

УДК 530.145.61

**СПЕКТРОСКОПИЯ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ,
РЕЗОНАНСЫ
(НОВЫЕ УСПЕХИ КВАНТОВОГО ДИЗАЙНА)**

Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	348
ПОЛНОЕ КВАНТОВОЕ ОТРАЖЕНИЕ ПРИ ВЫБРАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЭНЕРГИИ	350
НОВЫЕ АСПЕКТЫ РЕЗОНАНСНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ	355
Механизм резонансной прозрачности	356
Примеры двух, трех, четырех δ -барьеров и ям	358
Управление резонансным туннелированием в подходе обратной задачи	362
Туннельный резонанс в разрешенной зоне	366
Многоканальное резонансное туннелирование и отражение	368
Резонансы в уравнениях высшего порядка	372
Управление пакетами	374
Трехчастичные одномерные модели	374
Управление резонансами рассеяния на δ -барьере (случай потенциала конечного радиуса действия)	375
Открытые проблемы	377
НЕОБЫЧНЫЕ (НЕГАМОВСКИЕ) СОСТОЯНИЯ РАСПАДА	378
Формализм	379
Связанные состояния	382
Преобразования состояний рассеяния	386
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	389
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	390

*e-mail: zakharev@thsun1.jinr.ru; URL: <http://thsun1.jinr.ru/~zakharev/>

УДК 530.145.61

СПЕКТРОСКОПИЯ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ, РЕЗОНАНСЫ (НОВЫЕ УСПЕХИ КВАНТОВОГО ДИЗАЙНА)

Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В последние годы продолжалось интенсивное развитие теории управления спектрами, рассеянием, распадами. В обзоре продемонстрированы: 1) недавно открытые эффекты резонансного отражения волн (100 % в максимуме) в одно- и многоканальных системах; 2) новые аспекты резонансного туннелирования, в частности, новый механизм прозрачности, состоящий в накоплении в закрытом канале волн и их последующем распаде во входной канал, приводящем к подавлению отражения; 3) аналогичные резонансы, обнаруженные в системах, описываемых дифференциальными уравнениями высшего (≥ 4) порядка; 4) новые алгоритмы сдвигов энергий E_ν избранных состояний $\Psi(x, E_\nu)$ в комплексную плоскость E (так, например, удастся построить периодические потенциалы без спектральных лакун); 5) управление волновыми пакетами и ветвями спектров; 6) управление зонами периодических структур (сдвиги зон и изменения степени запрещенности в произвольных точках лакун).

The theory of spectral, scattering and decay control has kept intensively developing in the last few years. The following results are discussed in this review: 1) the effects of resonance reflection (100 % in maximum) in one- and multichannel systems; 2) new aspects of resonance tunneling, in particular, new transparency mechanism which consists in the accumulation of waves in the closed channel and their subsequent decay to the entrance channel resulting in suppressing the reflection; 3) analogous resonances have been found in systems described by the differential equations of a higher (≥ 4) order; 4) new algorithms of shifting energy eigenvalues E_ν of the chosen states $\Psi(x, E_\nu)$ into the complex E plane (non-Gamov decay states), for example, the periodic potentials without spectral lacunae can be constructed in this way; 5) the control of the wave packet shapes and spectral branches; 6) spectral zone control of periodic structures (zone shifts, changing of degree of forbiddenness at arbitrary E values of lacunae).

ВВЕДЕНИЕ

Основа квантовой механики — это, в конечном счете, законы движения волн в разных потенциалах. Из них представляют наибольший интерес *потенциалы с особыми свойствами*, которые позволяют максимально четко, опустив лишнее, продемонстрировать основную суть того или иного явления.

*e-mail: zakharev@thsun1.jinr.ru; URL: <http://thsun1.jinr.ru/~zakharev/>

Иллюстрацией этого служит недавно открытое нами явление *полного отражения* при отдельных энергиях для специальных потенциалов. Это возможно даже для *надбарьерного* движения. Замечательно, что такое резонансное отражение до сих пор в волновой механике не рассматривалось. Открыть эффект полной непроницаемости в отдельной энергетической точке нам помогло свойство потенциалов со связанными состояниями, погруженными в непрерывный спектр (ССНС, в формулах мы будем также использовать BSEC — bound state embedded into continuum), подавлять распространение волн при избранной энергии. Эти потенциалы с ССНС были использованы для построения искомого отражающего взаимодействия. Существенно, что при этом поддаются контролю параметры резонансов отражения: их число, расположение и ширины. Затем выяснилось, что класс таких взаимодействий можно еще кардинально расширить, сняв лишнее на всей оси требование обращения ССНС в нуль в начале координат. Удаётся строить системы, «парадоксально» сочетающие свойства-антиподы полной прозрачности и полного отражения при разных энергиях в одном потенциале, благодаря наличию в многоканальных системах нескольких независимых решений. Этого можно добиться даже и при одной и той же энергии в многоканальной системе с разными граничными условиями.

Выявлены новые многоканальные механизмы резонансного отражения и полной проницаемости. Волны, переходящие в закрытые каналы, интерферируют при возвращении во входной канал с оставшимися там волнами. При отдельных значениях энергии может происходить подавление прошедших или отраженных волн. Указанный механизм также допускает «парадоксальное» сочетание полной прозрачности и полной непроницаемости системы при одной и той же энергии и одной матрице потенциалов.

Обнаружен ряд новых неожиданных эффектов при изучении специальных потенциалов с негамовскими распадными состояниями, собственные значения которых сдвинуты в комплексную плоскость энергий. Оказалось, что формы потенциальных возмущений для мнимых и действительных сдвигов энергий связанных состояний имеют качественное сходство. Это удивительный факт, поскольку мнимые сдвиги отвечают комплекснозначным изменениям взаимодействия, требующим рассмотрения уже *не одного, а системы* связанных уравнений. Кроме того, получены комплексные **периодические потенциалы без спектральных лакун**. В то же время *сдвиги по энергии на мнимую величину осуществляют конфайнмент избранных состояний в непрерывном спектре*: приводят к квазипериодическим полям, трансформирующим волны рассеяния в локализованные состояния.

Данный обзор является продолжением серии предыдущих [1, 2], отразивших существенный успех, достигнутый в последние годы благодаря подходу обратной задачи (ОЗ) и квантово-механической суперсимметрии [2–9]. Эти подходы успешно применяются для получения все возрастающего числа но-

вых результатов. Преимущество ОЗ состоит в том, что входными данными этого формализма являются наблюдаемые параметры. Это позволяет строить квантовые системы с наперед заданными спектральными параметрами («квантовый дизайн») [10–17]. С помощью компьютерной визуализации соответствующих точно решаемых моделей (ТРМ) мы установили простые качественные правила изменений потенциалов при заданных вариациях наблюдаемых величин. Ценность таких алгоритмов проявляется в предсказании новых эффектов (например, перечисленных выше). Без этого их поиск подобен слепой надежде найти «иголку в стоге сена». Приложение этой теории к многоканальным системам находится сейчас в стадии интенсивного изучения, что демонстрируется и данным обзором, см. также [17].

Все эти сведения могут быть полезны для лучшей ориентировки в ядерных, атомных проблемах, в нанотехнологиях, при изучении малоразмерных систем (квантовые точки, проволочки и т. п.) и разработке квантовых компьютеров.

При построении реальных систем с потенциалами, отвечающими ТРМ, конечные размеры имеющихся в природе строительных элементов, например, отдельных атомов, накладывают ограничения на точность приближения к ТРМ. Однако важно, что именно неограниченная точность и гибкость ТРМ обеспечивает универсальность и простоту теории, что должно способствовать всевозможным ее приложениям.

1. ПОЛНОЕ КВАНТОВОЕ ОТРАЖЕНИЕ ПРИ ВЫБРАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЭНЕРГИИ

Недавно нам удалось найти потенциалы на всей оси, которые *полностью* отражают волны в заданных точках спектра (резонансная непроницаемость) [18]. Ключевым моментом здесь послужило свойство потенциалов типа Ноймана–Вигнера удерживать ССНС на полуоси $0 \leq x < \infty$ в заданных энергетических точках [2, 16, 19]. Запишем следующее выражение для такого ССНС-потенциала в простейшем случае единственного связанного состояния при $E = E_{\text{BSEC}}$ (мы полагаем $\hbar^2 = 2m = 1$):

$$V_{\text{BSEC}}(x) = -2 \frac{d}{dx} \left\{ \frac{c^2 \sin^2(k_b x)}{k_b^2 \left[1 + \frac{c^2}{k_b^2} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2k_b x)}{4k_b} \right) \right]} \right\},$$

$$x \geq 0, \quad k_b = \sqrt{E_{\text{BSEC}}}. \quad (1)$$

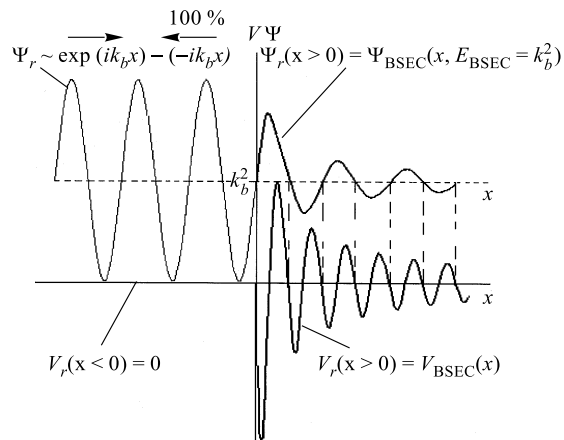


Рис. 1. В правой части рисунка ($x \geq 0$) изображены ССНС $\Psi_{\text{BSEC}}(x)$ и «запирающий» его потенциал $V_{\text{BSEC}}(x)$. Включение такого потенциала трансформирует свободную волну, синусоиду, в ССНС-состояние. Оси ординат для $\Psi_{\text{BSEC}}(x)$ и $V_{\text{BSEC}}(x)$ совмещены для удобства сопоставления пучностей волны с блоками «ямка–барьер» возмущающего потенциала. Обратите внимание на совпадение узлов волновой функции ССНС с четными узлами ССНС-потенциала. Именно за счет этой точной корреляции обеспечивается запираение волн справа в «выколотой» точке E_{BSEC} . Волны для энергий, отличных от E_{BSEC} , не затухают на бесконечности. Так что свойство запираения волны проявляется лишь в избранной точке, «выколотой» в непрерывном спектре. Имеет место полное отражение волн (символические стрелки в левой части рисунка) потенциалом V_r , равным нулю на отрицательной полуоси и совпадающим с ССНС-потенциалом на положительной полуоси. Единственное физически допустимое решение при $E = E_{\text{BSEC}} = 1$; $c = 1$ убывает при $x \rightarrow \infty$

Этот потенциал убывает асимптотически $\sim 1/x$, $x \rightarrow \infty$, как показано на рис. 1 (правая часть) для случая $E_{\text{BSEC}} = 1$. При этом энергия связанного состояния оказалась выше максимальных значений потенциала. Нормированная на единицу волновая функция ССНС при $E = E_{\text{BSEC}} > 0$ имеет вид

$$\Psi(x) = \frac{c \sin(k_b x)}{k_b \left[1 + \frac{c^2}{k_b^2} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2k_b x)}{4k_b} \right) \right]}, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Эта функция показана на рис. 1, правая часть ($E_{\text{BSEC}} = 1$), где начало отсчета на шкале Ψ сдвинуто вверх до уровня $E_{\text{BSEC}} = 1$. Параметр c есть производная ССНС-функции (2) в начале координат. Связанное состояние $\Psi(x)$ (2) убывает асимптотически $\sim \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow \infty$ (как и потенциал (1)). Пучно-

сти функции *строго* соответствуют помеченным на рис. 1 штрихпунктиром блокам «ямка–барьер» потенциала. Этот потенциал может уходить вправо (см. [11]). Кроме ССНС-функции (2), есть еще одно линейно независимое решение (всего их два) при $E = E_{\text{BSEC}}$, которое расходится асимптотически при $x \rightarrow \infty$. Решения же при других энергиях $0 < E \neq E_{\text{BSEC}}$ отвечают состояниям рассеяния.

Построим теперь новый потенциал $V_r(x)$ на *всей* оси, так чтобы на левой полуоси он обращался в нуль, а на правой совпадал с $V_{\text{BSEC}}(x)$ (1):

$$V_r(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_{\text{BSEC}}(x), & x \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

см. рис. 1 (левая часть). Для нового потенциала, естественно, будет *утрачено* свойство удержания связанного состояния в непрерывном спектре (волны теперь свободно распространяются по отрицательной полуоси). Вместо этого потенциал (3) *приобретает* новое замечательное свойство: он *полностью отражает* падающие слева волны при энергии бывшего ССНС (резонанс непроницаемости с максимумом в $E = E_{\text{BSEC}}$). Поясним это, построив решение $\Psi_r(x, E_{\text{BSEC}})$ на всей оси, отвечающее новому потенциалу. Так как на положительной полуоси $V_r(x) = V_{\text{BSEC}}(x)$, то и $\Psi_r(x, E_{\text{BSEC}})$ должно совпадать (для $0 \leq x < \infty$) с каким-нибудь решением при $E = E_{\text{BSEC}}$ для полуосевого потенциала $V_{\text{BSEC}}(x)$. Как уже отмечалось выше, существуют два таких линейно независимых решения: одно — $\Psi(x)$ (2), убывающее на асимптотике $x \rightarrow \infty$, другое — нефизическое, расходящееся. Ясно, что мы должны выбрать решение (2) как единственное физически приемлемое. На отрицательной же полуоси решение $\Psi_r(x, E_{\text{BSEC}})$ представляет собой, очевидно, комбинацию свободных волн, конкретный вид которой выбирается из условия гладкой сшиваемости с решением (2) в точке $x = 0$ (рис. 1). Имеем $\Psi_r(x, E_{\text{BSEC}}) = c \sin(kx)/k = c[\exp(ikx) - \exp(-ikx)]/2ik, x < 0$, т. е. падающие и уходящие слева волны в решении $\Psi_r(x, E_{\text{BSEC}})$ имеют *одинаковую амплитуду*. В результате получаем коэффициент отражения, равный по модулю единице: $|R(E_{\text{BSEC}})| = 1$, что и означает полное отражение.

При энергиях $E \neq E_{\text{BSEC}}$ волны на полуоси $0 \leq x < \infty$ уже не удерживаются потенциалом (1) от распространения вправо. Другими словами, вне энергетической точки E_{BSEC} мы имеем *состояния рассеяния* на полуоси. Там нарушается согласованность ритма колебаний волновой функции $\Psi_{\text{BSEC}}(x)$ и потенциала $V_{\text{BSEC}}(x)$, необходимая для удержания связанного состояния. В частности, не будут совпадать узлы $\Psi_{\text{BSEC}}(x)$ с четными узлами $V_{\text{BSEC}}(x)$, как на рис. 1. Соответствующий потенциал (3) на всей оси (рис. 1) уже не может давать полного отражения при $E \neq E_{\text{BSEC}}$. Модуль коэффициента отражения $|R(E)|$ показан на рис. 2. Обратите также внимание на зависимость

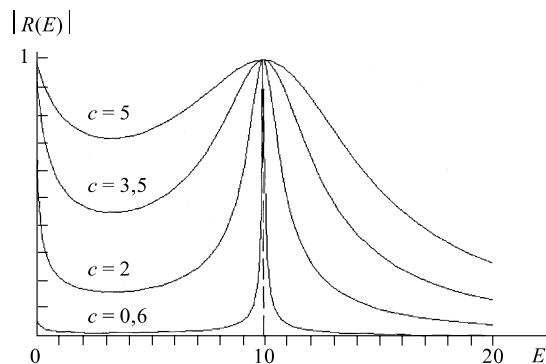


Рис. 2. Модуль коэффициента отражения $|R(E)|$ для потенциалов с ССНС на полуоси $0 \leq x < \infty$ при энергии $E_{\text{BSEC}} = 10$ с резонансной непроницаемостью в этой точке для волн на всей оси. При увеличении спектрального весового параметра c ССНС ширина резонанса в $|R(E)|$ вблизи $E_{\text{BSEC}} = 10$ становится больше. Для $c \rightarrow 0$ эта ширина стремится к нулю; штриховая линия соответствует предельному пику в $R(E)$

$|R(E)|$ от параметра c . Физический смысл c состоит в том, что он определяет степень локализации ССНС-функции вблизи начала координат. При увеличении c ССНС-функция (2) все сильнее концентрируется вблизи $x = 0$. Это приводит к тому, что соответствующая волна квазисвязанного состояния на всей оси легче распадается влево. Таким образом, бóльшие значения c соответствуют меньшим временам задержки волн на правой полуоси, что приводит к более широким резонансам отражения. Следовательно, можно управлять шириной резонансного пика при $E = E_{\text{BSEC}}$, варьируя параметр c . Мы можем менять и число резонансных точек, и их расположение, используя потенциалы с несколькими ССНС на правой полуоси. Такие потенциалы просто порождаются в подходе ОЗ [16]. Приведенный выше потенциал (1) является частным случаем соответствующих ТРМ.

Следует упомянуть, что именно концы хвостов ССНС-потенциалов на интервале $a \leq x < \infty$ для любого a ответственны за волновой конфайнмент. Таким образом, можно добавить едва ли не любые потенциалы с левой стороны, которые не изменят положение резонанса отражения, но лишь искажат его форму. В частности, можно ожидать сочетания двух крайностей резонансного туннелирования (со 100% проницаемостью) рядом с точкой отражения (см. ниже рис. 7). Кроме того, множество потенциалов резонансного отражения не ограничено только взаимодействиями, дающими связанные состояния на полуоси, отвечающие нулевому граничному условию в начале координат. Формализм ОЗ позволяет строить и потенциалы с квадратично интегрируемыми состояниями в непрерывном спектре радиальной задачи, но

с произвольной логарифмической производной в нуле. Эти потенциалы, взятые уже на всей оси, естественно, также будут полностью отражательными в соответствующих точках спектра.

Резонансное отражение возможно и в многоканальном случае на всей оси: например, для M связанных уравнений Шредингера [17], см. ниже уравнение (25). В этом случае данное явление оказывается даже более разнообразным. Может быть несколько типов ССНС на полуоси при фиксированном значении энергии. В случае M вырожденных ССНС будет резонансное 100% отражение падающих волн в разных каналах. Могут также сосуществовать $M - m$ ССНС и m состояний рассеяния при $E = E_{\text{BSEC}}$ на полуоси. Тогда на всей оси будет $M - m$ линейно независимых комбинаций падающих волн с полным отражением при E_{BSEC} . Ниже будет сказано об ином (найденном нами совершенно неожиданно) механизме полного отражения, связанного с наличием закрытого канала.

В одноканальной задаче полное отражение мы получаем с помощью потенциала с *дальнодействующим* знакопеременным хвостом, осциллирующим с амплитудой, спадающим в асимптотике как $1/x$. В отличие от этого в двухканальной задаче (и вообще в многоканальном случае) решение с полным отражением, оказывается, существует и для матрицы взаимодействия, спадающей экспоненциально или не равной нулю на ограниченном отрезке $[0, a]$, например, с прямоугольными потенциальными матрицами $V_{ij}(0 < x < a) = \text{const} = V_{ij}$; $V_{ij}(x > 0) = 0$; $V_{ij}(x < 0) = 0$ или даже для дельтаобразной матрицы взаимодействия (подробнее см. в п. 2.5).

Конечно, периодические потенциалы на правой полуоси также имеют свойство полного отражения для волн, падающих слева. Это, естественно, должно происходить при значениях энергии, принадлежащих запрещенным спектральным зонам периодического потенциала. Однако периодические потенциалы не являются квадратично интегрируемыми как потенциалы с ССНС и имеют целые полосы полного отражения, в отличие от нашего случая, когда абсолютная непроницаемость имеет место при выбранных значениях энергии.

Не следует также смешивать рассматриваемое нами явление с полным отражением волн, падающих под определенным углом на плоскость раздела разных оптических сред. В нашем случае полное отражение испытывают даже волны, падающие перпендикулярно этой плоскости. То же относится к брэгговскому отражению от параллельных плоскостей кристаллической решетки.

Можно, конечно, недоумевать, почему же резонансное отражение не было до сих пор известно, несмотря на длительные и интенсивные исследования квантового рассеяния. Это, возможно, объясняется тем, что это явление в одноканальном случае проистекает из существования потенциалов с ССНС, а с ними знаком далеко не каждый физик. Кроме того, нужно было использовать полуосные ССНС-потенциалы на всей оси. Еще требовалось догадаться,

что хотя они при этом теряют свое замечательное свойство удерживать ССНС, позволяя волнам распространяться в сторону левой полуоси, но зато приобретают новую способность полного селективного отражения.

Эффект одно- и многоканального резонансного отражения можно использовать для построения спектральных волновых фильтров. Например, требуемые эффективные одномерные потенциалы можно создать в разных тонких волноводах (в частности, в квантовых проволочках) с разреженным спектром поперечных колебаний, когда возбуждениями более высоких уровней можно пренебречь. Потенциал продольного движения может формироваться путем модулирования ширины по ходу проволочки. И это благодаря тому, что сжатие волновода поднимает уровни энергии поперечного движения, а это эффективно увеличивает потенциальную энергию продольного движения. Можно также модулировать, пользуясь законом (3), координатную зависимость показателя преломления, фигурирующего в уравнении — аналоге уравнения Шредингера для оптических монохроматических волн. В нейтронной физике можно строить требуемые эффективные потенциалы путем применения соответствующих материалов и модулированных по координате магнитных полей.

Рассмотренный эффект является полной противоположностью другому яркому явлению волновой динамики — резонансному туннелированию, к рассмотрению которого мы и переходим.

2. НОВЫЕ АСПЕКТЫ РЕЗОНАНСНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Мы напомним нашу оригинальную интерпретацию «парадоксальной» прозрачности системы потенциальных барьеров, каждый из которых трудно проницаем [6, 7, 15, 17]. Покажем, что такая проницаемость сводится к комбинации элементарных однобарьерных процессов и решающим фактором в установлении режима полной прозрачности служит накопление волн в ловушке между барьерами и подавление отражения волнами, распадающимися из ловушки назад. Это послужило для нас наводящим соображением при поиске аналога этого явления в многоканальных системах. И действительно, наличие эффективной ловушки в закрытых каналах, куда поступают волны из других открытых каналов, оказалось ключевым моментом в новом механизме многоканальной прозрачности, который может проявляться в том числе и в трехчастичных системах. Такие же ловушки могут быть реализованы и при энергиях, лежащих в *запрещенных* зонах каналов, имеющих периодическую или решетчатую (дискретная пространственная переменная) структуру. Новое, более простое и глубокое понимание сути резонансного туннелирования позволяет предсказывать различные особенности эффекта в случае неравных барьеров. Можно и управлять параметрами прозрачности. Так, показано,

что существуют барьеры, сочетающие свойства резонансной непроницаемости при одних значениях энергии и в то же время прозрачности — при других. В многоканальном случае можно соединить эти «противоположности» даже в одной энергетической точке. Все это демонстрируется на различных поучительных ТРМ прямых и обратных задач.

2.1. Механизм резонансной прозрачности. Туннелирование — сердцевина квантовой механики, а резонансное туннелирование — одно из самых замечательных квантовых явлений, уже сейчас находящее множество практических приложений и обещающее новые возможности [17, 20–25].

Рассмотрим два одинаковых барьера. Малая часть потока, проникая через первый барьер, попадает в межбарьерное пространство на квазисвязанный уровень энергии, где многократно отраженные волны от запирающих потенциальных стенок не гасят друг друга и постепенно накапливаются в потенциальной «ловушке» (трудность распада сквозь непрозрачные барьеры). Когда амплитуда волн между барьерами возрастает настолько, что интенсивности распада волн в обе стороны от ловушки сравниваются с падающей, достигается равновесие: волна распада из второго канала в первый навстречу падающей оказывается равной по модулю с отраженной, но противоположной по фазе, и полностью гасит отражение.

Прекрасной иллюстрацией всего этого могут служить картинки из книг Брандта и Даамена [26], которые стоило бы перевести и переиздать в России. Чем длиннее цуг волн (падающий пакет), чем ближе он к монохроматической волне, тем сильнее эффект резонансного туннелирования. Здесь замечательно сочетание трудности проницаемости и полной прозрачности. При этом отраженные «в данный момент» волны уничтожаются волнами, распадающимися назад, «накопленными за длительное время», прошедшие волны тоже покидают ловушку лишь после длительного «срока заточения». Недавно мы заметили, что подавление отражения происходит в процессе установления резонансного равновесия неравномерно. Сначала оно нарастает и накопление волн в квазисвязанном состоянии ускоряется, а при приближении к равновесию замедляется.

Интуитивно понятно, что для полной прозрачности необходима *одинаковая* проницаемость каждого из барьеров, запирающих квазисвязанное состояние в точке резонансной энергии (более строгое доказательство см. ниже). Это позволяет предсказать возможность резонансного туннелирования и при неравных барьерах, с разных сторон запирающих волны в ловушке, лишь бы их проницаемости при некоторой энергии совпадали (т. е., чтобы кривые энергетической зависимости имели точки пересечения). В этом случае расстояние между барьерами должно быть выбрано таким, чтобы обеспечить при соответствующей энергии конструктивную интерференцию волн в ловушке.

Можно еще дополнительно *пояснить непривычный феномен* резонансного туннелирования, *построив модельное решение* прозрачности двух почти

непроходимых барьеров *в виде комбинации самых обычных решений* для отдельных барьеров. В качестве первого решения (рис. 3, *a*) возьмем падающую волну слева $\exp(ikx)$ на потенциальный дельта-барьер $V_0\delta(x)$, расположенный в точке $x = 0$. Коэффициенты проходимости и отражения волн $T(k)$, $R(k)$ — множители при прошедшей и отраженной волнах: $T(k) \exp(ikx)$ при $x > 0$, $k = \sqrt{e}$ и $R(k) \exp(-ikx) + \exp(ikx)$ при $x < 0$ для этого случая имеют вид

$$\begin{aligned} T(k) &= 2ik/(2ik - V_0), \\ R(k) &= V_0/(2ik - V_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Построим теперь аналогичное решение (рис. 3, *б*) для того же барьера, только с зеркально отраженным решением — падающей волной справа:

$$\begin{aligned} \Psi(x \leq 0) &= T(k) \exp(-ikx), \\ \Psi(x \geq 0) &= \exp(-ikx) + R(k) \exp(ikx). \end{aligned} \tag{5}$$

Выберем нормировку этого решения (умножим это решение (5), (6) на $-R/T$), чтобы прошедшая волна отличалась лишь знаком от отраженной волны первого решения. Сложим теперь решение (рис. 3, *a*) и перенормированное (рис. 3, *б*). Получим решение (рис. 3, *в*). При этом слева останется лишь волна, идущая вправо, а волны, идущие влево, уничтожат друг друга (сократятся) (рис. 3, *в*). Разбор этой ситуации приводит нас к пониманию интересного явления, когда падающая волна справа как бы *помогает туннелированию* волны, падающей слева (уничтожая отраженную волну путем деструктивной интерференции с прошедшей волной второго решения). И наоборот, падающая волна слева *мешает проходимости* волны, налетающей на барьер справа, уничтожая соответствующую прошедшую волну. Интересно еще и то, что слабый поток волн вправо в первом решении (4), одинаковый с обеих сторон барьера, при прибавлении второго решения со сравнительно сильным потоком в противоположном направлении (влево) дают все же сильный поток вправо. Это

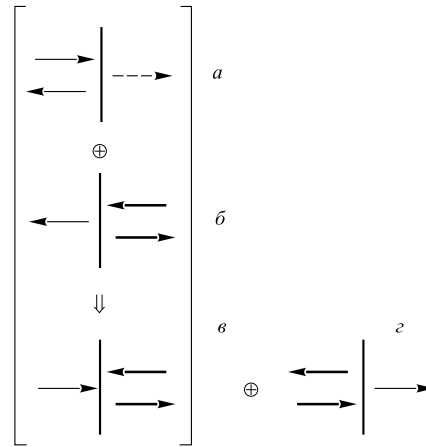


Рис. 3. Схемы элементарных процессов туннелирования, когда через барьер проходит малая доля потока. Из этих простейших составляющих $(a + б \rightarrow в + г)$ можно построить замечательное решение для системы двух барьеров с полной прозрачностью

хорошая наглядная иллюстрация того, что, в то время как волновые функции складываются аддитивно, потоки (являющиеся билинейными комбинациями волновых функций) могут давать неожиданные с точки зрения классической, не волновой интуиции результаты. Вернемся, однако, к построению решения резонансного туннелирования. Полученное суммарное решение (рис. 3, ϵ) можно шить с решением (рис. 3, δ) для сдвинутого вправо барьера (рис. 3, δ), перенормированным таким образом, что оба эти решения могут гладко переходить друг в друга в области между барьерами. Необходимым условием этого является совпадение проницаемостей при энергии резонансного туннелирования левого и правого барьеров по отдельности: тогда модули коэффициентов при амплитудах волн в области межбарьерного движения совпадают для обоих решений. А равенства фаз можно добиться либо подбором относительного расстояния между барьерами при фиксированной энергии, либо вариацией энергии решений (что можно было бы сделать при условии совпадения проницаемости при всех энергиях, т. е. в случае одинаковых барьеров). В результате мы построим искомое решение полного туннелирования. А главное, мы имеем теперь четкий качественный критерий существования резонансного туннелирования (необходимое условие), который можно применить уже в случае более сложных (составных) систем.

2.2. Примеры двух, трех, четырех δ -барьеров и ям. Энергии резонансного туннелирования для двух δ -барьеров расположены ниже соответствующих обычных резонансов на полуоси. Другими словами, квазисвязанные состояния, запертые у начала координат таким же δ -барьером в ловушке той же ширины, оказываются лежащими выше по энергии. А связанные состояния в бесконечной прямоугольной яме той же ширины (предельный случай непроницаемых барьеров) располагаются еще выше. Это интуитивно ясно, так как ослабление проницаемости барьеров делает пространственное распределение состояния более компактным, что приводит к повышению энергии.

На рис. 4, a изображены реальная и мнимая части волновой функции для системы двух δ -барьеров $V_1\delta(x)+V_2\delta(x-\pi)$ ($V_1 = V_2 = 10$) в точках 0 и π при энергии резонанса. Каждый δ -барьер производит излом решения: получается скачок производной, пропорциональный значению решения в точке δ -барьера и его силе V_i . Например, для первого δ -барьера имеем

$$\psi'(0+) - \psi'(0-) = V\psi(0). \quad (7)$$

При резонансной энергии $\text{Re } \Psi(x)$ приходит в точку левого барьера с нулевой производной (в максимуме), а барьер, ломая решение, еще увеличивает амплитуду, что отвечает *накоплению* волн в ловушке. То же происходит в резонансе на полуоси. Но на полуоси имеется лишь одно физическое решение. А на всей оси существуют два независимых решения, имеющих слева от барьеров вид $\sin(kx) = \text{Im } \Psi(x)$ и $\cos(kx) = \text{Re } \Psi(x)$. Второе решение

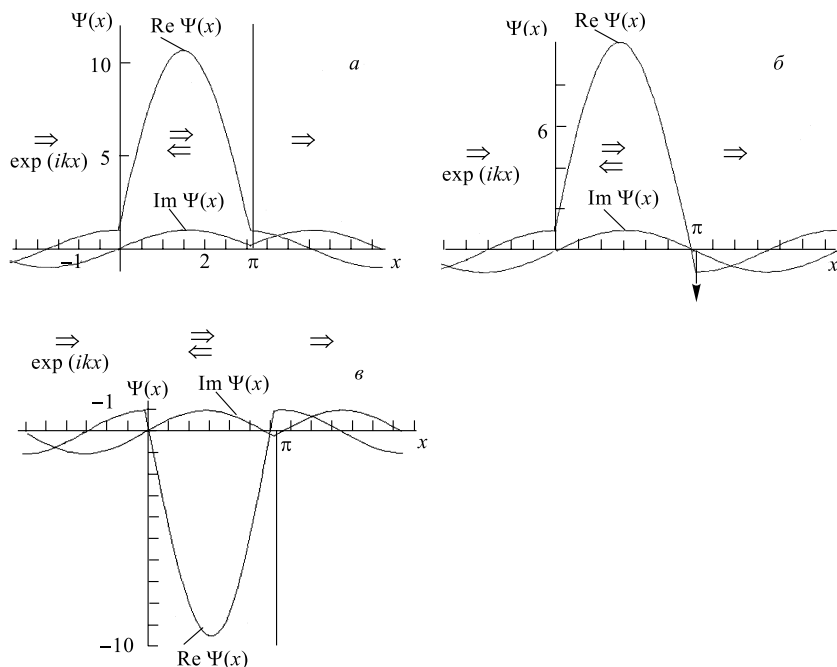


Рис. 4. Волновые функции при энергии: а) $E = 0,88510284935$ резонансного туннелирования через два δ -барьера $10\delta(x) + 10\delta(x - \pi)$; б) $E = 1$ резонансного туннелирования (прохождения) через δ -барьер и яму $10\delta(x) - 10\delta(x - \pi)$; в) $E = 1,1383151524591$ резонансного прохождения через две δ -ямы $-10\delta(x) - 10\delta(x - \pi)$. Обратите внимание на накопление волн между потенциальными барьерами (ямами) лишь в одном из двух решений

$\text{Im } \Psi(x)$ обращается в точке левого барьера в нуль и потому барьер его не возмущает: синусоида проходит точку $x = 0$ без излома и без возрастания амплитуды в ловушке. Это несколько ослабляет общий эффект накопления волн в ловушке на всей оси. На втором барьере оба решения терпят изломы и при этом переходят в синусоиды с единичными амплитудами, как в падающей волне слева.

Во введении уже говорилось о возможности резонансного туннелирования на двух неравных барьерах при энергии их одинаковой прозрачности. Но если расстояние между ними не подобрано специально, эффект резонансного туннелирования будет ослаблен (не 100% проникаемость). Если один или оба δ -барьера в вышеприведенном примере заменить δ -ямами, то наблюдаются аналогичные резонансные эффекты (см. рис. 4, б, в). Это происходит благодаря совпадению по модулю коэффициентов проникаемости δ -барьеров

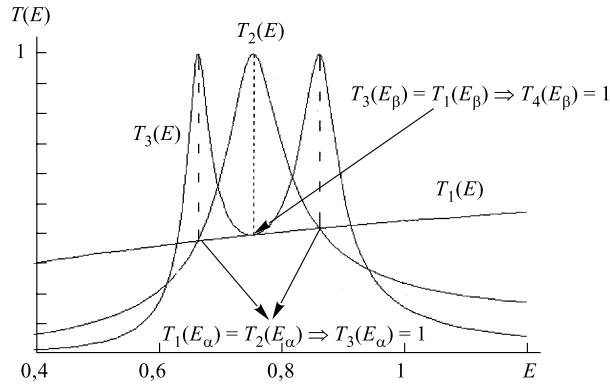


Рис. 5. Коэффициенты проницаемости $T_1(E)$; $T_2(E)$; $T_3(E)$ для одного, двух и трех эквидистантных δ -барьеров как функции энергии падающих волн. Кривые для одного и двух барьеров имеют по две точки пересечения на каждый туннельный резонанс (в $T_2(E)$) системы двух барьеров. В этих точках наблюдается резонансное туннелирование $T_3(E)$ системы трех барьеров, составленной из системы двух и одного барьеров

и ям. Но положения резонансов относительно случая двух барьеров повышаются для барьера и ямы (резонансы прозрачности совпадают с уровнями бесконечной прямоугольной ямы соответствующей ширины) и оказываются еще выше для двух ям. Правда, в системах с ямами имеются связанные состояния, лежащие при отрицательных энергиях.

Новые аспекты явления обнаруживаются, если, например, три эквидистантных δ -барьера можно рассматривать как два неравных барьера (один единичный, а второй парный, который сам по себе уже имеет одно квазисвязанное состояние — один туннельный резонанс). Сравнивая проницаемости (отдельных) одного T_1 и двух T_2 барьеров (см. рис. 5), видим, что для каждого двухбарьерного резонанса кривой $T_2(E)$ имеется ее совпадение в двух точках с $T_1(E)$, что делает возможным дублиты туннельных резонансов в системе трех δ -барьеров T_3 . Также объясняются триплеты резонансов в случае четырех эквидистантных δ -барьеров. Рассмотрим их как комбинацию одного и трех барьеров. Могло бы показаться, что соответствующие проницаемости изолированных частей T_1 , T_3 должны были совпадать в четырех точках на каждый дублет пиков T_3 , но почему-то из этих четырех возможностей резонансного туннелирования должны были реализоваться не все, а только три. В действительности оказывается, что таких точек всего три (см. рис. 6): пересечения кривых $T_1(E)$ и $T_3(E)$ происходят лишь в двух точках и еще имеется касание в одной точке — казалось бы, «невероятное» событие. Аналогичная ситуация имеет место и для большего числа барьеров. Конечно, струк-

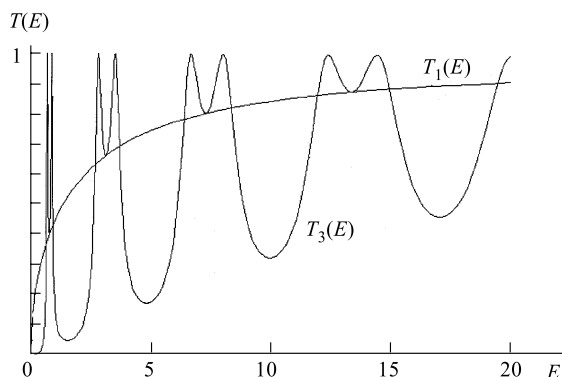


Рис. 6. Коэффициенты проницаемости $T_1(E)$; $T_3(E)$ для одного и трех эквидистантных δ -барьеров как функции энергии падающих волн. Кривые для одного и трех барьеров имеют по три общие точки на каждый дублет туннельных резонансов (в $T_3(E)$) системы трех барьеров. В этих точках наблюдается резонансное туннелирование системы четырех барьеров, составленной из эквидистантной системы одного и трех барьеров

тура мультиплетов резонансного туннелирования может быть понята и более традиционным путем по аналогии с квазисвязанными состояниями системы δ -барьеров с мультиплетами связанных состояний широкой прямоугольной ямы, разделенной эквидистантными δ -перегородками (см. [10, 27]).

В случае эквидистантного, но несимметричного расположения двух барьеров и одной ямы резонансная проницаемость становится не 100 %-ной.

Полная резонансная прозрачность имеется при прохождении волн над одним прямоугольным барьером. Квазисвязанные состояния над барьером образуются из-за отражения волн от двух потенциальных ступенек с обеих сторон барьера. Волны запираются на вершине барьера при энергиях, когда интерференция не подавляет многократное отражение от краев барьера.

Возможен также эффект сосуществования при близко расположенных энергиях *полного отражения и полной проницаемости*. Если к ССНС-потенциалу, рассмотренному в предыдущем разделе, добавить слева δ -барьер $v\delta(x+a)$, $a > 0$, то для такой составной системы можно ожидать появления полной проницаемости для волн, падающих слева при значениях энергии, когда проницаемости δ -барьера и ССНС-потенциала совпадают по отдельности. И действительно, расчеты показывают, что, зафиксировав одну из таких энергий и варьируя a — расстояние между потенциалами, мы всегда найдем те параметры системы (их счетное множество), когда реализуется полная проницаемость (см. рис. 7). В то же время свойство полной непрозрачности при

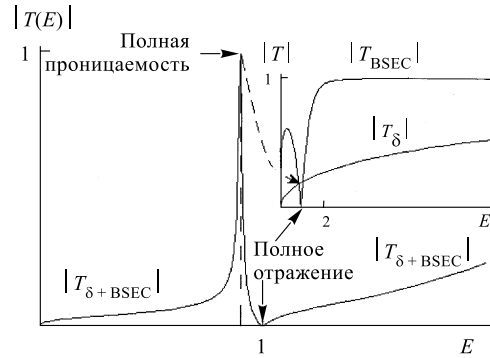


Рис. 7. Модуль коэффициента прохождения $T_{\delta+BSEC}$ для потенциала, составленного из двух частей: ССНС-потенциала и δ -барьера слева. Такая система дает как полное отражение в точке $E_{BSEC} = 1$, так и пропускает 100% прохождения при рядом расположенной энергии $E = 0,9$. На вставке показаны зависимости модулей коэффициентов прохождения (T_{δ}) и (T_{BSEC}) отдельно для δ -барьера и ССНС-потенциала. При энергиях, отвечающих точкам пересечения этих кривых, наблюдается резонансное туннелирование через всю систему при определенных значениях расстояния между данными потенциалами. Штриховая линия со стрелкой как раз подчеркивает существование такого резонанса при $E = 0,9$, указывая на соответствующую точку пересечения кривых T_{δ} и T_{BSEC}

энергиях $E = E_{BSEC}$ остается и для новой системы — добавление δ -барьера тут, очевидно, ничего не меняет. Из рис. 7 видно, что точки, где имеют место явления-«антиподы», могут располагаться близко друг от друга.

До сих пор мы рассматривали явление резонансной прозрачности в подходе прямой задачи. Но при этом мы были ограничены довольно бедным выбором точно решаемых моделей. Обратная задача позволяет строить широкие классы таких моделей, где входными параметрами служат спектральные характеристики [1, 15, 16]. Недавно был сделан еще один шаг в этом направлении.

2.3. Управление резонансным туннелированием в подходе обратной задачи. К точным моделям, в которых можно управлять параметрами резонансов туннелирования, приводят случаи дробно-рациональных коэффициентов отражения (Фаддеев и др. [28]). Печеник [29] привел примеры соответствующих потенциалов с заданными положениями полюсов и нулей коэффициента отражения $r(k)$ в комплексной плоскости импульсов. Но Печеник не строил систем с полной прозрачностью (пропустил очень интересный случай). Помещая нули коэффициента отражения в наперед заданную точку на действительной оси, мы осуществим управление резонансным туннелирова-

нием, что существенно дополняет результаты Печеника. Интересно, что эти точные модели оказываются с разными барьерами (без симметрии).

Запишем коэффициент отражения в дробно-рациональной форме

$$R(k) = c \frac{N(k)}{D(k)}, \quad (8)$$

где числитель и знаменатель имеют вид

$$D(k) = \prod_{i=1}^n (k - k_i), \quad (9)$$

$$N(k) = \prod_{i=1}^m (k - l_i).$$

Выбирая полюса $\text{Im } k_i < 0$ и нули $\text{Im } l_i > 0$, которые полностью определяют зависимость коэффициента отражения R от импульса k , надо иметь в виду следующие ограничения на $R(k)$:

$$R(0) = -1, \quad (10)$$

$$\{R(k)\}^* = R(-k), \quad (11)$$

$$|R(k)| \leq 1. \quad (12)$$

Первое приводит к выражению

$$c = \frac{-(-k_1) \dots (-k_n)}{(-l_1) \dots (-l_m)}. \quad (13)$$

Второе же условие удовлетворяется либо выбором чисто мнимых полюсов и нулей, либо они должны разбиваться на пары $k_i^* = -k_j$ (то же для нулей), симметрично расположенные относительно мнимой оси в комплексной k -плоскости.

Коэффициент отражения $R(k)$ входит в ядро

$$Q(x+y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ik(x+y)] R(k) dk \quad (14)$$

интегрального уравнения ОЗ

$$Q(x+y) + K(x,y) + \int_{-\infty}^x K(x,z) Q(z+y) dz = 0. \quad (15)$$

Приведем решения этого уравнения с $R(k)$ в виде (8), введя предварительно некоторые вспомогательные выражения.

Выпишем сначала значения вычетов для $R(k)$ в точках $k = k_j$:

$$c_j = N(k_j) \prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{1}{k_j - k_i}.$$

Далее решим следующее уравнение для величин a_α :

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{C_j}{a_\alpha - ik_j} \right) \left(\sum_{l=1}^n \frac{C_l}{a_\alpha + ik_l} \right) = R(ia_\alpha)R(-ia_\alpha) = 1, \quad (16)$$

где обозначено

$$\sum_{l=1}^n \frac{C_l}{a_\alpha + ik_l} \equiv R(-ia_\alpha).$$

Положим

$$F_{j\alpha} = (a_\alpha - ik_j)^{-1} \quad (17)$$

и

$$G_{j\alpha} = \frac{R(-ia_\alpha)}{a_\alpha + ik_j}. \quad (18)$$

Наконец, пусть $f_\alpha(x)$ есть решения системы алгебраических уравнений

$$1 + \sum_{\alpha=1}^n (F_{j\alpha} \exp[a_\alpha x] + G_{j\alpha} \exp[-a_\alpha x]) f_\alpha(x) = 0. \quad (19)$$

Теперь у нас все готово, чтобы дать выражение для $K(x, y)$ — решения уравнения (15):

$$K(x, y) = \left\{ \sum_{\alpha=1}^n [\exp(a_\alpha y) - R(-ia_\alpha) \exp(-a_\alpha y)] f_\alpha(x) \right\} \theta(x + y), \quad (20)$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. С этим выражением формула для искомого потенциала имеет вид

$$V(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (21)$$

Заметим, что это выражение отлично от нуля только для $x \geq 0$. Решение Йоста для такого взаимодействия при $x \geq 0$, отвечающее падающей слева

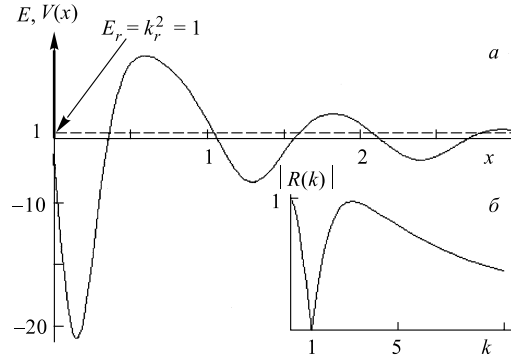


Рис. 8. а) Потенциал, построенный по заданному дробно-рациональному коэффициенту отражения $R(k)$ с нулями на действительной оси энергий $k = 1$; -1 и полюсами в комплексной k -плоскости: $b_1 = -0,5 - 1,65i$; $b_2 = -1,65i$; $b_3 = 0,5 - 1,65i$. Вертикальной жирной линией в начале координат обозначен δ -барьер с силой $V = 9,80925$. Штриховой линией отмечена энергия резонансного туннелирования $k = 1$. б) Зависимость модуля коэффициента отражения от импульса ($R(k) = 0$ в точке $k = 1$)

волне, имеет вид (для $x < 0$ решение есть просто $\exp(ikx)$)

$$\begin{aligned}
 f(x, k) &= \exp(ikx) - \int_{-\infty}^x K(x, y) \exp(iky) dy = \\
 &= \exp(ikx) - 2 \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(x) \left\{ \frac{\text{sh}[(a_{\alpha} + ik)x]}{a_{\alpha} + ik} - R(-ia_{\alpha}) \frac{\text{sh}[(ik - a_{\alpha})x]}{ik - a_{\alpha}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Нулям $R(k)$ на действительной оси отвечает задание $\text{Im } l_i = 0$, при этом $\text{Re } l_i$ служат рычагами управления положениями резонансов. Полюса дают дополнительные степени свободы выбора соответствующего взаимодействия. На рис. 8 и 9 показаны потенциалы и функция с единственным резонансом туннелирования. Интересно появление δ -функции при $x = 0$ в аналитическом выражении для потенциала (при сдвиге нуля функции $R(E)$ в комплексную плоскость δ -функция в потенциале исчезает). В нашей практике это был первый случай появления δ -функции в преобразованном потенциале в подходе ОЗ. На рис. 10 продемонстрирована зависимость формы потенциала, построенного по задаваемому положению полюсов $R(k)$ при фиксированном положении нулей.

Рассмотренные резонансы на всей оси и резонансы рассеяния на полуоси хотя и имеют много общего с физической точки зрения (задержка волны в ловушке), но первые описываются нулями коэффициентов отражения на

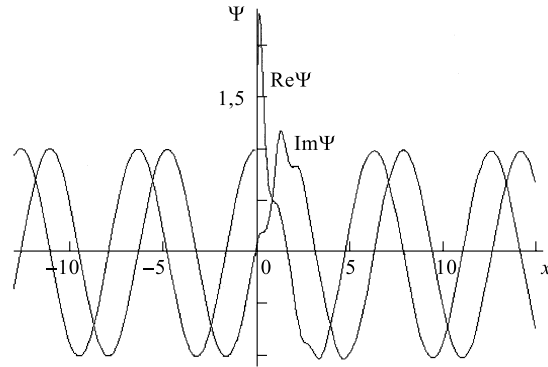


Рис. 9. Реальная и мнимая части функции Йоста — волны, падающей слева на систему барьеров, построенных по заданному дробно-рациональному коэффициенту отражения $R(k)$ с нулем на действительной оси энергий $k = 1$ (ср. с рис. 4)

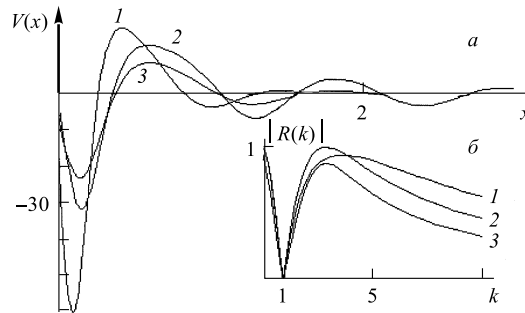


Рис. 10. а) Влияние полюсов коэффициента отражения $R(k)$ в комплексной k -плоскости на форму построенного потенциала при фиксированном положении нулей: $k = 1; -1$: 1) $b_1 = -0,5 - i; b_2 = -6i; b_3 = 0,5 - i$; 2) $b_1 = -0,5 - 1,65i; b_2 = -1,65i; b_3 = 0,5 - 1,65i$; 3) $b_1 = -2 - 1,65i; b_2 = -0,5i; b_3 = 2 - 1,65i$. б) Соответствующая зависимость $|R(k)|$ от импульса

действительной оси импульсов, а вторые — полюсами матрицы рассеяния в комплексной плоскости k (или E).

2.4. Туннельный резонанс в разрешенной зоне. Простейшей системой с полосатым спектром разрешенных и запрещенных зон являются волны на решетке (когда пространственная координата принимает дискретные значения $n = 1, 2, 3, \dots$ с шагом $\Delta = 1$) [8]. В этом случае уравнение Шредингера становится конечно-разностным и имеет лишь одна разрешенная зона конечной ширины $0 < E < 4$ с решеточным законом дисперсии $\cos(k) = 1 - E/2$.

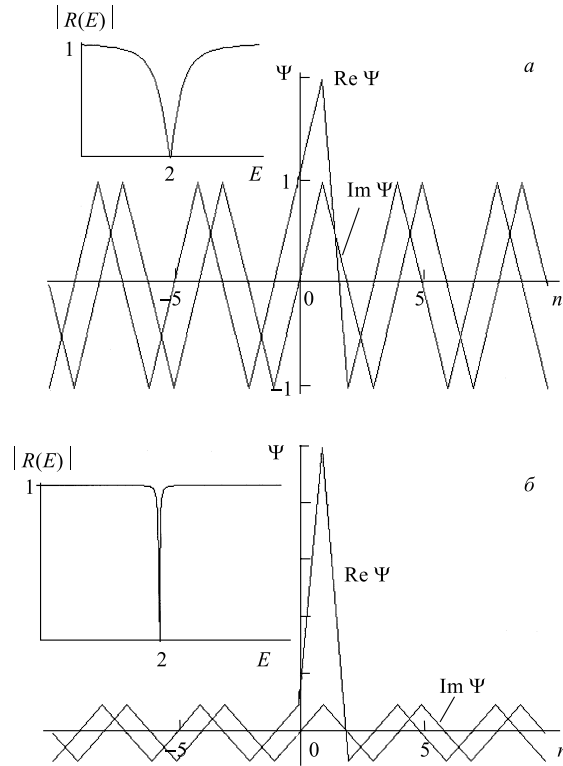


Рис. 11. Волновые функции на решетке при энергии резонансного туннелирования (прохождения) через δ -барьер и яму: а) $2\delta_{n0} - 2\delta_{n2}$; б) $10\delta_{n0} - 10\delta_{n2}$ (ср. с рис. 4). Отдельно показана энергетическая зависимость в разрешенной зоне $0 \leq E \leq 4$ модуля коэффициента отражения $R(E)$, обращающегося в нуль при $E = 2$. Чем сильнее потенциалы, тем больше накопление волн между ними

На рис. 11 показаны волновые функции при резонансном туннелировании через систему « δ -барьера» и « δ -ямы», расположенных в точках $n = 0; 2$ (ср. с аналогичным случаем непрерывной координаты (рис. 4, 10)):

$$V_1\delta_{n0} + V_2\delta_{n2}; V_1 = -V_2 = 10, \quad (23)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. При этом возможно лишь одно квазисвязанное состояние, расположенное в середине зоны $E = 2$. Если раздвинуть положения барьера и ямы так, чтобы между ними помещалось N точек, то число резонансов было бы N . Рассмотренная модель позволяет прогнозировать резонансные явления в периодических структурах, возмущенных барьерами и

ямами. Только там роль простых экспонент $\exp(\pm ikx)$ играют блоховские решения

$$\Psi_B(x) = \exp(\pm iKa)\Psi_B(x - a), \quad (24)$$

где a — период потенциала.

2.5. Многоканальное резонансное туннелирование и отражение. Недавно нам удалось выяснить новый механизм прозрачности и непрозрачности, который может реализоваться в системах с сильной связью каналов. Многоканальное уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Psi_i(x) + \sum_j V_{ij}(x)\Psi_j(x) = E_i\Psi_i(x), \quad (25)$$

где $\Psi_i(x)$ — функция парциального канала; $V_{ij}(x)$ — матрица взаимодействия; $E_i = E - \varepsilon_i$ с пороговой энергией ε_i , при которой начинается парциальная ветвь непрерывного спектра i -го канала.

Рассмотрим простейшую двухканальную систему с разными порогами и δ -функциональной матрицей взаимодействия $V_{\alpha\beta}(x) = V_{\alpha\beta}\delta(x)$, где $V_{\alpha\beta}$ — некоторые константы. При закрытом ($E_2 < 0$) втором канале волны, заброшенные во второй канал из первого в точке δ -связи ($x = 0$), оказываются как бы «запертыми» в ловушке, т. е. не могут уйти на бесконечность по оси x : $\Psi_2(x)$ убывает как $\exp(\mp\sqrt{|E_2|x})$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Волны, возвращающиеся в первый канал через единственную точку δ -связи, распространяются в обоих направлениях. Эти волны распада, идущие вперед, могут претерпевать деструктивную интерференцию с волнами, прошедшими в первом канале (без захода во второй), что дает *полное отражение*. При некоторой другой энергии волны распада, идущие назад, могут, напротив, подавить отраженные волны, что обеспечит *полную прозрачность*. Накоплению волн в ловушке служит ослабление связи каналов $V_{12} = V_{21}$ (затрудняется возвращение волн в исходный канал). Аналогично влияние и потенциала $V_{22} = -2\kappa_r = -2\sqrt{\varepsilon_2 - E_r}$, который должен быть отрицательным и обеспечивать в точке резонанса отражения $E = E_r$ правильное сшивание при $x = 0$ (излом функции за счет δ -взаимодействия) экспоненциально затухающих в обе стороны экспонент. Задержка волн между двумя барьерами в одноканальном случае или накопление волн в закрытом канале при существенном различии механизмов резонансной прозрачности имеют общее в подавлении отраженных волн распадными.

Условия непрерывного сшивания функций $\Psi_i(-0) = \Psi_i(+0)$ и излома их первых производных, получаемые при однократном интегрировании обеих

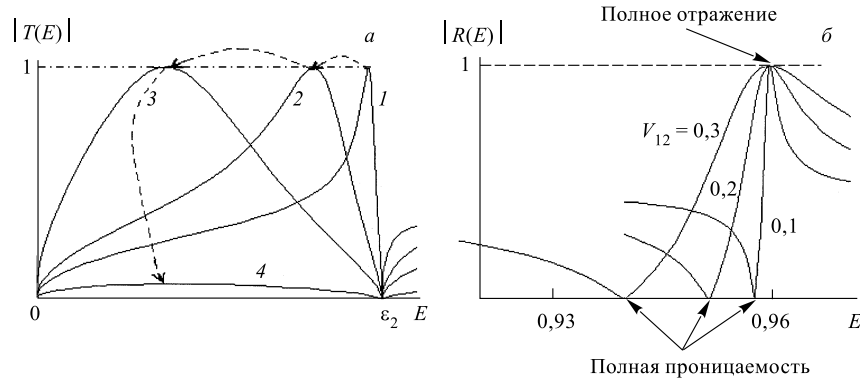


Рис. 12. Энергетическая зависимость модуля коэффициента прохождения волн в первом канале при закрытом втором канале. *а*) Ниже порога, обозначенного $E = \epsilon_2$, возможна 100% проницаемость за счет подавления отраженных волн в первом канале распадными волнами из второго канала. Стрелки указывают последовательность кривых $|T(E)|$, помеченных цифрами 1–4, при увеличении силы связи каналов $V_{12} = 0, 5; 0, 75; 1; 2$ соответственно. Так как мы выбрали $V_{22} = 0$, полное отражение для этой модели имеет место в точке порога второго канала: $E_r = \epsilon_2$. *б*) Параметры матрицы взаимодействия $V_{\alpha\beta}\delta(x)$: $V_{11} = 1$, $V_{22} = -0, 4$, $V_{12} = 0, 1; 0, 2; 0, 3$

частей системы уравнений (25), имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_2'(-0) &= \Psi_2'(0) - V_{21}\Psi_1(0), \\ \Psi_1'(-0) &= \Psi_1'(0) - V_{11}\Psi_1(0) - V_{12}\Psi_2(0).\end{aligned}\quad (26)$$

Волновые функции с двух сторон от точки сшивания имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_1(x < 0) &= \exp(ik_1x) + R_1 \exp(-ik_1x), \quad \Psi_1(x > 0) = T_1 \exp(ik_1x), \\ \Psi_2(x < 0) &= A_2 \exp(\kappa_2x), \quad \Psi_2(x > 0) = A_2 \exp(-\kappa_2x), \\ \kappa_2 &= \sqrt{E - \epsilon}, \quad k_1 = \sqrt{E}.\end{aligned}\quad (27)$$

Для коэффициентов прохождения и отражения T, R и амплитуды волны второго закрытого канала A получаем выражения

$$\begin{aligned}T_1 &= 1/(1 - V_{11}/(2ik_1) + V_{12}^2/(4ik_1\kappa_2)), \\ R_1 = T_1 - 1A_2 &= -V_{21}/(2\kappa_2 - V_{11}\kappa_2/(ik_1) + V_{12}^2/(2ik_1)).\end{aligned}\quad (28)$$

На рис. 12, *а* показана эволюция энергетической зависимости проницаемости волн через область взаимодействия при изменении силы связи $V_{12} = 0, 5; 0, 75; 1; 2$ каналов, $V_{22} = 0$. При этом ослабляется способность накопления волн в закрытом канале и интенсивность распада из второго канала в

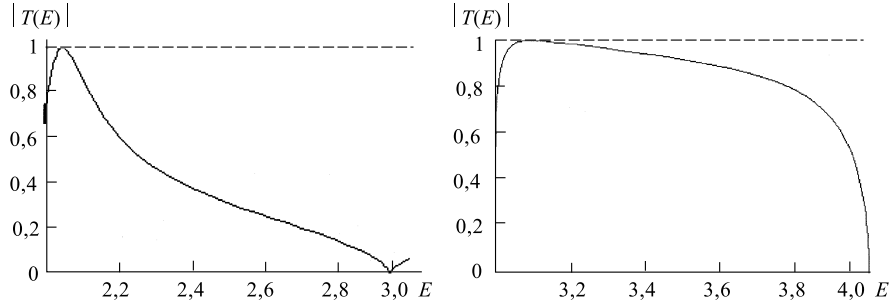


Рис. 13. Полная проницаемость для волн в первом канале при энергии над границей первой разрешенной зоны второго канала с *периодическим потенциалом* — гребенкой Дирака: $V_{22}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{22}\delta(x - na)$. Параметры системы: $V_{11}(x) = 4\delta(x)$; $V_{12}(x) = 6,406\delta(x)$; $V_{22} = 2$; $a = \pi$; $\varepsilon_2 = 1$

Рис. 14. Модуль коэффициента прохождения волн в первом канале для системы двух связанных *конечно-разностных* уравнений Шредингера. При энергии $E = 3,1$ над верхней границей разрешенной зоны второго канала имеет место полное прохождение волн. Параметры системы: $V_{11} = -1$; $V_{12} = 0,657$; $\Delta_1 = 1$; $\Delta_2 = 2$; порог второго канала $\varepsilon_2 = 2$

направлении отраженных волн. Это приводит к неполному подавлению отражения, что отчетливо демонстрируется кривой 4. Обратите внимание на наличие резонанса отражения в пороге второго канала ε_2 , вследствие того, что мы положили $V_{22} = -2\sqrt{\varepsilon_2 - \bar{E}_r}$ равным нулю.

На рис. 12, б показано, что при соответствующем выборе параметров $V_{\alpha\beta}$ в δ -потенциальной матрице полное отражение возможно и при энергии *ниже* порога второго канала ($V_{22} \neq 0$).

Подобный механизм резонансного туннелирования был обнаружен и в случае периодического взаимодействия $V_{22}(x)$, когда энергия падающей волны в первом канале лежит в области запрещенных зон (вблизи их границ) второго канала, где накапливаются волны, заброшенные из первого канала. На рис. 13 показаны полная прозрачность и полное отражение волн в первом канале *над разрешенной зоной* второго канала, потенциал в котором — (периодическая) гребенка Дирака: $V_{22}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{22}\delta(x - na)$.

Аналогичный результат был получен для системы двух связанных *конечно-разностных* уравнений Шредингера:

$$\begin{aligned} -\frac{\Psi_1(n+1) - 2\Psi_1(n) + \Psi_1(n-1)}{\Delta_1^2} + V_{11}\delta_{0n}\Psi_1(n) + V_{12}\delta_{0n}\Psi_2(n) &= E_1\Psi_1(n), \\ -\frac{\Psi_2(n+1) - 2\Psi_2(n) + \Psi_2(n-1)}{\Delta_2^2} + V_{22}\delta_{0n}\Psi_2(n) + V_{21}\delta_{0n}\Psi_1(n) &= E_2\Psi_2(n), \end{aligned} \quad (29)$$

где n — целое число, а Δ_1 и Δ_2 обозначают шаги дискретной переменной x_n для первого и второго каналов соответственно. Если мы выберем энергию над верхней границей разрешенной зоны второго канала, то такая ловушка для волн, перебрасываемых из первого канала, также может привести к полной прозрачности и полному отражению (см. рис. 14).

В случае двухканальной задачи можно соединить с помощью техники ОЗ (или суперсимметрии) *полные резонансные прозрачность и отражение в одной точке*. Исходя из тривиального случая двух *расцепленных* каналов, в одном из которых имеется резонансное прохождение, а в другом резонансное отражение волн, можно породить по ОЗ в подходе Марченко в этой системе связанное состояние с отличными от нуля компонентами спектрального весового вектора [2, 17]. Это введет сильную связь каналов, не возмущая ранее независимые ветви непрерывных спектров двух каналов. Другими словами, при граничном условии, отвечающем падающим волнам в исходном прозрачном канале, они пройдут без отражения и при включении сильной связи каналов. А при падающих волнах в другом канале получим полное отражение.

Того же мы добились и в трехканальной модели с δ -взаимодействием и одним закрытым каналом, в котором аккумуляровались волны для подавления отражения или прохождения волн в открытых каналах при различном соотношении падающих волн во входных каналах.

Аналогичным образом, используя подход ОЗ, можно также построить модель с *сочетанием связанного состояния* в непрерывном спектре на всей оси с *полной прозрачностью и полным отражением при одной и той же энергии* и для того же взаимодействия. Для этого возьмем три полностью расцепленных канала, каждый из которых имеет при одной и той же энергии либо связанное состояние в континууме (для этого, например, в первом канале нужно просто симметрично отразить ССНС-потенциал относительно начала координат), либо полное отражение, либо полную проницаемость. Затем породим связанное состояние ниже порогов всех трех каналов с ненулевыми компонентами спектрального весового вектора, что приведет к отличным от нуля недиагональным элементам в матрице взаимодействия, не нарушающим исходных характеристик рассеяния. Того же необычного сочетания свойств можно, в принципе, добиться и в случае матриц с δ -взаимодействием в двух точках (x_1, x_2). Так, при специальном выборе взаимодействий в четырехканальной системе с одним закрытым каналом получаем три решения при одной энергии, но разных граничных условиях (соотношениях амплитуд падающих волн во входных каналах), отвечающих связанному состоянию (между x_1, x_2) или полной прозрачности, или полному отражению, или любой их линейной комбинации.

Если открыто несколько каналов, возможна полная прозрачность при дискретных значениях энергии, но при определенных комбинациях падающих волн (множество таких комбинаций расширяется с ростом числа открытых

каналов). В случае сложной (многоканальной) частицы полную проникаемость системы неравных барьеров обеспечить сложнее (требуется заботиться еще о соотношении специальной пропорции весовых факторов (амплитуд падающих волн) разных каналов (это пока открытая проблема). Если бы удалось вырождать два туннельных резонанса, то при этой энергии проникаемость была бы 100 % при любой комбинации падающих волн в двухканальной системе с двумя открытыми каналами.

Прозрачная система при всех энергиях континуума, получающаяся «сшиванием» ветвей спектра двух первоначально расцепленных каналов при рождении общего связанного состояния. Самая простая система получается при порождении уровня в случае исходного свободного движения в обоих каналах с одинаковыми порогами непрерывного спектра $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Матрица взаимодействия оказалась составленной из элементов $V_{\alpha\beta}$, пропорциональных солитоноподобным одноканальным потенциалам. Такой вид диагональных элементов представлялся не очень неожиданным: как обобщение одноканальной задачи. В свое время мы не нашли объяснения, почему и связь каналов $V_{12}(x) = V_{21}(x)$ имеет такой же вид. И вдруг все оказалось почти очевидным. В каждом из независимых каналов связанное состояние порождается с помощью солитоноподобного потенциала. Но тогда не возникает сшивания спектральных ветвей, каналы остаются расцепленными и у системы будет два вырожденных уровня. Как избавиться от одного из уровней, введя связь каналов $V_{12}(x) = V_{21}(x)$? Выберем такую ямку $V_{\alpha\alpha}$ в каждом канале, чтобы одной ее было бы недостаточно для образования уровня на заданной глубине $E = E_{\text{связ}}$, а связь каналов V_{12} создавала бы необходимое дополнительное «притяжение». Простейшая гипотеза о том, чтобы $V_{\alpha\alpha}$ вместе с V_{12} были бы половинками солитонной ямы, складывающимися в одну солитонную с требуемым уровнем, оказалась правильной.

Здесь нам нужно понимание, как влияет на решение в одном канале связь с другим каналом. Сравним соответствующие члены в парциальном уравнении: $V_{\alpha\alpha}(x)\Psi_\alpha(x)$ и $V_{12}\Psi_\beta(x)$. Если каналы одинаковы, то и решения для парциальных волн в них совпадают: $\Psi_\alpha(x) = \Psi_\beta(x)$. Отсюда следует, что выбор в качестве $V_{12}(x)$ и $V_{\alpha\alpha}$ половинок солитонной ямы сделает каждое парциальное уравнение в сильносвязанной системе эквивалентным независимому одноканальному уравнению с обычным солитонным потенциалом.

Случай разных порогов рассматривался нами в [1, 2, 15 (1996)]. Мы тогда разрешили парадокс: зачем в прозрачной матрице взаимодействия появляются потенциальные барьеры? Однако столь полного и простого объяснения, как при $E_1 = E_2$ в (25), нам еще добиться не удалось.

2.6. Резонансы в уравнениях высшего порядка. По аналогии с многоканальными системами нами были получены резонансы в системах, описываемых дифференциальными уравнениями высшего (≥ 4) порядка (см., например, наш обзор [8], разд. 4 и ссылки там же). На рис. 15, *a* показана

спектральная складка дисперсионной кривой для следующего уравнения 4-го порядка:

$$-c\Psi^{(4)}(x) - d\Psi^{(2)}(x) + v\delta(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (30)$$

Выше $E = 0$ имеются две разрешенные зоны для волн, отвечающие двум разным квазиимпульсам. Эти зоны перекрываются и имеют общую верхнюю границу, помеченную на рис. 15, *a* крестиком. Для энергий выше этой границы оба квазиимпульса становятся комплексными, т. е. волны там не могут уходить на бесконечность — запрещенная зона. Ниже $E = 0$ начинается другая запрещенная зона, но только для одного типа движения, другой же квазиимпульс остается действительным — загиб дисперсионной кривой назад. Наличие δ -барьера (или ямы) приводит к взаимному переходу двух типов волн друг в друга. Это напоминает только что рассмотренный многоканаль-

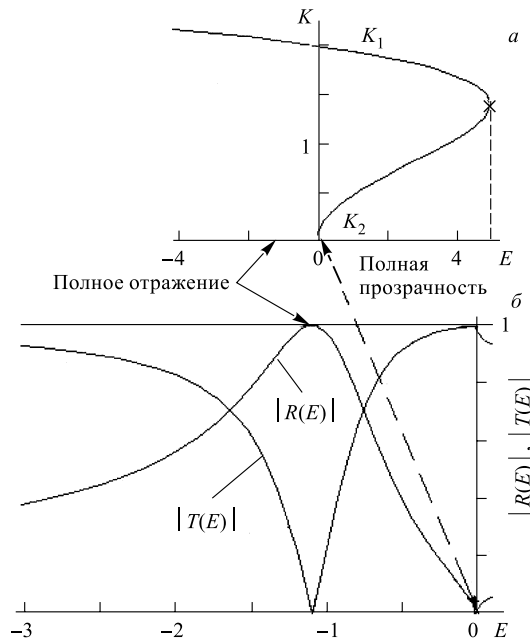


Рис. 15. *a*) Дисперсионная кривая зависимости квазиимпульса от энергии для волнового движения, описываемого уравнением 4-го порядка; крестиком помечена точка слияния двух кривых для волн с разными K на верхней границе их разрешенных зон. *б*) Коэффициенты отражения и прохождения волн через «потенциальную» δ -яму (только один квазиимпульс действителен для $E < 0$), отмечены точки полного отражения и полной прозрачности. Параметры: $d = 5$; $c = 5/4$; $v = -5$

ный случай. Следовательно, можно ожидать, что закрытая зона, как и закрытый канал, работает как эффективная волновая ловушка, способная дать 100 % отражение. Это подтвердилось в расчете (см. рис. 15, б).

2.7. Управление пакетами. Упомянем следующую возможность использования рассмотренных эффектов. Пусть на область взаимодействия падает волновой пакет с центром энергетического распределения в точке резонанса. Резонанс туннелирования расширяет в конфигурационном пространстве прошедший пакет, поскольку ослабляет интенсивность прохождения волн с энергиями при удалении от точки резонанса (сужение пакета в импульсном пространстве). В то же время раздваивается (расщепляется в импульсном и координатном пространствах) пакет отраженный, так как в его центре отражение равно нулю. Наоборот, резонанс отражения расщепляет прошедший пакет и сужает импульсное распределение (расширяет в x -представлении отраженный пакет). Рассмотрим только что обнаруженную возможность управления пакетами в многоканальных системах. Оказывается, существует аналог широко известного явления осцилляций пакета, построенного из симметричного и антисимметричного состояний дублета в симметричной системе двух потенциальных ям, разделенных барьером. Можно также заставить пакет осциллировать между двумя каналами не по координатной переменной, а по канальной (по дискретному индексу). Поиск этого эффекта был предпринят нами по инициативе В. И. Юкалова. Роль разделяющего барьера здесь, как оказалось, играет слабая связь каналов.

Пусть имеется дублет близко лежащих нижайших уровней энергии E_1 , E_2 двухканальной системы со слабой связью каналов $V_{12} = \text{const}$ и одинаковыми бесконечно глубокими потенциальными ямами V_{11} , V_{22} . В основном состоянии волновые функции в обоих каналах имеют одинаковые знаки. На верхнем уровне дублета они имеют противоположные знаки. В волновом пакете, построенном в виде суммы векторов состояний дублета, в момент $t = 0$ компонента первого канала имеет удвоенную амплитуду по сравнению с компонентами слагаемых, а во втором канале слагаемые, имеющие разные знаки, взаимно сокращаются (деструктивная интерференция). Эволюция во времени стационарных состояний определяется экспоненциальными фазовыми множителями, зависящими от разных энергий, $\exp(-iE_1t)$, $\exp(-iE_2t)$ для разных уровней дублета. В результате разной скорости изменения фаз слагаемых в момент $t = 1/\Delta E$ происходит смена относительных знаков слагаемых и волновой пакет исчезает в первом канале и достигает максимальной величины во втором.

2.8. Трехчастичные одномерные модели. Интересно, что для резонансного туннелирования двух связанных частиц [30, 31] может оказаться достаточно *одного* потенциального барьера для задержки сложной частицы. Объяснение этому оказалось простым. Например, для двух частиц, жестко связанных на определенном расстоянии друг от друга (как колеса велосипеда

рамой), так что внутренними возбуждениями пары можно пренебречь, взаимодействие каждой из частиц с внешним барьером приводит к эффективному *двухбарьерному* потенциалу в уравнении для центра масс пары. Так что задача сводится к рассмотренной ранее задаче туннелирования одной частицы через два барьера, и физическая суть эффекта в двух, казалось бы, совершенно разных задачах оказывается одной и той же.

Рассмотренная выше двухканальная модель резонансного туннелирования сквозь δ -образную матрицу взаимодействия за счет накопления волн под порогом второго канала позволяет предсказать аналогичный эффект для трехчастичной системы. В простейшем случае возьмем две частицы, связанные друг с другом узкой прямоугольной ямой, с высоко расположенными возбужденными состояниями, из которых при невысокой энергии можно учитывать только первое. Третью частицу с большой массой можно считать закрепленной в начале координат. Пусть с ней взаимодействует только одна частица из пары с помощью δ -барьера. Центр масс такой пары будет двигаться в поле одного барьера: усредненного по распределению волновой функции внутреннего движения δ -барьера. Можно ожидать, что такая система будет иметь резонансное туннелирование, как и модель с накоплением волн в закрытом канале.

Рассмотрим теперь многоканальный случай системы уравнений (25). Интересно, что мы долго не обращали внимания на то, что уже присутствовало на полученных нами раньше картинках в [7] (см. рис. 8.4) при изменении отдельных компонент спектрального весового вектора (управление локализацией волн).

Ранее мы обнаружили, что при собирании в конфигурационном x -пространстве волн к началу координат в одном парциальном канале происходит одновременно выкачивание волн данного связанного состояния и из других парциальных каналов. Теперь же выяснилось, что во всех остальных состояниях происходит противоположный процесс «отшатывания» не только в обычном пространстве по x , как это было в одноканальном случае, но и расталкивание их в остальные каналы из избранного. Таким явлением можно, по-видимому, дополнить и рис. 3 в [12].

2.9. Управление резонансами рассеяния на δ -барьере (случай потенциала конечного радиуса действия). Обычно за потенциальным барьером квазисвязанные состояния живут тем меньше, чем выше по энергии они расположены. Аппарат ОЗ позволяет преобразовать потенциал так, чтобы избранные верхние состояния жили дольше, чем нижние. Следует отметить, что обычная техника представления s -функции рассеяния в дробно-рациональном виде, дающая собственно ТРМ управления непрерывным спектром, уже не действует в случае потенциалов конечного радиуса. Это связано с тем, что некоторые полюса s -функции рассеяния в верхней полуплоскости комплексной k -плоскости, отвечающие так называемым «ложным» полюсам (несвязан-

ным состояниям!), просто отсутствуют для потенциалов конечного радиуса действия. С другой стороны, для формализма дробно-рациональной аппроксимации *необходимо*, чтобы число «ложных» полюсов строго совпадало с числом полюсов, отвечающих резонансам.

В этом случае можно воспользоваться R -матричным подходом [32], когда описание процессов рассеяния на вышеупомянутых потенциалах сводится к рассмотрению только той части волновой функции, которая определена в области, где потенциал не равен нулю, т. е. на конечном интервале. Как известно, для задач Штурма–Лиувилля на таких интервалах существует *дискретный* набор собственных функций, отвечающих однородным граничным условиям на краях интервала. Эти функции удовлетворяют *соотношению полноты* Парсеваля. Другими словами, задача рассеяния на конечном интервале сводится к установлению соотношений (в чем и состоит суть R -матричного подхода) между дискретным набором собственных значений соответствующей задачи Штурма–Лиувилля и данными рассеяния, т. е. эффективной дискретизации s -матрицы. В R -матричном подходе собственные значения задачи Штурма–Лиувилля можно приближенно интерпретировать как положения резонансов рассеяния, а значения собственных функций или их производных на внешнем краю интервала — как соответствующие приведенные ширины.

Алгоритмы ОЗ на конечном интервале позволяют, таким образом, варьировать избранные положения R -матричных резонансов и приведенные ширины. Рассмотрим в качестве исходной задачи $V(x) = 0$ на интервале $[0, \pi]$. Будем уменьшать приведенные ширины — производные волновых функций

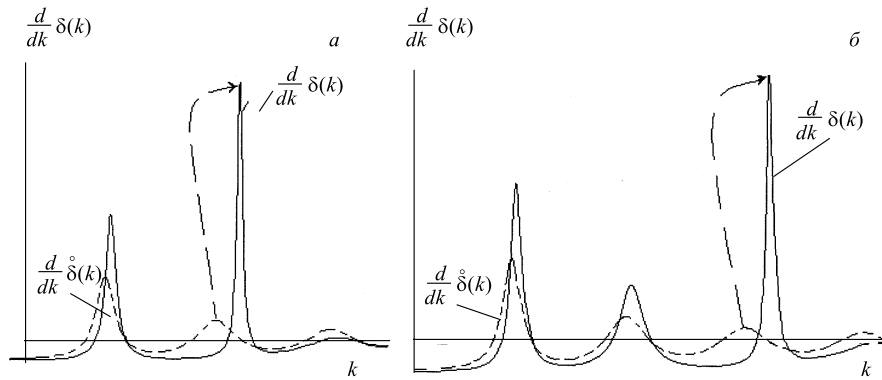


Рис. 16. Управление резонансами в потенциале ограниченного радиуса действия: уменьшение ширин второго (а) и третьего (б) квазисвязанных состояний. Показаны зависимости от импульса производной $\frac{d\delta(k)}{dk}$ до (штриховая линия) и после (сплошная линия) преобразования потенциала. Стрелки указывают на увеличение времени задержки избранного квазисвязанного состояния

избранных собственных значений справа. К получившемуся потенциалу добавим δ -барьер в точке π . На рис. 16 показаны производные $\frac{d\delta(k)}{dk}$ фазового сдвига на таких потенциалах. Как известно, эти величины пропорциональны времени задержки налетающей волны в резонансе, а сам ход кривой $\frac{d\delta(k)}{dk}$ прекрасно позволяет выявить положения резонансов. Как видно из рис. 16, мы добились желаемого — построили систему, в которой некоторые состояния живут дольше, чем состояния, расположенные ниже по энергии. Поскольку производные избранных волновых функций не строго соответствуют приведенным ширинам, их уменьшение привело, помимо сужения резонансных пиков избранных состояний, к небольшому их сдвигу вверх по энергии.

2.10. Открытые проблемы. Ниже приводятся некоторые вопросы, над которыми мы еще думаем, и, возможно, к нам присоединится кто-нибудь из читателей.

— Почему для одного δ -барьера и одной δ -ямы резонансы туннелирования располагаются строго на местах уровней в прямоугольной яме той же ширины, что и расстояние между барьерами?

— Почему сочетание δ -ямы и δ -барьера не портит эффект резонансной (полной) прозрачности, а в случае эквидистантно, но не симметрично расположенных двух δ -барьеров и одной δ -ямы или двух δ -ям и одного δ -барьера полная прозрачность нарушается?

— Никто еще не рассмотрел случай многоканальной дробно-рациональной матрицы отражения, который должен быть точно решаемым.

— Интересно было бы рассмотреть отражение и проницаемость на графах, об обратной задаче на которых нам сообщил Пивоварчик.

— Упомянем еще не до конца понятое явление полной прозрачности при *всех* энергиях: классы солитоноподобных потенциалов и их многоканальных аналогов [12].

— Отметим также новейшие результаты, которые еще предстоит развить. Были найдены дополнительные возможности управления спектрами периодических структур. Рассмотрим в любой избранной точке E спектра исходного периодического потенциала $\overset{\circ}{V}_{\text{per}}$ (например, гребенки Дирака) решение с **произвольными** однородными граничными условиями $\Psi'(x_n) + h\Psi(x_n) = 0$ на концах периода. Пусть E принадлежит одной из запрещенных зон. Мы можем сгresti это решение к одному или другому краю интервала, применяя алгоритмы ОЗ для задач Штурма–Лиувилля на интервале с произвольными граничными условиями. При этом решение для нового потенциала V_{per} , составленного из периодически повторенного возмущенного взаимодействия на одном периоде, строится путем гладкого сшивания преобразованных решений на каждом периоде. Поскольку при сгребании решения ослабляется или усиливается асимметрия данной волновой функции в точках сшивания, полу-

чается ослабление или усиление экспоненциального разбалтывания решения. Таким образом можно управлять степенью запрета в любой избранной точке лакуны. Раньше мы поняли это только для «физических» граничных условий $\Psi(x_n) = 0$, отвечающих потенциальной яме с непроницаемыми стенками [2]. Оказалось, что «нефизические» решения бесконечно расширяют возможности управления (переход от дискретных физических уровней E_n к континууму E , заметаемому собственными значениями с произвольными граничными условиями). Аналогично можно использовать для управления спектральными зонами алгоритмы сдвигов по шкале энергий собственных значений при произвольных краевых условиях.

3. НЕОБЫЧНЫЕ (НЕГАМОВСКИЕ) СОСТОЯНИЯ РАСПАДА

Выше мы рассмотрели ряд любопытных эффектов в рассеянии, связанных с забросом волн в другие каналы за счет их связи, которую мы учитывали точно. В то же время в физике (в теории ядра) существует альтернативный способ эффективного учета связи каналов, как в оптической модели. Суть его состоит в том, что можно ограничить рассмотрение многоканальных реакций одним выбранным каналом. Поскольку парциальный поток в этом канале не является сохраняющейся величиной благодаря обмену волнами с другими каналами, требуется введение эффективного комплексного потенциала. Тогда мы уже будем работать с несамосопряженным оператором Шредингера. Математикам давно известны такие операторы. Например, более 30 лет назад спектральный анализ неэрмитовых дифференциальных операторов был рассмотрен В.Е. Лянце в приложении к книге [34]. Существует и соответствующий аналог ОЗ. В этой связи представляет интерес обобщение теории квантового дизайна на случай несамосопряженных операторов.

К настоящему времени имеется ряд статей, посвященных построению комплексных потенциалов с чисто действительным спектром собственных значений (см., например, [35]). Подход суперсимметричной квантовой механики (SUSYQ) использовался для построения комплексных потенциальных партнеров с теми же спектрами собственных значений, отличающихся только на одно собственное значение (либо на конечное, но наперед заданное число точек спектра) [36, 37]. В работе [38] мы предложили технику сдвига энергетических уровней в комплексную плоскость энергий.

Состояния, сдвинутые в комплексную E -плоскость, становятся квазисвязанными, потому что для них зависящий от времени множитель $\exp(-iEt)$ с отрицательной мнимой частью в E спадает экспоненциально по времени. Обычные гамовские состояния распада имеют экспоненциальный рост по x в точках резонансов матрицы рассеяния в комплексной плоскости энергий. В отличие от этого, волновые функции квазисвязанных состояний, получен-

ные посредством мнимых сдвигов собственных значений энергии, являются *квадратично интегрируемыми* [36]. Модули значений всех других состояний остаются не зависящими от времени.

Ниже мы дадим обзор недавних результатов исследований комплексных преобразований, добавляющих мнимые части к выбранным энергетическим уровням [38]. Некоторые из них уже рассматривались нами в обзоре [2]. С тех пор эти преобразования были лучше поняты. Так, в частности, мы продемонстрируем полученные нами комплексные периодические потенциалы *без спектральных лакун*. Уравнения Шредингера с комплексными потенциалами эквивалентны (неэрмитовым!) *системам сильно связанных* уравнений для $\text{Re } \psi(x)$ и $\text{Im } \psi(x)$ (см. уравнение (45)). Такие уравнения значительно более сложны по сравнению со случаем действительного потенциала. Несмотря на это, неожиданно оказалось, что качественное объяснение формы потенциальных возмущений для комплексных сдвигов энергий во многом аналогично случаю *одного* уравнения.

3.1. Формализм. Добавку мнимого значения к энергии избранного состояния можно выполнить в подходе SUSYQ (см., например, [4, 14, 36, 37]). В работе [38] этот метод был обобщен для двойного преобразования SUSYQ при *разных* комплекснозначных энергиях. В результате энергия избранного состояния сдвигается в комплексном «направлении», в то время как все остальные уровни энергии остаются прежними.

В наших предыдущих обзорах мы уже подробно рассматривали преобразование SUSYQ (см., например, [2]). Здесь мы работаем с несколько модифицированной схемой. Поэтому, чтобы не нарушать целостности изложения, а также в интересах удобства читателя, еще не знакомого с этим формализмом, мы приведем вывод формул без особых сокращений.

В подходе SUSYQ исходный гамильтониан H_0 , дифференциальный оператор второго порядка, факторизуется на операторы первого порядка

$$A^\pm = \pm \partial + W(x), \quad (31)$$

где ∂ — символ производной,

$$H_0 = A^+ A^- + \mathcal{E}. \quad (32)$$

Символом \mathcal{E} обозначена энергия факторизации, а суперпотенциал $W(x)$ определяется из следующего уравнения:

$$A^- \psi_0(x, \mathcal{E}) = \{-\partial + W(x)\} \psi_0(x, \mathcal{E}) = 0. \quad (33)$$

Здесь $\psi_0(x, \mathcal{E})$ есть решение уравнения Шредингера с начальным потенциалом $V_0(x)$ при энергии факторизации \mathcal{E} . Из уравнений (31) и (33) имеем

$$W(x) = \psi_0'(x, \mathcal{E}) \psi_0(x, \mathcal{E})^{-1}. \quad (34)$$

Преобразование SUSYQ состоит в перестановке местами операторов A^\pm :

$$H_0 = A^+ A^- + \mathcal{E} \rightarrow H_1 = A^- A^+ + \mathcal{E}, \quad (35)$$

$$V_1(x) = V_0(x) - 2W'(x). \quad (36)$$

Существует простое соотношение между решениями уравнения Шредингера при произвольной энергии для исходного H_0 и нового гамильтониана H_1 — $\psi_0(x, E)$ и $\psi_1(x, E)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, E) &= A^- \psi_0(x, E) = (-\partial + W(x))\psi_0(x, E) = \psi_0(x, \mathcal{E})^{-1} \theta_E(x), \\ \theta_E(x) &\equiv \psi_0'(x, \mathcal{E})\psi_0(x, E) - \psi_0(x, \mathcal{E})\psi_0'(x, E), \end{aligned} \quad (37)$$

где мы воспользовались уравнением (34). Новое решение при \mathcal{E} есть

$$\psi_1(x, \mathcal{E}) = \psi_0(x, \mathcal{E})^{-1}. \quad (38)$$

Окончательный результат этого преобразования зависит от выбора \mathcal{E} и $\psi_0(x, \mathcal{E})$.

Выполним преобразование SUSYQ еще раз. В качестве исходной системы возьмем уже преобразованную. Новая энергия факторизации теперь $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + i\Gamma$. Роль аналога $\psi_0(x, \mathcal{E})$ должно играть решение, линейно независимое от решения $\psi_1(x, \mathcal{E})$, но взятое при энергии, сдвинутой в комплексную плоскость:

$$\tilde{\psi}_1(x, \bar{\mathcal{E}}) = A^- \tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}}). \quad (39)$$

Здесь $\tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}})$ — это решение, полученное из линейно независимого от $\psi_0(x, \mathcal{E})$ добавлением мнимой величины к \mathcal{E} . Второй шаг дает следующее преобразованное решение при $\bar{\mathcal{E}}$:

$$\psi_2(x, \bar{\mathcal{E}}) = \tilde{\psi}_1(x, \bar{\mathcal{E}})^{-1} = \psi_0(x, \mathcal{E})\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)^{-1}, \quad (40)$$

где последнее равенство следует из (37),

$$\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x) = \psi_0'(x, \mathcal{E})\tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}}) - \psi_0(x, \mathcal{E})\tilde{\psi}_0'(x, \bar{\mathcal{E}}). \quad (41)$$

Модуль $|\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)|$ должен быть отличен от нуля всюду в области определения рассматриваемых решений, иначе возникнут сингулярности. Обсудим этот вопрос подробнее. Так как $\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x) = \text{const}$, если $\Gamma = 0$, то ясно, что, в силу непрерывности, $|\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)| > 0$ для Γ , лежащей в некоторой окрестности нуля. С другой стороны, обращение в нуль $|\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)|$ при некотором фиксированном x означает, что логарифмические производные $\psi_0(x, \mathcal{E})$ и $\tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}})$ совпадают в этой точке. Но это едва ли осуществимо на практике, поскольку единственный свободный параметр, которым мы располагаем, это Γ (для случая

связанных состояний мы стеснены выбором уже существующих дискретных уровней энергии, которые мы сдвигаем). В то же время нам нужно удовлетворить двум независимым требованиям. Во-первых, надо, чтобы мнимая часть $\tilde{\psi}'_0(x, \bar{\mathcal{E}})/\tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}})$ равнялась нулю. Во-вторых, соответствующая действительная часть должна совпадать с $\psi'_0(x, \mathcal{E})/\psi_0(x, \mathcal{E})$. В принципе, однако, это не исключает того, что $|\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)|$ может случайно занулиться при каких-нибудь x и $\bar{\mathcal{E}}$. Так что окончательное решение этой проблемы за компьютерными вычислениями.

Выражение для суперпотенциала, получаемого на втором шаге преобразования SUSYQ, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(x) &= \tilde{\psi}'_1(x, \bar{\mathcal{E}})\tilde{\psi}_1(x, \bar{\mathcal{E}})^{-1} = \\ &= \{\psi_0(x, \mathcal{E})^{-1}\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)\}'\psi_0(x, \mathcal{E})\{\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)\}^{-1} = \\ &= -\psi'_0(x, \mathcal{E})\psi_0(x, \mathcal{E})^{-1} + \theta'_{\bar{\mathcal{E}}}(x)\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)^{-1} = \\ &= -\psi'_0(x, \mathcal{E})\psi_0(x, \mathcal{E})^{-1} + (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})\psi_0(x, \mathcal{E})\tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}})\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)^{-1}, \quad (42)\end{aligned}$$

где штрих обозначает дифференцирование по координате x . Кроме того, мы воспользовались известным тождеством $\theta'_{\bar{\mathcal{E}}}(x) = (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})\psi_0(x, \mathcal{E})\tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}})$. Из (42), (34), а также (36) имеем окончательное выражение для потенциала второго шага:

$$\begin{aligned}V_2(x) &= V_1(x) - 2\tilde{W}'(x) = V_0(x) - 2(\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E}) \times \\ &\quad \times \frac{d}{dx}\{\psi_0(x, \mathcal{E})\tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}})\theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)^{-1}\}. \quad (43)\end{aligned}$$

Применяя тождество

$$\theta_E(x) = (E - \mathcal{E}) \int^x \psi_0(y, \mathcal{E})\psi_0(y, E)dy,$$

получаем следующее выражение для ненормированного решения при произвольной энергии E , соответствующего потенциалу $V_2(x)$:

$$\begin{aligned}\psi_2(x, E) &= (\mathcal{E} - E)^{-1}(-\partial + \tilde{W}(x))(-\partial + W(x))\psi_0(x, E) = \\ &= (\mathcal{E} - E)^{-1}(-\partial + \tilde{W}(x))\psi_0(x, \mathcal{E})^{-1}\theta_E(x) = \\ &= (\mathcal{E} - E)^{-1}\psi'_0(x, \mathcal{E})\psi_0(x, \mathcal{E})^{-2}\theta_E(x) + \\ &\quad + \psi_0(x, E) - (\mathcal{E} - E)^{-1}\psi'_0(x, \mathcal{E})\psi_0(x, \mathcal{E})^{-2}\theta_E(x) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})(\mathcal{E} - E)^{-1} \tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}}) \theta_E(x) \theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)^{-1} = \\
& = \psi_0(x, E) + (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E})(\mathcal{E} - E)^{-1} \tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}}) \theta_E(x) \theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)^{-1} = \\
& = \psi_0(x, E) - (\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E}) \tilde{\psi}_0(x, \bar{\mathcal{E}}) \theta_{\bar{\mathcal{E}}}(x)^{-1} \int^x \psi_0(y, \mathcal{E}) \psi_0(y, E) dy. \quad (44)
\end{aligned}$$

Приведенные далее в этом разделе результаты основаны на этих формулах, применимых как для дискретного спектра связанных состояний, так и для непрерывного спектра.

3.2. Связанные состояния. Появление мнимых частей у V и E нарушает эрмитовость гамильтониана. Нормировка и поток не сохраняются, что можно объяснить наличием эффективной связи со «скрытыми каналами», как в оптической модели. Широкое множество ТРМ с полным набором спектральных параметров позволяет *управлять поглощением* в конструируемых квантовых системах.

Для комплексных энергетических сдвигов нам придется вместо одного уравнения Шредингера рассматривать уже систему двух зацепленных уравнений для $\text{Re } \Psi(x)$ и $\text{Im } \Psi(x)$. Приведем одномерный пример такой системы:

$$\begin{aligned}
-\text{Re } \psi''(x) &= (\text{Re } E - \text{Re } V(x)) \text{Re } \psi(x) - (\text{Im } E - \text{Im } V(x)) \text{Im } \psi(x); \\
-\text{Im } \psi''(x) &= (\text{Re } E - \text{Re } V(x)) \text{Im } \psi(x) + (\text{Im } E - \text{Im } V(x)) \text{Re } \psi(x).
\end{aligned} \quad (45)$$

Неожиданно обнаружилось, что алгоритмы качественного конструирования потенциалов для мнимых сдвигов собственных значений энергии иногда такие же, что и для действительных сдвигов энергии. И это несмотря на то, что уравнения становятся значительно сложнее. Очевидно, что добавление постоянного мнимого потенциала приведет к параллельному мнимому сдвигу всех спектральных точек. Но чтобы сдвинуть в мнимом направлении *одну* спектральную точку, при этом *не меняя положения энергий всех других состояний (элементарные трансформации)*, нам потребуется специальный профиль потенциального возмущения. Следует учесть разную чувствительность к изменениям потенциала полного набора ортогональных состояний. Действительно, рассмотрим мнимый E -сдвиг основного состояния в разных потенциалах. Формы возмущений потенциалов для энергетических сдвигов $\Delta E = -i$ и $\Delta E = -1$ для основного состояния солитоноподобного потенциала показаны на рис. 17. Интересно, что, например, для осцилляторного потенциала картина будет очень похожей. Основные состояния наиболее чувствительны к возмущениям потенциала в середине, где распределение вероятности имеет максимум. Чтобы компенсировать влияние потенциальных ямок на остальной спектр, необходимо ввести дополнительные потенциальные холмики по обеим сторонам [15]. В частности, возмущенный солитоноподобный потенциал остается безотражательным для волн в непрерывном спектре, как и при

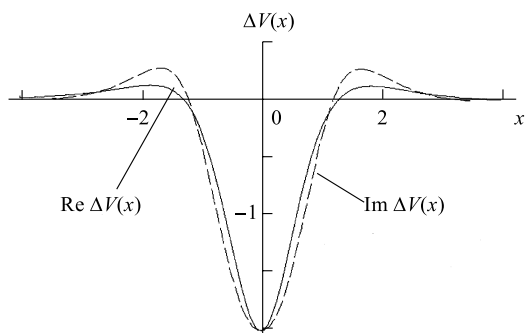


Рис. 17. Потенциальное возмущение (сплошная линия) $\text{Re } \Delta V(x)$, сдвигающее вниз уровень единственного связанного состояния $E = 0,5$ ($\Delta E = -1$) в солитоноподобной яме. Штриховая линия есть мнимая часть потенциального возмущения $\text{Im } \Delta V(x)$, сдвигающего уровень энергии связанного состояния ($\Delta E = -i$) в комплексную плоскость энергий (для той же исходной ямы). Обе кривые почти совпадают

реальных сдвигах. Однако потоки для падающей и уходящей волн становятся различными. Это дает возможность управлять поглощением волн.

Интересно, что изменение знака мнимого энергетического сдвига $\Delta E = i$ дает в результате лишь инверсию знака у $\text{Im } \Delta V(x)$. Но в случае действительных сдвигов $\Delta E = \pm 1$ вверх или вниз не существует такого точного совпадения модулей $|\Delta V(x)|$. Это происходит из-за того, что действительный сдвиг связанного состояния делает спектр плотнее или разрежает его соответственно. Кроме основного возмущения $\text{Im } \Delta V(x)$ появляется сравнительно малое возмущение $\text{Re } \Delta V(x)$ благодаря связи уравнений (45).

Формы возмущений $\Delta \text{Re } V(x)$ для мнимых «вверх-вниз» E -сдвигов 1-го и 2-го (3-го и 4-го и т. д.) состояний, как оказалось, имеют качественно схожую структуру (см. рис. 18). И это несмотря на большое различие между формами состояний. Можно дать объяснение этому любопытному факту на языке простых правил, которые мы нашли для сдвигов пространственной локализации связанных состояний [15, 16]. Именно потенциальные блоки барьер–ямка (ямка–барьер), по одному на каждую пучность волновой функции, сдвигают пространственную локализацию стоячей волны вправо (влево). Итак, разберем вопрос на примере первого и второго состояний. Можно считать, что каждое из этих двух первых состояний имеет по две «пучности». Действительно, можно представить себе левую и правую части волновой функции основного состояния (его половинки) как два горбика («пучности»). Формы возмущений $\Delta \text{Re } V(x)$ на рис. 18 состоят из двух блоков. Левый блок (барьер–ямка) сдвигает левую часть (левый горбик) основного состояния вправо, а правый блок (ямка–барьер) тянет правую часть (правый горбик) этого состояния влево. То же верно и для второго состояния. Это приводит к легкому сжатию модуля

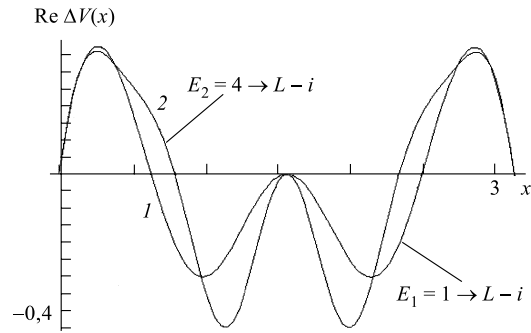


Рис. 18. Замечательное качественное сходство форм потенциальных возмущений $\Delta \operatorname{Re} V(x)$ для сдвигов первого и второго уровней в бесконечной прямоугольной яме: 1 — $E_1 = 1 \rightarrow 1 - i$; 2 — $E_2 = 4 \rightarrow 4 - i$. Это выглядит парадоксально, если учесть, что волновые функции сдвигаемых состояний совершенно разные (с узлом и без)

основного состояния к центру потенциальной ямы. Но это слабое уплотнение состояния сопровождается определенными изменениями в энергетическом спектре: спектр становится менее плотным (ср. с [2, 13]). Наоборот, расширение области волнового движения связано с процессами, когда спектр становится более плотным [10]. Таким образом, сжатие связанного состояния в пространстве согласуется с тем фактом, что мнимый E -сдвиг нижнего уровня разрезает спектр (поскольку эта спектральная точка просто «ушла» с действительной оси). Те же рассуждения верны и для мнимых E -сдвигов состояний других пар: 3-го и 4-го, 5-го и 6-го и т. д.

Для действительных энергетических сдвигов мы открыли явление расщепления состояний и расхождения друг от друга их частей при сближении их энергетических уровней (постепенное вырождение). Строгое вырождение приводит к эффективной «аннигиляции» состояний [10]. Мы нашли, что то же явление имеет место для двух состояний с близкими комплексными собственными значениями. Это показано на рис. 19 и 20, полученных с использованием одношагового преобразования SUSYQ (см. уравнения (36)–(38)).

Любопытно, что для исходной бесконечной прямоугольной ямы сильное потенциальное возмущение слегка изменяет распределение вероятности для сдвигаемого состояния (малая разница между *абсолютными* величинами исходной и преобразованной волновыми функциями). Это несмотря на тот факт, что действительная и мнимая части волновой функции резко изменяются. Для всех других связанных состояний модули собственных функций также незначительно меняются при преобразовании.

Рассмотрим теперь комплексные преобразования, сохраняющие все действительные собственные значения. Возьмем снова модель бесконечной прямоугольной ямы. Полный спектр физических состояний соответствует нуле-

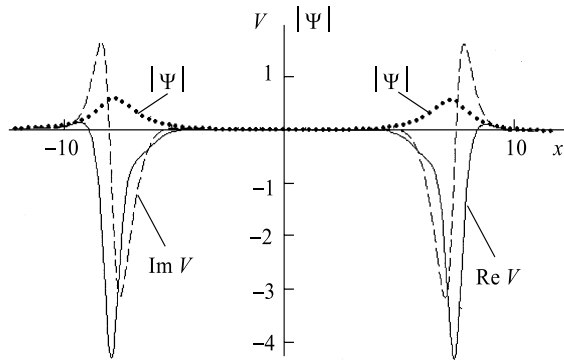


Рис. 19. Порождение комплексного собственного значения $E = -1 - i$ вблизи энергии связанного состояния $E = -1$ исходного солитоноподобного потенциала. Абсолютные значения волновых функций обоих состояний (точки) расщепляются на две части. Они в основном располагаются внутри глубоких разделенных ям преобразованного потенциала, показанного сплошной и штриховой линиями для действительной и мнимой частей соответственно. Это напоминает тенденцию к эффективной «аннигиляции» при постепенном вырождении энергетических уровней в случае действительных сдвигов энергии [10]. Любопытно, что абсолютные значения волновых функций почти полностью совпадают

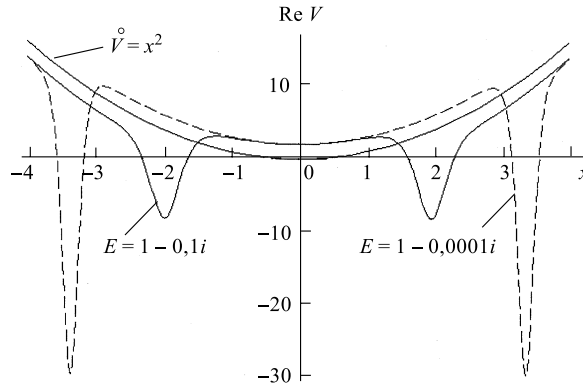


Рис. 20. Исходный осцилляторный потенциал $\hat{V}(x) = x^2$ и действительные части преобразованных потенциалов, отвечающих порожденным комплексным собственным значениям: $E = 1 - 0,1i$ (сплошная линия) или $E = 1 - 0,0001i$ (штриховая линия) вблизи энергии основного состояния $E = 1$ исходного потенциала. Волновые функции обоих состояний расщепляются подобно тому, как показано на рис. 19, и локализуются в узких потенциальных ямках. Расщепление усиливается при сближении порожденного состояния с основным при $E = 1$

вым граничным условиям ($\psi = 0$ на обеих стенках). Можно также рассмотреть вспомогательную «нефизическую» задачу на собственные значения со следующими граничными условиями: $\frac{d}{dx}\psi = 0$ и $\psi = 0$ на разных границах. Если теперь мы добавим мнимую часть к нефизическому собственному значению, используя метод SUSYQ, мы получим комплексный потенциал. Существует *теорема о двух действительных спектрах* (см. [3], с. 401; [6], с. 34 и ссылки там же), которая, возможно, имеет аналог для комплекснозначных собственных значений. Были предложены алгоритмы TRM [39], где роль *рычагов управления играют параметры двух спектров*, которые однозначно определяют потенциал, в отличие от *подхода ОЗ, где полным набором спектральных данных являются собственные значения и спектральные веса (приведенные ширины)*. Можно изменять одно собственное значение, не меняя всех остальных, в этом случае спектральные веса не сохраняются. Таким образом, можно получить действительный физический спектр, идентичный исходному, но с действительным потенциалом, трансформированным в комплексный. Проверялось условие биортогональности [38] комплексных собственных функций, которое играет роль обычной ортогональности для самосопряженных операторов. Существует также соответствующий аналог отношения полноты [34].

Чтобы иметь представление о возможных формах соответствующих преобразованных потенциалов и функций, поучительно рассмотреть, как особенно простой пример, половину потенциала, имеющего зеркальную симметрию относительно своей середины, расположенной в начале координат. В этом случае *физический спектр целого потенциала представляет сумму двух спектров для половины потенциала, соответствующих двум различным граничным условиям* в начале координат: $\frac{d}{dx}\psi|_{x=0} = 0$ или $\psi|_{x=0} = 0$. Тогда известные правила преобразований для сдвигов четных и нечетных энергетических уровней в полном потенциале одновременно верны для вариаций избранных уровней в одном из двух спектров половины ямы.

3.3. Преобразования состояний рассеяния. Выполним мнимый сдвиг ($\mathcal{E} > 0 \rightarrow \mathcal{E} + i\Gamma$) значения энергии в непрерывном спектре свободного движения с использованием двойного преобразования SUSYQ. Это приводит к квазипериодическому (периодическому на асимптотике) комплексному возмущению потенциала, как показано на рис. 21. Бесконечное число потенциальных барьеров и ям соответствует бесконечному числу пучностей исходного состояния $\psi(x) = \sin(kx)$. Появляется *квадратично интегрируемое* состояние распада при $E + i\Gamma$, показанное пунктирной линией. Объяснение этого факта — открытая проблема. Решения на действительной оси E становятся квазиблоховскими волнами. Интересно, что за исключением единственной точки $E = \mathcal{E}$ непрерывный спектр остается *без лаун*, где решения расхо-

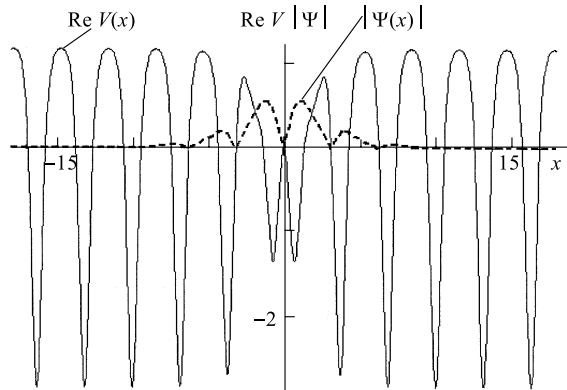


Рис. 21. Асимптотически квазипериодический потенциал (сплошная линия, показана только действительная часть) для сдвига исходной энергии в непрерывном спектре до $\mathcal{E} = 1 \rightarrow \bar{\mathcal{E}} = 1 - i$. Штриховой кривой показан модуль квадратично-интегрируемой волновой функции, получившейся в результате этого SUSYQ-преобразования

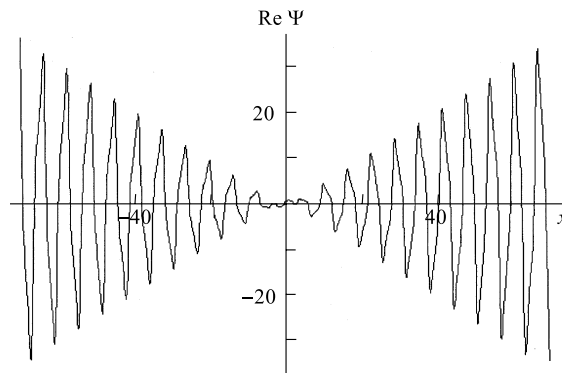


Рис. 22. Действительная часть волновой функции в выколотой точке $\mathcal{E} = 1$ непрерывного спектра имеет характерное поведение решения на границе спектральных зон с линейным ростом амплитуды колебаний. Мнимая часть имеет аналогичный вид. В этом особом предельном случае верхняя и нижняя границы двух разрешенных зон совпадают: ширина запрещенной зоны как бы сжата до нуля

дятся. Можно рассматривать эту точку как *сколлапсированную «запрещенную» зону нулевой ширины* — выколотую точку (ВТ). Это одновременно и точка слияния границ разрешенных зон. Решение в этой точке показано на рис. 22. При действительных значениях энергии, близких к $E = \mathcal{E}$, решения испытывают биения (рис. 23).

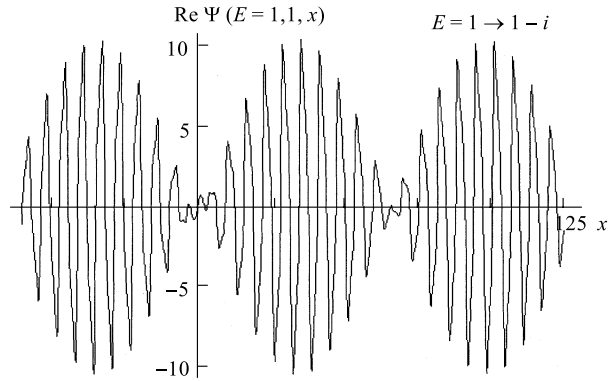


Рис. 23. Биения решения для потенциала, изображенного на рис. 21, при действительной энергии $\mathcal{E} + 1, 1$ вблизи выколотой точки $\mathcal{E} = 1$. Частота этих биений стремится к нулю при приближении энергии к выколотой точке \mathcal{E} (см. рис. 19)

Для сдвига $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - i\Gamma$, осуществленного с помощью подхода ОЗ, мы имеем другой результат. Появляется локализованный (асимптотически спадающий) комплексный потенциал. Волны при действительных энергиях ниже и выше ВТ не испытывают отражения, но имеют разные потоки по обеим сторонам потенциального возмущения. Параметр Γ может служить в качестве рычага управления поглощением волн.

Энергетическая зависимость $\Delta I(E) = I(x, E)|_{x \rightarrow \infty} - I(x, E)|_{x \rightarrow -\infty}$ (не-сохранение потока I) имеет резонансный характер. Положение пика резо-

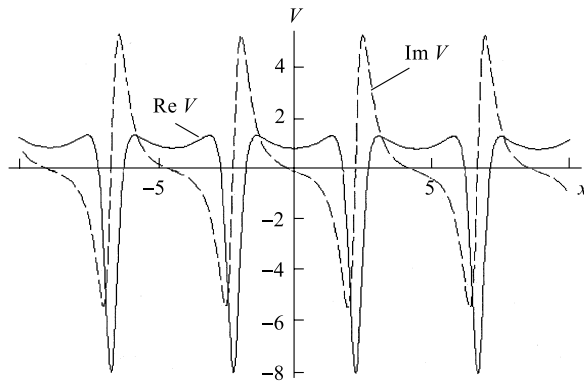


Рис. 24. Действительная (сплошная линия) и мнимая (штриховая линия) части периодического потенциала, полученного посредством одношагового SUSYQ-преобразования системы свободного движения в точке $\mathcal{E} = 0, 5$. Спектр этого потенциала не имеет лагун!

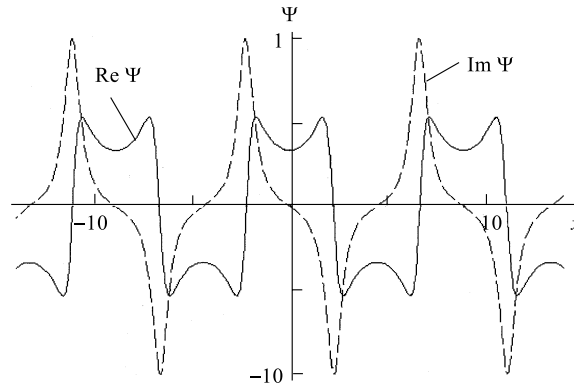


Рис. 25. Действительная (сплошная линия) и мнимая (штриховая линия) части периодической волновой функции при энергии $\mathcal{E} = 0,5$, отвечающей потенциалу, изображенному на рис. 24

нанса совпадает с действительной частью собственного значения квазисвязанного состояния $\tilde{\mathcal{E}}$, что напоминает обычные резонансы.

Представляется интересным рассмотреть возможность использования полных наборов собственных состояний, относящихся к неэрмитовым операторам для R -матричной дискретной параметризации данных рассеяния (открытая проблема).

Оказывается, что чисто периодические потенциалы можно создавать, применяя одношаговое преобразование SUSYQ исходной системы свободного движения квантовых волн (вся ось) (см. уравнения (36)–(38)). В качестве исходного решения при энергии факторизации $\mathcal{E} > 0$ мы берем $\psi_0(x, \mathcal{E}) = \exp(-i\sqrt{\mathcal{E}}x) + c \exp(i\sqrt{\mathcal{E}}x)$. Потенциал и волновая функция для $c = 2$ и $\mathcal{E} = 0,5$ показаны на рис. 24 и 25.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подход ОЗ дает нам удивительную свободу всевозможных преобразований квантовых систем без ограничений, накладываемых реальной природой. Такая гибкость теории — ее достоинство, поскольку позволяет охватить все мыслимые варианты, среди которых уже известные модели составляют лишь неизмеримо малую долю. Более того, все реальные объекты как бы объединяются непрерывными преобразованиями. От этого теория становится более общей и даже более простой. Мы можем быстрее, с меньшими затратами и надежнее предсказывать, какие взаимодействия необходимы для тех или иных наблюдаемых характеристик. Тем самым мы приобретаем такую интуицию, которая поможет и при анализе реальных систем. К тому же, если еще

нельзя построить все, что угодно, то можно приближать модели к исследуемым объектам («если гора не идет к Магомету...»). Здесь имеются широкие, пока мало использованные способы описания влияния многочастичных сред с помощью эффективных *нелокальных сил*, увеличивающих возможности ОЗ.

Гарантией успеха теории квантового дизайна служит хотя бы то, что уравнение Шредингера проверено практикой бесчисленных исследований (на протяжении вот уже 75 лет!).

Думается, что все это необходимо включать в образование (физиков, химиков, биологов), которое сейчас явно неудовлетворительно без ОЗ, без понятия «кирпичиков» элементарных квантовых преобразований (полного набора ТРМ) — этой новой «азбуки» квантовой механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захарьев Б. Н., Чабанов В. М. Качественная теория управления спектрами, рассеянием, распадами (Уроки квантовой интуиции, обзор III) // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25. С. 1561.
2. Захарьев Б. Н., Чабанов В. М. К качественной теории элементарных преобразований одно- и многоканальных квантовых систем в подходе обратной задачи (их конструирование с заданными спектральными параметрами) // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30. С. 277.
3. Chadan K., Sabatier P. *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*. 2nd edition. Heidelberg: Springer, 1989.
4. Cooper F., Khare A., Sukhatme U. *Supersymmetry and Quantum Mechanics* // Phys. Rep. 1995. V. 251. P. 267–385.
5. Poshel J., Trubowitz E. *Inverse Spectral Theory*. N. Y.: Academic, 1987.
6. Захарьев Б. Н., Сузько А. А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985;
Zakhariev B. N., Suzko A. A. *Direct and Inverse Problems*. Heidelberg: Springer, 1990.
7. Захарьев Б. Н., Костов Н., Плеханов Е. Б. Уроки квантовой интуиции // ЭЧАЯ. 1990. Т. 21. С. 914;
Zakhariev B. N., Kostov N., Plekhanov E. B. // Ann. Phys. 2000. V. 285. P. 1–24.
8. Захарьев Б. Н. Дискретная и непрерывная квантовая механика // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23. С. 1387.
9. Berezhovoj V. P., Pashnev A. I. Extended $N = 2$ Supersymmetric Quantum Mechanics and Isospectral Hamiltonians // Sov. J. Math. Phys. 1987. V. 70. P. 146; Z. Phys. C. 1991. V. 51. P. 525–529.
10. Chabanov V. M. et al. // Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. R3389.
11. Chabanov V. M., Zakhariev B. N., Sofianos S. A. Universal Elementary Constituents of Potential Transformations // Ann. Phys. (Lpz.). 1997. V. 6. P. 136.
12. Chabanov V. M., Zakhariev B. N. // Phys. Lett. A. 1999. V. 255. P. 123.
13. Zakhariev B. N., Mineev M. A. Separation of a Chosen Quantum State from an Almost Degenerate Multiplet as an Instructive Space-Localization Control // J. Mosc. Phys. Soc. 1997. V. 7. P. 227.
14. Sukumar C. V. Supersymmetry and Potentials with Bound States at Arbitrary Energies // J. Phys. A: Math Gen. 1987. V. 20. P. 2461–2481, and references therein.

15. *Захарьев Б. Н.* Уроки квантовой интуиции. Дубна: ОИЯИ, 1996;
Новая квантовая азбука (в картинках). Йошкар-Ола: Изд-во Удмуртск. гос. ун-та, 1997;
Шредингера оператора спектр // Физическая энциклопедия. М., 1998. Т. 5;
Новая ситуация в квантовой механике (о возможностях управления спектрами, рассеянием, распадами) // Соросовский образоват. журн. 1996. № 7;
Zakhariev B. N. JINR Rapid Commun. 1990. No. 6[45].
16. *Chabanov V. M., Zakhariev B. N.* New Situation in Quantum Mechanics (Wonderful Potentials from the Inverse Problem) // Inverse Problems (Topical review). 1997. V. 13. P. R47.
17. *Chabanov V. M., Zakhariev B. N.* // Ann. Phys. (N.Y.). 2000. V. 285. P. 1.
18. *Chabanov V. M., Zakhariev B. N.* Resonance Absolute Quantum Reflection at Selected Energies // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87, No. 16. P. 160408.
19. *Moses H. E., Tuan F. S.* // Nuovo Cim. 1959. V. 13. P. 197.
20. *Capasso F., Kiehl R.* // J. Appl. Phys. 1985. V. 58. P. 1366;
Randall J. N. // Nanotechnology. 1993. V. 4. P. 41;
Seabaugh A. C., Kao Y. C., Yuan H. T. // IEEE Electron Device Lett. 1992. V. 13. P. 479.
21. *Friedman J. R. et al.* Quantum Superposition of Distinct Macroscopic States // Nature. 2000. V. 40, No. 6791. P. 43;
Blatter G. // Nature. 2000. V. 406, No. 6791. P. 25.
22. *Rouse R., Han S., Lukens J. E.* Observation of Resonant Tunneling between Macroscopically Distinct Quantum Levels // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 1614–1617.
23. *Clarke J. et al.* Quantum Mechanics of a Macroscopic Variable: the Phase Difference of a Josephson Junction // Science. 1988. V. 239. P. 992–997.
24. *Friedman J. R. et al.* Macroscopic Measurement of Resonant Magnetization Tunneling in High Spin Molecules // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3830–3833.
25. *Wal C. et al.* Quantum Superposition of Macroscopic Persistent-Current States // Science. 2000. V. 290. P. 773.
26. *Brandt S., Dahmen H. D.* The Picture Book of Quantum Mechanics. N. Y.: John Wiley, 1985;
Quantum Mechanics on the Personal Computer. Heidelberg: Springer, 1989; Corrected 2nd edition. 1990.
27. *Альбеверио С. и др.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
28. *Фаддеев Л. Д.* Современные проблемы математики. М., 1974. Т. 3. С. 93–180.
29. *Pechenick K. R.* // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1513–1518; 1983. V. 24. P. 406–409; 1984. V. 25. P. 1900–1904; P. 1924–1929.
30. *Saito N., Kayanuma Y.* // J. Phys.: Condens. Matter. 1994. V. 6. P. 3759.
31. *Пеньков Ф. М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. С. 1973.
32. *Лейн А., Томас Р.* Теория ядерных реакций при низких энергиях. М.: Иностран. лит., 1960.
33. *Chabanov V. M., Zakhariev B. N.* Transparency of One-Channel and Multichannel Quantum Systems // Phys. Rev. A. 1994. V. 50, No. 8. P. 3948.
34. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы М.: Наука, 1969.
35. *Znojil M.* Quasi-Exactly Solvable Quartic Potentials with Centrifugal and Coulombic Terms // J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 4203–4211;
PT-Symmetrically Regularized Eckart, Pöschl–Teller and Hulthén Potentials // J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 4561–4572, and references therein.
Bender C. M. Complex Hamiltonians Having Real Spectra. Invited Talk. // Proc. of the 2nd Intern. Symp.: «Quantum Theory and Symmetries», Krakow, July 2001 / Ed. by E. Kapuscik and A. Horzel. Singapore, 2002 (to be published).

36. *Baye D., Sparenberg J.-M., Levai G.* Phase-Equivalent Complex Potentials // Nucl. Phys. A. 1996. V. 599. P. 435–456.
37. *Andrianov A. A. et al.* SUSY Quantum Mechanics with Complex Superpotentials and Real Energy // Int. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. P. 2675–2688.
38. *Chabanov V. M., Zakhariev B. N.* Unusual (Non-Gamow) Decay States // Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 1–11.
39. *Iliev I. D., Khristov E. Kh., Kirchev K. P.* Spectral Methods in Soliton Equations. Harlow: Longman Scientific, 1994.