{e}^{\beta E(p)}}{1+\mathrm{e}^{\beta E(p)}} - \frac{-\beta E(p)}{1+\mathrm{e}^{-\beta E(p)}}\right\} =$$

$$= \frac{CJ(f)}{2E(p)} \mathrm{th} \frac{\beta E(p)}{2}, \qquad \mathrm{th} x = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Во всех выражениях введено обозначение

$$C = \frac{1}{V} \sum_{(f)} J(f) \langle a_{-f} a_f\rangle.$$

Таким образом, мы пришли к известному уравнению для щели в модели БКШ:

$$C = C\frac{1}{V} \sum_{(f)} |J(f)|^2 \frac{1}{2E(p)} \mathrm{th} \frac{\beta E(p)}{2}.$$

Уравнение

$$1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|J(p)|^2}{E(p)} \mathrm{th} \frac{\beta E(p)}{2} d\vec{p}$$

имеет единственное решение, если $\beta > \beta_0$, где обратная критическая температура β_0 определяется из уравнения

$$1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|J(p)|^2}{T(p)} \mathrm{th} \frac{\beta T(p)}{2} d\vec{p}.$$

Уместно также подчеркнуть, что общие выражения для функций Грина (2.10) не только являются некоторыми формальными соотношениями, но позволяют вычислить поправочный член для уравнения щели, выведенного при анализе корреляционной функции вида $\langle\langle a_f a_{-f}; a_f^\dagger a_{-f}^\dagger\rangle\rangle_E$ в теории сверхпроводимости, основанной на модели БКШ (см. [11]).

Читателям, интересующимся применением различных вариантов метода Хартри—Фока—Боголюбова в задачах теории твердого тела и квантовой статистической механики предлагаем ознакомиться также с работами [13–16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н., Церковников Ю.А.** — Докл. АН СССР, 1957, т.117, с.788. [Sov. Phys. Doklady, 1957, v.2, p.535].
2. **Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н., Церковников Ю.А.** — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.120. [Sov. Phys. JETP, 1960, v.12, p.88].
3. **Боголюбов Н.Н.** — Препринт ОИЯИ, Матем. инст. им. В.А.Стеклова АН СССР, Р-511, Дубна, 1960.
   Боголюбов Н.Н. — Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1971, т.3 с.110.
4. **Bogolubov N.N., Jr.** — Physica, 1966, v.32, p.933.
   Bogolubov N.N., Jr. — Method for Studying Model Hamiltonians. Pergamon Press, Oxford, 1972.
   Боголюбов Н.Н. (мл.) — Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974.
5. **Боголюбов Н.Н. (мл.)** — Теор. мат. физ., 1970, т.4, с.412.
   Боголюбов Н.Н. (мл.) — Теор. мат. физ., 1970, т.5, с.136.
6. **Bardeen J., Cooper L.N., Schriffer J.R.** — Phys. Rev., 1957, v.108, p.1117.
7. **Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.** — Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
   Bogolubov N.N., Tolmachev V.V., Shirkov D.V. — A New Method in the Theory of Superconductivity. Consultants Bureau, N.Y., 1959.
8. **Боголюбов Н.Н. (мл.), Плечко В.Н., Репников Н.Ф.** — Теор. мат. физ., 1975, т.24, с.357. [Theor. Math. Phys., 1975, v.24, 242].
9. **Hertel P., Thirring W.** — Commun. Math. Phys., 1971, v.24, p.22.
10. **Боголюбов Н.Н. (мл.), Петрина Д.Я.** — Теор. мат. физ., 1977, т.33, с.231.
11. **Bogolubov N.N., Jr., Soldatov A.V.** — Int. J. Mod. Phys., 1996, v.B10, p.579.
12. **Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.)** — Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984, с.92.
    Bogolubov N.N., Bogolubov N.N., Jr. — An Introduction to Quantum Statistical Mechanics. Gordon and Breach Science Publ., 1994.
13. **Anderson P.W.** — Concepts in Solids. World Scientific, Singapore, 1997.
14. **Popov V.N.** — Functional Integrals and Collective Modes. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
15. **Боголюбов Н.Н. (мл.), Садовников Б.И.** — Некоторые вопросы статистической механики. М.: Высшая школа, 1975.
16. **Griffin A.** — Phys. Rev. B, 1996, v.53, p.9341.