ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2001. Т. 32. ВЫП. 5

УДК 539.12.01

СВОЙСТВА АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ АДРОНОВ В РАМКАХ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

*Ю.С.Вернов**

Институт ядерных исследований РАН, Москва

*М.Н. Мнацаканова***

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

ВВЕДЕНИЕ 1115
Краткий исторический экскурс 1115
План обзора 1120
АНАЛИТИЧНОСТЬ В S-ПЛОСКОСТИ И СТРОГИЕ СООТНОШЕНИЯ 1123
Дисперсионные соотношения и правила сумм 1123
Логарифмические дисперсионные соотношения 1128
Быстро и медленно сходящиеся интегральные соотношения 1131
Квазидисперсионные соотношения и практическая аналитичность 1132
СВЯЗЬ РЕАЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ СИММЕТРИЧНОЙ И АНТИСИММЕТРИЧНОЙ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ 1134
СВЯЗЬ МЕЖДУ ФАЗОЙ И МОДУЛЕМ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ 1140
Симметричная амплитуда 1140
Соотношения между дифференциальными сечениями частицы и античастицы на одной и той же мишени 1145
ЛОКАЛЬНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ 1148
Неосциллирующие или слабо осциллирующие амплитуды рассеяния 1148
Сильно осциллирующие амплитуды рассеяния 1154

*E-mail: vernov@ms2.inr.ac.ru
**E-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru

СТРОГИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СВЕРХУ НА ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ И НА АМПЛИТУДУ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ 1155
Асимптотические и конечноэнергетические верхние границы 1155
Абсолютные ограничения на полное сечение и мнимую часть амплитуды упругого $\pi^0 + \pi^0$-рассеяния при произвольных энергиях 1160
Абсолютные ограничения на парциальные амплитуды 1163
Абсолютные ограничения сверху на $|F + (\omega, t)|$ 1164
ПРИЛОЖЕНИЕ А 1170
Ограничения снизу и число нулей амплитуды рассеяния 1170
ПРИЛОЖЕНИЕ Б 1172
Уравнение для $\tilde{u}_\alpha$ при произвольном α 1172
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 1172

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 5

УДК 539.12.01

СВОЙСТВА АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ АДРОНОВ В РАМКАХ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

*Ю.С.Вернов**

Институт ядерных исследований РАН, Москва

*М.Н. Мнацаканова***

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Обзор посвящен следствиям аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии для процессов рассеяния элементарных частиц при высоких, но конечных энергиях. Классические теоремы, справедливые при асимптотических энергиях, получаются автоматически при соответствующем предельном переходе. Рассмотрены различные правила сумм и показана их эквивалентность интегральным соотношениям между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Единым образом изучена связь реальной и мнимой частей как симметричной, так и антисимметричной амплитуд рассеяния. Исследована зависимость между поведением модуля амплитуды рассеяния и ее фазой. Показано, что отсутствие сильных осцилляций у амплитуды рассеяния дает возможность аппроксимации дисперсионных соотношений их локальными аналогами. Проанализированы свойства осциллирующих амплитуд рассеяния. Рассмотрены верхние границы на полное сечение и амплитуду упругого рассеяния. Найдены абсолютные ограничения сверху для упругого $\pi^0\pi^0$-рассеяния, справедливые при произвольных физических энергиях.

Consequences of analyticity, unitarity and crossing symmetry for elementary particles scattering are considered at high, but finite energies. Classical results, which are valid at asymptotic energies, are reproduced by the corresponding passage to the limit. Different sum rules are considered, their equivalence to integral relations between real and imaginary parts of functions in question is shown. Connection between real and imaginary parts of symmetric as well as of antisymmetric amplitudes is considered uniformly. The dependence between the behavior of modulus and phase of scattering amplitude is investigated. It is shown, that approximation of dispersion relations by their local analogous is possible in case the scattering amplitude has no strong oscillations. Properties of oscillating amplitudes are analyzed. Upper bounds on total cross section and elastic scattering amplitude are considered. Absolute upper bounds for $\pi^0\pi^0$ elastic scattering, which are valid at arbitrary physical energies, are obtained.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий исторический экскурс. В 1956 г. Н.Н. Боголюбов доказал [1], что дисперсионные соотношения (ДС) для амплитуды упругого рассея-

* E-mail: vernov@ms2.inr.ac.ru
**E-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru

ния π-мезонов на нуклонах, полученные в работах [2–6], являются строгим следствием основных постулатов локальной теории поля. Аналитичность амплитуд рассеяния наряду с унитарностью и перекрестной симметрией дала возможность выявить ряд существенных свойств этих амплитуд, вытекающих непосредственно из аксиом квантовой теории поля. Это направление в квантовой теории поля естественно назвать аксиоматической теорией рассеяния.

Аналитические свойства амплитуд рассеяния были доказаны также в работах [7–10]. Подробное доказательство ДС содержится в монографии [11].

В дальнейшем ДС были получены для целого ряда процессов [12–24], в том числе и для процессов $2 \to n$. Аналитические свойства амплитуд для процессов $3 \to 3$ и $n \to m$ исследовались в работах [25–27]. Для амплитуд некоторых процессов, в частности для $p\,p$-рассеяния, аналитичность была доказана в более узкой области значений энергий, чем для $\pi\,p$-рассеяния [28, 29]. Такая аналитичность влечет за собой существование так называемых квазидисперсионных соотношений.

Оме [30] было доказано, что при достаточно общих предположениях аналитичность амплитуды рассеяния адронов сохраняет силу и в квантовой хромодинамике. Вместе с тем тот факт, что адроны не являются элементарными частицами, может означать существование определенных трудностей при описании их в терминах локальных операторов, необходимом для стандартного доказательства аналитичности. Поэтому очень важно иметь экспериментально проверяемые следствия локальности при высоких, но конечных энергиях.

Амплитуды рассеяния аналитичны не только в s-, но и в t-плоскости, s, t, u — обычные инвариантные переменные. Аналитичность по t в некоторой области была доказана Леманом [10] — эллипс Лемана. Затем Мартен установил, что аналитичность в s-плоскости позволяет (при $s \to \infty$) расширить эту область [31]. Окончательно область аналитичности в t-плоскости была найдена в работах [32, 33] и получила название эллипса Мартена.

Тот факт, что амплитуды рассеяния обладают свойством аналитичности, означает, что они принадлежат к достаточно узкому классу функций. Это обстоятельство приводит к существованию ряда нетривиальных ограничений на возможное поведение амплитуд рассеяния. Подчеркнем, что, помимо аналитичности, при выводе таких ограничений существенно используются свойства перекрестной симметрии и унитарности.

В 1958 г. Померанчук доказал [34], что при достаточно общих предположениях полные сечения рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени асимптотически совпадают. Этот результат породил цепь работ, в которых была исследована связь амплитуд упругого рассеяния частицы и античастицы при высоких энергиях ([35–47] и др.; в [48] соответствующие результаты были обобщены на некоторые неупругие процессы). Заметим, что учет условия унитарности приводит к принципиально новым соотношениям такого рода [40, 42, 59]. В частности, Волковым, Логуновым и Мествиришвили [42], было доказано, что из неограниченного возрастания (падения) одного из связанных условием кроссинг-симметрии сечений следует неограниченное возрастание (падение) другого.

Очень существенный шаг в понимании связи процессов рассеяния частиц и античастиц был сделан в работах Логунова, Нгуен Ван Хьеу, Тодорова и Хрусталева [49], Меймана [50], ван Хова [51]. В них было доказано равенство дифференциальных сечений частицы и античастицы при некоторых естественных предположениях. Для рассеяния вперед это равенство справедливо без каких-либо дополнительных предположений [52, 53].

В 1965 г. в работах Хури и Киношиты [54] было выяснено, что поведение самой амплитуды и поведение отношения ее вещественной части к мнимой тесно связаны между собой. Эти результаты были усилены в работах Вита [55], Вернова [56], Джина и МакДауэлла [57], Логунова, Мествиришвили, Хрусталева [58] и ряда других авторов [46, 47, 59]. Наиболее естественный путь изучения этой связи — исследование логарифмических дисперсионных соотношений (ЛДС) или соотношений, основанных на использовании свойства аналитичности логарифма амплитуды рассеяния [60, 47]. Подчеркнем, что аналитичность логарифма амплитуды рассеяния имеет более ограниченный характер, нежели аналитичность самой амплитуды. Фактически она имеет место лишь в случае, когда число нулей амплитуды рассеяния конечно, ибо в этом случае можно выделить множители, связанные с нулями, и построить функции с тем же свойством аналитичности, что и сама амплитуда рассеяния. (Строго говоря, при определенных условиях такая процедура может быть проведена и при бесконечном числе нулей у амплитуды рассеяния.) В работах Джина и Мартена [61] было установлено, что амплитуда упругого рассеяния вперед может иметь не более двух нулей. Это обстоятельство позволяет исследовать зависимость между поведением фазы указанной амплитуды и дифференциальным сечением вперед. ЛДС были получены в работах Джина и МакДауэлла [57], Одорико [62], МакКлюре и Джорна [63].

В 1961 г. Фруассар [64], исходя из представления Мандельстама, получил известное ограничение на максимально возможный рост полных сечений в асимптотике (неравенство Фруассара). Мартен показал [65], что в действительности для справедливости границы Фруассара достаточно аналитичности по t амплитуды упругого рассеяния в существенно более узкой области, чем та, что используется при написании представления Мандельстама. После доказательства Мартеном существования такой аналитичности [31] стало ясно, что неравенство Фруассара, часто называемое неравенством Фруассара–Мартена, является строгим следствием квантовой теории поля.

Помимо строгого ограничения сверху на полное сечение были получены также верхние границы на дифференциальное сечение как для рассеяния вперед, так и на произвольный угол. Оптимальные ограничения такого рода были получены Сингхом и Роем [66]. Ссылки на более ранние результаты можно найти там же. Отметим, что учет факторов, которые лишь в исключительных случаях равны единице, таких, например, как $\sigma_{\rm el}/\sigma_{\rm tot}$, позволяет получить более точные границы для полного сечения (см. [66]).

Для вывода точных ограничений сверху была использована оптимизационная процедура, см. работу Эйнхорна и Бланкенбеклера [67].

В 1964 г. Мартен получил [68] абсолютные (численные) неравенства для амплитуды упругого $\pi^0\pi^0$-рассеяния в нефизической по s и t области ($|s| < 4m_\pi^2$, $|t| < 4m_\pi^2$, где m_π — масса π-мезона). Этот результат был затем усилен в ряде работ [69–74]. В [75] было доказано, что такие ограничения влекут за собой «почти локальное» ограничение на полное сечение $\pi^0\pi^0$-рассеяния при произвольных физических энергиях (абсолютное неравенство Фруассара–Мартена).

В 1970 г. Индурайн получил для полного сечения πN-рассеяния численные ограничения сверху, используя, помимо общих теоретических представлений, экспериментальные данные при сверхнизких энергиях, а именно данные о второй парциальной волне в t-канале [76]. Результат Индурайна был усилен и обобщен в работах [77, 78]. Конечноэнергетические верхние границы были получены также в работах [79, 80]. В [81] аналогичный результат был получен в аналитическом виде, который воспроизвел неравенство Фруассара–Мартена, но без неопределенных констант.

Помимо дисперсионных соотношений из аналитичности следует ряд точных равенств между различными интегралами от амплитуды рассеяния. Первым и важным примером таких соотношений являются конечноэнергетические правила сумм, выведенные Логуновым, Соловьевым и Тавхелидзе [82]. Весьма полезными оказались также борелевские правила сумм, полученные Вайнштейном, Захаровым и Шифманом [83]. Конечноэнергетические и борелевские правила сумм нашли широкое применение в квантовой хромодинамике [83–91], см. также обзор [92]. Правила сумм, содержащие весовые функции, убывающие быстрее экспоненты, были получены в [90, 93]. Свойства этих правил сумм были изучены в работе [94]. Особенности борелевских правил сумм рассматривались в [95, 96].

Другим интересным следствием аналитичности являются интегральные соотношения между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Различные соотношения такого рода были получены Мнацакановой [97], Верновым [60], Трюонгом и Ламом, Грюнбергом и Трюонгом [59]. Различные интегралы от амплитуды рассеяния рассматривались в [98, 47, 99] и др.

В работе Бронсдана [100] были найдены локальные аналоги ДС. Эти аналоги содержат, однако, бесконечный ряд по производным от амплитуды рассеяния и не являются строгими следствиями аксиом квантовой теории поля [101, 102]. Свойства этих соотношений подробно исследованы в [103]. Недавно такого рода соотношения рассматривались в работе [104]. Как доказали Фишер и Коларж [105], при асимптотических энергиях, при некоторых дополнительных предположениях справедливо локальное соотношение, содержащее только первую производную (оно эквивалентно соотношению Бронсдана, если в последнем отбросить высшие члены разложения). В работе [106] было доказано, что это соотношение следует из ДС (при асимптотических энергиях), если амплитуда рассеяния не имеет сильных осцилляций.

Очень важным шагом в исследовании адронных амплитуд на основе аксиоматической теории рассеяния явилось распространение ее методов на инклюзивные процессы, проведенное в цикле работ Логунова, Мествиришвили, Петрова и их учеников. Обзор результатов этого направления дан в [107].

В рамках аксиоматической теории рассеяния были найдены также ограничения снизу на амплитуду упругого рассеяния [61, 108], ограничение на ширину дифракционного пика (см. обзор [109]) и ряд других следствий общих принципов теории. Изложение ряда результатов этого подхода можно найти в обзорах [58, 107, 110, 111].

Отметим одно принципиальное обстоятельство.

Свойства амплитуды упругого рассеяния $F\,(s,t)$, используемые при выводе строгих ограничений, справедливы при всех физических энергиях, и поэтому не может быть физического критерия для энергии, начиная с которой должны выполняться асимптотические ограничения*. Если применяемые при их выводе методы основаны на свойствах функций при $s \to \infty$, то распространение этих ограничений на современные физические энергии является только актом веры, поскольку, строго говоря, практически любое поведение $F\,(s,t)$ при конечных энергиях совместимо с требуемыми асимптотическими свойствами. Более того, совершенно неясно, как можно расшифровать при конечных энергиях, например, такой результат, как $\Delta\,\sigma_{\rm tot}\,(s) \to 0,\ s \to \infty$, $\Delta\,\sigma_{\rm tot}\,(s)$ — разность полных сечений частицы и античастицы на одной и той же мишени. Можно, разумеется, увидеть в наблюдающемся убывании $\Delta\,\sigma_{\rm tot}\,(s)$ проявление асимптотической теоремы, но из теории этот вывод никак не следует. В обзоре будет показано, что на самом деле аналитические свойства симметричной и антисимметричной амплитуд рассеяния (полусуммы и полуразности амплитуд рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени) $F_{s,a}\,(s,t)$ приводят к корреляциям поведения реальной и мнимой частей этих функций при всех энергиях. Эти корреляции, однако, не носят локального характера, а являются корреляциями между поведением интегралов от реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния. Можно так выбрать интегральные соотношения между $\mathrm{Im}\,F\,(s,t)$ и $\mathrm{Re}\,F\,(s,t)$, чтобы существенную роль в каждом из них играл некоторый, в общем случае достаточно большой промежуток (s_1,s_2). В том случае, когда осцилляции $\mathrm{Im}\,F\,(s,t)$

*Поскольку в обзоре речь, в основном, будет идти об амплитуде упругого рассеяния, то слово «упругое», как правило, будет опускаться.

и $\mathrm{Re}\, F\,(s,t)$ малы (точное условие малости осцилляций сформулировано в разд. 5), интегральные соотношения дают «почти локальную» связь между поведением $\mathrm{Im}\, F\,(s,t)$ и $\mathrm{Re}\, F\,(s,t)$.

В настоящем обзоре мы исходим из следующей постановки вопроса. Допустим, что, начиная с некоторой энергии $s = \tilde{s}$, поведение $\mathrm{Im}\, F\,(s,t)$ или $\mathrm{Re}\, F\,(s,t)$ ограничено каким-либо условием. Это условие порождает ограничения на поведение $\mathrm{Re}\, F\,(s,t)$ или $\mathrm{Im}\, F\,(s,t)$ соответственно. При этом важно отметить, что поведение амплитуды рассеяния при энергиях, существенно бо́льших, чем рассматриваемые, может быть произвольным, разумеется, в рамках общих аксиоматических ограничений, а именно неравенства Фруассара–Мартена и его конечноэнергетических аналогов.

Развитый в данной работе метод позволяет получить взаимозависимость между поведением реальной и мнимой частей $F_{s,a}\,(s,t)$ при конечных энергиях. При этом асимптотические соотношения получаются автоматически при $s \to \infty$.

Подчеркнем, что можно построить сильно осциллирующие функции, удовлетворяющие необходимым условиям аналитичности, кроссинг-симметрии и полиномиального роста. Для этих функций обычное соответствие между высокоэнергетическим поведением $\mathrm{Im}\, F\,(s,t)$ и $\mathrm{Re}\, F\,(s,t)$ выполняется только «в среднем».

1.2. План обзора. Обзор посвящен результатам аксиоматической теории рассеяния при высоких, но конечных энергиях. В рамках используемого метода классические асимптотические ограничения получаются автоматически путем предельного перехода.

Единым образом будут описаны различные правила сумм, а также симметричная и антисимметричная амплитуды рассеяния.

В разд. 2 рассмотрены различные точные соотношения, вытекающие из аналитичности амплитуды рассеяния в s-плоскости. Дан вывод правил сумм произвольного вида (конечноэнергетические, борелевские или быстро сходящиеся), показано, что любое правило сумм эквивалентно некоторому интегральному соотношению между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. В этом же разделе выведены интегральные соотношения, которые используются далее в обзоре для вывода различных ограничений. Вследствие аналитичности есть возможность делать предсказания о поведении амплитуды рассеяния при энергиях, которые в настоящее время недоступны для эксперимента. Удобным инструментом для такого рода предсказаний являются интегральные соотношения. В обзоре рассмотрены два класса таких соотношений — быстро и медленно сходящиеся. Затем результаты этого раздела обобщаются на процессы, для которых справедливы только квазидисперсионные соотношения. Следуя работе Вернова и Чубарова [112], мы воспользуемся тем, что для таких процессов всегда существует функция, аналитическая в той же области, что и функция, удовлетворяющая ДС, и сколь угодно точно аппроксимирующая амплитуду рассеяния в физической области.

В разд. 3 единым образом будет рассмотрена связь между реальной и мнимой частями как симметричной, так и антисимметричной амплитуды. В этом разделе будут воспроизведены как классические асимптотические результаты, например теорема Померанчука, так и их обобщение на конечные энергии. Смысл полученных результатов в том, что если, начиная с некоторой энергии, реальная (мнимая) часть амплитуды рассеяния удовлетворяет тем или иным неравенствам сверху или снизу, то и мнимая (реальная) часть подчиняется соответствующим ограничениям. При этом существенно, что соответствие между поведением реальной и мнимой частей амплитуды справедливо на определенном интервале энергий и практически не зависит от поведения амплитуды рассеяния при энергиях, существенно бóльших, чем рассматриваемые. Это означает независимость полученных результатов от асимптотического поведения амплитуды рассеяния. Подчеркнем, что полученные ограничения являются оптимальными, т.е. существуют кроссинг-симметричные и кроссинг-антисимметричные аналитические функции, для которых эти неравенства переходят в равенства.

Отметим, что проведенное рассмотрение раскрывает точный смысл различных вариантов теоремы Померанчука. Теорема Померанчука и ее обобщения являются теоремами о зависимости между поведением мнимой и реальной частей антисимметричной амплитуды.

Далее приводятся аналогичные результаты для симметричной амплитуды, которые демонстрируют тот факт, что два типа результатов — теоремы типа теорем Померанчука и теоремы о связи реальной и мнимой части симметричной амплитуды, по сути дела, отражают одну и ту же взаимосвязь между поведением реальной и мнимой части амплитуды рассеяния, только в антисимметричном случае реальная и мнимая часть меняются ролями. Это связано с тем, что произвольная кроссинг-симметричная функция может быть построена из кроссинг-антисимметричной, причем при больших s $F_s(s,t) \cong i\,F_a(s,t)$ (см. разд. 3).

Возможность использования ДС для логарифма симметричной амплитуды приводит к соотношениям, связывающим интегралы от модуля амплитуды рассеяния и от ее фазы. Характерная особенность этих соотношений — их слабая зависимость от поведения амплитуды рассеяния при энергиях более высоких, чем рассматриваемые. Затем выводятся интегральные соотношения для $\ln \dfrac{F_+(s,t)}{F_-(s,t)}$, из которых, в частности, следует теорема Померанчука для дифференциальных сечений вперед. При этом для наиболее вероятного поведения амплитуд рассеяния вперед при высоких энергиях удается доказать, что «почти всегда» отношение полных сечений частицы и античастицы стремится к единице. Исключительным является случай, когда рассматриваемые амплитуды становятся чисто вещественными при высоких энергиях. В последнем случае отношение реальных частей амплитуд упругого рассеяния частицы и античастицы вперед стремится к -1.

Из интегральных соотношений следует существование ограничений на поведение амплитуды рассеяния «в среднем».

В разд. 4 рассматриваются амплитуды, возможные осцилляции которых ограничены дополнительным условием. Такое условие не вытекает из общих принципов теории, поскольку можно построить осциллирующие функции, удовлетворяющие необходимым требованиям. Тем не менее при высоких энергиях, точнее, при энергиях, существенно превышающих значения масс резонансов, в эксперименте наблюдается плавное поведение амплитуд рассеяния. Такое поведение позволяет построить функции, медленно меняющиеся с энергией. Оказывается, что для таких функций ДС могут быть аппроксимированы их локальными аналогами, причем при асимптотических энергиях погрешность такой аппроксимации становится произвольно малой.

В разд. 5 построен пример осциллирующей амплитуды рассеяния и показано, что в этом случае связь реальной и мнимой частей амплитуды носит качественно иной характер.

Раздел 6 посвящен ограничениям сверху на амплитуду рассеяния. Сначала выводится оптимальное ограничение сверху на $A\,(s,t) \equiv \operatorname{Im} F\,(s,t)$, вытекающее из ограничения на $A\,(s,t_0)$, $0 < t_0 \leq 4\,m_\pi^2$, $t < t_0$. При асимптотических энергиях и $t = 0$ эти ограничения аналогичны оптимальному ограничению Фруассара–Мартена [66, 69]. Затем выводятся, следуя работам Вернова и Мнацакановой [75, 81], аналогичные ограничения при произвольных физических энергиях. При этом в случае $\pi^0\,\pi^0$-рассеяния получаемые ограничения имеют смысл абсолютной верхней границы для полного сечения. В случае $\pi\,N$-рассеяния такие ограничения зависят от порогового поведения амплитуды рассеяния, точнее, от величины D-волны в t-канале. Далее с помощью ЛДС выводятся аналогичные ограничения на модуль и мнимую часть амплитуды рассеяния при физических s и $t > 0$ (t — внутри эллипса Мартена). Характерной чертой этих ограничений является их практическая независимость от поведения амплитуды рассеяния при энергиях бóльших, чем рассматриваемые.

В случае $\pi^0\,\pi^0$-рассеяния выводятся также абсолютные ограничения на парциальные волны (при физических энергиях) и, соответственно, на эффективный радиус взаимодействия адронов, т.е. на величину, определяемую соотношением $\sigma_{\rm tot}\,(s) = \pi\,R^2$. Важной чертой получаемых ограничений является их слабая (при сверхвысоких энергиях — сверхслабая) зависимость от исходных параметров, т.е. от абсолютных ограничений при нефизических s и t ($\pi^0\,\pi^0$-рассеяние) или величины D-волны ($\pi\,N$-рассеяние).

В приложении А приведен вывод нижних границ для $|F_\pm\,(s,t)|$ и вытекающих из них ограничений на число нулей этих функций.

2. АНАЛИТИЧНОСТЬ В S-ПЛОСКОСТИ И СТРОГИЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Дисперсионные соотношения и правила сумм. Рассмотрим $F(s,t)$ — амплитуду упругого рассеяния частиц с массами m и M. Прежде всего, чтобы не усложнять вычислений, не будем учитывать полюсные члены или, как говорят, рассмотрим амплитуду рассеяния с вычтенными полюсными членами. Подчеркнем, что учет этих членов существен только при низких энергиях, а нас будет интересовать поведение $F(s,t)$ при высоких. Как известно, для ряда процессов, например, для πN-рассеяния, доказана аналитичность $F(s,t)$ по s, если $-t_1 < t < 4\,m_\pi^2$ (для πN-рассеяния $t_1 \cong (32\,m_\pi^2)/3$), а именно: $F(s,t)$ аналитична всюду, за исключением правого $((m+M)^2, \infty)$ и левого $(-\infty, (M-m)^2 - t)$ разрезов. Удобно, следуя Мартену, перейти от переменной s к $\omega \equiv s - m^2 - M^2 + t/2$. Функция $F(\omega, t)$ имеет симметричные разрезы $(-\infty, -\omega_0)$, (ω_0, ∞); $\omega_0 = 2\,m\,M + t/2$.

Сначала рассмотрим случай, когда m — нейтральная частица, например, π^0-мезон. Хорошо известно, что

$$F(\omega^*, t) = F^*(\omega, t), \tag{2.1}$$

$$F(-\omega, t) = F(\omega, t). \tag{2.2}$$

Если частица с массой m не нейтральна, например π^+-мезон, то соотношение (2.2) переходит в

$$F_+(-\omega, t) = F_-(\omega, t), \tag{2.3}$$

где $F_\pm(\omega, t)$ — амплитуды рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени. Очевидно, что $F_s(\omega, t)$ имеет то же свойство перекрестной симметрии, что и $F(\omega, t)$. Ниже мы, как правило, опускаем значок s у $F_s(\omega, t)$.

Согласно результату Джина и Мартена [61], при любом $t \in (-\,t_1, 4\,m_\pi^2)$

$$\frac{F_\pm(\omega, t)}{\omega^2} \to 0, \qquad |\omega| \to \infty. \tag{2.4}$$

В некоторых случаях, прежде всего при $t < 0$, возможно выполнение более сильного неравенства:

$$\frac{F_\pm(\omega, t)}{\omega} \to 0, \qquad |\omega| \to \infty. \tag{2.4$'$}$$

По теореме Фрагмена–Линделефа (см., например, [37]), условия (2.4) и (2.4$'$) эквивалентны аналогичным условиям при $\omega \to \infty$, если только $|F_\pm(\omega, t)| < \exp(\varepsilon\,|\omega|)$, $|\omega| \to \infty$.

Подчеркнем одно обстоятельство. Хотя мы все время говорим об амплитуде упругого рассеяния, однако на самом деле в этом параграфе мы используем только аналитичность и условия (2.1)–(2.4). Кроме того, (2.4) легко может быть заменено более общим условием. Поэтому проводимое рассмотрение применимо к любой функции, удовлетворяющей условиям аналитичности и перекрестной симметрии.

Из условий (2.1), (2.2) и (2.4) следует справедливость ДС с двумя вычитаниями:

$$F(\omega,t)=F(0,t)+\frac{2\,\omega^2}{\pi}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{A(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2-\omega^2)},\qquad \mathrm{Im}\,\omega\neq 0, \tag{2.5}$$

где $A(\omega,t)\equiv \mathrm{Im}\,F(\omega,t)$.

Заметим, что можно построить функцию $F(\omega,t)$, обладающую требуемыми свойствами аналитичности и перекрестной симметрии и чисто мнимую в физической области, такой функцией будет $F(\omega,t)=C(t)\sqrt{{\omega_0}^2-\omega^2}$, $C(t)\in\mathbb{R}$. Это обстоятельство означает, что реально связаны между собой $\mathrm{Im}\,F(\omega,t)$ и $\mathrm{Re}\,F(\omega,t)-F(0,t)$. Учитывая это, а также ради упрощения формул, ниже мы под $F(\omega,t)$ будем, как правило, понимать $F(\omega,t)-F(0,t)$. $F(\omega,t)$ может быть выражена через интеграл не только от $A(\omega,t)$, но и от $R(\omega,t)\equiv\mathrm{Re}\,F(\omega,t)$. Для этого достаточно написать ДС для функции $\dfrac{F(\omega,t)}{\omega\sqrt{{\omega_0}^2-\omega^2}}$.

В результате приходим к так называемым «обратным» ДС (ОДС):

$$F(\omega,t)=\frac{2\,\omega^2\sqrt{\omega^2-{\omega_0}^2}}{i\,\pi}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{R(\omega',t)\,d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2-{\omega_0}^2}\,\omega'\,(\omega'^2-\omega^2)},\qquad \mathrm{Im}\,\omega\neq 0. \tag{2.6}$$

Обычно под ДС и ОДС понимают пределы соотношений (2.5) и (2.6) при $\mathrm{Im}\,\omega\to 0$. В этом пределе они связывают $R(\omega,t)$ и $A(\omega,t)$ с интегралами в смысле главного значения от $A(\omega,t)$ и $R(\omega,t)$ соответственно.

Из ДС следуют различные правила сумм и интегральные соотношения между $A(\omega,t)$ и $R(\omega,t)$.

Для вывода правил сумм нам удобно перейти к переменной $z=\omega^2$. В этом случае соотношения (2.5) и (2.6) принимают вид

$$F(z,t)=\frac{z}{\pi}\int\limits_{z_0}^{\infty}\frac{A(z',t)\,d\,z'}{z'\,(z'-z)},\quad z_0=\omega_0^2,\quad \mathrm{Im}\,z\neq 0; \tag{2.7}$$

$$F(z,t)=\frac{z\sqrt{z-z_0}}{i\,\pi}\int\limits_{z_0}^{\infty}\frac{R(z',t)\,d\,z'}{\sqrt{z'-z_0}\,z'\,(z'-z)},\qquad \mathrm{Im}\,z\neq 0. \tag{2.8}$$

Очевидно, что у $F(z,t)$ есть только правый разрез и $F(z^*,t) = F^*(z,t)$.

Правило сумм общего вида, в частных случаях сводящееся к конечноэнергетическим или борелевским правилам сумм, может быть получено следующим образом.

Пусть $\rho(z,t)$ — некоторая целая функция, которую удобно выбрать так, что $\operatorname{Im}\rho(z,t) = 0$, если $\operatorname{Im} z = 0$. Рассматривая $\int_C F(z',t)\,\rho(z',t)\,d\,z'$, где контур C состоит из отрезка $(-R,R)$ и полуокружности в верхней полуплоскости радиуса R, и используя теорему Коши, получим

$$\int\limits_{z_0}^{R} \rho(z',t)\operatorname{Im} F(z',t)\,d\,z' = -\operatorname{Im}\int\limits_{\frown R} F(z',t)\,\rho(z',t)\,d\,z'. \tag{2.9}$$

Выбор $\rho(z,t) = z^n$ приводит к конечноэнергетическим правилам сумм, выбор $\rho(z,t) = \exp\left(-\frac{z}{\tilde{z}}\right)$ ($\tilde{z}$ — некоторый параметр) — к борелевским, точнее, к их конечноэнергетическому аналогу. Борелевские правила сумм соответствуют случаю $R \to \infty$. Если $\rho(z,t) = \exp\left(-\frac{z}{\tilde{z}}\right)^n$, $n > 1$, то мы приходим к быстро сходящемуся правилу сумм. Отметим, что переход к $R \to \infty$ возможен всегда, когда сходится интеграл в левой части соотношения (2.9), поскольку такая сходимость обеспечивает и сходимость интеграла по полуокружности.

Покажем теперь, что любое правило сумм эквивалентно некоторому равенству между интегралами от $A(z,t)$ и $R(z,t)$.

Для этого заметим, что если $\operatorname{Im} z = 0$, то, согласно (2.6) и (2.7),

$$R(z,t) = \frac{z}{\pi}\,P\int\limits_{z_0}^{\infty} \frac{A(z',t)\,d\,z'}{z'(z'-z)}; \tag{2.10}$$

$$A(z,t) = -\frac{z\sqrt{z-z_0}}{\pi}\,P\int\limits_{z_0}^{\infty} \frac{R(z',t)\,d\,z'}{z'\sqrt{z'-z_0}\,(z'-z)}. \tag{2.11}$$

Согласно (2.10)

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} \rho(z',t)\,R(z',t)\,d\,z' = \frac{1}{\pi}\int\limits_{z_1}^{z_2} z''\,\rho(z'',t)\,d\,z''\int\limits_{z_0}^{\infty}\frac{A(z',t)\,d\,z'}{z'(z'-z'')} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{z_0}^{\infty}\frac{A(z',t)\,d\,z'}{z'}\,\chi(z',z_1,z_2), \tag{2.12}$$

где

$$\chi\,(z',z_1,z_2)=\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{\rho\,(z'',t)\,z''\,d\,z''}{z'-z''}.$$

Аналогично, согласно (2.11),

$$\int\limits_{z_1}^{z_2}\rho\,(z',t)\,A\,(z',t)\,d\,z'=\int\limits_{z_0}^{\infty}\frac{R\,(z',t)\,d\,z'}{z'\sqrt{z'-z_0}}\,\chi_1\,(z',z_1,z_2), \qquad (2.13)$$

где

$$\chi_1\,(z',z_1,z_2)=\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{\rho\,(z'',t)\,z''\,\sqrt{z''-z_0}\,d\,z''}{z''-z'}.$$

Положив в (2.13) $z_1=z_0$, $z_2=R$, придем к равенству, совпадающему с правилом сумм (2.9).

Интересное интегральное соотношение между $A\,(\omega,t)$ и $R\,(\omega,t)$ получается, если приравнять (2.5) и (2.6) в точке $i\,\omega$, $\omega>0$:

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{A\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'\,({\omega'}^2+\omega^2)}=\sqrt{{\omega'}^2+\omega^2}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{R\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\sqrt{{\omega'}^2-{\omega_0}^2}\,\omega'\,({\omega'}^2+\omega^2)}. \qquad (2.14)$$

Последнее равенство оказывается чрезвычайно удобным для исследования связи между $A\,(\omega,t)$ и $R\,(\omega,t)$, которое мы проведем в следующем разделе.

Аналогичные соотношения могут быть получены и для антисимметричной амплитуды $F_a\,(\omega,t)=\dfrac{1}{2}\,(F_+\,(\omega,t)-F_-\,(\omega,t))$. Согласно (2.1), (2.3) и (2.4)

$$F_a\,(\omega,t)-\omega\,F_a^{'}\,(0,t)=\frac{2\,\omega^3}{\pi}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{A_a\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^2\,({\omega'}^2-\omega^2)};\qquad A_a\,(\omega,t)\equiv\operatorname{Im}F_a\,(\omega,t). \qquad (2.15)$$

Отметим, что условие действительности (2.1) справедливо и для каждой амплитуды $F_\pm\,(\omega,t)$.

Если $\dfrac{F_a\,(\omega,t)}{\omega}\to 0$ при $\omega\to\infty$, то равенство (2.15) заменяется на

$$F_a\,(\omega,t)=\frac{2\,\omega}{\pi}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{A_a\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^2-\omega^2}. \qquad (2.16)$$

Выражая $F_a\,(\omega,t)$ через интеграл от $R_a\,(\omega,t)$ ($R_a\,(\omega,t) \equiv \operatorname{Re} F_a\,(\omega,t)$), получим

$$F_a\,(\omega,t) = \frac{2\,\omega\,\sqrt{\omega^2-{\omega_0}^2}}{i\,\pi} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{R_a\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\sqrt{{\omega'}^2-{\omega_0}^2}\,({\omega'}^2-\omega^2)}. \tag{2.17}$$

Подчеркнем, что с помощью ДС $F\,(0,t)$ и $F_a^{'}\,(0,t)$ выражаются через значения в физических точках амплитуд $F\,(\omega,t)$ и $F_a\,(\omega,t)$ соответственно и быстро сходящиеся интегралы.

Приравнивая выражения (2.15) и (2.17) в чисто мнимой точке и подразумевая под $F_a\,(\omega,t)$ функцию $F_a\,(\omega,t) - \omega\,F_a^{'}\,(0,t)$, получим

$$-\,\omega^2 \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{A_a\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^2\,({\omega'}^2+\omega^2)} = \sqrt{\omega^2+{\omega_0}^2} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{R_a\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\sqrt{{\omega'}^2-{\omega_0}^2}\,({\omega'}^2+\omega^2)}. \tag{2.18}$$

Заметим, что если $\omega \gg \omega_0$ (это условие выполнено уже при $\omega \approx 10$ ГэВ^2), то соотношения (2.14) и (2.18) могут быть записаны единым образом:

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^2+\omega^2} = \omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_2\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'\,({\omega'}^2+\omega^2)}, \tag{2.19}$$

где в случае симметричной амплитуды

$$\varphi_1\,(\omega,t) = \frac{A\,(\omega,t)}{\omega}, \qquad \varphi_2\,(\omega,t) = \frac{R\,(\omega,t)}{\sqrt{\omega^2-{\omega_0}^2}}, \tag{2.20}$$

а в случае антисимметричной

$$\varphi_1\,(\omega,t) = \frac{R_a\,(\omega,t)}{\sqrt{\omega^2-{\omega_0}^2}}, \qquad \varphi_2\,(\omega,t) = -\,\frac{A_a\,(\omega,t)}{\omega}. \tag{2.21}$$

Соотношение (2.19) дает возможность единым образом изучать связь между реальной и мнимой частями как симметричной, так и антисимметричной амплитуды (что и будет сделано ниже).

Напишем теперь аналогичные соотношения в случае, когда $F_{s,a}\,(\omega,t)$ удовлетворяет ДС с одним вычитанием, т.е. когда $\dfrac{F_{s,a}\,(\omega,t)}{\omega} \to 0$ при $\omega \to \infty$. В этом случае соотношение (2.6) заменяется на

$$F\,(\omega,t) = \frac{2\,\sqrt{\omega^2-{\omega_0}^2}}{i\,\pi} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{R\,(\omega',t)\,\omega'\,d\,\omega'}{\sqrt{{\omega'}^2-{\omega_0}^2}\,({\omega'}^2-\omega^2)}, \qquad \operatorname{Im}\omega \neq 0. \tag{2.6$'$}$$

Сравнивая соотношения (2.6′) и (2.5) или (2.16) и (2.17) при $\omega \gg \omega_0$, придем к равенству

$$-\omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1\,(\omega', t)\, d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_2\,(\omega', t)\, \omega'\, d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2}, \tag{2.19′}$$

где $\varphi_1\,(\omega, t)$ и $\varphi_2\,(\omega, t)$ по-прежнему определяются формулами (2.20) и (2.21).

2.2. Логарифмические дисперсионные соотношения. Перейдем теперь к аналитическим свойствам $\ln\, F\,(\omega, t)$. Очевидно, что для того чтобы $\ln\, F\,(\omega, t)$ имел те же аналитические свойства, что и $F\,(\omega, t)$, необходимо, чтобы $F\,(\omega, t)$ не имела нулей. В общем случае это не так, однако если $t \geq 0$, то $F\,(\omega, t)$ не может иметь более двух нулей в области аналитичности [61]. Это связано с условием (2.4) и положительностью $A\,(\omega, t)$, которая следует из условия унитарности для парциальных амплитуд:

$$a_l\,(\omega) \geq a_l\,(\omega)^2 + r_l\,(\omega)^2, \quad a_l\,(\omega) \equiv \mathrm{Im}\, f_l\,(\omega), \quad r_l\,(\omega) \equiv \mathrm{Re}\, f_l\,(\omega). \tag{2.22}$$

Из неравенства (2.22) следует, что

$$0 \leq a_l\,(\omega) \leq 1. \tag{2.23}$$

Воспользовавшись разложением $A\,(\omega, t)$ в ряд по полиномам Лежандра, который при $\omega \gg \omega_0$ имеет вид

$$A\,(\omega, t) = 2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\; a_l\;(\omega)\; P_l\,(\cos\,\theta), \tag{2.24}$$

видим, что, если $P_l\,(\cos\,\theta) > 0$, то $A\,(\omega, t) > 0$. Условие $P_l\,(\cos\,\theta) > 0$ выполняется, если $\cos\,\theta \geq 1$, т.е., если $t \geq 0$. Строго говоря, оно выполняется и для малых отрицательных t $\left(-t \sim \dfrac{C}{\ln\,\omega}\right)$. Отметим, что условие $P_l\,(\cos\,\theta) > 0$ является достаточным для положительности $A\,(\omega, t)$, которая, следовательно, может иметь место и в более широком интервале t. Для удобства читателя мы приводим в приложении А доказательство существования у $F\,(\omega, t)$ не более двух нулей в случае, когда $A\,(\omega, t) \geq 0$.

Здесь мы отметим, что нули в физической области могут быть исключены даже в рамках чисто теоретического подхода, т.е. когда мы не исключаем возможность (физически, разумеется, крайне маловероятную) того, что $A\,(\omega, t){=}0$ при некоторых значениях ω. Для этого достаточно перейти к функции

$$\tilde{F}\,(\omega, t) = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\omega}^{\omega+\Delta} F\,(\omega', t)\, d\,\omega'.$$

Очевидно, что если Δ достаточно мало, то физически $\tilde{F}(\omega, t)$ и $F(\omega, t)$ неразличимы. Более того, строго говоря, $F(\omega, t)$ является обобщенной функцией и реально можно измерить только $\tilde{F}(\omega, t)$. Если $\tilde{A}(\omega, t) = 0$, то $A(\omega', t) = 0\,\forall\,\omega' \in (\omega, \omega + \Delta)$. Согласно условию (2.22), тогда и $F(\omega', t) = 0\,\forall\,\omega' \in (\omega, \omega + \Delta)$. По известному свойству аналитических функций это означает, что $F(\omega, t) \equiv 0$.

Как и раньше, под $F(\omega, t)$ будем подразумевать функцию $F(\omega, t) - F(0, t)$. Согласно условию перекрестной симметрии (2.2)

$$F(\omega, t) = \omega^2 f(\omega, t) \tag{2.25}$$

и, согласно сказанному выше, $f(\omega, t)$ не имеет нулей. Покажем, что $\ln f(\omega, t)$ обладает теми же свойствами действительности и кроссинг-симметрии, что и $F(\omega, t)$. Справедливость условия кроссинг-симметрии очевидна. Для проверки условия действительности заметим, что мы рассматриваем такие t, что $A(\omega, t) \geq 0$. В таком случае $\delta(\omega, t)$ — фаза функции $f(\omega, t)$ — удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \leq \delta(\omega, t) \leq \pi. \tag{2.26}$$

Покажем, что $\delta(\omega_0, t) = 0$. Для этого достаточно проверить, что $f(\omega_0, t) > 0$. Действительно, $f(\omega, t) \to 0$ при $\omega \to \infty$ и, следовательно, удовлетворяет ДС без вычитаний. Но тогда

$$f(0, t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'} > 0.$$

Следовательно, $f(\omega_0, t) > 0$, поскольку у $f(\omega, t)$ нет нулей. Требуемое условие

$$\delta(\omega - \epsilon, t) = -\,\delta(\omega + \epsilon, t) \tag{2.27}$$

следует из условия (2.1) и непрерывности $\delta(\omega, t)$ в окрестности точки ω_0. В результате ДС для $\ln f(\omega, t)$ имеют тот же вид, что и для $F(\omega, t)$, т.е.

$$\ln \frac{f(\omega, t)}{f(0, t)} = \frac{2\,\omega^2}{\pi} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'\,(\omega'^2 - \omega^2)}. \tag{2.28}$$

Аналогичным образом можно написать и ОДС для $\ln f(\omega, t)$:

$$\ln f(\omega, t) = \frac{2\sqrt{\omega^2 - {\omega_0}^2}}{i\,\pi} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' \ln |f(\omega', t)|\, d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - {\omega_0}^2}\,(\omega'^2 - \omega^2)}. \tag{2.29}$$

Приравнивая выражения (2.28) и (2.29) в мнимой точке $i\,\omega$ и понимая под $f\,(\omega, t)$ функцию $\dfrac{f\,(\omega,t)}{f\,(0,t)}$, придем к соотношению, аналогичному (2.19′) для $F\,(\omega, t)$ $(\omega \gg \omega_0)$:

$$-\,\omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2+\omega^2)} = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega'\,\ln\,|f\,(\omega',t)|\,d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\omega_0{}^2}\,(\omega'^2+\omega^2)}. \tag{2.30}$$

Аналогичное соотношение может быть написано и непосредственно для $F\,(\omega, t)$, точнее, для функции $F\,(\omega, t) - F\,(\omega_0, t) - \varepsilon$, которая не имеет нулей (доказательство см. в приложении А). Необходимо только учесть, что поскольку $F\,(\omega_0, t) < 0$, то

$$\delta\,(\omega - i\,\varepsilon) = -\,\delta\,(\omega + i\,\varepsilon) + 2\,\pi. \tag{2.31}$$

Равенство (2.31) легко выводится с помощью тех же рассуждений, что и (2.26). В результате (2.30) заменяется на

$$-\,\omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\tilde{\delta}\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2+\omega^2)} = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega'\,\ln\,|F\,(\omega',t)|\,d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\omega_0{}^2}\,(\omega'^2+\omega^2)}, \tag{2.30′}$$

где $\tilde{\delta}\,(\omega, t) = \delta\,(\omega, t) - \pi$. Разумеется, $\delta\,(\omega, t)$ — фаза функции $F\,(\omega, t)$ — удовлетворяет двойному неравенству (2.26).

Физические следствия из соотношения (2.30′) будут рассмотрены в разд. 4.

Другой симметричной комбинацией амплитуд, которую удобно исследовать с помощью ЛДС, является $\Phi\,(\omega, t) \equiv F_+\,(\omega, t) F_-\,(\omega, t)$. Функции $F_\pm\,(\omega, t)$ могут иметь как один ноль в области аналитичности, если $F_\pm\,(\omega_0, t)$ имеют разные знаки, так и два, если $F_\pm\,(\omega_0, t) > 0$. Если же $F_\pm\,(\omega_0, t) < 0$, то у $F_\pm\,(\omega, t)$ нет нулей (доказательства этих утверждений см. в приложении А). При исследовании функций $F_+\,(\omega, t) F_-\,(\omega, t)$ удобно избавиться от нулей, переходя к функциям $F_\pm\,(\omega, t) - F_\pm\,(\omega_0, t) - \varepsilon$. Ниже под $F_\pm\,(\omega, t)$ подразумеваются именно эти функции. Подчеркнем, что при высоких энергиях они практически не отличаются от $F_\pm\,(\omega, t)$.

Дисперсионные соотношения для $\ln\,\Phi\,(\omega, t)$ имеют тот же вид, что и (2.28), только необходимо учесть, что поскольку $F_\pm\,(\omega_0, t) < 0$, то

$$\delta^+\,(\omega - i\,\varepsilon) = -\,\delta^+\,(\omega + i\,\varepsilon) + 4\,\pi; \quad \delta^+\,(\omega, t) = \delta_+\,(\omega, t) + \delta_-\,(\omega, t). \tag{2.31′}$$

Следовательно, получаем

$$\ln\,\frac{\Phi\,(\omega,t)}{\Phi\,(0,t)} = \frac{2\,\omega^2}{\pi} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\tilde{\delta^+}\,(\omega, t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2-\omega^2)}; \quad \tilde{\delta^+}\,(\omega, t) = \delta_+\,(\omega, t) + \delta_-\,(\omega, t) - 2\,\pi. \tag{2.32}$$

Рассматривая функцию $\dfrac{F_+(\omega,t)}{F_-(\omega,t)}$, приходим к соотношению

$$\ln \frac{F_+(\omega,t)}{F_-(\omega,t)} = \frac{2\,\omega}{\pi}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\delta^-(\omega',t)}{\omega'^2-\omega^2}\,d\,\omega'; \quad \delta^-(\omega,t) = \delta_+(\omega,t)-\delta_-(\omega,t). \tag{2.33}$$

Наряду с ДС для функции $\ln\dfrac{F_+(\omega,t)}{F_-(\omega,t)}$ справедливы и ОДС, которые имеют вид, аналогичный (2.17):

$$\ln \frac{F_+(\omega,t)}{F_-(\omega,t)} = \frac{2\,\omega\,\sqrt{\omega^2-\omega_0{}^2}}{i\,\pi}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\left|\frac{F_+(\omega',t)}{F_-(\omega',t)}\right| \frac{d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\omega_0{}^2}(\omega'^2-\omega^2)}. \tag{2.34}$$

Отметим, что поскольку $A_\pm(\omega,t)>0$, то $\delta_\pm(\omega,t)$ удовлетворяют ограничению, аналогичному (2.26), т.е.

$$0 \le \delta_\pm(\omega,t) \le \pi. \tag{2.35}$$

Как мы увидим далее, из этого, обусловленного только унитарностью условия следует, что $|F_+(\omega,t)/F_-(\omega,t)| \to 1$ при $\omega\to\infty$. Поскольку в нашем обзоре предельный переход подразумевает, что $\omega\to\infty$, ниже мы, как правило, будем опускать это условие.

2.3. Быстро и медленно сходящиеся интегральные соотношения. Целью этого пункта будет вывод ряда соотношений, которые могут быть полезны при исследовании амплитуд рассеяния. Общим для этих соотношений является то, что они содержат интегралы от $R(\omega,t)$.

Начнем с соотношения, связывающего быстро сходящиеся интегралы от реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния. Смысл такого рода результатов прозрачен. Они, в принципе, т.е. при наличии достаточно хороших измерений $R(\omega,t)$, дают возможность получить экспериментально наблюдаемые следствия аналитичности, в минимальной степени зависящие от асимптотического поведения $F(\omega,t)$.

Ограничимся рассмотрением симметричного случая и перейдем к переменной $z=\omega^2$ (см. (2.6) и (2.7)). Поступим так же, как и при выводе правила сумм (2.9), но выберем в качестве $\rho(z,t)$ функцию

$$\rho(z,t) = \exp\left[\left(-\frac{z}{\tilde{z}}\right)^{\alpha}\exp\,(-\,i\pi\alpha)\right]; \qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $\rho(z,t)\in\mathbb{R}$ при $z<0$ и что $\rho(z,t)z^n\to 0$ при $|z|\to\infty$, $\operatorname{Im} z>0$, получим искомое соотношение:

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty} A(z,t)\operatorname{Re}\rho(z,t)\,d\,z = -\int\limits_{\omega_0}^{\infty} R(z,t)\operatorname{Im}\rho(z,t)\,d\,z. \tag{2.36}$$

Поскольку $|\rho\,(z,t)| \sim \exp\left[\left(-\dfrac{z}{\tilde{z}}\right)^{\alpha}\cos\pi\,\alpha\right]$, интегралы в обеих частях равенства (2.36) быстро сходятся.

Рассмотрим теперь прямо противоположную задачу: найти соотношения, которые сильнее зависят от асимптотики, чем ДС, и которые, следовательно, могут быть удобным источником информации о поведении $F\,(\omega,t)$ и, в частности, полных сечений $\sigma_{\pm}\,(\omega)$ при тех энергиях, которые в настоящее время недоступны эксперименту. Следует отметить, что обычно одна из связанных условием перекрестной симметрии амплитуд известна при более высоких энергиях, чем другая. Поэтому здесь мы рассмотрим не симметричную амплитуду, а сами амплитуды $F_{\pm}\,(\omega,t)$. Основной интерес эти соотношения представляют, разумеется, при $t=0$.

Пусть $F_{\pm}\,(\omega,t)$ измерены вплоть до энергий $\omega_{\pm}$ соответственно, а мы хотим получить информацию об их поведении при более высоких энергиях. Для этого найдем соотношения, связывающие медленно сходящиеся интегралы от $F_{\pm}\,(\omega,t)$.

Рассмотрим $\mathrm{Im}\int_C \dfrac{F_{+}\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^{2+\alpha}}$, где контур C состоит из интервалов $(-\infty,-\omega_1)$, (ω_1,∞), полуокружности радиуса ω_1 с центром в начале координат $(\omega_0<\omega_1<\omega_{\pm})$ и бесконечной полуокружности, интеграл по которой, согласно неравенству Фруассара–Мартена (см. ниже (5.1)), равен нулю.

Воспользовавшись соотношениями (2.3) и теоремой Коши, получим равенство

$$\int\limits_{\omega_1}^{\infty}\frac{A_{+}\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^{2+\alpha}} = \int\limits_{\omega_1}^{\infty}\frac{A_{-}\,(\omega',t)\,\cos\pi\,\alpha + R_{-}\,(\omega',t)\,\sin\pi\,\alpha}{{\omega'}^{2+\alpha}}\,d\,\omega' + \\ + \mathrm{Re}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{F_{+}\,\left(\omega_1\,\mathrm{e}^{i\,\varphi},t\right)\,d\,\varphi}{\left(\omega_1\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}\right)^{1+\alpha}}. \qquad (2.37)$$

Последний интеграл с помощью ДС (2.5) может быть сведен к достаточно быстро сходящемуся интегралу от $A_{\pm}\,(\omega,t)$. Соотношение (2.37) может быть полезным инструментом для того, чтобы «увидеть», как ведут себя (естественно, в среднем) полные сечения при энергиях, недоступных современным ускорителям. Отметим, что такие соотношения демонстрируют важность измерения реальной части амплитуды рассеяния.

2.4. Квазидисперсионные соотношения и практическая аналитичность. Как уже отмечалось, аналитичность $F_{\pm}\,(\omega,t)$ доказана не для всех t и не для всех процессов. Важным примером являются амплитуды упругого $p\,p$- и $p\,\bar{p}$-рассеяния. Причина отсутствия обычных аналитических свойств у этих амплитуд (даже при $t=0$) связана с тем, что в то время как физическая область $p\,\bar{p}$-рассеяния начинается с $s_1 = 4\,M^2$, разрез в s-плоскости начинается с $s_0 = 4\,m^2$ (вследствие виртуальной аннигиляции). Для таких амплитуд доказано [28, 29] более слабое условие аналитичности, а именно: $F\,(\omega, t)$ аналитична в верхней полуплоскости всюду, за исключением полукруга некоторого радиуса ω_1 с центром в $\omega = 0$.

В данном случае естественно работать непосредственно в переменных s, t, u. Мы же сохраняем обозначение ω для удобства сравнения квазидисперсионных и дисперсионных соотношений.

Чтобы получить соотношения, аналогичные исследованным ранее, рассмотрим

$$\int\limits_C \frac{F\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'^2\,(\omega' + i\,\omega)} = 0, \qquad \omega > 0, \tag{2.38}$$

где C — контур в верхней полуплоскости, состоящий из отрезков $(-\infty, -\omega_1)$, (ω_1, ∞) и полукругов с центром в начале координат с радиусами ω_1 и ∞.

Простые вычисления приводят к равенству, аналогичному (2.19):

$$\int\limits_{\omega_1}^{\infty} \frac{A\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2 + \omega^2)} = \omega \int\limits_{\omega_1}^{\infty} \frac{R\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'^2\,(\omega'^2 + \omega^2)} + \mathrm{Re} \int\limits_0^{\pi} \frac{F\,\left(\omega_1\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}, t\right)\,d\,\varphi}{\omega_1\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}\,\left(\omega_1\,\mathrm{e}^{i\,\varphi} + i\,\omega\right)}. \tag{2.39}$$

Если же справедливы условия (2.4′), то тем же способом $\left(\text{рассматривая } \int_C \frac{F\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega' + i\,\omega)}\right)$ получим равенство, аналогичное (2.19′):

$$-\omega \int\limits_{\omega_1}^{\infty} \frac{A\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2 + \omega^2)} = \int\limits_{\omega_1}^{\infty} \frac{R\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} + \mathrm{Im} \int\limits_0^{\pi} \frac{F\,\left(\omega_1\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}, t\right)\,d\,\varphi}{\omega_1\,\mathrm{e}^{i\,\varphi} + i\,\omega}. \tag{2.40}$$

Отметим, что условие

$$F\,(-\omega^*, t) = F^*\,(\omega, t); \qquad \mathrm{Im}\,\omega > 0 \tag{2.41}$$

по-прежнему имеет место, если $|\omega| > \omega_1$. (В случае обычных ДС (2.41) есть непосредственное следствие условий (2.1) и (2.2).) С помощью соотношений (2.39) и (2.40) асимптотические результаты легко переносятся на функции, которые удовлетворяют квазидисперсионным соотношениям.

Кроме того, можно построить функции, сколь угодно точно аппроксимирующие амплитуду рассеяния при физических энергиях и аналитические всюду в верхней полуплоскости [112]. Идея состоит в том, чтобы подобно тому, как это делается для доказательства ДС вперед (см. [113], § 57), заменить в редукционных формулах $F^{\mathrm{ret}}(x)$ на $F_{\varepsilon}^{\mathrm{ret}}(x) = \exp\left(-\varepsilon\,|\mathbf{x}|^2\right) F^{\mathrm{ret}}(x)$. Построенная в результате такой замены регуляризованная амплитуда рассеяния будет обладать требуемыми аналитическими свойствами, но снятие регуляризации возможно только в том случае, когда у амплитуды рассеяния нет нефизической области. Однако очевидно, что, по крайней мере для любой конечной физической области энергий, регуляризованная амплитуда близка к истинной, если ε достаточно мало. (Доказательство возможности равномерной и сколь угодно точной аппроксимации амплитуды в физической области см. в [112].)

Таким образом, заменив точную амплитуду ее регуляризованной аппроксимацией, мы можем теперь выбрать ω_1 так, чтобы интервалы (ω_1, ∞) и $(-\infty, -\omega_1)$ были интервалами физических энергий в s- и u-каналах соответственно.

Отметим, что при $\omega \gg \omega_1$ последний интеграл в (2.39) сводится к $\dfrac{C(\omega_1, t)}{\omega}$, где

$$C(\omega_1, t) = \mathrm{Im} \int_0^{\pi} \frac{F\left(\omega_1\,\mathrm{e}^{i\varphi}, t\right)\, d\varphi}{\omega_1\,\mathrm{e}^{i\varphi}}.$$

$C(\omega_1, t)$ можно оценить, используя экспериментальные данные и аналитические свойства $F(\omega, t)$.

Таким образом, при высоких, но конечных энергиях, все отличие от $\pi\,p$-рассеяния, например, $p\,p$-рассеяния, состоит в том, что, по существу, $C(\omega_1, t)$ играет роль $F(0, t)$ в ДС.

3. СВЯЗЬ РЕАЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ СИММЕТРИЧНОЙ И АНТИСИММЕТРИЧНОЙ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Перейдем теперь к физическим следствиям аналитичности амплитуды рассеяния по энергии.

Как уже отмечалось, аналитичность означает существование тесной связи между поведением реальной и мнимой частей как симметричной, так и антисимметричной амплитуды. Удобный способ исследования этой связи состоит в использовании интегральных соотношений (2.19) и (2.19′).

Отметим, что соотношения (2.19) и (2.19′) — следствия только аналитичности, кроссинг-симметрии и ограничений на рост амплитуды рассеяния (см. (2.4) и (2.4′)). Унитарность в явном виде не используется.

Возможность единого описания симметричной и антисимметричной амплитуд рассеяния связана с тем, что при $\omega \gg \omega_0$ $F_a(\omega, t)$ может быть записана в виде $F_a(\omega, t) = \dfrac{i\,\omega}{\sqrt{\omega^2 - {\omega_0}^2}}\, F_s(\omega, t)$. Подчеркнем, что здесь

$F_s(\omega, t)$ — произвольная кроссинг-симметричная функция, т.е. $\operatorname{Im} F_s(\omega, t)$ может иметь любой знак.

Прежде всего продемонстрируем, что известные асимптотические результаты, в частности, теорема Померанчука для полных сечений (в ее наиболее общей формулировке), легко могут быть получены из анализа равенства (2.19). Точнее, будут найдены конечноэнергетические аналоги этих классических результатов, из которых последние следуют, когда $\omega \to \infty$.

Предположим, что

$$\varphi_1(\omega, t) < C(\ln \omega)^{\gamma}, \qquad \omega > \tilde{\omega}; \qquad \gamma > 0, \tag{3.1}$$

и докажем, что тогда

$$\varphi_2(\omega, t) < C'(\ln \omega)^{\gamma - 1}, \qquad C' = \frac{\pi}{2}\gamma C, \qquad \omega \gg \tilde{\omega}. \tag{3.2}$$

Разумеется, если $t \le 0$, то, согласно неравенству Фруассара–Мартена (6.1), $\gamma \le 2$. Условие $\omega \gg \tilde{\omega}$ будет расшифровано ниже. Чтобы не усложнять формулы, мы пишем их так, словно ω безразмерна, этого всегда можно добиться, положив, например, $m_\pi^2 = 1$.

Сделаем два замечания.

1. Если нас интересуют соотношения в асимптотической области, то можно взять $\tilde{\omega}$ произвольно большой, что немедленно даст возможность применить рассматриваемый метод к амплитудам, аналитичным в верхней полуплоскости только вне полукруга с некоторым радиусом ω_1.

2. Неравенство (3.2), строго говоря, должно быть справедливо для некоторых $\omega > \tilde{\omega}$. Его точный смысл в том, что противоположное неравенство не может быть выполнено при всех $\omega > \tilde{\omega}$. В асимптотике неравенство (3.2) заведомо выполняется на некоторой последовательности энергий ω_i ($\omega_i \to \infty$ при $i \to \infty$).

Подчеркнем, что этот факт имеет принципиальный характер и не связан с применяемым методом. Он обусловлен тем, что существуют осциллирующие и вместе с тем удовлетворяющие необходимым требованиям функции (см. пункт 5.2).

Для доказательства неравенства (3.2) достаточно предположить, что при $\omega > \tilde{\omega}$

$$\varphi_2(\omega, t) > C'(\ln \omega)^{\gamma - 1}, \tag{3.3}$$

и оценить соответствующие интегралы.

Прежде всего рассмотрим вклад области $\omega' < \tilde{\omega}$ в соотношение (2.19). Если $\omega \gg \tilde{\omega}$, то

$$\int\limits_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \frac{\varphi_1(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} \cong \frac{C_1(\tilde{\omega}, t)}{\omega^2}, \quad C_1(\tilde{\omega}, t) = \int\limits_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \varphi_1(\omega', t)\, d\omega'; \tag{3.4}$$

$$\omega \int\limits_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \frac{\varphi_2\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2+\omega^2)} \cong \frac{C_2\,(\tilde{\omega},t)}{\omega}, \quad C_2\,(\tilde{\omega},t) = \int\limits_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \frac{\varphi_2\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'}. \tag{3.5}$$

Как будет видно ниже, этот вклад несуществен, если $\omega \gg \tilde{\omega}$, т.е. последнее условие как раз и означает возможность пренебречь им в соотношении (2.19). Заметим, что интегралы по интервалу $(\omega_0, \tilde{\omega})$ могут быть вычислены на основе экспериментальных данных.

Перейдем теперь к интервалу $(\tilde{\omega}, \infty)$.

Из условия (3.1) следует, что

$$\int\limits_{\tilde{\omega}}^{\infty} \frac{\varphi_1\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'^2+\omega^2} < C \int\limits_{\tilde{\omega}}^{\infty} \frac{(\ln\,\omega')^{\gamma}\,d\,\omega'}{\omega'^2+\omega^2} = \frac{\pi}{2}\,C\,\frac{(\ln\,\omega)^{\gamma}}{\omega}\,(1+\varepsilon_1\,(\omega,t))\,, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon_1\,(\omega,t) \to 0$ при $\omega \to \infty$. Формула (3.6), так же, как и (3.7), следует из результатов разд. 5 (формулы (5.8) и (5.7)).

С другой стороны, из (3.3) следует, что

$$\omega \int\limits_{\tilde{\omega}}^{\infty} \frac{\varphi_2\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2+\omega^2)} > C'\,\omega \int\limits_{\tilde{\omega}}^{\omega} \frac{(\ln\,\omega')^{\gamma-1}\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2+\omega^2)} = \frac{C'}{\omega\,\gamma}\,(\ln\,\omega)^{\gamma}\,(1+\varepsilon_2\,(\omega,t))\,, \tag{3.7}$$

$\varepsilon_2\,(\omega,t) \to 0$ при $\omega \to \infty$.

Сделанное утверждение непосредственно вытекает из (3.3) и (3.6).

Отметим одно важное обстоятельство. Условие (3.3) мы использовали лишь на интервале $(\tilde{\omega}, \omega)$, на интервале (ω, ∞) достаточно только предположить, что $\varphi_2\,(\omega',t) > 0$. При этом предположении доказано, что ограничение (3.2) справедливо уже на интервале $(\tilde{\omega}, \omega)$. Разумеется, учет всех членов может несколько изменить результат. Существенно, однако, что получено конечноэнергетическое неравенство. Правда, наше исходное условие (3.1) предполагалось справедливым при всех $\omega' > \tilde{\omega}$.

Покажем, что результат в действительности не зависит от поведения $\varphi_i\,(\omega',t)$ при $\omega' \gg \omega$. Заметим, что для ряда процессов справедливы конечноэнергетические аналоги ограничения Фруассара–Мартена (см. разд. 6). Пользуясь методом работы [114], можно найти строгие верхние оценки вкладов в соотношение (2.19) от интервала (ω_2, ∞), где $\omega_2 \gg \omega$. Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что при $\omega' > \omega_2$

$$|\,\varphi_i\,(\omega',t)\,| < \tilde{C}\,(\ln\,\omega')^2, \tag{3.8}$$

где $\tilde{C}$ — известная константа. Тогда

$$\int\limits_{\omega_2}^{\infty} \frac{|\,\varphi_1\,(\omega',t)\,|\,d\,\omega'}{\omega'^2+\omega^2} < \tilde{C}\,\frac{(\ln\,\omega_2)^2}{\omega_2}, \tag{3.9}$$

$$\int_{\omega_2}^{\infty} \frac{|\,\varphi_2\,(\omega', t)\,|\,d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2 + \omega^2)} < \tilde{C}\,\frac{(\ln\,\omega_2)^2}{2\,\omega_2{}^2}. \tag{3.10}$$

Оценки (3.9) и (3.10) демонстрируют, что область энергий, существенно больших, чем ω, не влияет на полученные результаты.

Покажем теперь, что из соотношения (2.19) легко выводятся известные асимптотические формулы.

Прежде всего отметим, что при $t \leq 0$ неравенство (3.2) означает, что из ограничения Фруассара–Мартена вытекают следующие неравенства:

$$\mathrm{Re}\,F\,(\omega, t) < C\,\omega\,\ln\,\omega; \qquad \mathrm{Im}\,F_a\,(\omega, t) < C\,\omega\,\ln\,\omega. \tag{3.11}$$

Таким образом, в то время как $\sigma_{\pm}\,(\omega)$ могут возрастать как $(\ln\,\omega)^2$, их разность может расти не быстрее, чем $\ln\,\omega$. Следовательно, если $\dfrac{\sigma_+\,(\omega)}{\ln\,\omega} \to \infty$, то $\dfrac{\sigma_+\,(\omega)}{\sigma_-\,(\omega)} \to 1$. Этот результат следует непосредственно из аналитичности $F_a\,(\omega, t)$ и ограничения Фруассара–Мартена. Учет унитарности позволяет распространить этот результат на произвольные, неограниченно растущие сечения [40, 42, 58, 59].

Если $\gamma < 1$, то из (3.2) следует, что $\Delta\,\sigma_{\mathrm{tot}}\,(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$. На самом деле, справедливо более сильное утверждение. А именно докажем, что если

$$\frac{\varphi_1\,(\omega, t)}{\ln\,\omega} \to 0, \qquad \omega \to \infty, \tag{3.12}$$

то

$$\varphi_2\,(\omega, t) \to 0, \qquad \omega \to \infty. \tag{3.13}$$

Напомним, что условие (3.13) понимается в том смысле, что $\exists\,\omega_i$ такое, что $\varphi_2\,(\omega_i, t) \to 0$, $\omega_i \to \infty$. Для доказательства заметим, что если $\varphi_2\,(\omega, t)$ обращается в нуль бесконечное число раз, то требуемое условие (3.13) заведомо выполнено. Следовательно, осталось рассмотреть случай, когда $\varphi_2\,(\omega, t)$ имеет определенный знак при $\omega \to \infty$. Пусть, например, $\varphi_2\,(\omega, t) > 0$.

Предположим, что справедливо условие, противоположное (3.13), т.е. что $\varphi_2\,(\omega, t) > \Delta$, начиная с некоторого $\omega = \tilde{\omega}$, при этом, согласно (3.12), $\varphi_1\,(\omega, t)\,\ln\,\omega < \delta$, где $\delta \ll \Delta\;(\omega > \tilde{\omega})$. Результат следует непосредственно из оценок (3.6) и (3.7). Итак, утверждение доказано.

Для случая антисимметричной амплитуды оно означает, что $\Delta\,\sigma_{\mathrm{tot}}\,(\omega) \to 0$, если $\dfrac{\mathrm{Re}\,F_a\,(\omega, 0)}{\omega\,\ln\,\omega} \to 0$ (теорема Померанчука, содержащая только необходимые условия). Действительно, из приведенного рассмотрения непосредственно следует, что если $\dfrac{\mathrm{Re}\,F_a\,(\omega, 0)}{\omega\,\ln\,\omega} > \varepsilon_0$, $\omega \to \infty$, где ε_0 — некоторое число, то условие $\Delta\,\sigma_{\rm tot}\,(\omega)\to 0$ не может быть выполнено, по крайней мере, для всех асимптотических энергий.

В случае симметричной амплитуды полученный результат означает, что $\dfrac{\operatorname{Re} F\,(\omega,t)}{\omega}\to 0$, если $\dfrac{\operatorname{Im} F\,(\omega,t)}{\omega\,\ln\,\omega}\to 0$.

Отметим, что из приведенного рассмотрения видно, что теорема Померанчука является, по сути дела, частным случаем утверждения: верхняя граница для $\operatorname{Im} F_a\,(\omega,0)$, грубо говоря, в $\ln\,\omega$ раз меньше, чем верхняя граница для $\operatorname{Re} F_a\,(\omega,t)$. Ниже мы увидим, что это утверждение остается справедливым и при $\gamma<0$ в (3.1). Условие $\Delta\,\sigma\,(\omega)\to 0$ нетривиально лишь для весьма узкого и ничем не выделенного с теоретической точки зрения класса антисимметричных амплитуд, а именно амплитуд, удовлетворяющих условиям

$$\left|\,\frac{F_a\,(\omega,t)}{\omega}\,\right|>C;\qquad \frac{|\,F_a\,(\omega,t)\,|}{\omega\,\ln\,\omega}\to 0. \tag{3.14}$$

Поскольку $A_a\,(\omega,t)/\omega\to 0$, когда $R_a\,(\omega,t)/\omega\,\ln\,\omega\to 0$, то второе условие в (3.14) эквивалентно требованию $R_a\,(\omega,t)/\,\omega\,\ln\,\omega\to 0$.

Связь между асимптотиками $\sigma_+\,(\omega)$ и $\sigma_-\,(\omega)$ естественней характеризовать отношением $\sigma_-\,(\omega)/\sigma_+\,(\omega)$.

Как будет показано в следующем разделе, $\sigma_-\,(\omega)/\sigma_+\,(\omega)\;\to\;1$, если только $\sigma_-\,(\omega)>\omega^{-\varepsilon}$, а $|\,R_-\,(\omega,t)/A_-\,(\omega,t)\,|\not\to\infty$. Замечательно, что последнее условие вытекает из унитарности, если $\sigma_-\,(\omega)\to\infty$ (см. [58]).

Фактически мы нашли связь верхних границ $\varphi_1\,(\omega,t)$ и $\varphi_2\,(\omega,t)$, поскольку как неравенство (3.2) следует из неравенста (3.1), так и наоборот. Далее, если изменить знак неравенства в (3.1), то и знак в неравенстве (3.2) также меняется на противоположный, т.е. соотношение (2.19) устанавливает также связь между нижними границами $\varphi_1\,(\omega,t)$ и $\varphi_2\,(\omega,t)$.

Иными словами, если

$$C_2\,(\ln\,\omega)^{\gamma_2}<\varphi_1\,(\omega,t)<C_1\,(\ln\,\omega)^{\gamma_1}, \tag{3.15}$$

то

$$C_2^{'}\,(\ln\,\omega)^{\gamma_2-1}<\varphi_2\,(\omega,t)<C_1^{'}\,(\ln\,\omega)^{\gamma_1-1}, \tag{3.16}$$

где $C_i^{'}=\dfrac{\pi\,\gamma}{2}\,C_i$.

Таким образом, если $\varphi_1\,(\omega,t)\sim(\ln\,\omega)^{\gamma}$, то $\varphi_2\,(\omega,t)\sim(\ln\,\omega)^{\gamma-1}$. Ниже мы увидим, что это остается справедливым и при $\gamma<0$.

Рассмотрим теперь связь $\varphi_1\,(\omega,t)$ и $\varphi_2\,(\omega,t)$ для другого поведения этих функций. Найдем сначала следствия степенного роста $\varphi_i\,(\omega,t)$, который возможен при $t>0$. В этом случае ограничение Фруассара–Мартена заменяется более слабым условием (6.17). Но во всех случаях, согласно (2.4), $\varphi_i\,(\omega,t)/\omega\to 0$. Докажем, что если

$$\varphi_1\,(\omega,t)>C\,\omega^{\alpha};\qquad \alpha>0,\qquad \omega\gg\tilde{\omega}, \tag{3.17}$$

то

$$\varphi_2(\omega, t) > C' \omega^{\alpha}; \quad \omega \gg \tilde{\omega}, \quad C' = C \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2}. \tag{3.18}$$

Чтобы не усложнять формулы, ограничимся случаем, когда вклад области $(\omega_0, \tilde{\omega})$ в рассматриваемые интегралы несуществен.

Как обычно, предположим существование неравенства, противоположного (3.18):

$$\varphi_2(\omega, t) < C' \omega^{\alpha}; \qquad \omega > \tilde{\omega}, \tag{3.19}$$

и оценим интегралы в (2.19). Для этого достаточно заметить, что, поскольку вклад интервала $(\omega_0, \tilde{\omega})$ в рассматриваемые интегралы несуществен, то можно считать, что неравенства (3.17) и (3.19) справедливы при $\omega > \omega_0$.

Пользуясь известными формулами (ф-ла (3.24) в [115]), получим

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} > C_1 \frac{\pi}{2\, \omega^{1-\alpha}} \frac{1}{\cos \dfrac{\pi \alpha}{2}}, \tag{3.20}$$

$$\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_2(\omega', t)\, d\omega'}{\omega' (\omega'^2 + \omega^2)} < C_2 \frac{\pi}{2\, \omega^{1-\alpha}} \frac{1}{\sin \dfrac{\pi \alpha}{2}}. \tag{3.21}$$

Доказываемое неравенство (3.18) непосредственно следует из (3.20) и (3.21).

Теперь перейдем к изучению связи между $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ в случае, когда $\varphi_i(\omega, t) \to 0$ при $\omega \to \infty$. Такое поведение $\varphi_i(\omega, t)$ для симметричной амплитуды ожидается при $t < 0$, а для антисимметричной весьма вероятно и при $t = 0$. В этом случае естественно воспользоваться равенством (2.19$'$). Рассмотрим сначала следствия из неравенства (3.1), только теперь, разумеется, $\gamma < 0$. Тогда, как это следует из (2.19$'$), $\varphi_2(\omega, t) < 0$ при $\omega > \tilde{\omega}$, а $|\varphi_2(\omega, t)|$ удовлетворяет неравенству (3.2).

Оценка интегралов в равенстве (2.19$'$) аналогична оценке (3.4):

$$\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} < \frac{\pi}{2} C (\ln \omega)^{\gamma} (1 + \varepsilon_1(\omega, t)), \tag{3.22}$$

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' |\varphi_2(\omega', t)|\, d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} > \frac{C'}{\gamma} (\ln \omega)^{\gamma} (1 + \varepsilon_2(\omega, t)), \tag{3.23}$$

$\varepsilon_i(\omega, t) \to 0$ при $\omega \to \infty$.

Сравнение неравенств (3.22) и (3.23) сразу приводит к сделанному утверждению. Таким же образом может быть проанализирована и связь нижних границ $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ и получены неравенства, противоположные (3.1) и (3.2).

В заключение рассмотрим следствия из степенного падения $\varphi_i(\omega, t)$. Пусть, например,

$$\varphi_1(\omega, t) < C_1\,\omega^{\alpha}, \qquad \alpha < 0. \tag{3.24}$$

Тогда $\varphi_2(\omega, t) < 0$ и

$$|\varphi_2(\omega, t)| < C_2\,\omega^{\alpha}; \qquad C_2 = C_1 \operatorname{ctg}\frac{\pi\,\alpha}{2}. \tag{3.25}$$

Этот результат получается так же, как и неравенство (3.18). При исследовании связи $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ не было сделано каких-либо предположений об отсутствии осцилляций у $\varphi_i(\omega, t)$. В разд. 5 будет показано, что такого рода предположения приводят к существованию «почти локальной» связи между $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$. Предположения об отсутствии осцилляций весьма естественны, поскольку осцилляции не наблюдались в эксперименте. Одновременно в разд. 5 будут приведены примеры осциллирующих функций, для которых характерна совершенно иная зависимость между поведением $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$.

В заключение отметим, что из соотношений (2.19) и (2.19$'$) следуют определенные выводы о знаке $R(\omega, t)$, а именно: из соотношения (2.19) следует, что если $A(\omega, t) > 0$, то «в среднем» $R(\omega, t) - R(0, t) > 0$, при этом если $A(\omega, t)/\omega \to \infty$, то $R(\omega, t) > 0$ при $\omega \to \infty$. Если же $A(\omega, t)/\omega \to 0$ и $A(\omega, t) > 0$, то из соотношения (2.19$'$) следует, что $R(\omega, t) < 0$ при $\omega \to \infty$. Изменение знака $R(\omega, t)$ при переходе от $t = 0$ к $t < 0$ было установлено в недавней работе Мартена [116].

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ФАЗОЙ И МОДУЛЕМ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

4.1. Симметричная амплитуда. Начнем с изучения зависимости между фазой и модулем симметричной амплитуды (совершенно аналогично рассматривается связь между $F_+(\omega, t)F_-(\omega, t)$ и $\delta_+(\omega, t) + \delta_-(\omega, t)$).

Воспользуемся соотношением (2.30$'$). Удобно записать $\delta(\omega, t)$ в виде

$$\delta(\omega, t) = \frac{\pi}{2} + \gamma(\omega, t). \tag{4.1}$$

После элементарных вычислений получим, что соотношение (2.30$'$) принимает вид ($\omega \gg \omega_0$):

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\ln|F(\omega', t)|\,d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2\,\omega}\,\ln\frac{\omega}{\omega_0} - \omega\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\gamma(\omega', t)\,d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)}. \tag{4.2}$$

Соотношение (4.2) удобно переписать в виде

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F(\omega', t)\,\omega_0}{\omega} \right| \frac{d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = -\omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)}. \tag{4.3}$$

Интеграл в левой части соотношения (4.3) при достаточно высоких энергиях определяется, в основном, интервалом $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$. Слова «достаточно высокие энергии» означают одновременное выполнение двух условий: $\alpha \ll 1$ и $\alpha\,\omega \gg \omega_0$. В этом случае, используя теорему о среднем и пренебрегая высшими поправками по α, получим оценки

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\ln\,\varphi(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega}\,\left[\ln\,\varphi(\bar{\omega}, t) + \alpha\,(\ln\,\varphi(\bar{\omega}_1) + \ln\,\varphi(\bar{\omega}_2) - 2\,\ln\,\varphi(\bar{\omega}))\right];$$

$$\varphi(\omega', t) = \left| \frac{F(\omega', t)\,\omega_0}{\omega} \right|; \tag{4.4}$$

$$\omega_0 \le \bar{\omega}_1 \le \alpha\,\omega; \quad \alpha\,\omega \le \bar{\omega} \le \alpha^{-1}\,\omega; \quad \alpha^{-1}\,\omega \le \bar{\omega}_2 < \infty.$$

Поскольку $\ln\,\varphi(\omega, t)$ естественно считать медленно меняющейся функцией, второй член в (4.4) должен быть малым по сравнению с первым, т.к. $\alpha \ll 1$. Кроме того, для наблюдаемых амплитуд весьма вероятно, что $\varphi(\omega, t)$ монотонна на достаточно большом интервале энергий. Так, при $t = 0$ рост полных сечений означает, что $|\varphi(\omega, 0)|$ — монотонно растущая функция (учет реальной части не меняет этого вывода). Очевидно, что монотонность $\varphi(\omega, t)$ вносит дополнительную малость в поправочный член.

Рассмотрим теперь правую часть равенства (4.3).

Прежде всего отметим, что этот интеграл быстро сходится, поскольку, вследствие условия (2.26),

$$-\frac{\pi}{2} \le \gamma(\omega, t) \le \frac{\pi}{2}. \tag{4.5}$$

Поэтому

$$\left| \omega \int\limits_{\alpha^{-1}\,\omega}^{\infty} \frac{\gamma(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} \right| \le \frac{\pi\,\alpha^2}{4\,\omega}. \tag{4.6}$$

Далее покажем, что оставшийся интеграл с точностью до функции, не влияющей существенно на функциональную зависимость $F(\omega, t)$, при высоких энергиях может быть записан в очень простом виде, а именно

$$\omega \int\limits_{\omega_0}^{\alpha^{-1}\,\omega} \frac{\gamma(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} \cong \frac{1}{\omega} \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{\gamma(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'}. \tag{4.7}$$

Для вывода (4.7) сначала заметим, что

$$\begin{gathered}\omega \int\limits_{\omega_0}^{\alpha\,\omega} \frac{\gamma\,(\omega', t)\, d\,\omega'}{\omega'\,(\omega'^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega} \int\limits_{\omega_0}^{\alpha\,\omega} \frac{\gamma\,(\omega', t)\, d\,\omega'}{\omega'} + d\,(\omega), \\ d\,(\omega) = -\,\frac{1}{\omega}\,\frac{\alpha^2}{2}\,\gamma\,(\bar\omega_1), \qquad \omega_0 \le \bar\omega_1 \le \alpha\,\omega,\end{gathered} \tag{4.8}$$

и, согласно (4.5), $|d\,(\omega)| < (\pi\,\alpha^2)/(4\,\omega)$. Оставшийся интеграл с помощью теоремы о среднем легко записать в виде

$$\begin{gathered}\omega \int\limits_{\alpha\omega}^{\alpha^{-1}\omega} \frac{\gamma\,(\omega', t) d\,\omega'}{\omega'(\omega'^2+\omega^2)} = \frac{1}{\omega}\left[\int\limits_{\alpha\omega}^{\omega} \frac{\gamma\,(\omega', t) d\,\omega'}{\omega'} + [\gamma(\bar\omega_3)-\gamma(\bar\omega_2)]\frac{\ln\,2}{2} + O(\alpha^2)\right], \\ \alpha\,\omega < \bar\omega_2 < \omega, \qquad \omega < \bar\omega_3 < \alpha^{-1}\,\omega.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Отбрасываемый член мал, если $\gamma\,(\omega, t)$ медленно меняется при высоких энергиях (что соответствует экспериментальным данным) и в любом случае ограничен величиной $(\pi\,\ln\,2)/2$. Окончательно приходим к равенству

$$\begin{gathered}-\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{\gamma\,(\omega', t)\, d\,\omega'}{\omega'} = \frac{\pi}{2}\,\ln\,\varphi\,(\bar\omega, t)\,\;(1+O\,(\alpha)+D\,(\omega)\,)\,; \\ |\,D\,(\omega)| < \frac{\pi\,\ln\,2}{2}\left(1+O\,(\alpha^2)\right).\end{gathered} \tag{4.10}$$

Равенство (4.10) устанавливает связь между поведением $\gamma\,(\omega, t)$ и $|F\,(\omega, t)|$, иными словами, между $|F\,(\omega, t)|$ и $\xi\,(\omega, t) \equiv \dfrac{\mathrm{Re}\,F\,(\omega, t)}{\mathrm{Im}\,F\,(\omega, t)}$.

Прежде всего заметим, что поскольку

$$\xi\,(\omega, t) = -\,\mathrm{tg}\;\gamma\,(\omega, t), \tag{4.11}$$

то $\gamma\,(\omega, t) < 0$, если $\mathrm{Re}\,F\,(\omega, t) > 0$, и $\gamma\,(\omega, t) > 0$, если $\mathrm{Re}\,F\,(\omega, t) < 0$. Таким образом, рост $|\,F\,(\omega, t)/\omega|$, а следовательно, и рост полных сечений возможен, только если $\mathrm{Re}\,F\,(\omega, t) > 0$.

Проанализируем теперь, к каким следствиям приводят те или иные ограничения на $\gamma\,(\omega, t)$.

Подчеркнем, что согласно (4.6) поведение $\gamma\,(\omega', t)$ при $\omega' > \alpha^{-1}\,\omega$ практически не влияет на $\varphi\,(\bar\omega, t)$. Подчеркнем также, что фактически $|\,F\,(\omega, t)|$ является монотонно возрастающей функцией $\xi\,(\omega, t)$. Точный смысл этого утверждения в том, что, согласно (4.3), замена $\gamma\,(\omega', t)$ на $\gamma\,(\omega', t) - \Delta\,(\omega', t)$ приводит согласно (4.10) к росту $\varphi\,(\bar\omega, t)$, причем существенно поведение $\gamma\,(\omega', t)$ только при $\omega' < \alpha^{-1}\,\omega$.

Перейдем теперь к более конкретным оценкам.

Пусть, начиная с некоторого $\omega = \tilde{\omega}$, выполняется неравенство

$$\xi(\omega, t) \geq \operatorname{tg} \frac{\pi\,\alpha}{2}; \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{т.е.} \quad \gamma(\omega, t) \leq -\frac{\pi\,\alpha}{2}. \tag{4.12}$$

Оценивая левую часть равенства (4.10) и опуская поправочные члены, имеем

$$\left| \frac{F(\bar{\omega}, t)\,\omega_0}{\bar{\omega}} \right| \geq \omega^{\alpha}\, D'(\omega, t), \tag{4.13}$$

где $D'(\omega, t)$ — ограниченная функция, очевидным образом связанная с $D(\omega, t)$ и $\displaystyle\int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \frac{\gamma(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'}$. Если же

$$\xi(\omega, t) \leq \operatorname{tg} \frac{\pi\,\alpha}{2}; \quad -1 < \alpha < 0, \quad \text{т.е.} \quad \gamma(\omega, t) \geq -\frac{\pi\,\alpha}{2}, \tag{4.14}$$

то

$$\left| \frac{F(\bar{\omega}, t)\,\omega_0}{\bar{\omega}} \right| \leq \omega^{\alpha}\, D'(\omega, t). \tag{4.15}$$

Неравенства (4.12) и (4.15) показывают, что, если $\xi(\omega, t) \not\to 0$ при $\omega \to \infty$, то, в зависимости от знака $\operatorname{Re} F(\omega, t)$, $\varphi(\omega, t)$ либо возрастает степенным образом, если $\operatorname{Re} F(\omega, t) > 0$, либо падает, если $\operatorname{Re} F(\omega, t) < 0$. (Напомним, что мы рассматриваем область значений t, для которых $A(\omega, t) > 0$.) Первый случай может осуществляться только при $t > 0$. При этом, если $F(\omega, t)$ возрастает максимальным образом (насыщает ограничение Фруассара), то при $\omega \to \infty$ $F(\omega, 4\,m^2) > \omega^{2-\varepsilon}$. В таком случае $\xi(\omega, 4\,m^2) \to \infty$. Одновременно в этом случае $\xi(\omega, 0) \to 0$. Из этого факта можно сделать одно любопытное заключение. Рассматривая разложение $F(\omega, t)$ в ряд по полиномам Лежандра (2.24), мы видим, что одновременное выполнение условий $\xi(\omega, 4\,m^2) \to \infty$ и $\xi(\omega, 0) \to 0$ возможно только в том случае, если для некоторых l $r_l(\omega)/a_l(\omega) \to 0$, а для других $r_l(\omega)/a_l(\omega) \to \infty$. Вследствие условия унитарности (2.22) последнее возможно, только если $a_l(\omega) \to 0$. Поскольку мы рассматриваем случай максимально быстрого роста сечений, такие парциальные волны не вносят существенного вклада в $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$, однако только благодаря им возникает самосогласованная картина, т.е. только благодаря им $F(\omega, 4\,m^2)$ удовлетворяет требованиям, вытекающим из условий перекрестной симметрии и аналитичности.

Случай степенного падения функции $\varphi(\omega, t)$ наблюдается при $t < 0$. В этом случае $\operatorname{Re} \varphi(\omega, t) < 0$, пока $\varphi(\omega, t) > \omega^{-1+\varepsilon}$ (конечно, если для этих t выполнено условие $A(\omega, t) > 0$).

Рассмотрим теперь подробнее случай $t = 0$. Обратимся сначала к асимптотическим энергиям. Из неравенства Фруассара–Мартена и равенства (4.10) сразу следует абсолютное ограничение на $\xi\,(\omega, 0)$:

$$\xi\,(\omega, 0) < \frac{\pi}{\ln\,\omega}. \tag{4.16}$$

Далее, очевидно, что случай асимптотически постоянного полного сечения возможен только в случае сходимости $\int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'}$.

Если $(\ln\,\omega)^{\gamma_1} < |\varphi\,(\omega, 0)| < (\ln\,\omega)^{\gamma_2}$, то

$$\frac{\pi\,\gamma_1}{2\,\ln\,\omega} < \xi\,(\omega, 0) < \frac{\pi\,\gamma_2}{2\,\ln\,\omega}. \tag{4.17}$$

Таким образом, только в случае асимптотически постоянных полных сечений $\xi\,(\omega, 0)$ может быстро (быстрее, чем $1/((\ln\,\omega)^{1+\varepsilon})$) стремиться к нулю.

Подчеркнем, что мы говорим об асимптотическом поведении, по существу, лишь для простоты. На самом деле все эти закономерности проявляются при конечных энергиях, важно лишь, чтобы соответствующие ограничения на $\xi\,(\omega, t)$ (или $|\varphi\,(\omega, t)|$) выполнялись на достаточно большом интервале энергий.

Из (4.3) можно получить равенство, связывающее интегралы от $\gamma\,(\omega, t)$ и $\frac{d\,\ln\,\varphi\,(\omega, t)}{d\,\omega}$. Поскольку вывод этого соотношения полностью аналогичен выводу (5.13), выпишем его сразу ($\omega \gg \omega_0$):

$$-2\,\omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma\,(\omega', t)\,\omega'\,d\,\omega'}{\left(\omega'^2 + \omega^2\right)^2} = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\,\ln\,|\,\varphi\,(\omega', t)|}{d\,\ln\,\omega'}\,\frac{d\,\omega'}{(\omega'^2 + \omega^2)}. \tag{4.18}$$

Теперь в обоих интегралах основную роль играет интервал $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$. Воспользуемся оценками (5.8) и (5.14). При этом, как и раньше, с помощью условия (4.5) можно получить абсолютные оценки на вклады интервалов $(\omega_0, \alpha\,\omega)$ и $(\alpha^{-1}\,\omega, \infty)$ в интеграл в левой части. Опуская поправочные члены, имеем соотношение

$$\gamma\,(\bar\omega_1, t) = -\frac{\pi}{2}\,\frac{d\,\ln\,|\varphi\,(\bar\omega_2, t)|}{d\,\ln\,\bar\omega_2}, \quad \alpha\,\omega \le \omega_i \le \alpha^{-1}\,\omega, \quad i = 1, 2, \tag{4.19}$$

которое показывает, что, если «в среднем» в интервале $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$, $\gamma\,(\omega, t) < 0$, т.е. $\mathrm{Re}\,F\,(\omega, t) > 0$, то «в среднем» $|\varphi\,(\omega, t)|$ возрастает в этом интервале.

Из результатов п. 5.1, следует, что если $F\,(\omega, t)$ не имеет сильных осцилляций, то равенство (4.19) сводится к

$$\gamma\,(\omega, t) = -\frac{\pi}{2}\,\frac{d\,\ln\,|\varphi\,(\omega, t)|}{d\,\ln\,\omega}\,(1 + \varepsilon\,(\omega, t)), \tag{4.19'}$$

где $\varepsilon(\omega,t) \ll 1$, если малы осцилляции $F(\omega,t)$ на интервале $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$, где $\alpha \ll 1$. В асимптотической области $\varepsilon(\omega,t) \to 0$, если выполнены соответствующие ограничения на осцилляции $F(\omega,t)$ (см. разд. 5).

В заключение отметим, что соотношения (4.3), (4.19) и (4.19$'$) могут быть полезны для определения $\gamma(\omega,t)$, т.е. $\xi(\omega,t)$, непосредственно из экспериментов по измерению дифференциальных сечений при малых физических t.

4.2. Соотношения между дифференциальными сечениями частицы и античастицы на одной и той же мишени. Чрезвычайно интересен тот факт, что унитарность и аналитичность приводят к равенству дифференциальных сечений вперед частицы и античастицы на одной и той же мишени при высоких энергиях. Этот результат остается справедливым для $t > 0$, а также для тех физических t, при которых $A(\omega,t) > 0$. Однако при весьма либеральных условиях он обобщается и на произвольные t. Мы начнем, естественно, с тех t, при которых у $F_{\pm}(\omega,t)$ нет нулей. В этом случае справедливы соотношения (2.33) и (2.34). Приравнивая их в чисто мнимой точке, придем к соотношению ($\omega \gg \omega_0$):

$$\omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega',t)}{F_-(\omega',t)} \right| \frac{d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0{}^2}(\omega'^2 + \omega^2)} = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta^-(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2}. \tag{4.20}$$

Для оценки правой части соотношения (4.20) разобьем весь интервал, как обычно, на интервалы $(\omega_0, \alpha\,\omega)$, $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$, $(\alpha^{-1}\,\omega, \infty)$ и, пользуясь теоремой о среднем, получим

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta^-(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\pi}{2}\,\delta^-(\bar{\omega},t) + \alpha \left(\delta^-(\bar{\omega}_1,t) + \delta^-(\bar{\omega}_2,t) - 2\,\delta(\bar{\omega},t) \right) \right],$$
$$\omega_0 \le \bar{\omega}_1 \le \alpha\,\omega; \quad \alpha\,\omega \le \bar{\omega} \le \alpha^{-1}\,\omega; \quad \alpha^{-1}\,\omega \le \bar{\omega}_2 < \infty. \tag{4.21}$$

Учитывая, что, согласно (2.35), $|\,\delta^-(\omega,t)| < \pi$, имеем абсолютную оценку на рассматриваемый интеграл

$$\left| \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta^-(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} \right| < \frac{\pi^2}{2\,\omega}. \tag{4.22}$$

Вследствие неравенства (4.22) определенные ограничения на поведение отношения дифференциальных сечений частицы и античастицы существуют при всех энергиях. При асимптотических энергиях

$$\left| \frac{F_+(\omega,t)}{F_-(\omega,t)} \right| \to 1 \tag{4.23}$$

хотя бы на последовательности энергий ω_i такой, что $\omega_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Действительно, легко видеть, что в противоположном случае, т.е. если $\left| \ln \left| \dfrac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| \right| > C$, начиная с некоторого $\omega = \tilde{\omega}$, то интеграл в левой части удовлетворяет неравенству:

$$\omega \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - {\omega_0}^2}(\omega'^2 + \omega^2)} > \frac{1}{\omega} \left[C \ln \frac{\omega}{\tilde{\omega}} + A(\omega_1, t) \right], \tag{4.24}$$

где $A(\omega_1, t)$ — вклад интервала $(\omega_0, \tilde{\omega})$ в рассматриваемый интеграл. Для определенности считаем, что $\left| \dfrac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| > 1$, если $\omega > \tilde{\omega}$. Очевидно, что неравенство (4.24) противоречит ограничению (4.22).

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Согласно (4.21) интеграл в правой части равенства (4.20) в основном определяется поведением $\delta(\omega, t)$ в интервале $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$.

Рассмотрим теперь следствия из равенства (4.21). Начнем с асимптотических энергий. Выбирая α таким образом, чтобы $\alpha \to 0$, $\alpha\,\omega \to \infty$, получим

$$\omega^2 \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - {\omega_0}^2}(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{\pi}{2}\,\delta^-(\bar{\omega}, t)\,(1 + \varepsilon(\omega, t)), \tag{4.25}$$

$$\bar{\omega} \to \infty, \qquad \varepsilon(\omega, t) \to 0, \qquad \text{если} \qquad \omega \to \infty.$$

Таким образом, если $\delta^-(\omega, t) \to 0$, то, объединяя (4.25) с условием $\ln \left| \dfrac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| \to 0$, найдем, что

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - {\omega_0}^2}} \to 0, \quad \text{если} \quad \delta^-(\bar{\omega}, t) \to 0. \tag{4.26}$$

Чтобы убедиться в справедливости (4.26), достаточно оценить интеграл в левой части соотношения (4.25) тем же способом, каким мы оценивали интеграл в правой части равенства (4.3). В результате получим

$$\omega^2 \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - {\omega_0}^2}(\omega'^2 + \omega^2)} =$$

$$= \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - {\omega_0}^2}} +$$

$$+\ln 2\left(\ln\frac{F_+(\bar{\omega}_1,t)}{F_-(\bar{\omega}_1,t)}-\ln\frac{F_+(\bar{\omega}_2,t)}{F_-(\bar{\omega}_2,t)}\right)+O(\alpha); \tag{4.27}$$

$$\alpha\,\omega\le\bar{\omega}_1\le\omega;\quad \omega\le\bar{\omega}_2\le\alpha^{-1}\,\omega.$$

Условие $\delta^-(\omega,t)\to 0$ довольно естественно при любом асимптотическом поведении полных сечений, за исключением их быстрого (степенного) падения, т.е. оно справедливо, когда

$$\sigma_{\rm tot}(\omega)>\omega^{-\varepsilon},\qquad \omega\to\infty. \tag{4.28}$$

В этом случае, как было показано выше, $\xi(\omega,t)\to 0$. Если, кроме того, $F_a(\omega,t)/F(\omega,t)\to 0$ (это условие выполняется в рамках существующих моделей), то и $R_\pm(\omega,t)/A_\pm(\omega,t)\to 0$, т.е. $\delta^-(\omega,t)\to 0$.

Отметим, что вследствие оценок (4.21) и (4.25) легко получить обобщение (4.25) на конечные энергии, а именно: интеграл в левой части этого соотношения должен быть мал, если $\delta^-(\omega',t)\ll 1$ и $|F_+(\omega,t)/F_-(\omega,t)|\approx 1$ при $\omega'>\omega$.

В том случае, когда выполнено неравенство (4.28) (этот случай должен иметь место, если поведение сечений при более высоких энергиях не будет кардинально отличаться от наблюдаемого при современных энергиях), мы можем доказать более сильное утверждение, чем равенство дифференциальных сечений вперед при асимптотических энергиях [117]. Можно доказать, что также

$$\frac{\sigma_+(\omega)}{\sigma_-(\omega)}\to 1, \tag{4.29}$$

если только

$$\left|\frac{R_+(\omega,0)}{A_+(\omega,0)}\right|<\infty. \tag{4.30}$$

Если, кроме того,

$$\left|\frac{R_+(\omega,0)}{A_+(\omega,0)}\right|>C, \tag{4.31}$$

то

$$\frac{\gamma_+(\omega,0)}{\gamma_-(\omega,0)}\to -1,\quad \text{т.е.}\quad \frac{\sigma_+(\omega)}{\sigma_-(\omega)}\to 1,\quad \frac{R_+(\omega,0)}{R_-(\omega,0)}\to -1, \tag{4.32}$$

$\gamma_\pm(\omega,t)$ связаны с $\delta_\pm(\omega,t)$ так же, как $\gamma(\omega,t)$ связана с $\delta(\omega,t)$ (см. (4.1)).

Ясно, что достаточно доказать соотношение (4.32), поскольку если $\dfrac{R_\pm(\omega,0)}{A_\pm(\omega,0)}\to 0$, то (4.29) — следствие условия (4.23).

Для доказательства (4.32) воспользуемся соотношением, аналогичным (4.3), но для $F_+(\omega,t)F_-(\omega,t)$. Оно имеет тот же вид с очевидными заменами:

$$\gamma(\omega,t)\to\gamma_+(\omega,t)+\gamma_-(\omega,t),\quad \varphi(\omega,t)\to\tilde{\varphi}(\omega,t)=\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\,F_+(\omega,t)F_-(\omega,t).$$

Если (4.32) не имеет места, т.е. если существует константа C такая, что $|\gamma_+(\omega,0)+\gamma_-(\omega,0)|>C$, то, оценивая соответствующий интеграл, получим, что либо $F_\pm(\omega,0)$ возрастают степенным образом в противоречии с неравенством Фруассара–Мартена, либо падают таким же образом в противоречии с исходным предположением.

Таким образом, во всех случаях, когда полные сечения не падают быстро, что наиболее вероятно с физической точки зрения, «почти всегда» $\sigma_+(\omega)/\sigma_-(\omega)\to 1$. Единственное исключение составляет случай асимптотически чисто вещественных амплитуд $\left(\left|\dfrac{R_\pm(\omega,0)}{A_\pm(\omega,0)}\right|\to\infty\right)$. В этом случае выполнено второе из соотношений в (4.32).

В заключение коротко рассмотрим случай произвольных t. В этом случае нет никаких ограничений на число нулей амплитуды рассеяния. Однако, следуя Мейману [37], мы можем исключить из рассмотрения эти нули, воспользовавшись условиями кроссинг-симметрии и действительности. Представим $F_\pm(\omega,t)$ в виде

$$F_\pm(\omega,t)=\prod_{i=1}^{\infty}(\omega\mp\omega_i)(\omega\mp\omega_i^*)\,f_\pm(\omega,t). \tag{4.33}$$

Можно показать [37], что при достаточно общих предположениях $|\prod_{i=1}^{\infty}(\omega\mp\omega_i)(\omega\mp\omega_i^*)|<\infty$, и, следовательно, формула (4.33) имеет смысл. Очевидно,

$$\left|\frac{F_+(\omega,t)}{F_-(\omega,t)}\right|=\left|\frac{f_+(\omega,t)}{f_-(\omega,t)}\right|,\quad \text{если}\quad \omega\in\mathbb{R}. \tag{4.34}$$

К функции $|f_+(\omega,t)/f_-(\omega,t)|$ мы уже можем применить проведенное рассмотрение и получить для нее равенство, аналогичное (4.20). Однако теперь мы уже не имеем ограничений на $\delta^-(\omega,t)$. Тем не менее можно легко доказать, сравнивая левую и правую части равенства (4.20), что

$$\left|\frac{F_+(\omega,t)}{F_-(\omega,t)}\right|\to 1,\quad \text{если}\quad \frac{|\tilde{\delta}_+(\omega,t)-\tilde{\delta}_-(\omega,t)|}{\ln\omega}\to 0, \tag{4.35}$$

где $\tilde{\delta}_\pm(\omega,t)$ — фазы функций $f_\pm(\omega,t)$. Напомним, что доказательство соотношения (4.23) для произвольных t при довольно общих условиях было получено в работах [49–51].

5. ЛОКАЛЬНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

5.1. Неосциллирующие или слабо осциллирующие амплитуды рассеяния. В этом разделе будет изучена возможность замены ДС их локальными аналогами. Сначала мы покажем, что отсутствие при высоких энергиях сильных осцилляций у $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$ приводит к существованию «почти» локальных дисперсионных соотношений. Далее будут построены сильно осциллирующие функции и показано, что для них связь между $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$ носит принципиально иной характер, чем в случае отсутствия осцилляций.

Если у $F_{s,a}(\omega, t)$ нет сильных осцилляций, то их можно записать в виде

$$F_{s,a}(\omega, t) = \Psi_{s,a}(\omega)\, \varphi(\omega, t),$$

$\Psi_{s,a}(\omega)$ — функции, обладающие обычными свойствами аналитичности, действительности, перекрестной симметрии, такие, что при $\omega \gg \omega_0$

$$\Psi_{s,a}(\omega) \cong \omega^{\beta}\, C_{s,a}(\beta), \tag{5.1}$$

где

$$C_{s,}(\beta) = -\,\exp\left(\frac{-i\,\pi\,\beta}{2}\right); \qquad C_a(\beta) = i\, C_{s,}(\beta),$$

$\varphi(\omega, t)$ — медленно меняющаяся при высоких энергиях функция (условие (5.3)).

Легко видеть, что $\varphi(\omega, t)$ обладает таким же, как и симметричная амплитуда, свойством перекрестной симметрии (2.2). Мы выбираем β так, чтобы $\varphi(\omega, t)$ удовлетворяла условию (2.4$'$).

Тогда интегралы от $\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)$ и $\operatorname{Re}\varphi(\omega, t)$ связаны между собой равенством, аналогичным (2.19$'$), т.е.

$$-\,\omega^2 \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'\,(\omega'^2 + \omega^2)} = \sqrt{\omega^2 + \omega_0{}^2} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\varphi(\omega', t)\, \omega'\, d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0{}^2}\,(\omega'^2 + \omega^2)}. \tag{5.2}$$

В действительности мы перешли к функции $\varphi(\omega, t) - \varphi(0, t)$, как обычно, не изменяя обозначений.

Предположим, что внутри интервала $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$ функция $\varphi(\omega', t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered}
\left|\frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t) - \operatorname{Im}\varphi(\omega, t)}{\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\operatorname{Re}\varphi(\omega', t) - \operatorname{Re}\varphi(\omega, t)}{\operatorname{Re}\varphi(\omega, t)}\right| \ll 1, \\
\left|\frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t)}{\operatorname{Re}\varphi(\omega', t)}\right| \ll 1, \quad \alpha\,\omega < \omega' < \alpha^{-1}\,\omega.
\end{gathered} \tag{5.3}$$

Оценим теперь интегралы в (5.2). Сначала оценим вклад интервала (ω_0, ω) в интеграл в левой части (5.2). Очевидно, что

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'\,(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2} \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'} - \frac{1}{\omega^2} \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t)\, d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\omega^2}\,(I_1 - I_2). \tag{5.4}$$

Для оценки I_2 разделим интервал (ω_0, ω) на два: $(\omega_0, \alpha\,\omega)$ и $(\alpha\,\omega, \omega)$. Затем, используя теорему о среднем, получим, пренебрегая членом, пропорциональным ${\omega_0}^2/\omega^2$:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Im}\varphi\,(\omega_1, t)\,\ln(1+\alpha^2) + \operatorname{Im}\varphi\,(\omega_2, t)\,\ln\frac{2}{1+\alpha^2}\right], \qquad \omega_0 < \omega_1 < \alpha\,\omega, \qquad \alpha\,\omega < \omega_2 < \omega. \tag{5.5}$$

Для оценки интеграла по интервалу (ω, ∞) разделим его на интегралы по интервалам $(\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$ и $(\alpha^{-1}\,\omega, \infty)$. Снова пользуясь теоремой о среднем, получим

$$\int\limits_{\omega}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'\,({\omega'}^2+\omega^2)}) = \frac{1}{2\,\omega^2}\left[\operatorname{Im}\varphi\,(\omega_3, t)\ln\frac{2}{1+\alpha^2} + \operatorname{Im}\varphi\,(\omega_4, t)\,\ln(1+\alpha^2)\right],$$

$$\omega < \omega_3 < \alpha^{-1}\,\omega, \qquad \alpha^{-1}\,\omega < \omega_4 < \alpha^{-2}\,\omega. \tag{5.6}$$

Отметим, что вследствие быстрой сходимости интеграла, можно заменить $(\alpha^{-1}\,\omega, \infty)$ на интервал $(\alpha^{-1}\,\omega, \alpha^{-2}\,\omega)$.

Итак, согласно (5.4)–(5.6),

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'\,({\omega'}^2+\omega^2)} =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left[\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{\operatorname{Im}\varphi\,(\omega', t) d\,\omega'}{\omega'} + (\operatorname{Im}\varphi\,(\omega_3, t) - \operatorname{Im}\varphi\,(\omega_2, t))\ln 2 + O(\alpha^2)\right]. \tag{5.7}$$

Оценим теперь интеграл в правой части. Чтобы не усложнять формулы, рассмотрим достаточно большие ω. Реально это означает, что одновременно $\alpha \ll 1$ и $\alpha\,\omega \gg \omega_0$. В этом случае $\sqrt{\omega^2 + {\omega_0}^2} \cong \omega$, а рассматриваемый интеграл можно заменить на $\displaystyle\int_{\omega_0}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\varphi\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^2+\omega^2}$. Осталось разбить область интегрирования на три: $(\omega_0, \alpha\,\omega)$, $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$ и $(\alpha^{-1}\,\omega, \infty)$ и воспользоваться теоремой о среднем. В результате имеем (с точностью до высших поправок по α):

$$\begin{gathered}\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\varphi\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{{\omega'}^2+\omega^2} = \\ = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{Re}\varphi\,(\bar\omega, t) + \alpha\,\left(\operatorname{Re}\varphi\,(\bar\omega_1, t) + \operatorname{Re}\varphi\,(\bar\omega_2, t) - 2\operatorname{Re}\varphi\,(\bar\omega, t)\right)\right]; \\ \omega_0 < \bar\omega_1 < \alpha\,\omega, \qquad \alpha\,\omega < \bar\omega < \alpha^{-1}\,\omega, \qquad \alpha^{-1}\,\omega < \bar\omega_2 < \infty.\end{gathered} \tag{5.8}$$

Таким образом, согласно (5.3), (5.7) и (5.8),

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \frac{\operatorname{Im}\varphi\,(\omega', t)\,d\,\omega'}{\omega'} = -\,\frac{\pi}{2}\operatorname{Re}\varphi\,(\omega, t)\,[1 + \varepsilon\,(\omega, t)], \tag{5.9}$$

где $\varepsilon\,(\omega, t) \ll 1$.

В наиболее важном случае рассеяния вперед экспериментальные данные говорят о том, что поправочные члены должны быть малы при энергиях современных ускорителей.

Действительно, мы можем записать

$$F\,(\omega, 0) = i\,\omega\,\varphi\,(\omega, 0). \tag{5.10}$$

Очевидно,

$$\frac{\operatorname{Im}\varphi\,(\omega, 0)}{\operatorname{Re}\varphi\,(\omega, 0)} = -\,\frac{R\,(\omega, 0)}{A\,(\omega, 0)}.$$

Последняя величина имеет порядок 0,12–0,15. Кроме того, поправка в (5.7) является разностью значений медленно меняющейся функции $R\,(\omega, 0)/\omega$. Далее, $\operatorname{Re}\varphi\,(\omega, 0) \sim \sigma_{\rm tot}\,(\omega)$. Малость поправочного члена в (5.8) определяется не только медленным изменением полных сечений, но и тем фактом, что $\sigma_{\rm tot}\,(\omega)$ монотонно возрастает при $\omega > 100$ ГэВ^2.

Предположим теперь, что при $\omega \to \infty$ функция $\varphi\,(\omega, t)$ в интервале $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$ удовлетворяет условиям, которые могут быть получены из условий (5.3) естественной заменой знака $\ll$ на $\to 0$. Тогда из равенств (5.7) и (5.8) непосредственно следует, что в (5.9) $\varepsilon\,(\omega, t) \to 0$ при $\omega \to \infty$.

Отметим, что если

$$\omega^{-\,\varepsilon} < |\varphi\,(\omega, t)| < \omega^{\varepsilon}, \qquad \omega \to \infty, \tag{5.11}$$

то существует последовательность ω_i такая, что $\forall\,\nu\;|\varphi\,(\nu\,\omega_i, t)/\varphi\,(\omega_i, t)| \to 1$ при $\omega \to \infty$. Действительно, легко видеть, что если $|\varphi\,(\nu\,\omega, t)/\varphi\,(\omega, t)| > 1 + \Delta$ или $|\varphi\,(\nu\,\omega, t)/\varphi\,(\omega, t)| < 1 - \Delta$, где $\Delta > 0$ — некоторое фиксированное число, то $\varphi\,(\omega, t)$ растет или падает степенным образом.

Далее из соотношения (5.11) с помощью вычислений, аналогичных проведенным в разд. 3, легко заключить, что существует последовательность ω_i такая, что $\operatorname{Im}\varphi\,(\omega_i, t)/\operatorname{Re}\varphi\,(\omega_i, t) \to 0$ при $\omega_i \to \infty$.

Таким образом, при $\omega_i \to \infty$ смысл сделанных предположений в том, что рассмотренные выше следствия условий (5.11) выполнены при всех асимптотических энергиях. Вместе с тем проведенное рассмотрение показывает, что достаточно выполнения требуемых условий внутри интервала $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$. При $\omega \to \infty$ α может быть взято произвольно малым и $\varepsilon\,(\omega, t) \to 0$.

Если предположить, что $\dfrac{d\,\varepsilon\,(\omega,t)}{d\,\omega} \ll \dfrac{d\,\mathrm{Re}\,\varphi\,(\omega,t)}{d\,\omega}$, то из (5.9) следует, что

$$\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega,t) = -\,\frac{\pi}{2}\,\frac{d\,\mathrm{Re}\,\varphi\,(\omega,t)}{d\,\ln\,\omega}. \tag{5.12}$$

Равенство (5.12) совпадает с локальными ДС, если в них ограничиться первым членом (см., например, [103]).

Естественно найти условия, при которых при дифференцировании (5.9) можно пренебречь $\dfrac{d\,\varepsilon\,(\omega,t)}{d\,\omega}$. Для этой цели найдем соотношение, связывающее интегралы от $\dfrac{d\,\mathrm{Re}\,\varphi\,(\omega,t)}{d\,\omega}$ и $\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega,t)$.

Рассмотрим случай $\omega \gg \omega_0$, это означает, что (5.2) можно заменить соотношением

$$-\,\omega\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'^2+\omega^2} = \frac{C\,(\omega_0,\omega_1,t)}{\omega^2} + \int\limits_{\omega_1}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\varphi\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'^2+\omega^2}, \tag{5.2$'$}$$

$$C\,(\omega_0,\omega_1,t) = \int\limits_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{\omega'\,\mathrm{Re}\,\varphi\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\sqrt{\omega'^2-\omega_0{}^2}}, \quad \omega_0 \ll \omega_1 \ll \omega.$$

Ниже мы пренебрегаем членами $\sim \omega_1/\omega$, результаты не зависят от выбора точки ω_1. Не учитывая, ввиду ее малости, производную от члена $\dfrac{C\,(\omega_0,\omega_1,t)}{\omega^2}$, после дифференцирования и интегрирования по частям интеграла от $\mathrm{Re}\,\varphi\,(\omega',t)$ придем к соотношению

$$-\,2\,\omega\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\omega'\,\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{(\omega'^2+\omega^2)^2} = \int\limits_{\omega_1}^{\infty}\frac{\psi\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{\omega'^2+\omega^2}, \tag{5.13}$$

где $\psi\,(\omega,t) = \omega\,\dfrac{d\,\mathrm{Re}\,\varphi\,(\omega,t)}{d\,\omega}$.

Соотношение (5.13) замечательно тем, что интегралы как в левой, так и в правой части определяются поведением $\varphi\,(\omega,t)$ и $\psi\,(\omega,t)$ в интервале $(\alpha\,\omega,\alpha^{-1}\,\omega)$, если $\alpha \ll 1$. Действительно, оценивая, как обычно, отдельно интегралы по интервалам $(\omega_0,\alpha\,\omega)$, $(\alpha\,\omega,\alpha^{-1}\,\omega)$ и $(\alpha^{-1}\,\omega,\infty)$, имеем

$$\begin{gathered} -2\omega\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\omega'\,\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega',t)\,d\,\omega'}{(\omega'^2+\omega^2)^2} = \\ = -\frac{1}{\omega}\left[\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega_2,t) + \alpha^2\left(\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega_1,t) + \mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega_3,t) - 2\,\mathrm{Im}\,\varphi\,(\omega_2,t)\right)\right], \\ \omega_0 < \omega_1 < \alpha\,\omega, \quad \alpha\,\omega < \omega_2 < \alpha^{-1}\,\omega, \quad \alpha^{-1}\,\omega < \omega_3 < \infty. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Для оценки интеграла в правой части (5.13) достаточно воспользоваться формулой (5.8). С точностью до поправочных членов имеем

$$\operatorname{Im}\varphi(\omega_2, t) = -\frac{\pi}{2}\,\frac{d\operatorname{Re}\varphi(\omega, t)}{d\ln\omega}\bigg|_{\omega=\omega_4}, \qquad \alpha\,\omega < \omega_4 < \alpha^{-1}\,\omega. \tag{5.15}$$

Согласно (5.10), равенство (5.15) означает, что если $R(\omega, 0) > 0$ в интервале $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$, то $\sigma_{\mathrm{tot}}(\omega)$ в этом интервале должно возрастать (по крайней мере, при некоторых ω, принадлежащих данному интервалу).

Предположим теперь, что $\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)$ и $\psi(\omega, t)$ медленно меняются в рассматриваемом интервале, т.е. что

$$\frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t) - \operatorname{Im}\varphi(\omega, t)}{\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)} \ll 1; \quad \frac{\psi(\omega', t) - \psi(\omega, t)}{\psi(\omega, t)} \ll 1; \\ \alpha\,\omega < \omega' < \alpha^{-1}\,\omega. \tag{5.16}$$

Тогда, очевидно, можно в формуле (5.15) положить $\omega_2 = \omega_4 = \omega$ и прийти к равенству (5.12).

Приведем теперь более тонкую оценку, рассмотрев отдельно интегралы по интервалам $(\alpha\,\omega, \omega)$ и $(\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$. Опуская члены, пропорциональные α, имеем

$$-2\,\omega\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\omega'\operatorname{Im}\varphi(\omega', t)\,d\omega'}{(\omega'^2+\omega^2)^2} = \\ = -\frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)\left(1 + \frac{\operatorname{Im}\varphi(\bar\omega_1, t) + \operatorname{Im}\varphi(\bar\omega_2, t) - 2\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)}{2\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)}\right);$$

$$\alpha\,\omega < \bar\omega_1 < \omega, \qquad \omega < \bar\omega_2 < \alpha^{-1}\,\omega, \tag{5.17}$$

$$\int\limits_{\omega_0}^{\infty}\frac{\psi(\omega', t)\,d\omega'}{\omega'^2+\omega^2} = \frac{\pi}{2\,\omega}\,\psi(\omega, t)\left(1 + \frac{\psi(\bar\omega_3, t) + \psi(\bar\omega_4, t) - 2\,\psi(\omega, t)}{2\,\psi(\omega, t)}\right),$$

$$\alpha\,\omega < \bar\omega_3 < \omega, \qquad \omega < \bar\omega_4 < \alpha^{-1}\,\omega. \tag{5.18}$$

Очевидно, что если $\varphi(\omega, t)$ и $\psi(\omega, t)$ — монотонные функции в интервале $(\alpha\,\omega, \alpha^{-1}\,\omega)$, то поправочные члены в (5.17) и (5.18) приобретают дополнительную малость.

Итак, мы убедились в том, что если осцилляции амплитуды рассеяния, причем как ее реальной, так и мнимой части, малы, то при высоких энергиях ДС сводятся к «почти локальным» соотношениям между $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$.

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о возможности использования локальных ДС для определения $F_-(\omega, 0)$ из экспериментальных данных по $A_+(\omega,0)$ и $R_+(\omega,0)$. Представим $F_\pm(\omega,0)$ в виде

$$F_\pm(\omega,0)=\frac{1}{2}\left(F_s(\omega,0)\pm F_a(\omega,0)\right).$$

Поскольку $\sigma_+(\omega)$ возрастает при высоких энергиях, то $F_s(\omega,0)\sim\omega\,\varphi_s(\omega,0)$, где $\varphi_s(\omega,0)$ — медленно растущая функция. Это означает, что $\dfrac{R_s(\omega,0)}{A_s(\omega,0)}\ll 1$. Если осцилляции $R_s(\omega,0)$ малы, то $R_s(\omega,0)$ может быть определена из соотношения (5.12). Сравнивая $R_s(\omega,0)$ и $R_+(\omega,0)$, можем найти $R_-(\omega,0)$. Отметим, что, если $F_a(\omega,0)$ вносит заметный вклад в $F_\pm(\omega,0)$, то это, в основном, вклад в $R_\pm(\omega,0)$. Действительно, если $F_a(\omega,0)\sim\omega\,\varphi_a(\omega,0)$, где $\varphi_a(\omega,0)$ — медленно растущая или падающая функция, то $\dfrac{R_a(\omega,0)}{A_a(\omega,0)}\gg 1$. Таким образом, сравнение вычисленной из локальных ДС $R_s(\omega,0)$ с экспериментально наблюдаемой величиной $R_+(\omega,0)$ даст возможность судить о величине вклада $F_a(\omega,0)$ в $F_\pm(\omega,0)$.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и при $t<0$, если $|t|$ достаточно мал. В этом случае весьма вероятно, что $|F_+(\omega,t)|\cong A_+(\omega,t)$.

5.2. Сильно осциллирующие амплитуды рассеяния. Рассмотрим теперь пример сильно осциллирующей амплитуды рассеяния. Рассмотрим свойства таких функций, которые при $\omega\gg\omega_0$ имеют вид

$$F_{s,a}(\omega,t)=\omega^\beta\,C_{s,a}(\beta)\,\varphi(\omega,t)\,\left[a+b\,\sin\left(\ln\,\omega-\frac{i\,\pi}{2}\right)\right], \tag{5.19}$$

где $C_{s,a}(\beta)$ те же, что и в (5.1).

Разумеется, $F_{s,a}(\omega,t)$ могут быть линейными комбинациями функций типа (5.19). В частности, легко построить такую линейную комбинацию, что $A(\omega_i,t)\sim{\omega_i}^{\beta_1}$, $A(\tilde{\omega}_i,t)\sim\tilde{\omega}_i^{\beta_2}$. Ниже мы рассмотрим только простейший вариант осциллирующей амплитуды: пусть при $\omega\gg\omega_0$

$$F(\omega,0)=i\,\omega\,\left[a+b\,\sin\left(\ln\,\omega-\frac{i\,\pi}{2}\right)\right],\quad a>0,\quad a>b\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}. \tag{5.19$'$}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
A(\omega,0)&=\omega\,\left(a+b\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{2}\cdot\sin\,\ln\,\omega\right),\\
R(\omega,0)&=-\,b\,\omega\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\cdot\cos\,\ln\,\omega,\\
\xi(\omega,0)&=-\frac{b\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\,\ln\,\omega}{a+b\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\,\ln\,\omega}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Мы видим, что $\xi(\omega, 0)$ — осциллирующая функция. Далее, очевидно,

$$\frac{d}{d \ln \omega} \frac{A(\omega, 0)}{\omega} = - \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \frac{R(\omega, 0)}{\omega}. \tag{5.21}$$

Различие в формулах (5.12) и (5.21) демонстрирует тот факт, что, в отличие от ДС, для справедливости локальных ДС необходимы дополнительные условия.

Рассмотрим теперь пример амплитуды, являющейся суммой монотонной и осциллирующей функций:

$$F(\omega, 0) = i\omega \left[\left(\ln \omega - \frac{i\pi}{2} \right)^{\gamma} + b \sin \left(\ln \omega - \frac{i\pi}{2} \right) \right], \quad \gamma > 0. \tag{5.22}$$

Очевидно, что при $\omega \to \infty$ осцилляции $A(\omega, 0)$ малы. Однако если $\gamma < 1$, то $R(\omega, 0)$ осциллирует сильно и соотношение (5.12) не имеет места. Таким образом, для справедливости локальных ДС необходимо отсутствие сильных осцилляций как у $A(\omega, 0)$, так и у $R(\omega, 0)$.

6. СТРОГИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СВЕРХУ НА ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ И НА АМПЛИТУДУ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

6.1. Асимптотические и конечноэнергетические верхние границы. Одним из важнейших результатов аксиоматической теории рассеяния является неравенство Фруассара–Мартена [69]:

$$A(\omega, 0) \leq \frac{\omega}{8\, m_\pi^2} \ln^2 \frac{\omega}{\omega_u}. \tag{6.1}$$

Согласно оптической теореме, это неравенство эквивалентно ограничению на полное сечение:

$$\sigma_{\text{tot}}(\omega) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2 \frac{\omega}{\omega_u}. \tag{6.2}$$

Ниже мы положим $m_\pi^2 = 1$. В общем случае ω_u — неопределенный параметр и поэтому неравенство (6.2) справедливо только при асимптотических энергиях. Строго говоря, в этой области справедливо более сильное неравенство (см. в [111] ф-лу (3.12b)):

$$A(\omega, 0) \leq \frac{\omega}{8\, m_\pi^2} \ln^2 \frac{\omega}{(\ln \omega)^{3/2}}. \tag{6.1$'$}$$

Неравенства (6.1) и (6.1$'$), вообще говоря, не ограничивают поведение полных сечений при конечных энергиях.

Однако для некоторых процессов мы можем получить такие ограничения. Из абсолютных ограничений на амплитуду $\pi^0\,\pi^0$-рассеяния в нефизической области, полученных Мартеном [68] и далее усиленных в ряде работ [69–74], вытекают неравенства, при конечных энергиях аналогичные (6.1). Фактически в этом случае численные ограничения на амплитуду рассеяния существуют при всех физических энергиях. Если же $\omega \gg \omega_0$ (реально $\omega > 1$ ГэВ^2), то эти ограничения имеют тот же функциональный вид, что и (6.1). Учитывая, что вследствие кварковой структуры полные сечения $\pi^0\pi^0$-; πN-; NN-рассеяний имеют один и тот же порядок (в простых моделях можно написать соотношения между этими сечениями, которые выполняются с хорошей степенью точности), верхняя граница для $\pi^0\,\pi^0$-рассеяния может служить указанием на абсолютные верхние границы для других адронных амплитуд. В случае πN-рассеяния для вывода конечноэнергетических аналогов неравенства Фруассара–Мартена могут быть использованы экспериментальные данные при низких энергиях. В частности, для этой цели используется информация о поведении D-волны в t-канале. Первое неравенство такого рода было получено в [76], дальнейшее развитие это направление получило в работах [77–81].

Все ограничения сверху на $F\,(\omega, t)$ связаны с существованием тех или иных верхних границ на $A\,(\omega, t_0)$ при $t_0 > t$ $(0 < t_0 \le 4\,m_\pi^2)$. Схема получения таких ограничений является общей для асимптотических и конечных энергий.

Начнем с ограничения на $A\,(\omega, t_0)$, вытекающего из того факта, что $A\,(\omega, t_0)$, согласно результатам работы [61], удовлетворяет ДС с двумя вычитаниями.

Итак, пусть

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A\,(\omega', t_0)\,d\,\omega'}{\omega'^3} < \infty, \qquad 0 < t_0 \le 4\,m_\pi^2. \tag{6.3}$$

Условие (6.3), разумеется, не ограничивает поведение $A\,(\omega, t_0)$ при конечных энергиях. Соответствующее ограничение существует, если

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A\,(\omega', t_0)\,d\,\omega'}{\omega'^3} < d, \qquad 0 < t_0 \le 4\,m_\pi^2, \tag{6.3$'$}$$

где d — некоторая известная константа. Подчеркнем, что, согласно (2.23) и (2.24), $A\,(\omega, t_0) > 0$, если $t_0 > 0$, поскольку $P_l\,(x) > 1$ при $x > 1$.

Если выполнено условие (6.3), то при $\omega \to \infty$

$$A\,(\omega, t_0) < \frac{\omega^2}{\ln\,\omega}. \tag{6.4}$$

Строго говоря, неравенство (6.4) может быть справедливо не при всех асимптотических энергиях, но, так как $A(\omega, t_0) > 0$, то при «почти всех». Из условия (6.3′), вследствие положительности $A(\omega, t_0)$, следует аналогичное условие для интеграла по любому интервалу $(\omega, \nu\,\omega)$. Применив теорему о среднем, получим, что

$$A(\bar{\omega}, t_0) < \bar{\omega}^2 \, d \, \ln \nu. \tag{6.4′}$$

Найдем теперь $\max A(\omega, t)$ ($\max A(\bar{\omega}, t)$) для $t < t_0$, если выполнено условие (6.4) ((6.4′)).

Поскольку искомый максимум тем меньше, чем слабее исходное неравенство для $A(\omega, t_0)$, при выводе абсолютного ограничения нужно заменить (6.4) ((6.4′)) соответствующим равенством.

Рассмотрим теперь следующую задачу: при фиксированном значении $A(\omega, t_0)$ найти $a_l(\omega)$, реализующие максимум ряда

$$B(\omega, t) = 2\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, a_l(\omega)\, B_l(x), \qquad x = 1 + \frac{2t}{\omega},$$

где функции $B_l(x) > 0$ и удовлетворяют условию

$$\frac{B_{l_2}(x)}{B_{l_1}(x)} < \frac{P_{l_2}(x_0)}{P_{l_1}(x_0)}, \qquad l_2 > l_1. \tag{6.5}$$

Докажем, что этот максимум реализуется, если

$$a_l(\omega) = \begin{cases} 1 & l \le L, \\ \eta \le 1 & l = L+1, \\ 0 & l \ge L+2. \end{cases} \tag{6.6}$$

Для доказательства достаточно заметить, что в противном случае всегда можно так изменить $a_l(\omega)$, что $B(\omega, t)$ увеличится при неизменной $A(\omega, t_0)$. Действительно, если (6.5) не имеет места, то всегда найдутся $a_{l_1}(\omega)$ и $a_{l_2}(\omega)$, $l_2 > l_1$, такие, что $a_{l_1}(\omega) < 1$, $a_{l_2}(\omega) > 0$. Заменяя $a_{l_1}(\omega)$ на $a_{l_1}(\omega) + \Delta_1$, а $a_{l_2}(\omega)$ на $a_{l_2}(\omega) - \Delta_2$, $\Delta_i > 0$, получим, что поскольку

$$\Delta_1 - \Delta_2\, \frac{P_{l_2}(x_0)}{P_{l_1}(x_0)} = 0,$$

то вследствие (6.5) $\Delta\, B(\omega, t) > 0$.

При $t \ge 0$ положим $B(\omega, t) = A(\omega, t)$. Условие (6.5) выполнено как следствие известных свойств полиномов Лежандра. При $t < 0$ мажорируем $A(\omega, t)$ рядом

$$B(\omega, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\sin\theta} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2\,l+1)}{\sqrt{l}}\, a_l(\omega), \tag{6.7}$$

т.к. при $|\cos\vartheta| < 1$ имеем $|P_l(\cos\vartheta)| < [2/(\pi\, l\, \sin\theta)]^{1/2}$. (Очевидно, что вклад волны с $l = 0$ пренебрежимо мал.)

Осталось найти величину L. Для этого заметим, что вкладом парциальной волны с $l = L + 1$ можно пренебречь и с помощью известной рекуррентной формулы

$$(2\,l + 1)\, P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

просуммировать ряд по полиномам Лежандра для $A(\omega, t_0)$ (см. (2.24)). Чтобы не усложнять формулы, считаем, что $\omega \gg \omega_0$. Тогда $L \cong L + 1$, $\cos\vartheta \cong 1 + (2t)/\omega$. В результате получаем уравнение для определения L:

$$A(\omega, t) = P'_{L+1}(x) + P'_L(x) \cong 2\, P'_L(x). \tag{6.8}$$

Уравнение (6.8) легко решается методом последовательных приближений. Нам удобнее вычислить $\gamma_0 = 2L\sqrt{t_0/\omega}$, поскольку, как было нами показано в [81] (ф-ла (15)),

$$P'_l\left(1 + \frac{2t}{\omega}\right) \cong \frac{\mathrm{e}^{\gamma}\sqrt{\gamma}}{4\sqrt{2\pi}}\,\frac{\omega}{t}, \qquad \gamma = 2L\sqrt{\frac{t}{\omega}}, \qquad \gamma > 1. \tag{6.9}$$

Величина γ_0 удовлетворяет последнему условию при всех рассматриваемых нами энергиях. Согласно (6.8) и (6.9) γ_0 находится из уравнения

$$\mathrm{e}^{\gamma_0}\sqrt{\gamma_0} = B\,\omega, \tag{6.10}$$

где B определяется из неравенств (6.4) или (6.4′). В результате имеем

$$\gamma_0^{(1)} = \ln(B\,\omega), \qquad \gamma_0^{(n+1)} = \ln\frac{B\,\omega}{\sqrt{\gamma_0^n}}. \tag{6.11}$$

При $t = 0$ согласно оптической теореме получим

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{\max} \cong \frac{32\,\pi}{\omega}\sum_{l=0}^{L} l \cong \frac{16\,\pi}{\omega}\, L^2 = \frac{4\,\pi}{t_0}\,\gamma_0^2. \tag{6.12}$$

Учитывая неравенство (6.11), видим, что (6.12) воспроизводит неравенство (6.1′). Конечноэнергетический аналог этого неравенства следует из (6.4′) и имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{\max}(\bar\omega) < \frac{4\,\pi}{t_0}\,\ln^2(\bar\omega\, d\, \ln\,\nu). \tag{6.13}$$

В случае $\pi\, N$-рассеяния d выражается через вторую парциальную волну в t-канале [76], значение которой определяется из эксперимента. Заметим, что в действительности в ограничение (6.13) входит не константа d, а

$$\tilde d = d - \int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{A(\omega', t_0)\, d\,\omega'}{{\omega'}^3} - \int\limits_{\nu\,\omega}^{\infty}\frac{A(\omega', t_0)\, d\,\omega'}{{\omega'}^3}.$$

Режим парциальных волн (6.6) соответствует минимальному значению $A(\omega, t_0)$ при заданном значении $A(\omega, 0)$. Это дает возможность, пользуясь экспериментальными данными, оценить минимальные значения интегралов, входящих в формулу для $\tilde{d}$.

Сделаем два замечания.

1. Вследствие условия унитарности (2.22) режим парциальных волн (6.6) означает, что $a_l(\omega) = f_l^2(\omega)$. Тем самым рассеяние сводится к упругому: $\sigma_{\rm tot}(\omega) = \sigma_{\rm el}(\omega)$. Последнее не имеет места при современных энергиях, когда $\sigma_{\rm el}(\omega)/\sigma_{\rm tot}(\omega) \sim 1/3 - 1/5$.

Очевидно, что естественно рассмотреть верхнюю границу для $\sigma_{\rm tot}(\omega)$, учитывающую фактор $\sigma_{\rm el}(\omega)/\sigma_{\rm tot}(\omega)$. Впервые это было сделано в работе [118]. Точная оценка при асимптотических энергиях была получена в [66], а при конечных — в [119]. Не останавливаясь на деталях, заметим только, что реально оценка улучшается на фактор $\sigma_{\rm el}(\omega)/\sigma_{\rm tot}(\omega)$, т.е.

$$\sigma_{\rm tot}(\omega) \leq \frac{\sigma_{\rm el}(\omega)}{\sigma_{\rm tot}(\omega)} \sigma_{\rm tot}^{\max}(\omega), \tag{6.14}$$

где $\sigma_{\rm tot}^{\max}(\omega)$ определяется неравенствами (6.1′) или (6.13).

2. Рассмотрим величину, называемую шириной дифракционного пика $\Gamma \equiv d\,A(\omega, t)/d\,t|_{t=0}$. Пользуясь разложением $A(\omega, t)$ в ряд по полиномам Лежандра и учитывая, что

$$\left. \frac{d\,P_l\,(1 + (2t)/\omega)}{d\,t} \right|_{t=0} = \frac{l\,(l+1)}{\omega}, \tag{6.15}$$

получим, что

$$\Gamma = \frac{2}{\omega} \sum_{l=0}^{\infty} l\,(l+1)\,(2\,l+1)\,a_l(\omega). \tag{6.16}$$

Из доказанного нами утверждения непосредственно следует, что режим парциальных волн (6.6) соответствует максимуму $\sigma_{\rm tot}(\omega)$ при заданном значении Γ и, следовательно, минимуму Γ при фиксированном значении $\sigma_{\rm tot}(\omega)$.

Учет экспериментально наблюдаемого значения $\Gamma/A(\omega, 0)$ может быть существен для нахождения более точных верхних границ для $\sigma_{\rm tot}(\omega)$. Эта проблема, однако, выходит за рамки настоящего обзора. Ряд результатов этого направления приведен в [109]. Условие (5.3′) приводит также к численным ограничениям на различные интегралы вида

$$\int_{\omega_1}^{\infty} \rho\,(\omega', t)\,A\,(\omega', t)\,d\,\omega', \qquad t < t_0,$$

ω_1 — произвольная физическая энергия, $\rho(\omega, t)$ — некоторая весовая функция. При $t = 0$ мы имеем верхние границы для различных интегралов от полного сечения [114]. Такие границы, в частности, дают строгие ограничения на вклад в ДС интегралов по той области энергий, которая недоступна эксперименту.

При $t > 0$ ограничимся случаем, когда γ удовлетворяет условию (6.9). Используя (6.8) и связь γ и γ_0, после простых выкладок приходим к неравенству

$$\frac{A(\bar{\omega}, t)}{\bar{\omega}} < \frac{\sqrt{\gamma_0}\, \mathrm{e}^{\gamma_0 \sqrt{t/t_0}}}{2\sqrt{2\pi}\, t^{3/4}\, (t_0)^{1/4}}. \tag{6.17}$$

При $t < 0$, воспользовавшись равенством (6.7), после простых вычислений имеем оценку:

$$A(\bar{\omega}, t) < \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi \sin\theta}}\, L^{3/2} = \frac{2}{3\sqrt{\pi \sin\theta}}\, \gamma_0^{3/2} \left(\frac{\bar{\omega}}{t_0}\right)^{3/4}. \tag{6.18}$$

Мы не останавливаемся на более тонких оценках $P_l(\cos\vartheta)$, чем (6.7), поскольку, в отличие от рассеяния вперед, строгие ограничения при $t < 0$ с неизбежностью являются довольно слабыми. Дело в том, что при $t < 0$ $P_l(\cos\vartheta)$ осциллируют при больших l, что приводит к сокращению вкладов в $F(\omega, t)$ от различных l. Учет этого эффекта невозможен без дополнительных предположений о поведении $a_l(\omega)$. Некоторого продвижения можно достичь, если использовать предположение об аналитичности амплитуды рассеяния по t в более широкой области, чем эллипс Мартена, например, в круге с центром в $t = -\omega/2$ (рассеяние под углом $\pi/2$) и крайне правой точкой $t = t_0$. Такая аналитичность существенна и для получения оценок на характеристики неупругих процессов [58, 120].

Перейдем теперь к рассмотрению абсолютных ограничений на $F(\omega, t)$.

6.2. Абсолютные ограничения на полное сечение и мнимую часть амплитуды упругого $\pi^0\,\pi^0$-рассеяния при произвольных энергиях. В настоящем пункте выводятся абсолютные ограничения сверху на $A(\omega, t_0)$, $0 < t_0 < 4m_\pi^2$. Воспользуемся ДС (2.5). Нам потребуется следующая разность:

$$F(\omega_2, t_0) - F(\omega_1, t_0) = \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\pi} \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \frac{A(\omega', t_0)\, \omega'\, d\omega'}{(\omega'^2 - \omega_1^2)(\omega'^2 - \omega_2^2)}. \tag{6.19}$$

Пусть $0 < \omega_i < \omega_0$, $i = 1, 2$ и $\omega_2 > \omega_1$. Тогда при любом $\nu > 1$, поскольку $A(\omega', t_0) > 0$ (см. формулы (2.23), (2.24)),

$$\int\limits_{\omega}^{\nu\omega} \frac{A(\omega', t_0)\, \omega'\, d\omega'}{(\omega'^2 - \omega_1^2)(\omega'^2 - \omega_2^2)} < \frac{\pi}{2}\, \frac{F(\omega_2, t_0) - F(\omega_1, t_0)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \tag{6.20}$$

Согласно теореме о среднем

$$\int\limits_{\omega}^{\nu\omega} \frac{A\,(\omega', t_0)d\,\omega'}{\omega'^3} = \frac{A\,(\bar{\omega}, t_0)}{\bar{\omega}}\frac{1}{\omega}\frac{\nu-1}{\nu},$$

следовательно,

$$\frac{A\,(\bar{\omega}, t_0)}{\bar{\omega}} < \frac{\nu}{\nu-1}\,\omega\,C\,(\omega_1, \omega_2, t_0), \tag{6.20$'$}$$

где

$$C\,(\omega_1, \omega_2, t_0) = \frac{\pi}{2}\frac{F\,(\omega_2, t_0) - F\,(\omega_1, t_0)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Отметим, что, согласно (6.19), $\min C\,(\omega_1, \omega_2, t_0)$ достигается, когда $\omega_i \to 0$. Как уже отмечалось, $F\,(\omega, t_0)$ удовлетворяет абсолютным ограничениям, если $|\omega| < \omega_0$. Мы воспользуемся результатами Лопеца и Меннезиера (вторая ссылка в [74]):

$$|\,F\,(1,3,0)\,| < 3{,}3; \quad |\,F\,(2,3,-1)\,| < 14{,}5; \quad m_\pi^2 = 1.$$

В переменных ω, t имеем

$$\left|F\,\left(\frac{3}{2}, 3\right) - F\,\left(\frac{1}{2}, 3\right)\right| < 17{,}8. \tag{6.21}$$

Согласно (6.20$'$) и (6.21)

$$\frac{A\,(\bar{\omega}, t_0)}{\bar{\omega}} < 28\,\frac{\nu}{\nu-1}\,\omega. \tag{6.22}$$

Неравенство (6.22) является абсолютным ограничением сверху на $A\,(\bar{\omega}, t_0)$ при $\omega > \omega_0$. Ниже мы увидим, как из него следуют абсолютные ограничения сверху при $t < t_0$ на $A\,(\bar{\omega}, t)$ и другие физические величины.

Ради упрощения формул, как обычно, ограничимся случаем $\omega \gg \omega_0$. Так как $\omega_0 < 4$ для любого $t_0 \in (0, 4)$, то $\dfrac{\omega}{\omega_0} > 10$, если $\sqrt{s} > 1$ ГэВ, т.е. реально все энергии, бóльшие 1 ГэВ, удовлетворяют требуемому условию.

Найдем теперь абсолютное ограничение сверху на $A\,(\bar{\omega}, t)$ при $t < t_0$. Для этого воспользуемся выводом формулы (6.6). Единственное отличие состоит в том, что в случае $\pi^0\,\pi^0$-рассеяния $a_{2\,l+1}\,(\omega) = 0$. Это вносит очевидные изменения в режим парциальных волн (6.6). Уравнение для γ_0 совпадает с (6.10), только теперь

$$B = \frac{2\,t_0\,\sqrt{2\pi}\,\nu}{\nu-1}\,C\,(\omega_1, \omega_2, t_0).$$

Если используется неравенство (6.21), то

$$B = 210\,\frac{\nu}{\nu - 1}. \tag{6.23}$$

Максимумы $A\,(\omega, t)$ уменьшаются в два раза по сравнению с формулами (6.13), (6.17) и (6.18). Более точное ограничение на $\sigma_{\rm tot}^{\max}\,(\omega)$ имеет вид

$$\sigma_{\rm tot}^{\max} \le \frac{2\pi}{t_0}\,\ln^2\left(\frac{B\,\omega}{\sqrt{\xi\,(\omega)}}\right), \qquad \xi\,(\omega) = \ln\left(\frac{B\,\omega}{\sqrt{\ln\,(B\,\omega)}}\right). \tag{6.24}$$

Переходя к обычным единицам, запишем $\sigma_{\rm tot}^{\max}$ в виде

$$\sigma_{\rm tot}^{\max} = \sigma_0\,\gamma_0^2, \qquad \sigma_0 = \frac{2\pi}{t_0\,m_\pi^2} = 42 \text{ мб}. \tag{6.25}$$

Численные результаты представлены в следующей таблице.

	$\nu = 1{,}1$			$\nu = 2$			$\nu = 10$		
$\sqrt{s}$, ГэВ	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2
1	134	107	108	100	78	79	88	68	69
10	261	218	219	220	182	183	194	159	160
100	431	370	372	367	312	314	345	293	294
10^4	899	800	802	805	713	715	772	682	684
10^6	1536	1396	1397	1410	1277	1279	1398	1266	1268
10^8	2343	2159	2160	2190	2014	2016	2135	1962	1964
10^{12}	4465	4190	4191	4250	3982	3984	4176	3911	3913
10^{16}	7267	6893	6895	7000	6635	6637	6534	6184	6186
10^{20}	10750	10274	10276	10400	9934	9936	10300	9836	9839

Сделаем несколько замечаний.

1. Полученные ограничения слабо зависят от ν, особенно при высоких энергиях. Следовательно, мы получили «почти» локальные верхние границы для полных сечений.

2. Найденные верхние границы медленно увеличиваются с ростом s. Действительно, когда $\sqrt{s}$ меняется в 10^{20} раз, $\sigma_{\rm tot}^{\max}$ изменяется только в 125 раз. Это изменение особенно мало́ при высоких энергиях. Например, в интервале $10^6 < \sqrt{s} < 10^{20}$ ГэВ $\sigma_{\rm tot}^{\max}$ меняется лишь в 7 раз.

3. На первый взгляд, полученные ограничения должны быть грубыми. Действительно, они насыщаются, если только $A\,(\omega, t_0) = 0$ (а следовательно, и $A\,(\omega, t) = 0\ \forall\, t$) всюду, за исключением интервала $(\omega, \nu\,\omega)$. Очевидно, что такое поведение $A\,(\omega, t)$ не соответствует реальной физической ситуации. Однако замечателен тот факт, что вследствие крайне слабой зависимости $\sigma_{\rm tot}^{\max}$

от $A(\omega, t_0)$, особенно при высоких энергиях, полученное ограничение не может быть существенно усилено даже в том случае, если удастся получить более сильное ограничение на $A(\omega, t_0)$. Действительно, поскольку γ_0 определяется величиной $B\,\omega$, то замена B на $\kappa\, B$, $\kappa < 1$, эквивалентна замене ω на $\kappa\,\omega$. Это дает возможность оценить соответствующий эффект непосредственно из таблицы. Сравнивая, например, $\sigma_{\rm tot}^{\rm max}$ при $\sqrt{s} = 10^6$ и 10^8 ГэВ, мы видим, что замена B на $10^{-4}\, B$ приводит к усилению ограничения лишь в 1,5 раза, если $\sqrt{s} = 10^8$ ГэВ.

Отметим также, что, как будет видно из полученных ниже ограничений на $|F(\omega, t_0)|$, лишь поведение $A(\omega', t_0)$ при $\omega' < \nu\,\omega$ существенно влияет на верхнюю границу для $\sigma_{\rm tot}(\bar\omega)$.

4. Некоторое усиление найденного ограничения (на фактор $\approx 3/4$) может быть достигнуто, если использовать в качестве исходных ограничения при нефизических s и $t \approx 4$. Однако, вследствие отсутствия таких ограничений, невозможно оценить, при каких именно энергиях это приведет к улучшению результата. Строго говоря, для каждого s существует свое оптимальное t_0. Подобный анализ выходит за рамки данного обзора.

5. $\sigma_{\rm tot}^{\rm max}$ достигается в том случае, когда $\sigma_{\rm tot} = \sigma_{\rm el}$. Используя результаты статьи [119], легко убедиться, что найденное нами ограничение при дополнительном условии

$$\frac{\sigma_{\rm el}(\bar\omega)}{\sigma_{\rm tot}(\bar\omega)} \le b$$

имеет вид

$$\sigma_{\rm tot}(\bar\omega) \le b\,\frac{2\pi}{t_0}\,\ln^2\left(\frac{B}{b}\,\bar\omega\right). \tag{6.26}$$

6.3. Абсолютные ограничения на парциальные амплитуды. Неравенство (6.20) означает существование абсолютных ограничений на парциальные амплитуды, что дает возможность получить верхнюю границу не только для $\sigma_{\rm tot}(\omega)$, но и для $\sigma_{\rm tot}^{L}(\omega) \equiv \dfrac{16\,\pi}{\omega}\displaystyle\sum_{l=L}^{\infty}(2l+1)\,a_l(\omega)$.

Поскольку $a_l(\omega) \ge 0$, то из (2.24) следует, что

$$4\,l\,a_l(\omega)\,P_l\left(1 + \frac{2t_0}{\omega}\right) < A(\omega, t_0). \tag{6.27}$$

Если $\gamma_0 \equiv 2l\,\sqrt{t_0/\bar\omega} > 1$, то $P_l(x_0)\,(x_0 = 1 + 2t_0/\bar\omega)$ хорошо описывается следующей формулой ((14) в [81]):

$$P_l(x_0) \cong \frac{{\rm e}^{\gamma_0}}{\sqrt{2\,\pi\,\gamma_0}}. \tag{6.28}$$

Согласно (6.27)

$$a_{l+L}(\bar{\omega}) < \exp\left(-2\,l\,\sqrt{t_0/\bar{\omega}}\right), \tag{6.29}$$

где L определяется равенством

$$4\,L\,P_L(x_0) = A(\bar{\omega}, t_0). \tag{6.30}$$

Воспользовавшись неравенством (6.20) и теоремой о среднем, имеем

$$A(\bar{\omega}, t_0) < \frac{\nu^2}{2(\nu^2-1)}\,\omega^2\,C(\omega_1, \omega_2, t_0) \equiv \omega^2\,\tilde{C}^2. \tag{6.31}$$

Из уравнения (6.30) и неравенства (6.31) следует, что

$$L < \sqrt{\bar{\omega}/t_0}\,\ln(\tilde{C}\,\omega). \tag{6.32}$$

Ограничение (6.32) соответствует первому приближению при решении уравнения (6.30) и может быть несколько улучшено.

Если $l < L$, то неравенство (6.27) не ограничивает $a_l(\bar{\omega})$. Величина L фактически имеет смысл радиуса взаимодействия, т.е. $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega}) \approx L^2$, разумеется, в предположении, что $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})$ не падает быстро при больших ω. Точный смысл сделанного нами утверждения состоит в том, что, вследствие (6.28), реалистическое поведение $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})$ несовместимо с существенным вкладом в $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})$ парциальных сечений при $l \gg L$. Действительно, легко получить следующую оценку максимально возможной величины $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})^{L\,(1+\alpha)}$, $\alpha > 0$:

$$\sigma_{\text{tot}}^{L\,(1+\alpha)}(\bar{\omega}) \le \frac{8\,\pi\,(1+\alpha)}{t_0}\,(\tilde{C}\,\omega)^{-2\,\alpha}\,\ln(\tilde{C}\,\omega). \tag{6.33}$$

6.4. Абсолютные ограничения сверху на $|F(\omega, t)|$. Докажем существование абсолютных ограничениий не только на $A(\omega, t)$, но и на $|F(\omega, t)|$ при $\omega > \omega_0$, $0 < t < 4$.

Воспользуемся тем, что $F(\omega, t)$ не может иметь более двух нулей в области аналитичности. (Доказательство см. в приложении А.) Что касается нулей на разрезе, то, как уже отмечалось в разд. 2, достаточно усреднить $F(\omega, t)$ по бесконечно малому интервалу $(\omega, \omega + \Delta)$, чтобы получить функцию, физически не отличимую от $F(\omega, t)$ и не имеющую нулей на разрезе. Если $F(\omega, t) = 0$ при $\omega = \tilde{\omega}$, то, учитывая условие перекрестной симметрии (2.2), можем записать $F(\omega, t)$ в виде

$$F(\omega, t) = (\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\,f(\omega, t), \tag{6.34}$$

где $f(\omega, t)$ уже не имеет нулей; $\tilde{\omega}$ — или действительное (в этом случае $|\tilde{\omega}| < \omega_0$), или мнимое число. Напомним, что у $F(\omega, t)$ не может быть комплексных нулей.

Разумеется, у $F(\omega, t)$ может не быть нулей. Забегая вперед, отметим, что этот случай соответствует более сильному, т.е. не абсолютному ограничению сверху на $|F(\omega, t)|$.

Согласно равенству (2.29), используя переменную $z = \omega^2$, получим

$$\ln\left|\frac{f(z,t)}{f(z_i,t)}\right| = \frac{z - z_i}{\pi} P\int_{z_0}^{\infty} \frac{\delta(z',t)}{(z'-z)(z'-z_i)}\, dz', \qquad i = 1, 2. \tag{6.35}$$

Если у $F(z,t)$ нет нулей и $F(z_0,t) > 0$, то $F(z,t)$ удовлетворяет (6.35). Если $F(z_0,t) < 0$, то, согласно (2.31), в равенстве (6.35) надо $\delta(z',t)$ заменить на $\tilde{\delta}(z',t) = \delta(z',t) - \pi$. Очевидно,

$$-\pi \le \tilde{\delta}(z',t) \le 0. \tag{6.36}$$

Для вывода абсолютных ограничений на $|F(z,t)|$ проинтегрируем обе части равенства (6.35) по интервалу $(z, \mu z)$ с некоторой положительной функцией $\rho(z)$, нормированной условием $\int_z^{\mu z} \rho(z')\, dz' = 1$, $\mu > 1$, а в остальном произвольной. Изменив порядок интегрирования и воспользовавшись теоремой о среднем, придем к соотношению

$$\ln\left|\frac{\varphi(\bar{z},t)}{\varphi(z_i,t)}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{z_0}^{\infty} \frac{\delta(z',t)}{(z'-z_i)}\, dz'\, P\int_z^{\mu z} \frac{(z''-z_i)\,\rho(z'')}{z'-z''}\, dz''. \tag{6.37}$$

Ограничения на $f(\bar{z},t)$ зависят от выбора весовой функции $\rho(z)$. Поэтому мы решим задачу о нахождении абсолютного ограничения на $|f(\bar{z},t)|$ для следующего достаточно широкого класса весовых функций:

$$\rho(z') = C_\alpha(z)\,(z')^{\alpha-1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$C_\alpha(z) = \frac{\alpha}{(\mu^\alpha - 1)\, z^\alpha}, \qquad \alpha \ne 0,$$

$$C_\alpha(z) = (\ln\, \mu)^{-1}, \qquad \alpha = 0.$$

Мы получим формулы для верхней границы $f(\bar{z},t)$ при произвольном α, из которых следует, что каждому значению μ соответствует свой выбор α, при котором искомая граница является оптимальной.

Только ради упрощения формул ограничимся случаем $z \gg z_0$. Отметим, что уже при $s = 1$ ГэВ^2 $z/z_0 > 100$. Учитывая неравенство (2.26), получим

$$\ln\left|\frac{\varphi(\bar{z},t)}{\varphi(z_i,t)}\right| \le \int_{\tilde{z}_\alpha}^{\infty} \frac{dz'}{z'}\Phi_\alpha(z'), \text{ где } \Phi_\alpha(z') = C_\alpha \int_z^{\mu z} \frac{(z'')^\alpha}{z'-z''}\, dz''. \tag{6.38}$$

Мы пренебрегаем членами $\sim z_0/z$. Точка $\tilde{z}_\alpha$ определена условием $\Phi_\alpha(\tilde{z}_\alpha)$=0. При этом $\forall\alpha \quad \Phi_\alpha(z')>0,\ z'>\tilde{z}_\alpha;\ \Phi_\alpha(z')<0,\ z'<\tilde{z}_\alpha$. Легко доказать, что такая точка существует и единственна, поскольку $\tilde{z}_\alpha$ — монотонно возрастающая функция α. Очевидно, что $z<\tilde{z}_\alpha<\mu\, z$.

Для вычисления интеграла в (6.38) поменяем местами порядок интегрирования и после элементарных выкладок найдем, что

$$I_\alpha = \ln\,\tilde{u}_\alpha - \frac{\alpha}{\mu^\alpha - 1}\int\limits_1^\mu y^{\alpha-1}\,\ln|\tilde{u}_\alpha - y|\,d\,y, \qquad \tilde{u}_\alpha = \frac{\tilde{z}_\alpha}{z}, \qquad \alpha\neq 0.$$

Интегрируя оставшийся интеграл по частям и учитывая, что $\Phi_\alpha(\tilde{u}_\alpha)=0$, после простых вычислений получим

$$I_\alpha = \ln\,\frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu-\tilde{u}_\alpha} + \frac{1}{\mu^\alpha - 1}\,\ln\,\frac{\tilde{u}_\alpha - 1}{\mu - \tilde{u}_\alpha}, \qquad \alpha\neq 0. \tag{6.39}$$

Если $\alpha\notin\mathbb{N}$, $\tilde{u}_\alpha$ вычисляется из уравнения (Б.2). Если $\alpha\in\mathbb{Z}_\pm$, то простые вычисления дают

$$\Phi_n(\tilde{u}_n) = \tilde{u}_n\,\ln\,\frac{\tilde{u}_n - 1}{\mu - \tilde{u}_n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\mu^k}{k}\,(\tilde{u}_n)^{-k}, \tag{6.40}$$

$$\Phi_{-n}(\tilde{u}_{-n}) = \ln\,\frac{\mu\,(\tilde{u}_{-n}-1)}{\mu - \tilde{u}_{-n}} + \sum_{k=1}^{n}(\tilde{u}_{-n})^k\,\left(1-\frac{1}{\mu^k}\right). \tag{6.40$'$}$$

Поскольку $\Phi_\alpha(\tilde{u}_\alpha)=0$, то (6.40) и (6.40$'$) являются уравнениями для определения $\tilde{u}_\alpha$. Если $\mu\gg 1$, то (с точностью до малых поправок) $\mu/\tilde{u}_n$, и $\tilde{u}_{-n}$ определяются из уравнений

$$\ln\left(\frac{\mu}{\tilde{u}_n} - 1\right) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,\left(\frac{\mu}{\tilde{u}_n}\right)^k, \tag{6.41}$$

$$\ln(\tilde{u}_{-n} - 1) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,\tilde{u}_{-n}^k. \tag{6.41$'$}$$

Отметим, что

$$\tilde{u}_0 = \frac{1+\mu}{2}. \tag{6.42}$$

Получим I_0, рассмотрев $\lim_{\alpha\to 0} I_\alpha$. Для этого найдем приближенное выражение для I_α при $\mu^\alpha - 1 \ll 1$. В этом случае условие $\Phi_\alpha(\tilde{u}_\alpha)=0$ означает, что

$$\frac{1}{\alpha}\,\ln\,\frac{\tilde{u}_\alpha - 1}{\mu - \tilde{u}_\alpha} \cong P\int\limits_1^\mu \frac{\ln y}{\tilde{u}_\alpha - y}\,d\,y. \tag{6.43}$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\tilde{u}_\alpha-1}{\mu-\tilde{u}_\alpha}=\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\left(\ln^2\mu+\ln^2\tilde{u}_\alpha\right)+$$

$$+\ln\mu\cdot\ln\left(\mu-\tilde{u}_\alpha\right)-Li_2\left(\frac{1}{\tilde{u}_\alpha}\right)-Li_2\left(\frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu}\right),\quad \alpha\to 0, \tag{6.44}$$

где

$$Li_2(x)\equiv\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}x^n.$$

Из (6.39) и (6.44) следует, что

$$I_0=\frac{1}{\ln\mu}\left[\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{\mu}{\tilde{u}_0}-Li_2\left(\frac{1}{\tilde{u}_0}\right)-Li_2\left(\frac{\tilde{u}_0}{\mu}\right)\right]. \tag{6.45}$$

Итак, для произвольного α получено явное выражение для I_α и уравнение для $\tilde{u}_\alpha$, которое может быть решено в численном виде, что дает возможность для любого заданного μ найти оптимальное ограничение в классе используемых весовых функций, т.е. найти $\alpha_{\rm opt}$, соответствующее наилучшему выбору весовой функции. Проведем теперь качественный анализ соотношения (6.39), который покажет, что при достаточно больших μ $\alpha_{\rm opt}\approx 0$. Рассмотрим (при заданном μ) набор чисел α, удовлетворяющих условиям: $\mu^\alpha-1\gg 1$, $\alpha>0$; $\mu^\alpha\ll 1$, $\alpha<0$. Тогда

$$I_\alpha\cong\ln\frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu-\tilde{u}_\alpha},\quad\alpha>0;\qquad I_\alpha\cong\ln\frac{\tilde{u}_\alpha}{\tilde{u}_\alpha-1},\quad\alpha<0. \tag{6.46}$$

Из определения $\tilde{u}_\alpha$ непросредственно видно, что $\tilde{u}_\alpha$ — монотонно возрастающая функция α. Следовательно, из равенств (6.46) следует, что (при выполнении выписанных выше дополнительных условий) I_α монотонно падает при $\alpha>0$ и монотонно возрастает при $\alpha<0$. Таким образом, $\alpha_{\rm opt}\approx 0$ при достаточно больших μ, поскольку требуемые условия выполняются при малом $|\alpha|$. Отметим, что поскольку $z\approx s^2$, то условие $\mu\gg 1$ еще не означает, что соответствующий интервал велик с физической точки зрения. В заключение этого качественного анализа отметим, что $\alpha_{\rm opt}\neq 0$ при любом μ. Действительно, равенство (6.45) справедливо и при $\alpha\to 0$ (с естественной заменой $\tilde{u}_0\to\tilde{u}_\alpha$). Дифференцируя, получим

$$I'_\alpha=\frac{1}{\ln\mu}\frac{\tilde{u}'_\alpha}{\tilde{u}_\alpha}\ln\frac{\mu-\tilde{u}_\alpha}{\tilde{u}_\alpha-1},\qquad\alpha\to 0.$$

Из (6.42) следует, что $I'_0=0$. Поскольку $\tilde{u}'_\alpha>0$, то $I'_\alpha>0$, $\alpha<0$; $I'_\alpha<0$, $\alpha>0$, т.е. при $\alpha=0$ реализуется локальный $\max I_\alpha$. Таким образом, каждому значению μ соответствует свой выбор $\alpha_{\rm opt}$. Как уже отмечалось, если $\mu \gg 1$, достаточно хорошим будет выбор $\alpha = 0$. В этом случае согласно (6.42) и (6.45):

$$I_0 \cong \frac{1}{\ln \mu} \left\{ \frac{\pi^2}{3} - \frac{\ln^2 2}{2} - Li_2 \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{\mu} \left[1 - \ln 2 + \frac{1}{2} Li_1 \left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \quad (6.45')$$

Нам осталось рассмотреть случай, когда у $F(z,t)$ нет нулей. Мы получим требуемый ответ, решив более общую задачу, а именно найдя абсолютное ограничение сверху на функцию

$$\psi^i_\beta(z,t) = \left(\frac{z - z_0}{z_0 - z_i}\right)^\beta f(z,t); \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (6.47)$$

Поскольку

$$\ln \frac{z - z_0}{z_0 - z_i} = -(z - z_i) \int\limits_{z_0}^{\infty} \frac{d\,z'}{(z' - z_i)\,(z' - z)},$$

ЛДС для $\psi^i_\beta\,(z,t)$ имеют тот же вид, что и для $f(z,t)$ (см. (6.35)) с той лишь разницей, что $\delta\,(z,t)$ заменяется на $\delta_\beta\,(z,t) = \delta\,(z,t) - \beta\,\pi$.

Аналогично изменяется и соотношение (6.37). Заметим, что при β=1 мы имеем соотношение, аналогичное ЛДС для $F\,(z,t)$ в случае, когда $F\,(z_0,t) < 0$. Если $F\,(z_0,t) > 0$ и у $F\,(z,t)$ нет нулей, найденные нами ограничения на $f\,(z,t)$ непосредственно применимы к $F\,(z,t)$. Очевидно, что в этом случае $|F\,(z,t)| < \infty$ при $z \to \infty$.

Ниже мы увидим, что ограничения для произвольного β непосредственно получаются из ограничений при $\beta = 0$ и $\beta = 1$. Поэтому фактически нам осталось рассмотреть случай $\beta = 1$. Согласно условиям (2.26), (2.31) $-\pi \le \delta_1\,(z,t) \le 0$. Поступая так же, как при выводе неравенства (6.38), получим

$$\ln \left| \frac{\psi_1\,(\bar z,t)}{\psi_1\,(z_i,t)} \right| \le \int\limits_{z_0}^{\tilde z_\alpha} \frac{d\,z'}{z' - z_i} \Phi_\alpha\,(z') \equiv \ln \frac{z}{z_0 - z_i} + \tilde I_\alpha. \quad (6.48)$$

Как и раньше, мы пренебрегаем членами $\sim z_0/z$.

Вычисление $\tilde I_\alpha$ аналогично вычислению I_α, поэтому сразу приведем результаты:

$$\tilde I_\alpha = I_\alpha + \frac{\mu^\alpha\,\ln\,\mu}{\mu^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha \ne 0,$$

$$\tilde I_0 = I_0 + \frac{\ln\,\mu}{2}.$$

Осталось заметить, что в общем случае необходимое ограничение является очевидной комбинацией формул (6.38) и (6.48). В частности, если $\beta \in (0,1)$, то, поскольку $-\pi\,\beta \le \delta_\beta\,(z,t) \le \pi\,(1-\beta)$,

$$\ln\left|\frac{\psi_\beta\,(\bar z,t)}{\psi_\beta\,(z_i,t)}\right|\psi_\beta\,(\bar z,t) \le (1-\beta)\,I_\alpha + \beta\,\left(\ln\,\frac{z}{z_0-z_i} + \tilde I_\alpha\right). \qquad (6.49)$$

Для вывода численных ограничений воспользуемся, как и раньше, неравенствами (6.21). Если у $F\,(z,t)$ нет нулей, то

$$|F\,(\bar z,t)| < 3{,}3\,z\,\exp\,\tilde I_\alpha. \qquad (6.50)$$

Если у $F\,(z,t)$ есть нуль $\tilde z$ в интервале (z_1,z_2), то

$$|F\,(\bar z,t)| < \bar z\,\frac{3{,}3}{\tilde z-(1/4)}\,\exp\,I_\alpha, \qquad (6.51)$$

$$|F\,(\bar z,t)| < \bar z\,\frac{14{,}5}{(9/4)-\tilde z}\,\exp\,I_\alpha. \qquad (6.52)$$

Очевидно, что абсолютное ограничение соответствует равенству правых частей в неравенствах (6.51), (6.52). В этом случае

$$|F\,(\bar z,t)| < 8{,}92\,\bar z\,\exp\,I_\alpha. \qquad (6.53)$$

Легко видеть, что если у $F\,(z,t)$ есть нуль на отрицательной оси, то мы приходим к более сильному ограничению, чем (6.53) (в этом случае самое слабое ограничение соответствует $\tilde z = 0$). Существенной чертой абсолютных ограничений на $|F\,(\bar z,t)|$ является их слабая зависимость от поведения $|F\,(z',t)|$ при $z' > \mu\,z$ (фактически ограничение определяется поведением $\delta\,(z',t)$ при $z' < z$). Чтобы продемонстрировать этот факт, заметим, что если у $F\,(z,t)$ нет нулей, то максимально возможное усиление ограничения за счет поведения $F\,(z',t)$ при $z' > \tilde z_\alpha$ достигается, если $\delta\,(z',t) = \pi$ при таких z'. Очевидно, тогда неравенство (6.50) заменится на

$$|F\,(\bar z,t)| < 3{,}3\,z\,\exp\,(\tilde I_\alpha - I_\alpha).$$

Соответствующее усиление неравенства (6.53) получается, когда $\delta\,(z',t) = 0$ при $z' > \tilde z_\alpha$, т.е. теперь

$$|F\,(\bar z,t)| < 8{,}92\,\bar z. \qquad (6.53')$$

В заключение рассмотрим ограничение на $A\,(\bar z,t)$, вытекающее из ЛДС. Заметим, что теперь неравенство (6.38) заменится на неравенство

$$\ln\,\frac{\operatorname{Im} f\,(\bar z,t)}{|f\,(z_i,t)|} \le \int\limits_{\mu\,z}^{\infty}\frac{d\,z'}{z'}\Phi_\alpha\,(z') +$$

$$+\max\int\limits_{z}^{\mu z}\left[\frac{1}{\pi}\,\frac{\delta\,(z',t)}{z'}\,\Phi_\alpha\,(z')-\frac{\rho\,(z')}{2}\,\ln\left(1+\cot^2\delta\,(z',t)\right)\right]d\,z'. \qquad (6.54)$$

Используя известный вариационный принцип, легко получить, что $\delta\,(z',t)$, реализующее искомый максимум, определяется из уравнения

$$\cot\,\delta\,(z',t)=-\,\frac{1}{\pi\,\rho\,(z')}\,\frac{\Phi_\alpha\,(z')}{z'}. \qquad (6.55)$$

Мы ограничимся этим общим рассмотрением, поскольку изменение поведения $\delta\,(z',t)$ на интервале $(z,\mu\,z)$ может привести лишь к дополнительному множителю (не зависящему от z) в полученных ранее ограничениях на $|F\,(\bar z,t)|$.

Отметим, что ограничение на $A\,(\bar z,t)$ (как и ограничение на $|F\,(\bar z,t)|$) слабо зависит от поведения амплитуды рассеяния при энергиях больших, чем рассматриваемые.

Заметим, что из полученных нами абсолютных ограничений следуют абсолютные ограничения и на другие физические величины, например, на дифференциальное сечение при физических s и t.

Авторы благодарны Александру Михайловичу Балдину, чей интерес к рассматриваемым в обзоре проблемам послужил толчком к его написанию.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ограничения снизу и число нулей амплитуды рассеяния. Приведем доказательство того, что у симметричной амплитуды рассеяния может быть не более двух нулей, если $A\,(\omega,t)>0$ и $\dfrac{A\,(\omega,t)}{\omega^2}\to 0$ при $\omega\to\infty$. Мы следуем доказательству в [121]. Ограничение на число нулей амплитуды рассеяния вытекает из того факта, что условие $A\,(\omega,t)>0$ означает, что $\max_{\omega\to\infty}\,\omega^2\,F\,(\omega,t)\not\to 0$. Действительно, если $\omega^2\,F\,(\omega,t)\to 0$, $\omega\to\infty$, то, согласно теореме Фрагмена–Линделефа, это соотношение выполнено во всей верхней полуплоскости. Рассматривая $\displaystyle\int_C\omega'\,F\,(\omega',t)\,d\,\omega'$, где контур C состоит из отрезка $(-\,R,R)$ и полуокружности в верхней полуплоскости, видим, что условие $\omega^2\,F\,(\omega,t)\to 0$ эквивалентно $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\omega_0}^{R}A\,(\omega',t)\,\omega'\,d\,\omega'=0$, т.е. условию $A\,(\omega,t)=0$, $\omega\in\mathbb{R}$.

Если $F\,(\omega,t)$ имеет нули в действительных точках α и β, то, согласно условию кроссинг-симметрии, она имеет нули также и в точках $-\,\alpha$ и $-\,\beta$, т.е. $F\,(\omega,t)=(\omega^2-\alpha^2)\,(\omega^2-\beta^2)\,\varphi\,(\omega,t)$. Поскольку $A\,(\omega,t)>0$, то и

$\operatorname{Im}\varphi(\omega,t) > 0$ и, следовательно, $\max\,\varphi(\omega,t)\omega^2 \not\to 0$, в противоречии с условием $\dfrac{F(\omega,t)}{\omega^2} \to 0$.

Доказательство тривиальным образом распространяется на тот случай, когда $F(\omega,t)$ имеет мнимые нули или комбинацию действительных и мнимых нулей. Отметим, что вследствие условия действительности у $F(\omega,t)$ не может быть менее двух нулей. Существование комплексных нулей запрещено, так как, вследствие действительности и кроссинг-симметрии, их число должно быть не меньше четырех. Далее, если $F(\omega,t) = (\omega^2 \pm \alpha^2)\,\varphi(\omega,t)$, то $\varphi(\omega_0,t) > 0$ (см. доказательство формулы (2.27)). Это означает, что $F(\omega,t)$ не имеет нулей, если $F(\omega,t_0) < 0$. Если $F(\omega_0,t) > 0$, то у амплитуды есть два нуля или нет ни одного. Отметим, что в последнем случае сама $F(\omega,t)$ удовлетворяет соотношению, аналогичному (2.30), из анализа которого легко получить, что вследствие (2.26) $|F(\omega,t)| < C$ при $\omega \to \infty$.

Для доказательства того, что аналогично также $\max\,F_\pm(\omega,t)\,\omega^2 \not\to 0$, достаточно в рассматриваемом интеграле заменить $F(\omega,t)$ на $F_\pm(\omega,t)$. С помощью проведенных рассуждений легко исключить возможность существования у $F_\pm(\omega,t)$ трех и более нулей. Следовательно, у $F_\pm(\omega,t)$ есть один действительный нуль в том случае, когда $F_+(\omega_0,t)$ и $F_-(\omega_0,t)$ имеют разные знаки. Если же $F_+(\omega_0,t)$ и $F_-(\omega_0,t)$ имеют один и тот же знак, то существование нулей зависит от того, какой это знак. Так же, как и в симметричном случае, если $F_\pm(\omega_0,t) < 0$, то у них нет нулей. Если $F_\pm(\omega_0,t) > 0$, то возможно как существование двух нулей у $F_\pm(\omega,t)$, так и их отсутствие. Из соотношения (2.5) легко заключить, что у $F(\omega,t)$ нет мнимых нулей, если $F(0,t) \le 0$. Аналогично, если $F_\pm(0,t) \le 0$, то у $F_\pm(\omega,t)$ нет мнимых нулей.

Ограничения снизу важны для доказательства ЛДС, поскольку благодаря им $\ln\,F(\omega,t)$, или $\ln\,\varphi(\omega,t)$ в случае существования нулей у $F(\omega,t)$ удовлетворяет условию (2.4′).

В заключение заметим, что для ряда процессов, например, πN-рассеяния, использование экспериментальных данных дает возможность получить существенно более сильное ограничение снизу:

$$|F_\pm(\omega,t)| > C, \qquad \omega \to \infty,$$

где

$$C = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_0}^{R} \frac{A(\omega',t)\,d\omega'}{\omega'} - F(0,t), \quad R - \text{любое}.$$

Доказательство проводится от противного. Заметим, что если $|F_\pm(\omega,t)| < C$, $\omega \to \infty$, то согласно теореме Фрагмена–Линделефа $|F_\pm(\omega,t)| < C$ всюду в верхней полуплоскости. Осталось рассмотреть $\displaystyle\int_C \frac{F_\pm(\omega,t)\,d\omega}{\omega}$, где контур C

состоит из отрезков $(-R, -\varepsilon)$, (ε, R) и двух полуокружностей с центром в начале координат с радиусами ε и R соответственно. Требуемое неравенство непосредственно следует из оценки интеграла по полуокружности радиуса R. Оно нетривиально, если из эксперимента следует существование R такого, что $C > 0$.

Это неравенство демонстрирует неочевидную связь строгих асимптотических оценок снизу с поведением амплитуды рассеяния при конечных энергиях.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Уравнение для $\tilde{u}_\alpha$ при произвольном α. Найдем уравнения для $\tilde{u}_\alpha$ в случае, когда $\alpha \notin \mathbb{N}$. Для этого заметим, что условие $P\int_1^\mu \frac{y^\alpha\,dy}{\tilde{u}_\alpha - y} = 0$, очевидно, есть условие

$$\int\limits_1^{\tilde{u}_\alpha-\varepsilon} \frac{y^\alpha\,dy}{\tilde{u}_\alpha - y} = \int\limits_{\tilde{u}_\alpha+\varepsilon}^{\mu} \frac{y^\alpha\,dy}{\tilde{u}_\alpha - y}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{Б.1}$$

Интегралы легко вычислить, заменяя $(\tilde{u}_\alpha - y)^{-1}$ рядами по $y/\tilde{u}_\alpha$ и $\tilde{u}_\alpha/y$ соответственно. В результате элементарных выкладок придем к уравнению

$$(2\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)\,(n+\alpha+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-\alpha}\left(\frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu}\right)^{n-\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{u}_\alpha^{n+1}(n+\alpha)}. \tag{Б.2}$$

Отметим, что

$$(2\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)\,(n+\alpha+1)} = \psi\,(\alpha+1) - \psi\,(\alpha),$$

где $\psi\,(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoliubov N.N.* Lecture at Intern. Congress on Theoretical Physics, Seattle, 1956 (unpublished).
2. *Gell-Mann M., Goldberger M.L., Thirring W.E.* // Phys. Rev. 1954. V.95. P.1612.

3. *Goldberger M.L.* // Phys. Rev. 1955. V.99. P.979.
4. *Goldberger M.L., Miyazawa H., Oehme R.* // Phys. Rev. 1955. V.99. P.986.
5. *Oehme R.* // Phys. Rev. 1955. V.100. P.1503; 1956. V.102. P.1174.
6. *Goldberger M.L., Nambu Y., Oehme R.* // Ann. Phys. (New York). 1956. V.2. P.226.
7. *Oehme R.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.1316.
8. *Symanzik K.* // Phys. Rev. 1957. V.105. P.743.
9. *Bremermann H.J., Oehme R., Taylor J.G.* // Phys. Rev. 1958. V.109. P.2178.
10. *Lehmann H.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.579.
11. *Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
12. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* // Докл. Акад. Наук СССР. 1957. Т.113. С.529.
13. *Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Soloviev L.D.* // Nucl. Phys. 1957. V.4. P.427.
14. *Logunov A.A., Tavkhelidze A.N.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.943.
15. *Logunov A.A., Soloviev L.D.* // Nucl. Phys. 1959. V.10. P.60.
16. *Logunov A.A., Bilenkij S.M., Tavkhelidze A.N.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.953.
17. *Okubo S.* // Prog. Theor. Phys. 1958. V.19. P.43.
18. *Поливанов М.К.* // Докл. Акад. наук СССР. 1958. Т.118. С.679.
19. *Chew G. et al.* // Phys. Rev. 1957. V.106. P.1337.
20. *Jin Y.S.* // Nuovo Cim. 1959. V.12. P.445.
21. *Todorov I.T.* // Acta Phys. Hung. 1960. V.19. P.199.
22. *Goldberger M.L., Treiman S.B.* // Phys. Rev. 1958. V.110. P.1178.
23. *Todorov I.T., Khrustalev O.A.* // Nucl. Phys. 1959. V.13. P.675.
24. *Логунов А.А.* // Докл. Акад. наук СССР. 1958. Т.120. С.501.
25. *Логунов А.А. и др.* // ТМФ. 1977. Т.33. С.149.
26. *Логунов А.А. и др.* // ТМФ. 1979. Т.40. С.179.
27. *Медведев Б.В. и др.* // ТМФ. 1982. Т.52. С.163.
28. *Hepp K.* // Helv. Phys. Acta. 1964. V.37. P.639.
29. *Bros J., Epstein H., Glaser V.* // Nuovo Cim. 1964. V.31. P.1264; Comm. Math. Phys. 1965. V.1. P.240.
30. *Oehme R.* // Mod. Phys. Lett. 1993. V.13. P.1533; πN-Newsletter. 1992. V.7. P.1.
31. *Martin A.* // Nuovo Cim. 1966. V.42. P.930.
32. *Sommer G.* // Nuovo Cim. 1967. V.52. P.373; 1967. V.52. P.850.
33. *Bessis J.D., Glaser V.* // Nuovo Cim. A. 1967. V.50. P.568.
34. *Померанчук И.Я.* // ЖЭТФ. 1958. Т.34. С.725.
35. *Sugawara M., Kanazawa A.* // Phys. Rev. 1961. V.123. P.1995.
36. *Weinberg S.* // Phys. Rev. 1961. V.124. P.2049.
37. *Мейман Н.Н.* // ЖЭТФ. 1962. Т.43. С.2277; 1975. Т.68. С.791.
38. *Amati D., Fierz M., Glaser V.* // Phys. Rev. Lett. 1960. V.4. P.89.

39. *Martin A.* // Nuovo Cim. 1965. V.39. P.704.
40. *Eden R.J.* // Phys. Rev. Lett. 1966. V.16. P.39.
41. *Wit R.* // Acta Phys. Slov. 1973. V.23. P.203.
42. *Волков Г.Г., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* // ТМФ. 1970. Т.4. С.196.
43. *Roy S.M., Singh V.* // Phys. Lett. B. 1970. V.32. P.50.
44. *Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н.* // ТМФ. 1978. Т.34. С.153.
45. *Truong T.N., Lam W.S.* // Phys. Rev. D. 1972. V.6. P.2875.
46. *Ломсадзе Ю.М., Аграновский Б.А.* // ЯФ. 1979. Т.30. С.754.
47. *Fischer J., Kolář P.* // Phys. Rev. D. 1978. V.17. P.2168;
Fischer J. et al. // Phys. Rev. D. 1976. V.13. P.133.
48. *Cornille H., Martin A.* // Phys. Lett. B. 1972. V.40. P.671; Nucl. Phys. B. 1972. V.49. P.413.
49. *Logunov A.A. et al.* // Phys. Lett. 1963. V.7. P.69; 252;
Логунов А.А. и др. // ЖЭТФ. 1964. Т.46. С.1079;
Логунов А.А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И.Т. // УФН. 1966. Т.88. С.51.
50. *Мейман Н.Н.* // ЖЭТФ. 1964. Т.46. С.1039.
51. *van Hove L.* // Phys. Lett. 1964. V.3. P.63.
52. *Kinoshita T.* // Phys. Rev. D. 1970. V.2. P.2346.
53. *Вернов Ю.С.* // ТМФ. 1970. Т.4. С.3.
54. *Khuri N.N., Kinoshita T.* // Phys. Rev. B. 1965. V.137. P.720; Phys. Rev. B. 1965. V.140. P.706.
55. *Wit R.* // Phys. Lett. 1965. V.15. P.350; Jagellonian University, TPJU-20/65 Cracow, Poland.
56. *Вернов Ю.С.* // ЖЭТФ. 1966. Т.50. С.672; 1967. Т.53. С.191; Тр. ФИАН им. Лебедева. 1971. Т.53. С.102.
57. *Jin Y.S., McDowell S.W.* // Phys. Rev. B. 1965. V.138. P.1279.
58. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Хрусталев О.А.* // ТМФ. 1971. Т.9. С.153; ЭЧАЯ. 1972. Т.3. Р.3; 515.
59. *Truong Tran N., Lam W.S.* // Phys. Rev. D. 1972. V.6. P.2875;
Grunberg G., Truong Tran N. // Phys. Rev. D. 1974. V.9. P.2874; Phys. Rev. Lett. 1973. V.31. P.63.
60. *Вернов Ю.С.* // ЭЧАЯ. 1975. Т.6. С.601.
61. *Jin Y.S., Martin A.* // Phys. Rev. B. 1964. V.135. P.1369.
62. *Odorico R.* // Nuovo Cim. A. 1968. V.54. P.96.
63. *McClure J.A., Jorna S.* // Nuovo Cim. A. 1970. V.67. P.667.
64. *Froissart M.* // Phys. Rev. 1961. V.123. P.1053.
65. *Martin A.* // Phys. Rev. 1963. V.129. P.1432.
66. *Singh V., Roy S.M.* // Ann. of Phys. 1970. V.57. P.461.
67. *Einhorn M., Blankenbecler R.* // Ann. of Phys. 1971. V.67. P.480.
68. *Martin A.* // High-Energy Physics and Elementary Particles. Vienna, 1965. P.165.
69. *Łukashúk L., Martin A.* // Nuovo Cim. A. 1967. V.52. P.122.
70. *Bonnier B., Vinh-Mau R.* // Phys. Rev. 1968. V.165. P.1923.

71. *Healy J.B.* // Phys. Rev. D. 1973. V.8. P.1904.
72. *Auberson G. et al.* // Nucl. Phys. B. 1974. V.73. P.314; 1975. V.94. P.311.
73. *Lopez C.* // Nucl. Phys. B. 1975. V.88. P.358; Nuovo Cim. Lett. 1975. V.13. P.69.
74. *Lopez C., Mennessier G.* // Nucl. Phys. B. 1975. V.96. P.515; 1977. V.118. P.426.
75. *Mnatsakanova M.N., Vernov Yu.S.* // Proc. of the XI Workshop on HEP&QFT. Moscow, 1997. P.385; Proc. of the X Intern. Seminar «Quarks-98», Moscow, 1999. V.1. P.238.
76. *Ynduráin F.J.* // Phys. Lett. B. 1970. V.31. P.368.
77. *Common A.K.* // Nuovo Cim. A. 1970. V.69. P.115.
78. *Common A.K., Ynduráin F.J.* // Nucl. Phys. B. 1971. V.26. P.167.
79. *Blankenbecler R., Savit R.* // Phys. Rev. D. 1972. V.5. P.2757.
80. *Grassberger P., Kühnelt H.* // Nucl. Phys. B. 1972. V.53. P.125;
Grassberger P., Schwela D., Kühnelt H. // Nucl. Phys. B. 1973. V.57. P.317.
81. *Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н.* // ТМФ. 1982. Т.52. С.199.
82. *Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Soloviev L.D.* // Nucl. Phys. 1957. V.4. P.427.
83. *Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* // Nucl. Phys. B. 1979. V.147. P.388; 448; 519.
84. *Кузьмин В.А., Тавхелидзе А.Н., Четыркин К.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т.25. С.456.
85. *Kuzmin V.A.* // Proc. of the Intern. Conf. on High Energy Physics. Tbilisi, 1976. P.108.
86. *Chetyrkin K.G., Krasnikov N.V., Tavkhelidze A.N.* // Phys. Lett. B. 1978. V.76. P.83.
87. *Krasnikov N.V., Pivovarov A.A., Tavkhelidze A.N.* Preprint CERN TH-3422. Geneva, 1982.
88. *Ignatiev A.Yu. et al.* // Proc. of the Intern. Seminar «Quarks-82». Sukhumi, 1982. P.28.
89. *Voloshin M.B.* // Nucl. Phys. B. 1979. V.154. P.365.
90. *Bertlmann R.A., Launer G., de Rafael E.* // Nucl. Phys. B. 1985. V.250. P.61.
91. *Narison S., de Rafael E.* Preprint CPT 81/p 1287. 1981.
92. *Reinders L.J. et al.* // Phys. Rep. 1985. V.127. P.1.
93. *Vernov Yu.S.* // Proc. of the Conf. «Hadron Structure-83». Smolenice, 1983. P.523.
94. *Fischer J., Kolář P.* Preprint BUTP-86/10. 1986.
95. *Mnatsakanova M.N., Vernov Yu.S.* // Proc. of the Intern. Seminar «Quarks-88». Tbilisi, 1988. P.201.
96. *Jenkovszky L.L., Struminski B.V.* // Proc. of the VI Seminar on Problems of High Energy Physics and Quantum Field Theory. Protvino, 1983. V.2. P.127.
97. *Мнацаканова М.Н.* // ТМФ. 1973. Т.14. С.192.
98. *Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.* // Czech. J. Phys. B. 1976. V.26. P.105.
99. *Lomsadze Yu.M., Lomsadze Sh.Yu.* Proc. of the III Seminar on Problems of High Energy Physics and Quantum Field Theory. Protvino, 1980. V.1. P.73.
100. *Bronzan J.B.* // Argonne Nat. Lab. Report. 1973. №ANL/HEP 7327;
Bronzan J.B., Kane G.L., Sukhatme H.P. // Phys. Lett. B. 1974. V.49. P.272.
101. *Eichman G.K., Dronhers Y.* // Phys. Lett. B. 1974. V.52. P.428.
102. *Heidrich J., Kares E.* // Lett. al. Nuovo Cim. 1975. V.12. P.365.
103. *Fischer J., Kolář P.* // J. Math. Phys. 1984. V.25. P.2538; Czech. J. Phys. B. 1987. V.37. P.297.

104. *Menon M.J., Motter A.E., Pimentel B.M.* // Phys. Lett. B. 1999. V.451. P.207; *Martini A.F. et al.* Preprint Unicamp, IFGW ABSTRACTA A 008-9. 1999.

105. *Fischer J., Kolář P.* // Phys. Lett. B. 1976. V.64. P.45.

106. *Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.* // Proc. of the XII Intern. Seminar on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Protvino. M., 1990. P.259.

107. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Петров В.А.* // Общие принципы квантовой теории поля и их следствия. / Под ред. В.А.Мещерякова. М., 1977. С.183.

108. *Вит Р.* // ЖЭТФ. 1965. Т.49. С.538.

109. *Valin P.* // Phys. Rep. 1991. V.203. P.233.

110. *Fischer J.* // Phys. Rep. 1981. V.76. P.157.

111. *Roy S.M.* // Physics Reports. 1972. V.5C. P.125.

112. *Вернов Ю.С., Чубаров М.С.* // ТМФ. 1989. Т.79. С.416.

113. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.

114. *Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н., Чубаров М.С.* // ТМФ. 1984. Т.59. С.233.

115. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

116. *Martin A.* // Phys. Lett. B. 1997. V.404. P.137.

117. *Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.* // Proc. of the XIII Intern. Seminar on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Protvino. M., 1991. P.205.

118. *Martin A.* // Nuovo Cim. 1963. V.29. P.993.

119. *Chubarov M.S., Mnatsakanova M.N., Vernov Yu.S.* // Acta Physica Polonica B. 1982. V.13. P.428.

120. *Kinoshita T., Loeffel J.J., Martin A.* // Phys. Rev. B. 1964. V.135. P.1464.

121. *Вернов Ю.С.* // ТМФ. 1973. Т.17. С.199.