ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2001. Т. 32. ВЫП. 5

УДК 530.1;075.8

НОВЫЙ ПОДХОД К СООТНОШЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ*

А.Д.Суханов

Российский университет дружбы народов, Москва

*Расширенный вариант доклада на Боголюбовской конференции «Проблемы теоретической и математической физики» (Дубна, ОИЯИ, сентябрь 1999 г.).

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 5

УДК 530.1;075.8

НОВЫЙ ПОДХОД К СООТНОШЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ*

А.Д.Суханов

Российский университет дружбы народов, Москва

Рассматриваются неклассические физические теории, в которых учитываются неконтролируемые (квантовое и/или тепловое) воздействия, приводящие к флуктуациям физических характеристик. Сформулирована концепция универсальности соотношений неопределенности (СН), согласно которой произведение флуктуаций сопряженных величин связано с их обобщенным коррелятором, учитывающим корреляции двух различных типов. Показано, что указанной концепции удовлетворяют СН Шредингера, частными реализациями которых являются СН Гейзенберга в традиционной квантовой динамике и СН Эйнштейна в статистической термодинамике и теории броуновского движения. Сделан существенный шаг в исследовании СН энергия–время. На основе СН Шредингера предложено обобщение понятия «неопределенность времени» Мандельштама–Тамма, которое обладает свойством однозначности и не приводит к сингулярностям. На этой основе введено обобщенное СН энергия–время и определена эффективная частота как универсальная временная характеристика открытой микросистемы в целом, заданная макроскопическими внешними условиями. Эффективность предложенного обобщения СН энергия–время продемонстрирована на типичных моделях финитного и инфинитного движений в микромире. Показано, что в случае когерентных состояний эффективная частота микросистемы флуктуирует, что позволяет перейти от обобщенного СН энергия–время к эквивалентному СН энергия–обратная эффективная частота. Установлено, что характер корреляции флуктуаций в этом СН совпадает с принятым в статистической термодинамике, но качественно отличается от корреляции флуктуаций в СН Гейзенберга. Полученные результаты открывают перспективы дальнейшего использования универсальных СН Шредингера в целостной теории неклассической физики.

Non-classical physical theories are considered, where non-controllable (quantum and/or thermal) influences are taken into account. These influences lead to the fluctuations of the physical characteristics of the object and its state. The conception of the uncertainties relations (UR) universality is formulated, according to which the product of conjugated physical quantities fluctuations is related with their generalized correlator. This correlator accounts for the correlation of two different types. It is shown this conception is satisfied with the UR in the Schroedinger's form. UR in the Heisenberg's form in the traditional quantum dynamics and UR in the Einstein's form in the statistical thermodynamics and Brownian motion theory are the specific realizations of these UR. The significant progress in the investigation of the UR energy–time is achieved. On the grounds of the Schroedinger's UR the generalization of the concept «uncertainty of the time», introduced by Mandelstam and Tamm, is suggested. The generalized version of this concept is unambiguity and doesn't lead to singularities. Starting from this concept the generalized UR energy–time is introduced and some effective frequency is determined. This frequency serves as the universal time characteristic for the open microsystem as

*Расширенный вариант доклада на Боголюбовской конференции «Проблемы теоретической и математической физики» (Дубна, ОИЯИ, сентябрь 1999 г.).

a whole and is determined by macroscopic external conditions. The effectiveness of the suggested generalization UR energy–time is demonstrated on the typical models of finite and infinite motions in the microworld. It is shown in the case of coherent quantum states the effective frequency of the microsystem fluctuates. This allows to accomplish the transition from the generalized UR energy–time to the equivalent UR energy–inverse effective frequency. It is stated the nature of the fluctuation correlation in this type of UR coincide with the one accepted in the statistical thermodynamics, but qualitatively differs with the correspondent quantity if the UR in the Heisenberg's form are used. The results so far obtained open good perspectives for further exploitation of the universal UR in the Shroedinger's form by the construction of the unified theory of non-classical physics as a whole.

Светлой памяти
Бориса Валентиновича Медведева
посвящается

ВВЕДЕНИЕ. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ СЕМЬДЕСЯТ ЛЕТ СПУСТЯ

Понятие «соотношение неопределенностей» (СН) вошло в язык науки после того, как Гейзенберг [1] впервые написал в 1927 г. СН координата–импульс

$$\delta q\, \delta p \gtrsim \hbar. \tag{1}$$

Общепринято считать, что это понятие — важнейший элемент математического и концептуального аппарата квантовой динамики [2]. Как известно, в течение длительного времени его физическая и методологическая интерпретации находились в центре дискуссии ведущих ученых. Сегодня, более семидесяти лет спустя после опубликования формулы (1) и выдвижения Бором принципа дополнительности [3], появилась возможность подвести некоторые итоги этой дискуссии, взглянув на данную проблему по-новому.

Во-первых, за эти годы в рамках квантовой динамики появились многочисленные обобщения СН (1), большая часть которых была подробно проанализирована в обзоре [4]. В нем в центре внимания находятся математические вопросы, связанные с возможностью обобщения СН и приложениями к практическим задачам, в которых используются популярные ныне когерентные, коррелированные, сжатые и т.п. состояния. В то же время вопросам физической интерпретации полученных обобщений уделено недостаточное внимание.

Во-вторых, на протяжении многих лет ряд ученых (см., например, [5]) ставили своей целью вообще обойти принципиальные проблемы, связанные с СН (1), с тем чтобы низвести квантовую динамику до уровня тривиальной статистической теории. Сторонники этого направления стремились доказать, что в квантовой динамике отсутствуют характерные черты, присущие всякой динамической теории. Несмотря на остроту дискуссии и глубину аргументов, сегодня это направление не пользуется популярностью у большинства физиков. Более того, в конечном итоге в рамках концепции ансамблей [6, 7] сформировался подход [8–10], позволяющий трактовать единообразно и квантовую, и классическую динамику.

С этой точки зрения обе теории можно считать одинаково «статистическими», так что предмет дискуссии, по существу, исчез. Состояния классической динамики имеют вид дельта-функций, так что по отношению к состояниям квантовой динамики они являются вырожденными. Последнее проявляется в том, что физические величины в этих состояниях не испытывают флуктуаций.

В-третьих, развитие теории вероятностей привело к тому, что математический аппарат квантовой динамики, в том числе СН, удалось включить в ее рамки [11, 12] как специфическую статистическую модель. В то же время при интерпретации этих результатов все внимание было сосредоточено на специфике квантовой динамики, связанной с отличием ее статистической модели от традиционных моделей классической теории вероятностей, а наличие общих черт у таких моделей оказалось в тени.

В-четвертых, за последние пятьдесят лет был исследован ряд физических явлений [13–15] (эффекты Казимира, Хокинга, Унру), в которых квантово-динамическое и термодинамическое описания приводят к одинаковым результатам. Эти факты можно трактовать как косвенное указание на возможность существования СН не только в квантовой динамике, но и вне ее. Более того, СН типа (1) в теории броуновского движения известно с 1933 г. [16, 17]. До сих пор большинство физиков относилось к нему не более как к курьезу [18], и серьезный интерес к СН в статистической термодинамике появился лишь недавно [19].

В-пятых, существует проблема незавершенности квантовой динамики, связанная с отсутствием последовательной теории измерений. Многие исследователи (см., например, [20]) считают, что решение этой проблемы требует выхода за рамки традиционной квантовой динамики и использования в этих целях идей термодинамики и теории информации. Существует мнение, что для этого может потребоваться обобщение и самой термодинамики [21].

Наконец, в-шестых, и это самое главное. К концу XX века выкристаллизовался новый взгляд на структуру физики в целом. Он опирается на современные методологические представления о стратегиях естественно-научного мышления [22, 23]. Согласно этому взгляду [24, 25] деление физики в целом на классическую и современную (или неклассическую) физику целесообразно производить вовсе не по хронологическому признаку. Предлагается исходить из того, существенно ли в данном разделе физики неконтролируемое и неустранимое воздействие на материальные объекты со стороны внешнего окружения, включающего и самого исследователя.

С нашей точки зрения, к неклассической физике следовало бы относить любую физическую теорию, учитывающую неконтролируемое воздействие и вызываемые им флуктуации физических характеристик как самих материальных объектов, так и их состояний [26]. К таким теориям, наряду с квантовой динамикой, следует, безусловно, отнести и равновесную статистическую термодинамику, поскольку о неустранимости неконтролируемого (теплового) воздействия в ней хорошо известно со времени опубликования работ Эйнштейна и Смолуховского по броуновскому движению [27]. В связи с этим вопрос о нахождении универсальных СН, которые были бы применимы не только в квантовой динамике, но и во всей неклассической физике, приобретает сегодня принципиальное значение [28].

Что же препятствовало до сих пор установлению универсального характера СН и их распространению из квантовой динамики на другие теории неклассической физики? Все дело в том, что изначально было принято считать, что СН типа (1) — это специфическая особенность квантовой динамики, воплощающая в себе так называемый «корпускулярно-волновой дуализм» и жестко привязанная к математическому аппарату преобразований Фурье. Довольно скоро, однако, стало ясно, что в квантовой динамике СН связывают многие пары физических характеристик, которым сопоставляются некоммутирующие эрмитовские операторы [4]. Как заметил Вигнер, это означает, что «этот последний дуализм есть только часть более общего плюрализма».

Сегодня можно утверждать, что это обстоятельство в концентрированном виде отражает фундаментальный факт наличия в природе двух качественно различных, но равноправных и неразрывных сторон физической реальности, воплощенных в физических характеристиках объектов и их состояний. При наличии неконтролируемого (либо квантового, либо теплового) воздействия окружения физические характеристики в произвольном микросостоянии можно описывать лишь средними значениями и отклонениями от них (флуктуациями). Флуктуации характеристик объектов и их состояний не являются независимыми друг от друга. Они связаны между собой соответствующими СН, отражающими наличие корреляции между ними.

В свою очередь, традиционно было принято считать, что между квантовой динамикой и равновесной статистической термодинамикой существуют непреодолимые концептуальные различия. Их обычно связывают с тем, что в термодинамике физическим характеристикам или макропараметрам сопоставляются не операторы, а c-числовые функции. Между тем, как следует из воспоминаний Гейзенберга [29], еще в 1930 г. Бор высказывался в пользу возможности сближения исходных положений этих теорий на основе последовательного применения принципа дополнительности. К сожалению, реализация этой идеи несколько затянулась. Последнее обстоятельство, по-видимому, обусловлено как техническими причинами (использование в термодинамике вместо операторов c-чисел), так и чересчур прямолинейной трактовкой принципа дополнительности.

В свете сказанного выше особое значение приобретает вопрос о СН энергия–время. С одной стороны, подобное СН важно потому, что оно устанавливает взаимосвязи между важнейшими величинами — энергетической и временной характеристиками микросистемы в целом. С другой стороны, сам факт его существования демонстрирует, что и в самой квантовой динамике наличие СН не всегда связано с операторным описанием физических величин. В частности, СН «энергия–время» в форме

$$\delta\varepsilon\,\delta t \gtrsim \hbar \tag{2}$$

активно используется в различных целях с конца 20-х годов, хотя сколько-нибудь разумный с физической точки зрения оператор времени пока неизвестен. Тот факт, что оба СН (1) и (2) формально связаны с одним и тем же неконтролируемым воздействием, определяемым постоянной Планка $\hbar$, и в то же время обладают совершенно различным статусом, до сих пор не нашел должного объяснения.

Иными словами, логично исходить из того, что СН (2) интересно не только с прагматической точки зрения. Его анализ мог бы сыграть важную роль в выяснении места СН в неклассической физике в целом, что весьма существенно для дальнейшего обобщения теории [26, 28]. Мы считаем, что подобный анализ следует осуществить с новых позиций, исходя из *концепции универсальности* СН в неклассической физике.

Порядок изложения в обзоре таков. В разд. 1 сформулирована концепция универсальности соотношений неопределенностей, позволяющая применять СН как в квантовой динамике, так и вне ее. В разд. 2, исходя из этой концепции, постулируется обобщенное СН энергия–время и демонстрируется его эффективность. В разд. 3 установлено, что в случае когерентных состояний обобщенное СН энергия–время адекватно СН энергия–обратная эффективная частота. Показано, что его интерпретация аналогична интерпретации СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике, но отлична от интерпретации СН Гейзенберга. В заключении приведен ряд соображений о роли СН Шредингера в дальнейшем объединении квантовой динамики и статистической термодинамики в рамках целостной теории неклассической физики.

1. КОНЦЕПЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СООТНОШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1.1. Прообразы СН в классической физике. В абсолютном большинстве монографий и учебников происхождение СН в квантовой динамике связывается преимущественно с анализом характеристик классических волн в рамках теории преобразований Фурье (исключение составляет [30]). Отсюда, по-видимому, произошел и сам термин «корпускулярно-волновой дуализм». Имея в виду поиск концепции универсальности СН в неклассической физике, естественно было бы проанализировать возможные прообразы СН еще в рамках классической физики.

Таких прообразов на самом деле не один, как это принято считать, а два — теория преобразований Фурье и классическая теория вероятностей. Согласно теории преобразований Фурье для одной переменной [31], изменения любой финитной функции* $f(t)$ и ее фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ в процессе «сжатия» функции f оказываются взаимосвязанными. Рассмотрим в этой связи семейство функций

$$f_\mu(t) = \sqrt{\mu} f(\mu t), \tag{3}$$

где μ — вещественный параметр. Функцию $f_\mu(t)$ принято называть сжатой относительно $f(t)$, если $\mu > 1$, и растянутой, если $\mu < 1$. Для фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ из (3) следует, что

$$\tilde{f}_\mu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{\mu}\right), \tag{4}$$

так что функция $\tilde{f}_\mu(\omega)$ при изменении μ ведет себя обратным образом по отношению к $f_\mu(t)$.

При этом следует подчеркнуть, что в классической физике в качестве функции f можно выбрать любую физическую величину, непрерывно зависящую от временного или пространственного аргумента. (Математические ограничения на финитные функции f в физике обычно выполнены.) Тем самым излагаемая здесь теория применима к фурье-анализу не только характеристик колебаний или волн, но и любых непрерывных физических величин.

Для удобства сравнения «ширин» различных функций f целесообразно ввести какую-либо меру. Выбор подобной характеристики для «ширины» достаточно произволен и физически ничем не выделен. Однако, имея в виду необходимость сопоставления в дальнейшем некоторых результатов теории преобразований Фурье и классической теории вероятностей, в качестве достаточно удобных характеристик произвольной финитной функции $f(t)$ можно ввести моменты первого и второго порядков квадрата модуля этой функции:

$$m_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int t\,|f(t)|^2\,dt; \tag{5}$$

*Под финитной функцией здесь понимается функция, практически равная нулю вне ограниченной области [2].

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (t - m_f)^2 \, |f(t)|^2 \, dt. \tag{6}$$

Соответственно для характеристик фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$, называемого спектром функции $f(t)$, целесообразно также ввести моменты первого и второго порядков

$$m_{\tilde{f}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \omega \, |\tilde{f}(\omega)|^2 \, d\omega; \tag{7}$$

$$\sigma_{\tilde{f}}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\omega - m_{\tilde{f}})^2 \, |\tilde{f}(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{8}$$

Величины σ_f и $\sigma_{\tilde{f}}$ действительно характеризуют «ширины» функции f и ее спектра $\tilde{f}$. В частности, при переходе от функции $f(t)$ к функции $f_\mu(t)$ согласно (3) величина σ_f^2 заменяется на σ_f^2/μ^2, а величина $\sigma_{\tilde{f}}^2$ — на $\mu^2\sigma_{\tilde{f}}^2$. Вместе с тем нет никаких оснований называть величины σ_f и $\sigma_{\tilde{f}}$ мерами флуктуаций физических величин, ибо здесь отсутствует случайный выбор, оправдывающий применение классической теории вероятностей. Иначе говоря, функции f и $\tilde{f}$ — это некие однозначно заданные физические величины, зависящие от своих непрерывных аргументов, а вовсе не распределения вероятностей возможных значений этих аргументов, наблюдаемых на опыте. С этой точки зрения величины σ_f^2 и $\sigma_{\tilde{f}}$ — это не какие-либо «неопределенности» значений аргументов t или ω, а «размытости» или «ширины» наблюдаемых на опыте вполне определенных функций $f(t)$ и $\tilde{f}(\omega)$.

Именно для этих величин имеет место полезная взаимосвязь, которую иногда некорректно называют СН в классической волновой теории. В общем случае она такова [31]:

$$\sigma_f^2 \sigma_{\tilde{f}}^2 \geqslant \frac{1}{4} \int \, dt \, |f(t)|^2 \equiv \frac{C}{4}. \tag{9}$$

Если, как это обычно удается сделать, функцию f нормировать, положив $C \equiv 1$, то взаимосвязь (9) для линейных величин принимает вид

$$\sigma_f \sigma_{\tilde{f}} \equiv \delta t \, \delta\omega \geqslant \frac{1}{2}, \tag{10}$$

где δt и $\delta\omega$ — это просто удобные обозначения «ширин» σ_f и $\sigma_{\tilde{f}}$, учитывающие соображения размерности. Знак равенства в (10) достигается только для функции f, имеющей форму гауссовой кривой. (Аналогичную форму по свойству интеграла Фурье имеет и фурье-образ $\tilde{f}$.)

Итак, в классической физике не только для амплитуды или интенсивности какой-либо волны, но и для любой физической величины f, являющейся непрерывной финитной функцией своего аргумента, и ее фурье-образа $\tilde{f}$ справедливо неравенство (10), связывающее характерные «ширины» функции f и ее спектра $\tilde{f}$. Его важной особенностью является то, что слева в него входит произведение физических величин — «ширин» функций, тогда как справа стоит число, задаваемое условием нормировки. Как и следовало ожидать, если неконтролируемое воздействие отсутствует, то никаких неопределенностей, по существу, нет, а следовательно, не существует оснований трактовать (10) как некое СН. Поэтому соотношение (10) в классической физике было бы более естественно называть «*соотношением ширин*» (СШ).

Обычно в качестве прообраза СН в классической физике ограничиваются лишь формулой (10), причем ее применяют не в общем случае, а только тогда, когда f — амплитуда или интенсивность классической волны. Между тем другим независимым прообразом СН в классической физике может служить классическая теория вероятностей в случае применения ее к анализу результатов измерений любых физических величин [32]. Согласно этой теории при измерении некой физической величины A на опыте получается совокупность значений этой величины из некоторого интервала и распределение вероятностей этих значений $\rho(A)$. По этим данным можно вычислить среднее значение искомой величины

$$\bar{A} = \int A\rho(A)\,dA \tag{11}$$

и среднеквадратичное отклонение (дисперсию)

$$\sigma_A^2 \equiv (\Delta A)^2 = \int (A-\bar{A})^2\rho(A)\,dA, \tag{12}$$

где $\rho(A)$ — плотность вероятности, нормированная условием

$$\int \rho(A)\,dA = 1. \tag{13}$$

Аналогично можно ввести распределение вероятностей $\rho(B)$ физической величины B, ее среднее значение $\bar{B}$ и дисперсию σ_B^2. Наконец, если производится одновременное измерение двух величин A и B, то результат существенно зависит от того, являются ли эти величины статистически независимыми или нет. В общем случае разброс результатов измерений определяется совместной плотностью вероятности $\rho(A,B)$, нормированной условием

$$\int \rho(A,B)\,dA\,dB = 1. \tag{14}$$

Согласно классической теории вероятностей [32] признаком статистической зависимости величин A и B может служить отличие от нуля коррелятора флуктуаций ΔA и ΔB:

$$\sigma_{AB} \equiv \overline{(\Delta A \Delta B)} = \int (A - \bar{A})(B - \bar{B})\rho(A, B)\, dA\, dB = \overline{AB} - \bar{A}\bar{B}, \tag{15}$$

где, например, $\bar{A}$ определяется формулой (11).

Если совместная плотность вероятности удовлетворяет условию статистической независимости

$$\rho(A, B) = \rho(A)\rho(B), \tag{16}$$

то коррелятор σ_{AB} (15) всегда обращается в нуль.

Очевидно, что величины σ_A, σ_B и σ_{AB}, используемые в классической теории вероятностей, являются моментами второго порядка для функции распределения вероятностей. С физической точки зрения они имеют смысл характерных разбросов ΔA и ΔB значений измеряемых величин A и B и коррелятора $\overline{(\Delta A \cdot \Delta B)}$ этих разбросов. Вследствие неравенства Коши–Буняковского–Шварца между ними существует стандартная взаимосвязь

$$\sigma_A \sigma_B \equiv \Delta A \Delta B \geqslant \sigma_{AB} = \overline{(\Delta A \Delta B)}, \tag{17}$$

которую можно рассматривать в качестве еще одного прообраза СН в классической физике.

Заметим, однако, что если последовательно придерживаться классической стратегии мышления, то взаимосвязь вида (17) между дисперсиями и коррелятором в классической физике появляется только на промежуточном этапе, когда разбросы в значениях величин A и B и корреляция этих разбросов зависят от недостаточного мастерства экспериментатора или наличия контролируемых внешних помех. Принято считать, что в идеале эти причины появления разброса значений при измерениях физических величин в классической физике можно устранить, ибо предполагается, что неконтролируемое внешнее воздействие в данном случае отсутствует. Тем самым, во-первых, должно выполняться условие статистической независимости (16), что приводит к обращению в нуль коррелятора σ_{AB} в правой части (17). Во-вторых, каждая из дисперсий σ_A и σ_B в левой части (17) независимо также может обратиться в нуль. Это и означает, что в классической физике имеются лишь прообразы СН, но сами СН отсутствуют.

1.2. Универсальные СН Шредингера в неклассической физике. Установление СН в квантовой динамике можно было бы начать, опираясь на формулы либо (9), либо (17), известные из классической физики. Однако исторически это произошло путем трансформации и переинтерпретации только формулы (9). Формула (17), как возможный прообраз СН, изначально востребована не была. Следствием этого явилась неуниверсальность СН, введенных Гейзенбергом.

Для подтверждения этого тезиса обратимся к интуитивному обоснованию вывода простейшего СН координата–импульс. С этой целью в качестве функции f достаточно выбрать «классическую волновую функцию» $\psi_{\text{кл}}(q)$, распространяющуюся вдоль оси q (при $t = \mathrm{const}$). Тогда согласно (9) «ширины» $\sigma_{\psi_{\text{кл}}}$ и $\sigma_{\tilde{\psi}_{\text{кл}}}$ функции $\psi_{\text{кл}}(q)$ и ее спектра $\tilde{\psi}_{\text{кл}}(k)$ связаны соотношением

$$\sigma_{\psi_{\text{кл}}}\sigma_{\tilde{\psi}_{\text{кл}}} \equiv \delta q\,\delta k \geqslant \gamma. \tag{18}$$

Здесь по соображениям размерности δq и δk — интервалы изменения аргументов q и k функций $\psi_{\text{кл}}$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}$ соответственно, k — волновое число, а γ — постоянная, значение которой зависит от определения «ширин» функций $\psi_{\text{кл}}$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}$ и от их нормировки. В частности, в классической теории дифракции за «ширину» $\delta\psi_{\text{кл}} \equiv \delta q$ функции $\psi_{\text{кл}}(q)$ часто выбирают расстояние между первыми минимумами дифракционной картины, что соответствует выбору $\gamma = 2\pi$.

Дальнейший ход рассуждений довольно прост. В квантовой динамике микрочастице при одномерном движении сопоставляется квантовая волновая функция $\psi_{\text{кв}}(q)$ (при $t = \mathrm{const}$). Все соображения, изложенные в п. 1.1, вполне относятся и к ней, так что соотношение (18) справедливо и в этом случае. При этом смысл величин, входящих в левую часть (18), как неких «ширин» функций $\psi_{\text{кв}}$ и $\tilde{\psi}_{\text{кв}}$ сохраняется.

Если далее воспользоваться формулой де Бройля $p = \hbar k$ и просто домножить неравенство (18) на постоянную Планка $\hbar$, то полученное соотношение

$$\delta q\,\delta p \gtrsim \gamma\hbar \tag{19}$$

станет внешне похожим на СН Гейзенберга (1). Однако физический смысл (19) как соотношения «ширин» останется прежним, т.е., по существу, классическим.

Решающий шаг, позволяющий прийти к нетривиальным СН в квантовой динамике, связан с осознанием того, что волновая функция $\psi_{\text{кв}}$ в отличие от $\psi_{\text{кл}}$ имеет смысл комплексной амплитуды вероятности. Это позволяет переинтерпретировать величины в левой части (18) и связать их с теорией измерений соответствующих характеристик микрочастиц и их состояний.

С этой целью наблюдаемым q и p сопоставляются эрмитовские операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$, после чего по определенным правилам вычисляются их средние значения $\bar{q}$ и $\bar{p}$ и средние квадратичные отклонения от этих значений (дисперсии) Δq и Δp. Если теперь в левой части (19) вместо δq и δp подставить дисперсии Δq и Δp, то оно превратится в СН Гейзенберга вида

$$\Delta q\,\Delta p \gtrsim \gamma\hbar, \tag{20}$$

в котором осталось только уточнить постоянную γ.

Это означает, что в случае волновой функции $\psi_{\text{кв}}(q)$ «ширинам» σ_f и $\sigma_{\tilde{f}}$, типичным для фурье-анализа, удается придать смысл среднеквадратичных флуктуаций ΔA и ΔB, используемых в классической теории вероятностей. С учетом условия нормировки минимальное значение γ, достигаемое для гауссова волнового пакета, равно $1/2$, так что окончательно СН Гейзенберга координата–импульс принимает вид

$$\Delta q\, \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{21}$$

Если сравнить эту формулу с классическими соотношениями (9) и (17), то нетрудно видеть, что, начав с формулы (9) из фурье-анализа, мы пришли к тому, что левая часть СН (21) совпадает с левой частью формулы (17) из классической теории вероятностей. В то же время правая часть СН (21) скорее похожа на правую часть формулы (9) из фурье-анализа.

Проведенное обсуждение показывает, что подход к выводу СН в квантовой динамике только на основе результатов фурье-анализа фактически является непоследовательным. На этом пути остается открытым вопрос, насколько является общим и универсальным выражение, стоящее в правой части СН (21).

Ответ на него был получен в ходе распространения понятия СН на другие наблюдаемые микрочастиц [33, 4]. В результате СН (21) было обобщено на любые наблюдаемые A и B, которым сопоставляются эрмитовы операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Оно приняло вид

$$\Delta B\, \Delta A \geqslant \frac{1}{2}\, |\langle|[\hat{A}, \hat{B}]|\rangle| \equiv c_{AB}. \tag{22}$$

Здесь ΔB и ΔA — среднеквадратичные отклонения величин B и A в данном состоянии, а c_{AB} — половина среднего модуля коммутатора этих операторов, отражающая своеобразную корреляцию между флуктуациями наблюдаемых B и A. В частном случае, когда $\hat{B} = \hat{q}$ и $\hat{A} = \hat{p}$, правая часть (21) равна

$$c_{pq} = \frac{1}{2}\, |\langle|[\hat{p}, \hat{q}]|\rangle| = \frac{\hbar}{2}. \tag{23}$$

Формулу (22) принято называть *соотношением неопределенностей Гейзенберга* для произвольных наблюдаемых. Входящие в него слева и справа величины, в отличие от величин в формуле (1), имеют строгий математический смысл. Общепринятая физическая трактовка СН (22) соответствует, как известно, традиционной интерпретации квантовой динамики [2].

Однако нетрудно видеть, что СН Гейзенберга (22), хотя и устанавливают некую корреляцию между флуктуациями наблюдаемых B и A, вряд ли являются универсальными. В них вклад коммутатора c_{AB} обращается в нуль не только тогда, когда хотя бы одной из наблюдаемых сопоставляется c-число. То же самое имеет место в состояниях, в которых при $[\hat{A},\hat{B}]\neq 0$ среднее от коммутатора обращается в нуль. В то же время теория измерений, основанная на классической теории вероятностей, демонстрирует возможность корреляции между флуктуациями и тем самым существования своеобразного СН вида (17) даже для c-числовых физических величин, связанных какой-либо статистической зависимостью.

Учитывая продолжающееся становление единого неклассического взгляда на природу и наличие общих черт в СН (22) и (17), мы выдвигаем *концепцию универсальности* соотношений неопределенностей в неклассической физике. Согласно этой концепции в произвольном состоянии системы пары взаимозависимых физических характеристик A и B определяются лишь с точностью до флуктуаций, ограниченных обобщенными корреляциями между этими флуктуациями. Последние отражают наличие того или иного неконтролируемого воздействия на систему со стороны окружения. Универсальность СН означает, что они в равной мере возникают в любой теории неклассической физики, независимо от того, описываются ли входящие в них величины операторами или c-числами. Различие между этими случаями может быть связано только с тем, какого типа корреляции определяют правую часть соответствующих СН.

Как мы сейчас покажем, указанной концепции полностью удовлетворяют *обобщенные* СН *Шредингера* [34], полученные им еще в 1930 г. С современной точки зрения это обобщение СН Гейзенберга (22) выглядит совершенно естественным, являясь реализацией в наиболее общей форме неравенства Коши–Буняковского–Шварца («неравенства треугольника», ведущего происхождение от теоремы Пифагора).

Простейшим примером такого неравенства может служить соотношение между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ трехмерного евклидова пространства:

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \leqslant (\mathbf{ab})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\,\cos^2\varphi. \tag{24}$$

В квантовой динамике аналогичное неравенство [35]

$$\langle A|A\rangle\langle B|B\rangle \geqslant |\langle A|B\rangle|^2 \equiv (\mathrm{Re}\,\langle A|B\rangle)^2 + (\mathrm{Im}\,\langle A|B\rangle)^2 \tag{25}$$

связывает произвольные векторы гильбертова пространства $|A\rangle = \hat{A}|\rangle$ и $|B\rangle = \hat{B}|\rangle$.

Нетрудно показать, что формула (25) является прямым следствием положительной определенности длины вектора в гильбертовом пространстве с обычной метрикой

$$\langle C|C\rangle \equiv \langle \lambda A + B|\lambda A + B\rangle, \tag{26}$$

где λ — произвольное комплексное число. Раскрывая левую часть неравенства (26), получим

$$|\lambda|^2\langle A|A\rangle + (\lambda^*\langle A|B\rangle + \lambda\langle B|A\rangle) + \langle B|B\rangle \geqslant 0. \tag{27}$$

Учитывая, что $\langle B|A\rangle = \langle A|B\rangle^*$ и выбирая фазу числа λ так, чтобы $\lambda^*\langle A|B\rangle = |\lambda|\cdot|\langle A|B\rangle|$, из (27) получим

$$|\lambda|^2\langle A|A\rangle + 2|\lambda|\langle A|B\rangle + \langle B|B\rangle \geqslant 0. \tag{28}$$

Тогда условие неотрицательности длины вектора $\langle C|C\rangle$ сводится к условию отрицательности дискриминанта квадратного трехчлена (28) относительно $|\lambda|$, что и дает неравенство (25).

Чтобы получить, опираясь на неравенство (25), универсальное СН Шредингера, в качестве операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, порождающих векторы гильбертова пространства, достаточно использовать операторы

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \bar{A}; \quad \Delta\hat{B} = \hat{B} - \bar{B}, \tag{29}$$

совпадающие с прежними при $\bar{A} = \langle|\hat{A}|\rangle = 0$ и $\bar{B} = \langle|\hat{B}|\rangle = 0$. Тогда вместо (25) получим неравенство

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \equiv (\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant R_{AB}^2 \equiv |\langle\Delta A|\Delta B\rangle|^2, \tag{30}$$

имеющее смысл универсального СН Шредингера. В нем

$$(\Delta A)^2 \equiv \langle|(\Delta\hat{A})^2|\rangle; \quad (\Delta B)^2 \equiv \langle|(\Delta\hat{B})^2|\rangle \tag{31}$$

суть дисперсии величин A и B, а

$$R_{AB}^2 = \sigma_{AB}^2 + c_{AB}^2 = \frac{1}{4}\langle|\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}|\rangle^2 + \frac{1}{4}|\langle|[\hat{A},\hat{B}]|\rangle|^2 \tag{32}$$

является обобщенной характеристикой корреляции этих величин. Последняя включает вклады антикоммутатора $\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}$ и коммутатора $[\hat{A},\hat{B}]$ соответствующих операторов.

Иными словами, левые части СН Шредингера (30) и СН Гейзенберга (22) совпадают. В то же время в правую часть СН (30) в качестве обобщенного коррелятора R_{AB}^2 входит квадрат модуля амплитуды перехода между состояниями $|\Delta A\rangle$ и $|\Delta B\rangle$. Поскольку произведение эрмитовых операторов $\Delta\hat{A}$ и $\Delta\hat{B}$ в общем случае является неэрмитовым, в правую часть СН (30), в отличие от правой части СН (22), входят вклады как эрмитовой (σ_{AB}), так и антиэрмитовой (c_{AB}) частей этого произведения. Как мы увидим ниже, они соответствуют различным типам корреляции между взаимозависимыми величинами ΔA и ΔB.

Отметим, что потребность в более подробном доказательстве неравенства (25) вызвана тем, что даже в современных монографиях и учебниках [2, 9, 30] доказательства СН Шредингера (30) и СН Гейзенберга (22) приводятся независимо друг от друга без какого-либо сравнительного анализа. При этом в ходе доказательства СН Гейзенберга (22), сходного с изложенным выше, вместо комплексного числа λ выбирается чисто мнимое число $(-i)|\lambda|$, что приводит к замене второго члена слева в неравенстве (28) на $2|\lambda|\,\mathrm{Im}\,\langle A|B\rangle$.

Довольно удивительно, что никто до сих пор не заметил, что выбор в качестве λ в том же доказательстве вещественного числа $|\lambda|$ автоматически приводит к замене того же члена слева в неравенстве (28) на $2|\lambda|\,\mathrm{Re}\,\langle A|B\rangle$.

Тем самым один и тот же прием доказательства способен привести как к универсальным СН (30), так и к их частным реализациям — СН (22) или СН вида

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant \sigma_{AB}^2, \tag{33}$$

напоминающим формулу (17) в классической теории вероятностей.

Отметим, что последнее СН непосредственно следует из квазитермодинамической теории флуктуаций, предложенной А. Эйнштейном [36] в 1910 г. в рамках статистической термодинамики. Фактически аналогичные СН можно было бы получить еще раньше из его же теории броуновского движения [27]. В связи с этим вполне обоснованно называть формулы (33) или (17) *соотношением неопределенностей Эйнштейна*.

Таким образом, универсальные СН Шредингера (30) известны 70 лет. Однако до сих пор они оставались, по существу, не востребованными. Правда, в последние десятилетия они получили некоторое практическое применение в связи с эффективным использованием когерентных, коррелированных и сжатых состояний в квантовой оптике, теориях сверхтекучести и сверхпроводимости и других подобных задачах [4]. Однако концептуальный характер и универсальность СН Шредингера при этом оставались в тени. В частности, в тех случаях, когда вводились как СН Шредингера (30), так и СН Гейзенберга (22), обычно делалось утверждение о том, что отбрасывание члена σ_{AB}^2 в правой части СН (30), т.е. формальный переход к СН (22), только усиливает соответствующее неравенство. Между тем такое усиление неравенства, т.е. переход от СН (30) к СН, похожим на СН (22), но с заменой знака $\geqslant$ на знак сильного неравенства $>$ делает применение последних достаточно бесперспективным.

На самом деле картина такова. Универсальные СН Шредингера (30) могут вырождаться в свои частные случаи — СН Гейзенберга (22) и СН Эйнштейна (33) — только при выполнении определенных условий. Если $c_{AB} = 0$, то СН (30) сводятся к СН (33). Если же $\sigma_{AB} = 0$, то СН (30) сводятся к СН (22). В общем случае справедливы лишь универсальные СН (30).

Важно отметить, что в квазиклассическом пределе $\hbar \to 0$ или в случаях, когда одна из двух величин A и B (или они обе одновременно) являются c-числами, член c_{AB}^2 в правой части СН (30) исчезает. В то же время член σ_{AB}^2 (при наличии статистической зависимости) переходит в квадрат коррелятора $\overline{(\Delta A \Delta B)}^2$ между флуктуациями ΔA и ΔB, входящий в формулу (17) из классической теории вероятностей. Более того, и при $\hbar \neq 0$, т.е. в квантовой динамике, может случиться так, что $\sigma_{AB} \gg c_{AB}$. Тогда правую часть СН (30) определяет вклад антикоммутатора операторов $\Delta\hat{B}$ и $\Delta\hat{A}$, отражающий качественно иной тип корреляции этих величин. В частности, это имеет место, когда коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}]$ равен нулю.

Величина R_{AB}^2 в правой части универсальных СН Шредингера (30) объединяет два качественно различных типа корреляции, представленных слагаемыми σ_{AB}^2 и c_{AB}^2. Один тип корреляции, характерный для СН Гейзенберга, можно назвать *корреляцией «в противофазе»*, ибо в нем $\Delta A \sim \dfrac{1}{\Delta B}$. Другой тип корреляции, характерный для СН Эйнштейна, можно назвать *корреляцией «в фазе»*, потому что в нем $\Delta A \sim \Delta B$. Величина R_{AB}^2 в целом имеет физический смысл меры обобщенной корреляции между флуктуациями величин B и A и является целостной характеристикой неконтролируемого воздействия окружения, инвариантной относительно унитарных преобразований в гильбертовом пространстве. Разумеется, входящие в R_{AB}^2 слагаемые σ_{AB}^2 и c_{AB}^2 по отдельности этими качествами не обладают, кроме тех случаев, когда либо при $\hbar \neq 0$ вклад коммутатора c_{AB}^2 обращается в нуль или пренебрежимо мал, либо при $\hbar \to 0$ вклад антикоммутатора σ_{AB}^2, переходящий в квадрат коррелятора $\overline{(\Delta A \Delta B)}^2$, отличен от нуля.

1.3. Флуктуации макропараметров и СН Эйнштейна в статистической термодинамике. Универсальные СН Шредингера (30) расширяют класс теорий, в которых между флуктуациями физических величин имеются нетривиальные корреляции, на всю неклассическую физику. Последнее особенно существенно для анализа СН энергия–время, поскольку одна из двух входящих в него величин — время является c-числом. Прежде чем перейти к этому анализу, целесообразно обсудить более подробно ситуацию с флуктуациями и их корреляцией в статистической термодинамике, в которой все физические величины описываются c-числами.

Интересно отметить, что СН Эйнштейна (33) могли бы стать полезным инструментом исследования в статистической термодинамике, по крайней мере, с 1910 г. Тот факт, что этого не произошло, можно объяснить скорее всего психологическими причинами. С одной стороны, имеет значительное распространение [37] убежденность в том, что сам факт наличия СН между двумя физическими величинами принципиально связан с их операторным описанием, характерным для квантовой динамики. С этой точки зрения ни о каких СН в статистической термодинамике говорить не приходится. С другой стороны, даже те авторы [16, 17, 38, 39], кто имел дело с частными случаями СН в статистической термодинамике, испытывали серьезные трудности при попытках их истолкования в духе традиционной квантовой динамики [2]. Природу этих трудностей можно понять, поскольку характер корреляции между c-числовыми величинами A и B в статистической термодинамике совершенно иной.

Чтобы в этом разобраться, ограничимся здесь рассмотрением только равновесной статистической термодинамики. Как известно [40, 41], в ней имеются три уровня теоретического описания. На первом из них — в феноменологической термодинамике — все макропараметры, определяющие макросостояния системы, типа внутренней энергии $\mathcal{E}$, температуры T, объема V, давления P и т.п., равноправны и однозначно фиксированы (не испытывают флуктуаций).

На следующем уровне — в термодинамике, основанной на статистической механике Гиббса, если для простоты ограничиться только величинами $\mathcal{E}$ и T, равноправие энергии и температуры нарушается. Что касается энергии системы как макропараметра, то она характеризуется средним значением $\bar{\mathcal{E}}$ и флуктуацией $\Delta\mathcal{E}$, которые могут быть найдены по распределению Гиббса. В то же время температура, будучи модулем этого распределения, остается жестко фиксированной. Фактически она является температурой термостата T_0 и, как и на первом уровне, переносится на систему с помощью феноменологического нулевого начала термодинамики: $T \equiv T_0$. Разумеется, говорить о СН энергия–температура на этих уровнях описания не приходится.

Наконец, на третьем, наиболее фундаментальном уровне — в собственно статистической термодинамике — принимаются во внимание как флуктуации температуры ΔT, так и коррелятор флуктуаций энергии и температуры системы $\overline{\Delta\mathcal{E}\Delta T}$, отражающий наличие неконтролируемого (теплового) воздействия на систему со стороны окружения (термостата). Они могут быть вычислены в рамках квазитермодинамической теории флуктуаций Эйнштейна [36, 40, 41]. При этом температура термостата, имеющая физический смысл средней температуры системы $\bar{T} = T_0$, остается неизменной ($\Delta T_0 = 0$). В то же время температура системы флуктуирует ($\Delta T \neq 0$), так что в теории Эйнштейна понятие *теплового равновесия* (*нулевое начало* термодинамики) *обобщается*, принимая динамический характер. Тем самым, в статистической термодинамике вполне может быть справедливо СН энергия–температура, аналогичное по форме СН Эйнштейна (33).

Рассмотрим достаточно общую модель — произвольную макросистему в условиях теплового равновесия с термостатом, когда одновременно возможны флуктуации экстенсивных макропараметров — энергии $\mathcal{E}$ и объема V — и интенсивных макропараметров — температуры T и давления P. Ограничиваясь сначала флуктуациями только энергии $\Delta\mathcal{E}$ и температуры ΔT, имеем [41]:

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = -(k_{\mathrm{B}}T)\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right]^2 + \\ + C_V k_{\mathrm{B}} T^2 = f(V,T) + C_V k_{\mathrm{B}} T^2; \tag{34}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{k_{\mathrm{B}}T^2}{C_V}; \quad \sigma_{\mathcal{E}T} = k_{\mathrm{B}}T^2, \tag{35}$$

где C_V — теплоемкость при постоянном объеме, k_{B} — постоянная Больцмана. Подставляя далее формулы (34) и (35) в СН Эйнштейна (33), получим СН энергия–температура

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2\sigma_T^2 \equiv (\Delta\mathcal{E})^2(\Delta T)^2 \geqslant R_{\mathcal{E}T}^2 \equiv \sigma_{\mathcal{E}T}^2 = (k_{\mathrm{B}}T^2)^2, \tag{36}$$

где равенство достигается, например, при $V = \mathrm{const}$.

Прежде всего, поясним смысл флуктуации температуры как характеристики макросистемы в целом. Напомним, что в основе феноменологической термодинамики лежит постулат, называемый обычно нулевым началом. Он подразумевает, что при тепловом равновесии температуры любых двух макроскопических систем (здесь — системы и термостата) совпадают, так что какие-либо флуктуации их температур не предполагаются. В теории Эйнштейна [36] предполагается, что термостат, обладающий бесконечным числом степеней свободы ($C_V \to \infty$), согласно (35) имеет жестко фиксированную температуру $T_0 = \mathrm{const}$, которая входит в качестве модуля распределения во все формулы равновесной статистической термодинамики. В то же время любая макроскопическая система с конечным числом степеней свободы имеет температуру T, флуктуирующую относительно температуры термостата:

$$T_0 - \Delta T \leqslant T \leqslant T + \Delta T. \tag{37}$$

Здесь

$$(\Delta T)^2 = \frac{T_0^2}{\alpha N}, \tag{38}$$

N — число частиц в системе, α — постоянная, связанная с числом степеней свободы частицы. Тем самым в теории Эйнштейна, в отличие от теорий Клаузиуса или Гиббса, понятие теплового равновесия приобретает динамический характер.

Обратим внимание на то, что внешний вид полученного СН энергия–температура в равновесной статистической термодинамике не вызывает особых ассоциаций с каким-либо СН в квантовой динамике. Ситуация, однако, меняется, если в нем перейти от температуры T к обратной температуре $1/T$. Тогда, поскольку

$$\Delta(1/T) = \frac{\Delta T}{T^2}, \tag{39}$$

вместо (36) получим СН энергия–обратная температура в виде

$$\Delta\mathcal{E}\Delta(1/T) \geqslant k_{\mathrm{B}}, \tag{40}$$

открывающем более широкие возможности для физической интерпретации.

Следует отметить, что очень часто постоянную Больцмана k_{B} считают чисто технической величиной. Очевидно, что в СН Эйнштейна (40) она явно играет роль фундаментальной константы, аналогичную роли постоянной $\hbar$ в квантовой динамике. Поскольку принято считать, что минимальное изменение энтропии $\Delta S_{\min} \sim k_{\mathrm{B}}$, постоянную Больцмана k_{B} следует трактовать как минимальную меру «неупорядоченности», передаваемую системе термостатом в условиях теплового равновесия. Тем самым она в той же мере характеризует минимальное неконтролируемое тепловое воздействие, в какой постоянная Планка $\hbar$ — минимальное неконтролируемое квантовое воздействие.

Другое СН в равновесной статистической термодинамике, у которого есть аналог среди СН в квантовой динамике, можно получить для флуктуаций объема V, давления P и их коррелятора $\overline{(\Delta V)(\Delta P)}$. Следуя вновь [41], имеем

$$\sigma_V^2 = -(k_{\mathrm{B}}T)\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T; \tag{41}$$

$$\sigma_P^2 = -(k_{\mathrm{B}}T)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 \frac{k_{\mathrm{B}}T^2}{C_V}; \tag{42}$$

$$\sigma_{VP} = -(k_{\mathrm{B}}T). \tag{43}$$

Отсюда следует, что в данном случае справедливо СН объем–давление:

$$\sigma_V^2\sigma_P^2 \equiv (k_{\mathrm{B}}T)^2\left[1 - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 \frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right] \geqslant (k_{\mathrm{B}}T)^2 \tag{44}$$

или для линейных величин

$$\Delta V\Delta(P/T) \geqslant k_{\mathrm{B}}, \tag{45}$$

где равенство достигается, например, при $V = \mathrm{const}$.

Поскольку нас интересует аналогия с квантовой динамикой, дадим СН (44) своеобразную «микроскопическую» трактовку, воспользовавшись моделью невырожденного идеального газа. С этой целью будем рассматривать газ в сосуде в целом как своеобразную «квазичастицу», флуктуация координаты которой Δq связана с флуктуацией объема $\Delta V = \Delta q S$, где S — площадь поршня, перпендикулярного оси q. Соответственно, флуктуацию давления ΔP выразим через флуктуацию импульса Δp «квазичастицы» по формуле

$$\Delta P = \frac{\Delta F}{S} = \frac{\Delta p \nu}{S}, \tag{46}$$

где ΔF — флуктуация силы, действующей на поршень в отсутствие внешних полей (при $U(q) = 0$), ν — число ударов частиц о поршень в единицу времени.

Подставляя формулы, выражающие ΔV и ΔP через Δq и Δp в СН (45), получим

$$\Delta V \Delta P = (\Delta q S)\left(\frac{\Delta p \nu}{S}\right) \geqslant k_{\mathrm{B}} T. \tag{47}$$

Тем самым окончательно СН координата–импульс в равновесной статистической термодинамике принимает вид

$$\Delta q \Delta p \geqslant k_{\mathrm{B}} \frac{T}{\omega_{\text{эфф}}}. \tag{48}$$

Здесь $\omega_{\text{эфф}} \equiv \nu$ — эффективная частота для данной системы — невырожденного идеального газа в сосуде при отсутствии внешних воздействий. Она играет роль временной характеристики системы в целом. СН Эйнштейна, аналогичное СН (48), с $\omega_{\text{эфф}} \equiv 1/\tau$, где τ — время релаксации, связывает флуктуации координаты и импульса броуновской частицы [14].

Нетрудно понять, что СН Эйнштейна (48) в равновесной статистической термодинамике для своеобразной «квазичастицы» в тепловом равновесии внешне похоже на СН Гейзенберга (22) в квантовой динамике, ибо в его правой части стоит характерная комбинация размерности действия. Вместе с тем СН (48) близко по форме и к СН энергия–температура (40) или (36), также содержащим постоянную k_{B} и температуру T. Это лишний раз подчеркивает существенную роль неконтролируемого (теплового) воздействия на систему, которое одинаково сказывается на корреляциях флуктуаций разных взаимозависимых физических характеристик.

1.4. Современный статус СН энергия–время. Как уже отмечалось выше, несмотря на внешнее сходство, статус СН энергия–время (2) принципиально отличается от статуса СН координата–импульс (21). Существует несколько различных физических задач, в которых может идти речь о СН типа (2) [4].

Однако в каждом конкретном случае физический смысл и математическое определение входящих в левую часть величин оказываются весьма различными, на что обращалось внимание еще в работе [42]. Не меньше вопросов связано с истолкованием и правой части СН типа (2). Дело в том, что в квантовой динамике энергия является наблюдаемой, которой сопоставляется эрмитов оператор, а время — c-числовым параметром.

Наиболее просто можно получить некое СН энергия–время, если следовать тому пути, что был изложен в начале п. 1.3. Если вместо волновых функций $\psi_{\text{кл}}(q)$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}(q)$ (при $t = \text{const}$) выбрать, соответственно, волновые функции $\psi_{\text{кл}}(t)$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}(\omega)$ (при $q = \text{const}$), то согласно фурье-анализу «ширины» этих функций будут связаны аналогичным неравенством:

$$\sigma_{\psi_{\text{кл}}}\sigma_{\tilde{\psi}_{\text{кл}}} \equiv \delta t\,\delta\omega \gtrsim \gamma. \tag{49}$$

Записывая формулу, аналогичную (49), для, $\psi_{\text{кв}}(t)$ и $\tilde{\psi}_{\text{кв}}(\omega)$, домножая полученное неравенство на постоянную Планка и используя формулу Эйнштейна $\varepsilon = \hbar\omega$, получим

$$\delta t\,\delta\varepsilon \gtrsim \gamma\hbar, \tag{50}$$

где при некоторой нормировке $\gamma = 1/2$. В итоге получается соотношение «ширин» (СШ)

$$\delta t\,\delta\varepsilon \geqslant \frac{\hbar}{2}, \tag{51}$$

полностью аналогичное формуле (19). Поэтому его физический смысл остается тем же, что и в классической физике.

Однако здесь уже невозможно сделать шаги, которые ранее привели нас от формулы (19) к формуле (21), принципиально изменив смысл входящих в эти неравенства величин. Время в квантовой динамике, как известно [2, 4], не является наблюдаемой, которой сопоставляется эрмитов оператор. Поэтому для времени микросистемы не имеет смысла вводить в рассмотрение квантово-динамическое среднее и его флуктуацию. Соответственно правую часть СН (51) невозможно трактовать как меру корреляции флуктуаций энергии и времени.

В этих условиях остается, конечно, другая возможность — использовать классическую по физическому смыслу формулу (51) и в квантовой динамике, что фактически было предложено в [43]. Но тогда, разумеется, мы будем иметь дело не с СН энергия–время, а с СШ энергия–время. С практической точки зрения это означает, что в условиях, когда «ширины» δt и $\delta\varepsilon$ и постоянная γ не имеют строгого математического определения и ясной физической трактовки, главной заботой оказывается удобный выбор конкретных значений этих величин.

В частности [4], для весьма важных с экспериментальной точки зрения распадных состояний с экспоненциальным законом распада

$$\rho(t) \equiv |\psi_{\text{кв}}(t)|^2 = \exp(-t/\tau) \tag{52}$$

распределение по энергиям является лоренцевым:

$$\rho(\varepsilon) = |\tilde{\psi}_{\text{кв}}(\varepsilon)|^2 = \frac{\Gamma/2\pi}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Gamma^2/4}. \tag{53}$$

«Ширина» этого распределения $\delta\varepsilon \equiv \Gamma = \hbar/\tau$ определяется из условия $|\tilde{\psi}_{\text{кв}}(\varepsilon)|^2 = (1/2)|\tilde{\psi}_{\text{кв}}(0)|^2$.

Если принять среднее время жизни состояния $\delta t \equiv \tau$ за «ширину» распределения $\rho(t)$, то из формул (52) и (53) следует СШ энергия–время

$$\delta t \delta\varepsilon \equiv \tau\Gamma = \hbar. \tag{54}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае за «ширину» распределения $\rho(\varepsilon)$ достаточно произвольно принимается ширина уровня Γ, а отнюдь не дисперсия $\Delta\varepsilon$. Последнее проявляется в том, что, изменяя вид функции распределения по энергии на ее «хвосте» (при $|\varepsilon - \varepsilon_0| \gg \Gamma$), можно сильно изменить величину дисперсии $\Delta\varepsilon$. Между тем среднее время жизни τ, а значит, и величина Γ останутся практически неизменными [42].

Из сказанного выше следует, что трактовка СШ энергия–время (51) является, в сущности, классической и потому не связанной с наличием флуктуаций и их корреляцией, т.е. с теорией измерений [2]. Таким образом, хотя формулы вида (2) в той или иной мере используются в квантовой динамике с конца 20-х годов, вопрос о математическом смысле и физической трактовке входящих в них слева и справа величин в общем случае остается все еще открытым. Используемые на практике формулы типа (51) имеют смысл СШ, отличный от смысла СН энергия–время.

Указанная ситуация заставляет продолжать поиски СН энергия–время, сопоставимого по своему физическому смыслу и математическому определению с другими СН в неклассической физике. Они ведутся в двух главных направлениях. На первом пути предпринимаются усилия, чтобы сопоставить времени разумный с физической точки зрения эрмитов оператор и тем самым поднять статус времени до статуса квантово-динамической наблюдаемой. В этом случае предполагается придать величинам слева и справа в СН вида (2) математический смысл и физическую трактовку, аналогичные тому, что имеют место для величин в СН Гейзенберга (22) для произвольных наблюдаемых A и B. Соответствующие попытки пока не увенчались успехом [4].

На втором пути предлагается в условиях отсутствия оператора времени придать сколько-нибудь разумный смысл понятию «неопределенность времени» самому по себе, формально не выходя за рамки квантовой физики и сохраняя, в частности, операторное описание для энергии. Наиболее успешная попытка такого рода была предпринята Л.Мандельштамом и И.Таммом [44].

Сегодня подход к СН энергия–время Мандельштама–Тамма получил наибольшее распространение в современных учебниках и монографиях по квантовой механике [2, 9]. Он основан на использовании СН энергия–произвольная наблюдаемая и определении неопределенности времени через его правую часть. При этом исходят из СН Гейзенберга (22) с $\hat{B} \equiv \hat{H}$:

$$\Delta\varepsilon\Delta A \geqslant c_{AH} = \frac{1}{2}|\langle|[\hat{A},\hat{H}]|\rangle|, \tag{55}$$

где $\hat{A}$ — оператор, соответствующий наблюдаемой A, $\hat{H}$ — гамильтониан, а $\Delta\varepsilon$ и ΔA — дисперсии величин ε и A. Правую часть СН (55) можно преобразовать, воспользовавшись для оператора $\hat{A}$ уравнением Гейзенберга $d\hat{A}/dt = (i/\hbar)[\hat{A},\hat{H}]$. Тогда получим, что

$$c_{AH} \equiv \frac{\hbar}{2}|\langle|\frac{d\hat{A}}{dt}|\rangle|. \tag{56}$$

«*Неопределенностью времени*», исходя из правой части СН (55), Мандельштам и Тамм назвали величину

$$\Delta t_A \equiv \frac{\Delta A}{(2/\hbar)c_{AH}} = \frac{\Delta A}{|\langle|d\hat{A}/dt|\rangle|}. \tag{57}$$

Определение (57) обладает тем преимуществом, что придает величине Δt_A разумный физический смысл промежутка времени, в течение которого среднее значение $\bar{A}$ изменяется на величину среднеквадратичного отклонения ΔA. Вместе с тем ему присущ и ряд существенных недостатков. Во-первых, оно не является однозначным, ибо позволяет для одной и той же микросистемы вводить несколько промежутков времени Δt_{A_i} применительно к разным наблюдаемым A_i. Во-вторых, оно теряет смысл тогда, когда при $\Delta\varepsilon \neq 0$ и $\Delta A \neq 0$ либо сам коммутатор $[\hat{A},\hat{H}]$, либо среднее от него обращаются в нуль.

Для преодоления первого из указанных недостатков до сих пор предлагались следующие решения. Наиболее распространенный подход [2, 9] состоит в том, что за характерный промежуток времени микросистемы в целом предлагается выбирать минимальную из всех возможных величин Δt_{A_i}. Однако такой выбор является достаточно произвольным, поскольку он существенно зависит от того микросостояния, по которому происходит усреднение в формуле (57).

В другом подходе [4] для придания определению (57) однозначности и универсальности в качестве величины, представляющей микросистему в целом, предлагается выбирать матрицу плотности $\hat{\rho}$. Однако чтобы избежать последствий второго недостатка, определение (57) в этом случае приходится применять только к нестационарным смешанным состояниям, когда $d\hat{\rho}/dt \neq 0$. Этим сразу исключаются из рассмотрения как чистые квантовые состояния, так и смешанные состояния в равновесной статистической термодинамике, что значительно ограничивает область применения величины Δt_A (57).

Однако главная проблема, связанная с подходом Мандельштама–Тамма к СН энергия–время, вовсе не в этом. Напомним, что целью введения величины Δt_A (57) была возможность придать СН (55) после перехода от ΔA к Δt_A форму, внешне сходную с СН (2) или СН (51), но содержащую строго определенные величины:

$$\Delta\varepsilon\Delta t_A \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{58}$$

При этом не был учтен тот факт, что СН Гейзенберга (55) справедливо, если вклад антикоммутатора $\sigma_{AH} = 0$. Последнее, если и возможно, то только в достаточно экзотических ситуациях. В связи с этим можно утверждать, что даже в тех случаях, когда определение величины Δt_A лишено указанных выше недостатков, оно неэффективно, ибо основанное на нем СН энергия–время (58) справедливо только как чистое неравенство.

В данной работе, следуя [26, 28], мы развиваем подход Мандельштама–Тамма к СН энергия–время. Вместо СН Гейзенберга (55) мы предлагаем использовать универсальное СН Шредингера энергия–произвольная наблюдаемая. Исходя из его правой части, мы дадим обобщение понятия неопределенности времени, свободное от перечисленных выше недостатков определения Мандельштама–Тамма. На его основе будет введено обобщенное СН энергия–время и определена эффективная частота открытой микросистемы в целом. Дальнейший анализ этого СН в случае когерентных состояний позволит придать ему форму СН энергия–обратная эффективная частота, интерпретация которого близка к интерпретации СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике. Тем самым будет показано, что, по крайней мере для когерентных состояний, обобщенное СН энергия–время соответствует концепции универсальности соотношений неопределенностей в неклассической физике.

2. ОБОБЩЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ

2.1. Обобщение понятия неопределенности времени Мандельштама–Тамма. В данной работе мы остаемся в рамках подхода Мандельштама–Тамма к СН энергия–время, но вместо СН Гейзенберга (22), а точнее, его частного случая (55), при определении неопределенности времени мы предлагаем использовать универсальное СН Шредингера (30), положив в нем $\hat{B} \equiv \hat{H}$. Тогда вместо формул (30) и (32) получим

$$\Delta\varepsilon\Delta A \geqslant R_{AH}, \tag{59}$$

где

$$R^2_{AH} \equiv |\langle \Delta A|\Delta H\rangle|^2 = |\langle|\Delta\hat{A}\Delta\hat{H}|\rangle|^2 = \sigma^2_{AH} + c^2_{AH} =$$

$$= \frac{1}{4}\langle|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{H}\}|\rangle^2 + \frac{1}{4}|\langle|[\hat{A}, \hat{H}]|\rangle|^2. \tag{60}$$

Обобщим теперь формулу Мандельштама–Тамма (57) и определим «*неопределенность времени*» формулой

$$\Delta t^*_A \equiv \frac{\Delta A}{(2/\hbar)R_{AH}}. \tag{61}$$

Тогда *обобщенное* СН *энергия–время* вместо (58) примет вид

$$\Delta\varepsilon\Delta t^*_A \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{62}$$

Ниже нами рассмотрены две достаточно общие модели микросистем, совершающих финитное и инфинитное движения. Их общей особенностью является то, что соответствующие микросистемы рассматриваются в нестационарных базисных состояниях, когда флуктуации энергии системы $\Delta\varepsilon \neq 0$. Прежде всего мы покажем, что введенное здесь определение Δt^*_A (61), во-первых, однозначно (не привязано к какой-либо одной наблюдаемой) и, во-вторых, лишено сингулярности при обращении вклада коммутатора c_{AH} в нуль. Выбор универсальной временной характеристики открытой микросистемы в целом будет дан в п. 2.4.

2.2. Финитное движение: квантовый осциллятор в когерентном состоянии. В качестве модели финитного движения микросистемы рассмотрим квантовый гармонический осциллятор с частотой $\omega_0 = \sqrt{\varkappa/m}$, находящийся в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Напомним, что эти состояния являются собственными состояниями оператора уничтожения [45, 4]:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle; \quad \langle\alpha|\hat{a}^+ = \langle\alpha|\alpha^*; \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \tag{63}$$

где α — произвольное комплексное число. Как известно, когерентные состояния выделяются среди других нестационарных состояний тем, что они неортогональны. Кроме того, они наиболее близки к классическим состояниям осциллятора.

В данном случае среднее значение энергии и ее дисперсия имеют вид

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega_0\langle\alpha|\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|\alpha\rangle = \hbar\omega_0\left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right), \tag{64}$$

$$(\Delta\varepsilon)^2 \equiv \langle\alpha|(\Delta\hat{H})^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\hat{H}^2 - \bar{\varepsilon}^2)|\alpha\rangle = \hbar^2\omega_0^2\bar{n}, \tag{65}$$

где $\bar{n} = |\alpha|^2$ — среднее число квантов возбуждения («фононов») в состоянии $|\alpha\rangle$.

Для дальнейшего необходимо вычислить дисперсии $(\Delta A_i)^2$ различных величин в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. В данном случае у системы имеются только две существенные физические характеристики* — координата q и импульс p. Последующие расчеты проще всего проводить, выразив операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ через операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ согласно

$$\hat{q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{\sqrt{2}} l_0; \quad \hat{p} = (-i)\frac{\hat{a} - \hat{a}^+}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{l_0}, \tag{66}$$

где $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ — амплитуда нулевых колебаний. Тогда [4]

$$\bar{q} = \sqrt{2} l_0 \operatorname{Re}\alpha; \quad \bar{p} = \sqrt{2}\frac{\hbar}{l_0}\operatorname{Im}\alpha; \tag{67}$$

$$(\Delta q)^2 = l_0^2/2; \quad (\Delta p)^2 = \hbar^2/2l_0^2. \tag{68}$$

Для получения выражений неопределенностей времени Δt_A или Δt_A^* необходимо вычислить средние от коммутаторов и антикоммутаторов операторов $\Delta\hat{q} = \hat{q} - \bar{q}$ и $\Delta\hat{H} = \hat{H} - \bar{\varepsilon}$, с одной стороны, и $\Delta\hat{p} = \hat{p} - \bar{p}$ и $\Delta\hat{H}$ — с другой. Нетрудно убедиться в том, что

$$c_{qH} = \frac{1}{2}|\langle\alpha|[\hat{q}, \hat{H}]|\alpha\rangle| = \frac{l_0}{\sqrt{2}}(\hbar\omega_0)\operatorname{Im}\alpha, \tag{69}$$

$$c_{pH} = \frac{1}{2}|\langle\alpha|[\hat{p}, \hat{H}]|\alpha\rangle| = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_0}(\hbar\omega_0)\operatorname{Re}\alpha, \tag{70}$$

причем вклады от $\bar{q}$, $\bar{p}$ и $\bar{\varepsilon}$ из ответа выпадают. Несколько более громоздкие вычисления дают

$$\sigma_{qH} = \frac{1}{2}\langle\alpha|\{\Delta\hat{q}, \Delta\hat{H}\}|\alpha\rangle = \frac{l_0}{\sqrt{2}}(\hbar\omega_0)\operatorname{Re}\alpha, \tag{71}$$

---

*Что касается энергии, то для $\hat{A} \equiv \hat{H}$ формулы (59) и (62) обращаются в тождества.

$$\sigma_{pH} = \frac{1}{2}\langle\alpha|\{\Delta\hat{p}, \Delta\hat{H}\}|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_0}(\hbar\omega_0) \neq 0. \tag{72}$$

Определение неопределенности времени Δt_A (57) согласно исходной процедуре Мандельштама–Тамма приводит, как и следовало ожидать, к двум разным выражениям:

$$\Delta t_q \equiv \frac{\Delta q}{|\langle\alpha|d\hat{q}/dt|\alpha\rangle|} = \frac{1}{2\omega_0 \operatorname{Im}\alpha}, \tag{73}$$

$$\Delta t_p \equiv \frac{\Delta p}{|\langle\alpha|d\hat{p}/dt|\alpha\rangle|} = \frac{1}{2\omega_0 \operatorname{Re}\alpha}, \tag{74}$$

что и демонстрирует его неоднозначность. Понятно, что ответ на вопрос о том, которая из величин, Δt_q или Δt_p, является минимальной и тем самым может служить характеристикой неопределенности времени для микросистемы в целом, зависит от выбора конкретного когерентного состояния, фиксируемого комплексным числом α. Более того, поскольку здесь вклады антикоммутаторов σ_{qH} и σ_{pH} отличны от нуля, СН (58) вообще не выполняются. В свою очередь, предложенное выше обобщение понятия неопределенности времени Δt_A^* (61) приводит к следующим выражениям:

$$\Delta t_q^* \equiv \frac{\Delta q}{(2/\hbar)R_{qH}} = \frac{l_0/\sqrt{2}}{\sqrt{2}l_0\omega_0\{(\operatorname{Re}\alpha)^2 + (\operatorname{Im}\alpha)^2\}^{1/2}} = \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\bar{n}}}, \tag{75}$$

$$\Delta t_p^* \equiv \frac{\Delta p}{(2/\hbar)R_{pH}} = \frac{\hbar/\sqrt{2}l_0}{\sqrt{2}(\hbar/l_0)\omega_0\{(\operatorname{Im}\alpha)^2 + (\operatorname{Re}\alpha)^2\}^{1/2}} = \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\bar{n}}}. \tag{76}$$

Очевидно, что для данной системы обобщение понятия неопределенности времени является однозначным:

$$\Delta t^* = \Delta t_q^* = \Delta t_p^* = \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\bar{n}}}, \tag{77}$$

причем величина Δt^* зависит от физически разумных величин — частоты ω_0, фиксированной внешними макроусловиями, и среднего числа квантов возбуждения $\bar{n}$ в данном когерентном микросостоянии $|\alpha\rangle$.

Наконец, нетрудно убедиться в том, что обобщенное СН энергия–время вида (62) минимизируется когерентными состояниями квантового осциллятора $|\alpha\rangle$. С учетом формул (65) и (77) имеем

$$\Delta\varepsilon\Delta t^* = (\hbar\omega_0\sqrt{\bar{n}})\,\frac{1}{2\omega_0\sqrt{\bar{n}}} = \frac{\hbar}{2} \tag{78}$$

независимо от значения $\bar{n}$. Полученные в этом пункте результаты можно распространить и на все другие микросистемы, совершающие финитное движение в условиях, когда их можно моделировать квантовым осциллятором в когерентном состоянии.

2.3. Инфинитное движение микросистемы: свободная микрочастица в состоянии гауссова волнового пакета. В качестве модели инфинитного движения микросистемы рассмотрим одномерное движение со скоростью v_0 свободной микрочастицы с массой m, начальное состояние которой задается в q-представлении гауссовым волновым пакетом шириной $\Delta q(0) = b$. Гауссова форма волнового пакета сохраняется и в p-представлении, в связи с чем вычисления удобно проводить в обоих представлениях.

Волновая функция микрочастицы в произвольный момент времени в q-представлении имеет вид

$$\psi(q,t) = |\psi(q,t)| \, \exp\{i\varphi(q,t)\}. \tag{79}$$

Здесь

$$|\psi(q,t)| = [2\pi(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)]^{-1/4} \, \exp\left\{-\frac{(q - v_0 t)^2}{4(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)}\right\}, \tag{80}$$

$$\varphi(q,t) = \frac{mv_0}{\hbar}\, q - \frac{mv_0^2}{2\hbar}\, t + \frac{(q - v_0 t)^2(\tilde{v}t)}{4b(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)} - \varphi_0(t), \tag{81}$$

где $\varphi_0(t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\tilde{v}t}{b}$ — несущественная постоянная, а

$$\tilde{v} = \frac{\hbar}{2mb} \tag{82}$$

есть скорость «расплывания» пакета, происходящего (см. ниже (94)) по закону $[\Delta q(t)]^2 = b^2 + \tilde{v}^2 t^2$. Ее значение, как показано ниже в (90), соответствует минимально возможному значению, предписываемому СН Гейзенберга (21) в начальный момент времени:

$$\Delta p = m\tilde{v} = \frac{\hbar}{2\Delta q(0)} = \frac{\hbar}{2b}. \tag{83}$$

Соответственно в p-представлении имеем

$$\tilde{\psi}(p,t) = |\tilde{\psi}(p,t)| \, \exp\{i\tilde{\varphi}(p,t)\}, \tag{84}$$

где

$$|\tilde{\psi}(p,t)| = [2\pi m^2 \tilde{v}^2]^{-1/4} \, \exp\left\{-\frac{(p - mv_0)^2}{4m^2\tilde{v}^2}\right\}, \tag{85}$$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = -\frac{p^2}{2m\hbar}\, t. \tag{86}$$

Среднее значение энергии и ее дисперсию проще вычислить в p-представлении. Тогда

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle|\hat{H}|\rangle = \int dp\, \frac{p^2}{2m}|\tilde{\psi}(p,t)|^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\tilde{v}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8mb^2}; \qquad (87)$$

$$(\Delta\varepsilon)^2 \equiv \langle|(\Delta\hat{H})^2|\rangle = \int dp\, \left[\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 - (\bar{\varepsilon})^2\right]|\tilde{\psi}(p,t)|^2 =$$

$$= (mv_0^2)(m\tilde{v}^2)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\tilde{v}^2}{v_0^2}\right) = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{v_0}{b}\right)^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\tilde{v}^2}{v_0^2}\right). \qquad (88)$$

В данном случае операторы энергии и проекции импульса коммутируют, так что определение Мандельштама–Тамма (57) неопределенности времени Δt_p, вытекающее из СН (22), некорректно. Поэтому ниже изначально будем исходить из определения неопределенности времени Δt_A^* (61), которое по предположению однозначно и не содержит сингулярности.

Для получения величины Δt_p^* необходимо вычислить $\bar{p}$ и $(\Delta p)^2$, а также среднее от антикоммутатора операторов $\Delta\hat{p}$ и $\Delta\hat{H}$. Используя волновую функцию в p-представлении вида (84), получим

$$\bar{p} = \int dp\, p|\tilde{\psi}(p,t)|^2 = mv_0, \qquad (89)$$

$$(\Delta p)^2 = \int dp[p^2 - (\bar{p})^2]|\tilde{\psi}(p,t)|^2 = (m\tilde{v})^2 = \frac{\hbar^2}{4b^2}, \qquad (90)$$

$$\sigma_{pH} = \frac{1}{2}\langle|\{\Delta\hat{p}, \Delta\hat{H}\}|\rangle = \int dp\left[\frac{p^3}{2m} - \bar{p}\bar{\varepsilon}\right]|\tilde{\psi}(p,t)|^2 = (m\tilde{v})^2 v_0. \qquad (91)$$

Окончательно величина неопределенности времени Δt_p^* имеет вид

$$\Delta t_p^* \equiv \frac{\Delta p}{(2/\hbar)R_{pH}} = \frac{m\tilde{v}}{(2/\hbar)\{\sigma_{pH}^2 + 0\}^{1/2}} = \frac{m\tilde{v}}{(2/\hbar)(m\tilde{v})^2 v_0} = \frac{b}{v_0}. \qquad (92)$$

Интересно отметить, что ни одна из величин в формуле (92) и тем самым Δt_p^* в целом не зависит от времени. Следует также подчеркнуть, что здесь весь результат определяется вкладом антикоммутатора σ_{pH}, входящим в определение Δt_A^* (61).

Соответственно для получения величины Δt_q^* вычислим $\bar{q}$ и $(\Delta q)^2$, использовав волновую функцию в q-представлении вида (79):

$$\bar{q} = \int dq\, q|\psi(q,t)|^2 = v_0 t, \qquad (93)$$

$$(\Delta q)^2 = \int dq[q^2 - (\bar{q})^2]|\psi(q,t)|^2 = b^2 + \tilde{v}^2 t^2 = b^2 + \frac{(\Delta p)^2}{m^2} t^2. \tag{94}$$

Тем самым при $t = 0$ среднее значение координаты $\bar{q}(0) = 0$.

В свою очередь, средние от коммутатора и антикоммутатора операторов $\Delta\hat{q}$ и $\Delta\hat{H}$ проще вычислить, воспользовавшись p-представлением. В результате получим

$$c_{qH} = \frac{1}{2}\langle|[\hat{p}, \hat{H}]|\rangle = \frac{\hbar}{2m}\,\bar{p} = \frac{\hbar v_0}{2}, \tag{95}$$

$$\sigma_{qH} = \frac{1}{2}\langle|\{\Delta\hat{q}, \Delta\hat{H}\}|\rangle = \frac{1}{2}\langle|\{\hat{q}, \hat{H}\}|\rangle - \bar{q}\bar{\varepsilon} =$$

$$= -\left(\frac{\hbar}{2i}\right)\int dp\tilde{\psi}^*(p,t)\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t)\right] + \frac{p^2}{2m}\frac{\partial\tilde{\psi}(p,t)}{\partial p}\right\} - \bar{q}\bar{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}(v_0 t)(m v_0^2 + 3m\tilde{v}^2) - (v_0 t)\left(\frac{m v_0^2}{2} + \frac{m\tilde{v}^2}{2}\right) = (v_0 t)(m\tilde{v}^2). \tag{96}$$

Таким образом, величина неопределенности времени Δt_q^* с учетом формулы (82) имеет вид

$$\Delta t_q^* \equiv \frac{\Delta q}{(2/\hbar)R_{qH}} = \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{1/2}}{\dfrac{2}{\hbar}\left\{(v_0 t)(m\tilde{v}^2)^2 + \dfrac{\hbar^2 v_0^2}{4}\right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{1/2}}{\left\{\dfrac{4}{\hbar^2}(m\tilde{v}^2)(\tilde{v}^2 t^2)v_0^2 + v_0^2\right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{1/2}}{\left\{\dfrac{1}{b^2}(\tilde{v}^2 t^2)v_0^2 + v_0^2\right\}^{1/2}} = \frac{\Delta q(0)}{v_0} = \frac{b}{v_0}. \tag{97}$$

В данном случае и числитель и первое слагаемое в знаменателе (97) зависят от времени. Однако величина Δt_q^* в целом от времени не зависит. При $t \neq 0$ результат существенно зависит от вклада антикоммутатора σ_{qH}, который при $t \to \infty$ становится определяющим. В то же время при $t = 0$ этот вклад обращается в нуль, и тот же результат b/v_0 для Δt_q^* получается только за счет вклада коммутатора c_{qH}.

Важнейшим итогом проведенных вычислений является то, что и для данной системы обобщенная временная характеристика

$$\Delta t^* = \Delta t_q^* = \Delta t_p^* = \frac{b}{v_0} \tag{98}$$

однозначна, не зависит от времени и существенно зависит от суммы вкладов антикоммутатора и коммутатора соответствующих операторов. Она полностью фиксирована внешними макроусловиями, определяющими формирование состояния при $t=0$. Тем самым явно продемонстрирована принципиальная важность введенного нами обобщенного СН энергия–время (62).

В связи с этим напомним, что в случае осциллятора в когерентном состоянии в п. 2.2 задача изначально была симметрична по отношению к операторам $\hat{q}$ и $\hat{p}$. Поэтому знаменатели в формулах (75) и (76) для величин Δt_q^* и Δt_p^* отличались только взаимными перестановками коммутатора и антикоммутатора. В данном случае это явно не так. Поэтому тот факт, что и в этой модели введенное выше определение неопределенности времени Δt_A^* (61) приводит к обобщенной временной характеристике, выглядит весьма убедительным. Заметим, кстати, что согласно формуле (57) для неопределенности времени Мандельштама–Тамма величина $\Delta t_q = (\Delta q(t))/v_0$ здесь также определена. Однако вследствие того, что вклад антикоммутатора $\sigma_{qH} \neq 0$, в СН энергия–время (58) сохраняется только знак неравенства.

Вернемся теперь к обобщенному СН энергия–время (62), включающему обобщенную временную характеристику Δt^*. Прежде всего проанализируем полученное выше выражение (87) для средней энергии $\bar{\varepsilon}$. Нетрудно видеть, что эта величина отличается от выражения $(mv_0^2)/2$ для энергии свободной микрочастицы в состоянии плоской волны де Бройля с постоянной амплитудой. В нее входит вклад, учитывающий характерную ширину пакета при $t=0$ и практически не отличающийся от энергии микрочастицы в основном состоянии бесконечно глубокой потенциальной ямы $\varepsilon_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, где L — ширина ямы. Тем самым формирование гауссова волнового пакета определенной ширины b с точки зрения внешних макроусловий эквивалентно помещению микрочастицы в своеобразную потенциальную яму заданной ширины $L = 2\pi b$ и бесконечной глубины.

С учетом полученных формул (88) и (98) предложенное выше обобщенное СН энергия–время (62) в данном случае принимает вид

$$\Delta\varepsilon\Delta t^* = \left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{v_0}{b}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{\tilde{v}^2}{v_0^2}\right)^{1/2}\right]\frac{b}{v_0} = \frac{\hbar}{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\tilde{v}^2}{v_0^2}\right)^{1/2} \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{99}$$

Отметим, что минимизация этого неравенства достигается лишь для таких состояний, для которых отношение $\tilde{v}/v_0 = \hbar/(2mbv_0)$ стремится к нулю, т.е. в квазиклассическом пределе.

2.4. Эффективная частота как универсальная временная характеристика открытой микросистемы в целом. Выше на двух довольно общих моделях открытых микросистем, в которых флуктуация энергии $\Delta\varepsilon \neq 0$, было показано, что предложенное обобщение (61) понятия неопределенности времени лишено недостатков, присущих исходному определению Мандельштама–Тамма (57). Вместе с тем обобщенное СН энергия–время (62), формально основанное на этом понятии, по-прежнему нуждается в интерпретации.

Прежде всего, величину Δt^* в нем нельзя истолковать как флуктуацию времени, ибо остается неясным, в каком микросостоянии и относительно какого среднего времени микросистемы $\bar{t}$ имеет место подобная флуктуация. Но самое главное состоит в том, что правая часть СН (62) только внешне напоминает знакомую правую часть СН Гейзенберга (21) для флуктуаций координаты и импульса, содержащую постоянную $\hbar/2$. В условиях отсутствия оператора времени СН (62) демонстрирует качественно иной характер корреляции величин ε и t^*. В самом деле, среди рассмотренных модельных микросостояний нет таких, которые были бы взаимно дополнительны в духе традиционной интерпретации квантовой динамики [2], поскольку в рассмотренных выше моделях открытых микросистем всегда $\Delta t^* \neq 0$ и $\Delta\varepsilon \neq 0$.

Чтобы продвинуться дальше в интерпретации СН (62), прежде всего, было бы желательно отделить нахождение среднего значения подходящей временной характеристики открытой микросистемы от нахождения флуктуаций этой величины. С этой целью, когда это возможно, перейдем к переменным действие–угол [46] и вместо промежутка времени введем обратную ему величину — *эффективную частоту*

$$\omega_{\text{эфф}} \equiv \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial J_{\text{эфф}}}, \tag{100}$$

где $\bar{\varepsilon}$ — средняя энергия открытой микросистемы, а $J_{\text{эфф}}$ — ее эффективное действие. Как следует из приведенных ниже примеров, эта величина играет роль универсальной временной характеристики открытой микросистемы, зависящей от макроскопических параметров, фиксирующих ее микросостояние в квазиклассическом пределе.

Очевидно, что определение (100) эффективной частоты пригодно для всех открытых микросистем, средняя энергия которых представима в эквивалентных формах: либо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{J_{\text{эфф}}^2}{2I_{\text{эфф}}} = \frac{(N_{\text{эфф}}\hbar)^2}{2I_{\text{эфф}}}, \tag{101}$$

либо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar}{2}\frac{J_{\text{эфф}}}{I_{\text{эфф}}}\frac{J_{\text{эфф}}}{\hbar} = \frac{\hbar\omega_{\text{эфф}}}{2}N_{\text{эфф}}. \tag{102}$$

Здесь $I_{эфф} = J_{эфф}/\omega_{эфф}$ — эффективный момент инерции,

$$N_{эфф} \equiv \frac{J_{эфф}}{\hbar}\frac{m\omega_{эфф}}{\hbar}\frac{I_{эфф}}{m} = \frac{1}{l_0^2}\frac{I_{эфф}}{m} \tag{103}$$

есть эффективное число квантов действия $\hbar$, причем $N_{эфф} \gg 1$, а $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_{эфф}}$ — амплитуда квантовых нулевых колебаний с частотой $\omega_{эфф}$.

Чтобы в этом убедиться, сопоставим определения (100) и (103) с параметрами рассмотренных выше моделей открытых микросистем. Так, для осциллятора в когерентном состоянии

$$\omega_{эфф} = \frac{(mv)d}{md^2} = \omega_0; \quad N_{эфф} = \frac{(mv)d}{\hbar} = \frac{d^2}{l_0^2} = 2\bar{n}, \tag{104}$$

где

$$I_{эфф} = md^2; \quad J_{эфф} = (mv)d; \quad v = \omega_0 d. \tag{105}$$

Здесь d — классическая амплитуда колебаний в квазиклассическом микросостоянии с $n \approx \bar{n} \gg 1$, определяемая из условия

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m\omega_0^2 d^2}{2} \approx \hbar\omega_0\bar{n}. \tag{106}$$

Соответственно, для свободной микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета

$$\omega_{эфф} = \frac{(mv_0)b}{mb^2} = \frac{v_0}{b}; \quad N_{эфф} = \frac{(mv_0)b}{\hbar} = \frac{b^2}{l_0^2}, \tag{107}$$

где

$$I_{эфф} = mb^2; \quad J_{эфф} = (mv_0)b. \tag{108}$$

Продемонстрируем теперь возможность нахождения выражений для $\omega_{эфф}$ и $N_{эфф}$ в других известных задачах. Например, для микрочастицы в бесконечной прямоугольной потенциальной яме шириной L энергию можно записать в виде

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2} \equiv \frac{J_{эфф}^2}{2I_{эфф}}, \tag{109}$$

где $I_{эфф} = mL^2$, $J_{эфф} = \pi\hbar n$. Тогда согласно определениям (100) и (103)

$$\omega_{эфф} = \frac{\pi\hbar n}{mL^2}; \quad N_{эфф} = \frac{\pi\hbar n}{\hbar} = \pi n = \frac{L^2}{l_0^2}, \tag{110}$$

где $n \gg 1$, так что в пределе $\hbar \to 0$ величина $\pi\hbar n$ является макроскопической.

Аналогичные выкладки можно осуществить и для электрона в атоме водорода. Учтем, что в этом случае энергия имеет вид

$$|\varepsilon_n| = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}. \tag{111}$$

Выбирая в качестве эффективного размера микросистемы при $n \gg 1$ радиус n-й боровской орбиты

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}, \tag{112}$$

получим

$$|\varepsilon_n| = \frac{\hbar^2 n^2}{2mr_n^2} \equiv \frac{J^2_{\text{эфф}}}{2I_{\text{эфф}}}, \tag{113}$$

где $I_{\text{эфф}} = mr_n^2$, $J_{\text{эфф}} = \hbar n$. Тогда согласно определениям (100) и (103)

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{\hbar n}{mr_n^2} = \frac{e^2}{\hbar n}; \quad N_{\text{эфф}} = \frac{\hbar n}{\hbar} = n = \frac{r_n^2}{l_0^2}, \tag{114}$$

где при $n \gg 1$ в пределе $\hbar \to 0$ величина $\hbar n$ также является макроскопической.

Покажем теперь на примере осциллятора в когерентном состоянии, что введение эффективной частоты позволяет продвинуться в интерпретации СН энергия–время (62). Вполне естественно допустить, что эффективная частота имеет смысл средней частоты осциллятора как открытой микросистемы:

$$\omega_{\text{эфф}} \equiv \bar{\omega} = \omega_0. \tag{115}$$

Что касается флуктуации обратной эффективной частоты $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$, то ее можно было бы связать с неопределенностью времени Δt^* в каком-либо конкретном когерентном состоянии. Дело в том, что левая часть СН энергия–время (62) удовлетворяет требованию масштабной инвариантности:

$$\Delta\varepsilon\Delta t^* = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{\mu}}\right)(\sqrt{\mu}\Delta t^*) \equiv \Delta\varepsilon_\mu \Delta t^*_\mu, \tag{116}$$

где μ — любое положительное число. Изменение масштаба величин $\Delta\varepsilon$ и Δt^* (их своеобразная «перенормировка») соответствует, как известно [4], переходу от исходных состояний микросистемы к так называемым сжатым состояниям.

Тем самым вместо единственной величины Δt^* (61) фактически мы всегда имеем дело с совокупностью неопределенностей времени $\Delta t^*_\mu = \sqrt{\mu}\Delta t$, причем каждый член этой совокупности, вообще говоря, зависит от характеристик микросостояния при фиксированных макроскопических условиях задачи. В этой ситуации выбор постоянной μ можно сделать физически осмысленным, связав ее с характеристиками конкретного микросостояния.

Один вариант выбора постоянной μ выделен тем, что в нем зависимость Δt_μ^* от характеристики микросостояния — среднего числа квантов возбуждения $\bar{n}$ — полностью исчезает. Его можно назвать *оптимально сжатым* когерентным микросостоянием. В результате соответствующая неопределенность времени становится универсальной, поскольку зависит только от макроскопических условий задачи. Для квантового осциллятора в когерентном состоянии ее можно получить из формулы (77), положив $\mu = 4\bar{n}$. Тогда $\Delta t_{4\bar{n}}^* = 1/\omega_0$, что совпадает, как и следовало ожидать, с обратной эффективной частотой осциллятора. Выбор другого варианта постоянной μ, позволяющий фиксировать флуктуацию эффективной частоты относительно ее среднего значения $\bar{\omega} = \omega_0$, требует привлечения дополнительных физических соображений.

3. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ОБРАТНАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ ЧАСТОТА

3.1. Соотношение неопределенностей энергия–обратная температура как аналог обобщенного соотношения неопределенностей энергия–время. Для открытой микросистемы введение средней эффективной частоты, относительно которой происходят ее флуктуации, позволяет в принципе связать величины Δt^* и $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ в некотором микросостоянии. Однако трудности, возникшие выше с интерпретацией СН (62), при этом автоматически не исчезнут. Они связаны с тем, что СН (62), в котором только одна из величин — энергия описывается оператором, принято сопоставлять с СН Гейзенберга (22), связывающим флуктуации двух квантово-динамических наблюдаемых с вкладом их коммутатора c_{AB}. Если же с самого начала учесть, что обратная эффективная частота $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ — это c-числовая величина, то ее коммутатор с гамильтонианом, очевидно, обращается в нуль, так что формула (22) в этом случае теряет смысл соотношения неопределенностей.

Следовательно, единственная возможность истолковать обобщенное СН энергия–время (62) в рамках квантовой динамики — это каким-то образом сопоставить его с универсальным СН Шредингера (30). Из последнего следует, что если одна из двух физических величин B и A является c-числом, то в правой части СН (30) остается только вклад σ_{AB}, который в квазиклассическом пределе переходит в коррелятор $\overline{(\Delta A \Delta B)}$. При этом само СН (30) принимает форму СН Эйнштейна (33), хорошо известную из классической теории вероятностей [32].

Итак, по нашему мнению, аналогию для обобщенного СН (62) нет смысла искать в ортодоксальной квантовой динамике, основанной на СН Гейзенберга (22). Ее можно было бы найти в физической теории, в которой физическим величинам сопоставлялись бы не операторы, а c-числа, но при этом статус энергии был бы равноправен со статусом других физических величин, способных флуктуировать вместе с нею. Как следует из п. 1.3, подобную аналогию можно обнаружить в равновесной статистической термодинамике [40, 41]. С этой целью ниже мы ограничимся рассмотрением только вопроса о физическом смысле СН энергия–температура. Подобный выбор подсказан тем, что в квантовой динамике температуре, как и времени, невозможно сопоставить операторы.

Нетрудно понять, что такие физические величины, как энергия и температура для макросистемы в термостате вполне пригодны для получения СН, которое могло бы послужить аналогом обобщенного СН энергия–время (62). Во-первых, для их описания не используются операторы. Во-вторых, по определенным правилам мы можем вычислить их средние значения $\bar{\mathcal{E}}$ и $\bar{T} \equiv T_0$ и дисперсии $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT, а также коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$. В-третьих, и это самое главное, в статистической термодинамике энергия и температура системы имеют равноправный статус, а коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$ в правой части СН отражает корреляцию флуктуаций энергии и температуры, характер которой качественно отличен от корреляции флуктуаций наблюдаемых A и B в СН Гейзенберга (22), когда величины ΔA и ΔB обратно пропорциональны друг другу (корреляция «*в противофазе*»).

Действительно, полученное в п. 1.3 СН энергия–температура (36) для линейных величин принимает вид

$$\Delta\mathcal{E}\Delta T \geqslant \overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)} = k_{\mathrm{B}}T^2. \tag{117}$$

Как и следовало ожидать, трактовка СН (117) качественно отличается от трактовки СН (22). Здесь флуктуации $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT прямо пропорциональны друг другу (корреляция «*в фазе*»), так что любая из этих флуктуаций и их коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$ совместно обращаются в нуль при $T \to 0$. Тем самым внешний вид СН (117) в статистической термодинамике исходно не вызывает особых ассоциаций с обобщенным СН энергия–время (62).

Ситуация, однако, формально меняется, если в правой части СН (117) оставить только постоянную k_{B}. Разделив обе части неравенства (117) на один и тот же множитель T^2 и учитывая выражение (35) для коррелятора $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$, получим СН Эйнштейна энергия–обратная температура

$$\Delta\mathcal{E}\frac{k_{\mathrm{B}}\Delta T}{\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}} \equiv \Delta\mathcal{E}\Delta\left(\frac{1}{T}\right) \geqslant k_{\mathrm{B}}, \tag{118}$$

которое уже практически не отличается по форме от СН (62). Самая существенная его особенность состоит в том, что, будучи внешне похожим на

СН Гейзенберга (21) с постоянной $\hbar/2$ в правой части, оно в *скрытой* форме отвечает качественно иному типу корреляции между флуктуациями энергии и температуры (корреляция «в фазе»), отличному от корреляции между флуктуациями наблюдаемых q и p в СН Гейзенберга (21) (корреляция «в противофазе»). *Явная* форма корреляции «в фазе» отражена в СН (117).

Таким образом, поставленная цель достигнута и СН (118), которое может служить аналогом СН энергия–время (62), построено. Входящие в СН (117) и (118) величины $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT имеют физический смысл мер флуктуаций относительно средних значений $\bar{\mathcal{E}}$ и $\bar{T}$. В статистической термодинамике величины $\mathcal{E}$ и T, меры флуктуаций которых связаны СН Эйнштейна (33), полностью равноправны, но при этом корреляция в СН (117) энергия–температура качественно отличается от корреляции в СН Гейзенберга (22). Наконец, СН энергия–обратная температура (118) связывает меры флуктуаций энергии системы и ее обратной температуры с постоянной Больцмана $k_{\rm B}$, служащей характеристикой неконтролируемого теплового воздействия. Указанные особенности позволяют использовать СН (118) в качестве прообраза адекватной формы обобщенного СН энергия–время.

3.2. Флуктуация эффективной частоты квантового осциллятора в когерентном состоянии. Перед нами стоит задача — выбрать наиболее адекватную форму обобщенного СН энергия–время в квантовой динамике. В ней хотелось бы сохранить зависимость от постоянной $\hbar/2$, но при этом дать ей трактовку, аналогичную трактовке СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике. Чтобы решить эту задачу, будем впредь напрямую сопоставлять входящие в СН (62) величины с аналогичными величинами в СН (118).

Очевидно, что флуктуации энергии ε в микросистеме и энергии $\mathcal{E}$ в макросистеме качественно близки друг к другу, отличаясь лишь способом вычисления. Входящие справа в (62) и (118) фундаментальные постоянные $\hbar/2$ и $k_{\rm B}$ также аналогичны по физическому смыслу, ибо отражают наличие того или иного типа неконтролируемого воздействия на систему со стороны окружения. В этих формулах, по существу, нужно найти аналогию лишь между величинами Δt^* и $\Delta(1/T)$.

Напомним, что входящая в СН (118) величина $\Delta(1/T)$ — это мера флуктуации обратной температуры относительно ее среднего значения $(\overline{T^{-1}}) = T_0^{-1}$, где T_0 — температура термостата. Она, так же как и мера флуктуации энергии макросистемы, соответствует *единственному* макросостоянию — *состоянию теплового равновесия* и вычисляется в рамках квазитермодинамической теории флуктуаций Эйнштейна [36].

В то же время величина Δt^*, входящая в СН (62), фактически обозначает целую совокупность величин Δt^*_μ, зависящих, как и соответствующая совокупность величин $\Delta\varepsilon_\mu$, от выбора конкретного микросостояния и связанных условием (116). В общем случае произвольный член совокупности

Δt_μ^* не может быть истолкован как мера флуктуации какой-либо временной характеристики. Более того, как было показано в п.2.4, при специфическом выборе оптимально сжатого микросостояния величина Δt_μ^* фиксирована и равна $\overline{(\omega^{-1})} = \omega_0^{-1}$.

Таким образом, для выбора конкретного значения Δt_μ^* необходимо понять, как среди всех возможных микросостояний найти специфическое микросостояние с фиксированным μ, в котором величина Δt_μ^* была бы аналогом $\Delta(1/T)$. В этом случае мы сможем ее истолковать как меру флуктуации обратной эффективной частоты $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ открытой микросистемы в целом относительно ее среднего значения. Прежде чем сделать этот выбор в общем случае, проиллюстрируем существо идеи на модели квантового осциллятора в когерентном состоянии.

Для этого воспользуемся полуклассической трактовкой когерентного микросостояния как *нестационарного*. Тот факт, что в этом состоянии квантовый осциллятор не имеет фиксированной энергии, а характеризуется средней энергией $\bar{\varepsilon}$ вида (64) и ее флуктуацией $\Delta\varepsilon$ вида (65), можно истолковать как наличие *слабого затухания*, приводящего к уширению его частотного спектра.

Естественно предположить, что квантовый гармонический осциллятор в когерентном состоянии эквивалентен затухающему классическому осциллятору. Его частота ω отличается от среднего значения частоты $\bar{\omega} \equiv \omega_0$, жестко фиксированного внешними макроусловиями, так что

$$\omega_0 - \Delta\omega \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega, \tag{119}$$

где $\Delta\omega \ll \omega_0$ — мера флуктуации частоты ω относительно ее среднего значения ω_0.

Чтобы представить себе дальнейшую логику рассуждений, запишем, прежде всего, выражения для средней энергии $\bar{\varepsilon}$ осциллятора и совокупности величин $\Delta\varepsilon_\mu = (1/\sqrt{\mu})\Delta\varepsilon$, удовлетворяющих условию (116) с $\Delta\varepsilon$, определяемой формулой (65):

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{\hbar\omega_0}{2} N_{\text{эфф}}; \quad \Delta\varepsilon_\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \sqrt{N_{\text{эфф}}}, \tag{120}$$

где $N_{\text{эфф}} = 2\bar{n} \gg 1$. Далее, в качестве условия, позволяющего фиксировать параметр микросостояния μ, потребуем аналогии между флуктуацией частоты ω данной микросистемы и флуктуацией температуры T модельной макросистемы в статистической термодинамике. В качестве таковой рассмотрим одномерную цепочку упруго связанных классических осцилляторов. Для нее [41]

$$\bar{\varepsilon} = (k_{\text{B}} T_0) N; \quad \Delta\varepsilon = (k_{\text{B}} T_0)\sqrt{N}, \tag{121}$$

где N — число осцилляторов в цепочке.

Сравнивая формулы (120) и (121), нетрудно убедиться в том, что выражения для средней энергии и меры ее флуктуации в этих двух моделях совпадают, если только в качестве единственного микросостояния выбрать когерентное состояние с $\mu = 2$ и заменить $k_{\mathrm{B}}T_0$ на $\dfrac{\hbar\omega_0}{2}$, а N — на $N_{\text{эфф}}$. Подобное микросостояние мы будем называть *симметричным* когерентным микросостоянием. В нем характеристики осциллятора имеют макроскопический смысл, ибо условие $N_{\text{эфф}} \gg 1$ соответствует квазиклассическому пределу.

В данном микросостоянии (при $\mu = 2$) величина Δt_2^* может быть истолкована как мера флуктуации *обратной эффективной частоты* $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ относительно ее среднего значения $\overline{(\omega^{-1})} = \omega_0^{-1}$:

$$\Delta t_2^* \equiv \Delta\left(\frac{1}{\omega_{\text{эфф}}}\right) \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}. \tag{122}$$

Сравнивая это определение с выражением $\Delta t_2^* = 1/(\omega_0\sqrt{N_{\text{эфф}}})$, полученным из выражения для Δt_μ^* при $\mu = 2$ и формулы (77), имеем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0\sqrt{N_{\text{эфф}}}}, \tag{123}$$

откуда следует, что

$$\Delta\omega = \omega_0/\sqrt{N_{\text{эфф}}}. \tag{124}$$

Заметим, что выражение (124) полностью аналогично выражению для меры флуктуации температуры в одномерной цепочке упруго связанных классических осцилляторов в состоянии теплового равновесия, когда

$$\Delta T = T_0/\sqrt{N}. \tag{125}$$

Если сравнить формулу (124) для флуктуации частоты $\Delta\omega$ с аналогичной формулой для затухающего классического осциллятора [47]

$$\Delta\omega_{\text{кл}} = \omega_0/(2Q_{\text{кл}}) \tag{126}$$

с теми же параметрами $\varkappa$ и m и добротностью $Q_{\text{кл}}$, то станет очевидно, что при $N_{\text{эфф}} \gg 1$ аналогия с таким классическим осциллятором вполне оправданна.

Из проведенного анализа следует, что для квантового осциллятора в когерентном состоянии величина Δt_μ^* имеет ясный физический смысл только в симметричном когерентном состоянии (с $\mu = 2$). В этом случае обобщенное СН энергия–время (62) переходит в СН энергия–обратная эффективная частота

$$\Delta\varepsilon\Delta\left(\frac{1}{\omega_{\text{эфф}}}\right) = \Delta\varepsilon\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} \geqslant \frac{\hbar}{2}, \tag{127}$$

аналогичное СН энергия–обратная температура (118) в статистической термодинамике. Входящие в СН (127) величины $\Delta\varepsilon$ и $\Delta\omega$, определяемые формулами (65) и (124) соответственно, зависят от состояния микросистемы, а среднее значение эффективной частоты $\bar{\omega} = \omega_0$, подобно средней температуре $\bar{T} = T_0$, задается только окружающей макрообстановкой.

Иными словами, в этом фиксированном микросостоянии СН энергия–время принимает форму, в которой величины $\Delta\varepsilon$ и $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ имеют ясный математический и физический смысл. Статус величин $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\omega}$ как макропараметров микросистемы равноправен, а трактовка СН энергия–обратная эффективная частота (127) совпадает с трактовкой СН Эйнштейна (118) или (33) в статистической термодинамике, но принципиально отличается от трактовки СН Гейзенберга (22) или (21) в квантовой динамике.

3.3. Соотношение неопределенностей энергия–обратная эффективная частота для открытой микросистемы. Распространим теперь полученные результаты на более широкий класс микросистем. Ограничимся рассмотрением микросистем, которые в квазиклассическом пределе могут быть аппроксимированы квантовым осциллятором. Для них обобщенное СН энергия–время (62) в симметричном когерентном микросостоянии можно трактовать аналогично п. 3.2. Это означает, что для всех подобных микросистем справедливо СН энергия–обратная эффективная частота (127). Оно в скрытой форме учитывает корреляцию «в фазе» между энергией и эффективной частотой микросистемы подобно тому, как СН (118) учитывает корреляцию «в фазе» между энергией и температурой в статистической термодинамике.

Указанную корреляцию можно сделать явной, если от СН (127) перейти к СН энергия–эффективная частота, что соответствует переходу от СН (118) к СН (117) в статистической термодинамике. В качестве первого шага для этого достаточно домножить обе части формулы (127) на $\omega_{\text{эфф}}^2 \approx \omega_0^2$:

$$\Delta\varepsilon\Delta\omega \geqslant \frac{\hbar}{2}\omega_{\text{эфф}}^2, \tag{128}$$

после чего остается лишь истолковать правую часть этого СН.

С этой целью по аналогии со статистической термодинамикой будем исходить из наиболее общей зависимости $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\omega_{\text{эфф}})$ средней энергии микросистемы от эффективной частоты. Тогда ее приращение можно записать в виде

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial\omega_{\text{эфф}}}\delta\omega \equiv \rho_\omega\delta\omega. \tag{129}$$

Здесь ρ_ω — спектральная плотность энергии, служащая квантово-динамическим аналогом теплоемкости $C_V = \left.\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right|_V$ в статистической термодинамике. Тогда по аналогии с выводом формул (34) и (35) нетрудно получить дисперсию энергии и коррелятор флуктуаций энергии и эффективной частоты

$$(\Delta\varepsilon)^2 = \rho_\omega^2 (\Delta\omega)^2; \tag{130}$$

$$\overline{(\Delta\varepsilon\Delta\omega)} = \rho_\omega (\Delta\omega)^2, \tag{131}$$

где $(\Delta\varepsilon)^2 \equiv \overline{(\delta\varepsilon)^2}$, $(\Delta\omega)^2 \equiv \overline{(\delta\omega)^2}$. Сделаем допущение, что в достаточно общем случае дисперсия эффективной частоты имеет вид

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\hbar/2}{\rho_\omega}\omega_{\text{эфф}}^2. \tag{132}$$

Тогда из формул (130) и (131) получим

$$(\Delta\varepsilon)^2 = \frac{\hbar}{2}\rho_\omega \omega_{\text{эфф}}^2; \tag{133}$$

$$\overline{(\Delta\varepsilon\Delta\omega)} = \frac{\hbar}{2}\omega_{\text{эфф}}^2, \tag{134}$$

что вполне аналогично формулам (34) и (35) в статистической термодинамике. Разумеется, в рассматриваемых моделях, для которых

$$\rho_\omega = \frac{\hbar}{2} N_{\text{эфф}}, \tag{135}$$

выражение (132) для дисперсии эффективной частоты оказывается справедливым. В итоге СН (128) с учетом выражений (130)–(132) можно представить в виде

$$\Delta\varepsilon\Delta\omega \geqslant \frac{\hbar}{2}\omega_{\text{эфф}}^2 = \rho_\omega \left(\frac{\hbar/2}{\rho_\omega}\omega_{\text{эфф}}^2\right) = (\rho_\omega/\Delta\omega)^2 = \overline{(\Delta\varepsilon\Delta\omega)}, \tag{136}$$

аналогичном СН (116) энергия–температура, в котором корреляция между флуктуациями энергии и эффективной частоты микросистемы является явной и отвечает трактовке корреляций в статистической термодинамике.

Следует также заметить, что в полученных формулах наряду с самой эффективной частотой $\omega_{\text{эфф}}$ (100) существенная роль принадлежит ее дисперсии $\Delta\omega$, которую впредь удобнее записывать в виде

$$\Delta\omega = \sqrt{\omega_{\text{эфф}}\tilde{\omega}}, \tag{137}$$

где, в частности, в рассматриваемых моделях

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar}{I_{\text{эфф}}} = \frac{J_{\text{эфф}}}{I_{\text{эфф}} N_{\text{эфф}}} = \frac{\omega_{\text{эфф}}}{N_{\text{эфф}}}. \tag{138}$$

В каком-то смысле можно считать, что $\tilde{\omega}$ является своеобразным «квантом» эффективной частоты, ибо

$$\omega_{\text{эфф}} = N_{\text{эфф}} \tilde{\omega}, \tag{139}$$

а $N_{\text{эфф}}$ имеет смысл числа таких «квантов». В частности, для таких микросистем, как микрочастица в бесконечно глубокой прямоугольной яме или электрон в атоме водорода, «квант» частоты $\tilde{\omega}$ с точностью до множителя порядка единицы совпадает с частотой ω_1 волны де Бройля для основного микросостояния.

Нетрудно видеть, что в проведенном анализе флуктуация эффективной частоты ω играет фундаментальную роль. Как и флуктуация температуры в статистической термодинамике, она определяет условия динамического равновесия открытой микросистемы с ее окружением. От нее зависит как флуктуация энергии $\Delta\varepsilon$, так и коррелятор между флуктуациями энергии и эффективной частоты $\overline{(\Delta\varepsilon\Delta\omega)}$. При этом если $\Delta\omega \to 0$, обе последние величины также стремятся к нулю. Как и в статистической термодинамике, в СН (136) имеет место неравенство, если средняя энергия зависит не только от эффективной частоты, но и от других характеристик. В противном случае СН (136) представляет собой равенство, как это можно было предвидеть для симметричных когерентных микросостояний.

Таким образом, адекватная форма СН энергия–время для *симметричных* когерентных микросостояний может быть записана в двух вариантах. Это может быть либо СН энергия–обратная эффективная частота (127), где корреляция «*в фазе*» является *скрытой*, либо СН энергия–эффективная частота (136), где того же типа корреляция является *явной*. Очевидно, что вариант с явной корреляцией удобнее для физической интерпретации. В то же время вариант со скрытой корреляцией удобнее для формального сопоставления с СН Гейзенберга (22) и установления взаимосвязи между квантовой динамикой и статистической термодинамикой.

Сравнение формул (127) и (136) с формулами (118) и (117) показывает, что аналогия между СН энергия–время и СН энергия–температура в данном случае является полной. Это подтверждает предположение о том, что обобщенное СН энергия–время (62), в сущности, находится за рамками традиционной трактовки квантовой динамики, несмотря на наличие в нем постоянной Планка. Его следует рассматривать в качестве существенного элемента макроописания микросистемы, аналогичного описанию, принятому в статистической термодинамике для макросистемы в тепловом равновесии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СН ШРЕДИНГЕРА В ЦЕЛОСТНОЙ ТЕОРИИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Проведенное исследование показало, что концепция универсальности соотношений неопределенностей позволяет обобщить понятие неопределенности времени Мандельштама–Тамма и получить физически осмысленное и математически корректное обобщенное СН энергия–время. При должном выборе состояния открытой микросистемы оно адекватно СН энергия–обратная эффективная частота, физическая интерпретация которого наиболее проста. Входящие в него величины — энергию и обратную эффективную частоту — можно рассматривать как c-числа, имеющие макроскопический смысл и аналогичные энергии и обратной температуре в статистической термодинамике.

Отмеченная аналогия, по-видимому, неслучайна. Она соответствует мнению, получившему распространение в последние годы [20, 21, 26, 28, 48], о необходимости обобщения понятия теплоты на микросистемы, находящиеся при $T = 0$. В частности, из нашего анализа следует, что для открытых микросистем в симметричном когерентном состоянии вполне возможно введение макроописания, если в стандартных формулах термодинамики одновременно произвести замены $N \to N_{\text{эфф}}$ и

$$k_{\mathrm{B}}T \to \frac{\hbar\omega_{\text{эфф}}}{2} \equiv k_{\mathrm{B}}T_{\text{эфф}}, \tag{140}$$

где $T_{\text{эфф}}$ — эффективная температура, впервые введенная аналогичной формулой в термодинамике черных дыр [14].

Конечно, можно рассматривать СН энергия–обратная эффективная частота и СН энергия–обратная температура как совершенно независимые неравенства, обладающие лишь внешней аналогией. Вместе с тем оба указанных соотношения являются следствиями универсальных СН Шредингера (30), полученных в квантовой динамике, но справедливых и в пределе $\hbar \to 0$, т.е., по-видимому для всей неклассической физики. В связи с этим можно высказать *эвристическую гипотезу* о *глобальной* взаимосвязи между *квантовой динамикой* и равновесной *статистической термодинамикой* [26] на основе теории флуктуаций.

Согласно этой гипотезе, в будущей целостной теории неклассической физики роль *обобщенной температуры* $T^{\text{об}}$ должна играть величина

$$T^{\text{об}} \equiv \frac{1}{k_{\mathrm{B}}}\Theta(T_{\text{эфф}}, T) = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}}\left[\frac{\hbar\omega_{\text{эфф}}}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega_{\text{эфф}}}{2k_{\mathrm{B}}T}\right] = T_{\text{эфф}}\,\mathrm{cth}\left(\frac{T_{\text{эфф}}}{T}\right), \tag{141}$$

где эффективная частота $\omega_{\text{эфф}}$ и эффективная температура $T_{\text{эфф}}$ связаны формулой (140). Как следует из определения обобщенной температуры (141), при низких температурах $T^{\text{об}}$ переходит в $T_{\text{эфф}}$, а при высоких — в T.

Очевидно также, что при $T \to 0$ обобщенная температура $T^{\text{об}}$ стремится к ненулевому предельному значению — эффективной температуре $T_{\text{эфф}}$:

$$T^{\text{об}} \to T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar\omega_{\text{эфф}}}{2k_{\text{B}}T} \neq 0. \tag{142}$$

Поскольку предельное значение $T_{\text{эфф}}$ связано с энергией нулевых колебаний, имеющих эффективную частоту $\omega_{\text{эфф}}$, оно никогда не обращается в нуль. Такой вывод из сформулированной гипотезы может придать новый смысл термодинамическому постулату о «недостижимости» абсолютного нуля температуры (теореме Нернста) [50], который ныне активно обсуждается в связи с термодинамикой черных дыр [51].

Входящая в определение (141) величина $\Theta(T_{\text{эфф}}, T)$ совпадает со средней энергией квантового осциллятора, обладающего эффективной частотой $\omega_{\text{эфф}}$. Ее естественно назвать *функцией Планка*. Она в концентрированном виде отражает одновременное существование квантового и теплового воздействий и имеет смысл целостной энергетической характеристики неконтролируемого воздействия окружения на систему, к которой применима модель осциллятора. Недаром эта функция появилась еще в первой фундаментальной работе Планка [51] о равновесном тепловом излучении, в котором такое целостное неконтролируемое воздействие действительно имеет место. За прошедшие сто лет функция $\Theta(T_{\text{эфф}}, T)$ вошла во многие формулы, весьма далекие от проблем теплового излучения. Однако ее роль как универсальной целостной характеристики неконтролируемого воздействия подчеркивалась до сих пор недостаточно.

Исходя из сформулированной гипотезы и проведенного выше анализа, можно предположить, что для развития будущей целостной теории окажется существенным СН энергия–обратная обобщенная температура вида

$$\Delta\mathcal{E}\Delta\left(\frac{1}{T^{\text{об}}}\right) \geqslant k_{\text{B}}, \tag{143}$$

охватывающее как квантовую динамику, так и статистическую термодинамику. Как нетрудно видеть, оно переходит при $T_{\text{эфф}} \ll T$ в термодинамическую формулу (118), а при $T_{\text{эфф}} \gg T$ — в квантово-динамическую формулу (127).

Разумеется, построение полной теории, объединяющей квантовую динамику и равновесную статистическую термодинамику, еще впереди. Вместе с тем потребность в ней возрастает с каждым днем, особенно в связи с активным изучением мезоскопических и низкоразмерных объектов, в которых квантовые и тепловые флуктуации могут проявляться одновременно [52]. Все это делает актуальным создание единой теории флуктуаций, дальнейшее развитие макроописания открытых микросистем и его объединение с традиционной термодинамикой в рамках обобщенной статистической термодинамики.

По нашему мнению, на этом пути существенную роль могут сыграть дальнейшие применения универсальных СН Шредингера, которые позволяют органически учесть наличие в природе различных типов корреляции физических величин.

Автор выражает глубокую благодарность руководству ОИЯИ и Лаборатории теоретической физики за многократно предоставленную возможность обсуждения полученных в данной работе результатов, и особую признательность — М.И. Широкову за тщательное рецензирование статьи и конструктивную критику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heizenberg W.Z.* // Physik. 1927. V.43. P.172. Перевод: УФН. 1977. Т.122, №4. С.657.
2. *Мессиа А.* Квантовая механика. М.: Наука, 1978. Т.1.
3. *Bohr N.* // Nature. 1928. V.121. P.580.
4. *Додонов В.В., Манько В.И.* // Тр. ФИАН. 1987. Т.183. С.5.
5. *Терлецкий Я.П.* // Тр. УДН. 1974. Т.70, сер. «Физика». С.8, 3.
6. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.
7. *Блохинцев Д.И.* Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1966.
8. *Ballentine L.* // Rev. Mod. Phys. 1970. V.42. P.352.
9. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике. Л.: Из-во ЛГУ, 1980.
10. *Home D., Whitaker M.* // Phys. Report. 1992. V.210, No.4. P.224.
11. *Холево А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.
12. *Холево А.С.* Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры. М.: Знание, 1985.
13. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Энергоатомиздат, 1980.
14. *Новиков И.Д., Фролов В.П.* Физика черных дыр. М.: Наука, 1981.
15. *Фролов В.П.* Гравитация, ускорение, кванты. М.: Знание, 1988.
16. *Furth R.* // Z. Physik. 1933. V.81. P.143.
17. *Guth E.* // Adv. in Chem. Phys. 1969. V.15. P.363.
18. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
19. *Uffink J., van Lith J.* // J. Found. Phys. 1998. V.28. P.323.
20. *Кадомцев Б.Б.* Динамика и информация. М., 1997.
21. *Киржниц Д.А.* // Соросовский образовательный журнал. 1997. Т.6. С.84.
22. *Мамардашвили М.К.* Классический и неклассический идеалы рациональности. М.: Лабиринт, 1995.
23. *Степин В.С.* Философская антропология и философия науки. М.: Наука, 1992.

24. *Tisza L.* // Rev. Mod. Phys. 1963. V.35, No.1. P.151.

25. *Суханов А.Д., Голубева О.Н.* // Тр. XI Междунар. конф. по логике, методологии и философии науки. Обнинск, 1995. T.VIII. C.160.

26. *Sukhanov A.D.* On the Global Interrelation between Quantum Dynamics and Thermodynamics // Proc. of XI Intern. Conf. «Problems of Quantum Field Theory», 1998. Dubna, 1999. P.232.

27. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение. М.: ОНТИ, 1936.

28. *Суханов А.Д.* // ТМФ. 2000. Т.125, вып.2. С.221.

29. *Гейзенберг В.* Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989. 227 с.

30. *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Физматлит, 1961.

31. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.

32. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971.

33. *Robertson H.P.* // Phys. Rev. 1929. V.34. P.163.

34. *Шредингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. М., 1976. 210 с.

35. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.

36. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр. Т.3. М., 1966. С.216.

37. *Мюнстер А.* Термодинамика необратимых процессов. М., 1962. С.36

38. *Rosenfeld L.* // Proc. of E. Fermi School of Physics. N.Y., 1962. V.14. P.1.

39. *Mandelbrot B.* // J. Math. Phys. 1964. V.5. P.164.

40. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.5: Статистическая физика. М.: Наука, 1964.

41. *Ансельм А.И.* Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973.

42. *Крылов Н.С., Фок В.А.* // ЖЭТФ. 1947. Т.17, вып.2. С.93.

43. *Wigner E.P.* Aspects of Quantum Theory / Eds. A.Salam, E.P.Wigner. Cambridge, 1972. P.237.

44. *Мандельштам Л.И., Тамм И.Е.* // Известия АН СССР, сер. физ. 1945. Т.9, вып.1/2. P.122.

45. *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: Мир, 1959.

46. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975.

47. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. М.: Физматлит, 1959.

48. *Башкиров А.Г., Суханов А.Д.* // ТМФ. 2000. Т.123, вып.1. С.107.

49. *Bashkirov A.G., Sukhanov A.D.* // Physica A. 2001 (in press).

50. *Israel W.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V.57. P.397.

51. *Планк М.* Избранные труды. М., 1975. С.251.

52. *Цуи Д.* // УФН. 2000. Т.170, №3. С.320.