ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2002. Т. 33. ВЫП. 6

УДК 538.941; 532.5

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА КВАНТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ С ТРИПЛЕТНЫМ СПАРИВАНИЕМ

М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Харьков, Украина

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2002. Т. 33. ВЫП. 6

УДК 538.941; 532.5

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА КВАНТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ С ТРИПЛЕТНЫМ СПАРИВАНИЕМ

М. Ю. Ковалевский, С. В. Пелетминский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,
Харьков, Украина

Проведена классификация сверхтекучих состояний ферми-жидкости с учетом возможных неоднородных равновесных структур на основе концепции квазисредних. Установлена связь условий ненарушенной и пространственной симметрии с геликоидальным упорядочением параметра порядка. Построена термодинамика и найдены плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах локально-равновесного термодинамического потенциала для ряда сверхтекучих конденсированных сред (квантовые жидкости со скалярным и тензорным параметром порядка, квантовые кристаллы). В рамках гипотезы сокращенного описания дан вывод уравнений идеальной гидродинамики для состояний типа A- и B-фазы сверхтекучего ^{3}He. Дополнительные параметры сокращенного описания введены в терминах оператора параметра порядка.

The classification of equilibrium states of Fermi superfluid is carried out in view of possible nonuniform equilibrium states on the basis of the concept quasiaverages. The connection of requirements of the residual and spatial symmetry with helicoidal structure of vectors of a spin and spatial anisotropy is established. The role of local phase transformations, spin rotation and spatial strains is shown at constructing of thermodynamics and determination of flux densities of additive integrals of motion in the terms of thermodynamic potential. Within the framework of a hypothesis of the reduced description the deduction of the equations of ideal hydrodynamics for A- and B-phases superfluid ^{3}He is given. The additional parameters of the reduced description are entered in the terms of an operator of an order parameter.

ВВЕДЕНИЕ

Явление сверхтекучести ^{4}He сыграло большую роль в развитии фундаментальных представлений о квантовых закономерностях макроскопических систем [1–5] и стимулировало поиск других сверхтекучих сред. Существенный прогресс физики низких температур последних десятилетий связан с открытием и исследованием сверхтекучести ^{3}He [6–12]. Так как ядерный спин ^{3}He равен $1/2$, а спин электронных оболочек равен нулю, то это конденсированное состояние представляет собой ферми-жидкость. В области низких температур наличие сколь угодно слабого притяжения между частицами приводит к неустойчивости нормальной фазы ферми-жидкости и образованию куперовских пар частиц, переводя ее в сверхтекучее состояние. С понижением температуры увеличивается вклад потенциальной энергии в энергию системы и возрастает влияние взаимодействий, имеющих меньшую симметрию по сравнению с основным гамильтонианом, на физические свойства системы. Вследствие сильного отталкивания атомов ^{3}He на малых расстояниях, спаривание, обусловленное дальнодействующим ван-дер-ваальсовским притяжением, приводит к образованию куперовских пар с отличным от нуля орбитальным моментом [13]. Так как взаимодействие на больших расстояниях слабое, то температура сверхтекучего перехода T_c очень мала.

Явление сверхтекучего перехода в ^{3}He было экспериментально открыто в 1972 г. [6]. Исследования показали, что в ^{3}He имеются несколько устойчивых сверхтекучих фаз, ранее предсказанных теоретически. К ним относится изотропное состояние, описанное Бальяном и Вертхаммером [14] и получившее название B-фазы. Устойчивость анизотропного состояния, соответствующего A-фазе и предсказанного Андерсеном и Морелом [15], объясняется влиянием спиновых флуктуаций, стабилизирующих такое состояние сверхтекучей жидкости. При включении магнитного поля наблюдается A_1-фаза [16]. Другие предсказанные состояния, такие как полярная фаза [17], а также α-, β-, δ-, ε-фазы [18] и $2D$-фаза [19], экспериментально не обнаружены. Связь коллективных мод и неприводимых представлений группы симметрии основного состояния изучена в [20].

Анализ возможных фазовых состояний и классификация трансляционно-инвариантных состояний в ^{3}He проводились в работах [18, 21–24]. Эта задача решалась на основе теории Гинзбурга–Ландау или теоретико-групповыми методами. Известно, что в некоторой области изменения термодинамических параметров однородное состояние равновесия теряет устойчивость и сверхтекучая фаза переходит в неоднородное состояние. В работах [25–28] рассмотрены неоднородные равновесные состояния в сверхтекучем ^{3}He. В рамках модельных выражений для свободной энергии выяснены условия устойчивости геликоидальных структур. Работы [29, 30] уточняют границы устойчивости таких состояний на более широкую область температур. Интерес к этому вопросу повысился в связи с его тесной связью с проблемой критических скоростей в сверхтекучем ^{3}He. Классификация равновесных неоднородных состояний проведена в [31].

Разнообразие типов спаривания и сверхтекучих фаз обнаруживает ядерная материя — система, состоящая из фермионов двух типов — нейтронов и протонов. Устойчивость сверхтекучих состояний фермионов в случае триплетного спаривания и ее связь с динамическими процессами нейтронных звезд изучена в работах [32–37]. Вопросам релятивизации уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости посвящены работы [38–42], в которых рассматривался случай синглетного спаривания. Спектры коллективных возбуждений в релятивистской теории сверхтекучести получены в [41, 43, 44]. Релятивистски-инвариантная теория сверхтекучей ферми-жидкости с триплетным спариванием для изотропной фазы рассмотрена в [45].

Исследования [46, 47] указывают на возможность реализации явления сверхтекучести в аэрогеле ^{3}He. В этом случае вероятно существование устойчивой полярной фазы [48]. Линеаризованные уравнения гидродинамики для этого состояния получены в [49].

При построении термодинамики и выводе уравнений гидродинамики квантовых жидкостей с триплетным спариванием в основном использовались феноменологические макроскопические подходы [7, 50–54]. Вывод динамических уравнений в микроскопическом рассмотрении осуществлялся исходя из кинетической теории [55, 56], а также в рамках статистического подхода для гидродинамического этапа эволюции [57, 58].

Для квантовых жидкостей также исследовалось влияние внешних переменных низкочастотных полей на их динамическое поведение. Эта задача тесно связана с нахождением гидродинамических асимптотик двухвременных функций Грина, которые для квантовых жидкостей с синглетным и триплетным спариванием изучались в работах [59–61].

В настоящей работе рассмотрена классификация сверхтекучих фаз ^{3}He с учетом возможных неоднородных равновесных состояний на основе концепции квазисредних [57, 58, 62, 63]. Найдены условия пространственной симметрии и общая структура соответствующего генератора. Дано обобщение условия ненарушенной симметрии на неоднородные равновесные состояния. Установлена связь этих условий симметрии с пространственной симметрией типа холестерической жидкокристаллической спирали и магнитной спирали. Предложена физическая интерпретация дополнительных термодинамических параметров, возникших в результате обобщения условий симметрии. Показано, что при некоторых ограничениях эта структура может быть представлена в виде произведения однородной и зависящей от пространственных координат неоднородной части параметра порядка. При этом задача классификации однородной части параметра порядка эффективно сводится к задаче трансляционно-инвариантного случая. Выяснена роль локальных фазовых преобразований, спиновых поворотов и пространственных деформаций при построении термодинамики и нахождении плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах локально-равновесного термодинамического потенциала. В рамках гипотезы сокращенного описания дан вывод уравнений идеальной гидродинамики для состояний типа A- и B-фазы сверхтекучего ^{3}He, не использующий кинетическую теорию, основанную на кинетическом уравнении. Дополнительные параметры сокращенного описания введены в терминах оператора параметра порядка и произвольного статистического оператора наподобие того, как это было сделано Боголюбовым для фазы сверхтекучего ^{4}He. Предлагаемый общий микроскопический подход позволяет рассмотреть помимо A- и B-фаз и другие термодинамические состояния, которым ранее уделялось недостаточно внимания.

1. НОРМАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Теория многочастичных систем, описывающая равновесные свойства нормальной ферми-жидкости, основывается на статистическом операторе Гиббса

$$\hat{w} = \exp{(\Omega - Y_a \hat{\gamma}_a)}. \tag{1.1}$$

Здесь $\hat{\gamma}_a \equiv (\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{P}}_k, \hat{N}, \hat{S}_\alpha$ — аддитивные интегралы движения: $\hat{\mathcal{H}}$ — гамильтониан, $\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$ — оператор импульса; $\hat{N}$ — оператор числа частиц; $\hat{S}_\alpha$ — оператор спина $(a \equiv 0, k, 4, \alpha)$. Термодинамический потенциал $\Omega = V\omega(Y)$ определяется из условия нормировки $\mathrm{Sp}\,\hat{w} = 1$. Набор термодинамических сил Y_a включает в себя $Y_0^{-1} \equiv T$ — температуру, $-Y_k/Y_0 \equiv v_k$ — скорость, $-Y_4/Y_0 \equiv \mu_k$ — химический потенциал, $-Y_\alpha/Y_0 \equiv h_\alpha$ — эффективное магнитное поле. Равновесные значения физических величин определяются равенством

$$\langle \hat{a}(x) \rangle \equiv \lim_{V \to \infty} \mathrm{Sp}\,\hat{w}\hat{a}(x).$$

Аддитивные интегралы движения, входящие в распределение Гиббса, приводят к определенной симметрии состояния равновесия. Свойства симметрии равновесного статистического оператора (1.1) имеют вид

$$\begin{gathered} [\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{\mathcal{H}}] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{N}\,] = 0, \\ [\hat{w}, \hat{\Sigma}_\alpha] = 0, \quad [\hat{w}, \hat{L}_k] = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

и отражают пространственно-временную трансляционную инвариантность и фазовую инвариантность. Условия симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах означают пренебрежение слабыми дипольными и спин-орбитальными взаимодействиями при характеристике состояния равновесия. Здесь $\hat{\Sigma}_\alpha$ и $\hat{L}_i$ — обобщенные операторы спинового и орбитального момента:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_\alpha &\equiv \hat{S}_\alpha + \hat{S}^Y_\alpha, \quad \hat{S}^Y_\alpha \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\beta \frac{\partial}{\partial Y_\gamma}, \\ \hat{L}^Y_i &\equiv \hat{\mathcal{L}}_i + \hat{\mathcal{L}}^Y_i, \quad \hat{\mathcal{L}}^Y_i \equiv -i\varepsilon_{ikl} Y_k \frac{\partial}{\partial Y_l}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

действующие в гильбертовом пространстве и в пространстве термодинамических функций. На векторы $Y_i(Y_\alpha)$ дифференциальные операторы действуют так: $i[\hat{\mathcal{L}}^Y_i, Y_j] = \varepsilon_{ikj} Y_k$, $i[\hat{\mathcal{L}}^Y_\alpha, Y_\rho] = \varepsilon_{\alpha\beta\rho} Y_\beta$. Соответствующие средние коммутаторов с операторами момента имеют вид $\mathrm{Sp}\,[\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i + \mathcal{L}^Y_i]\,\hat{b}(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{w}[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{b}(x)] - [\mathcal{L}^Y_i, \mathrm{Sp}\,\hat{w}\hat{b}(x)]$ для произвольных квазилокальных операторов $\hat{b}(x)$. Согласно определению (1.3) операторы $\hat{\Sigma}_\alpha$ и $\hat{L}_i$ удовлетворяют соотношениям

$$i[\hat{L}_i, \hat{L}_k] = -\varepsilon_{ikl}\hat{L}_l, \quad i[\hat{\Sigma}_\alpha, \hat{\Sigma}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma. \tag{1.4}$$

Полная группа симметрии нормального состояния равновесия ферми-жидкости имеет вид

$$G = [SO(3)]_\Sigma \times [SO(3)]_L \times [U(1)]_\varphi \times [T(3)] \times [T(1)]. \tag{1.5}$$

Здесь $[SO(3)]_\Sigma$, $[SO(3)]_L$ — группы симметрии относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах; $[T(3)]$, $[T(1)]$ — трансляционные группы в пространстве и времени; $[U(1)]_\varphi$ — группа фазовой симметрии. Каждый элемент группы представляет собой унитарный оператор $U \equiv \exp i\hat{G}g$ (g — действительные параметры преобразования), оставляющий инвариантным распределение Гиббса:

$$U\hat{w}U^+ = \hat{w}. \tag{1.6}$$

Операторы $G \equiv \{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \hat{\mathbf{L}}, \hat{N}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}, \hat{\mathcal{H}}\}$ являются генераторами этих преобразований. Обратим внимание на то, что свойство инвариантности (1.6) имеет место для произвольных параметров преобразования, сопряженных к интегралам движения в силу соотношений симметрии (1.2). Кроме того, средние вида $\mathrm{Sp}\,[\hat{w}, \hat{G}]\,\hat{b}(x)$ обращаются в нуль при произвольном квазилокальном операторе $\hat{b}(x)$. Это, в частности, справедливо для операторов $\hat{b}(x) \equiv \hat{\Delta}_a(x)$, имеющих физический смысл операторов параметра порядка и не коммутирующих с интегралами движения $\hat{G}$. Индекс a отражает тензорную размерность параметра порядка. Как будет видно ниже, средние $\mathrm{Sp}\,\hat{w}[\hat{G}, \hat{\Delta}_a(x)]$ линейны и однородны по операторам параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$, что приводит к обращению в нуль равновесных средних параметров порядка

$$\mathrm{Sp}\,\hat{w}\hat{\Delta}_a(x) = 0$$

в нормальном состоянии. Таким образом, равновесный статистический оператор (1.1) не описывает правильно равновесные состояния вырожденных конденсированных сред.

2. ВЫРОЖДЕНИЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ. КВАЗИСРЕДНИЕ

Теоретическим фундаментом статистической физики, описывающим равновесные состояния конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией, является концепция квазисредних Н. Н. Боголюбова [62]. Конструктивным моментом этой концепции является введение в равновесный статистический оператор бесконечно малого источника $\nu\hat{F}$, который уменьшает симметрию состояния статистического равновесия по сравнению с симметрией гамильтониана и позволяет обобщить распределение Гиббса на конденсированные среды в условиях спонтанного нарушения симметрии. Квазисреднее значение величины $a(x)$ в состоянии статистического равновесия с нарушенной симметрией определяется формулой

$$\langle \hat{a}(x) \rangle \equiv \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} \mathrm{Sp}\, \hat{w}_\nu \hat{a}(x), \tag{2.1}$$

где

$$\hat{w}_\nu \equiv \exp\left(\Omega_\nu - Y_a \hat{\gamma}_a - \nu \hat{F}\right). \tag{2.2}$$

Оператор $\hat{F}$ обладает симметрией исследуемой фазы конденсированной среды и снимает вырождение состояния равновесия. В соответствии с концепцией квазисредних выбираем источник $\hat{F}$, нарушающий симметрию состояния равновесия, в виде линейного функционала оператора параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$:

$$\hat{F} = \int d^3x (f_a(x,t) \hat{\Delta}_a(x) + \mathrm{h.\,c.}) = \hat{F}(t). \tag{2.3}$$

Здесь $f_a(x,t)$ — некоторая функция координат и времени, сопряженная оператору параметра порядка, которая задает его равновесные значения в смысле квазисредних $\Delta_a(x,t) = \langle \hat{\Delta}_a(x) \rangle$. Структура функций $f_a(x,t)$ определяется свойствами симметрии исследуемой фазы. Последнее обстоятельство дает возможность ввести в рамках микроскопической теории дополнительные термодинамические параметры в распределение Гиббса [41, 57]. Выбор параметра порядка в (2.3) связан с конкретной природой равновесных состояний вырожденных конденсированных сред. Зависимость $\Delta_a = \Delta_a(x,t)$ от координат и времени обусловлена тем, что введение источника $\hat{F}$ в общем случае нарушает инвариантность равновесного статистического оператора по отношению к трансляциям в пространстве и времени, то есть $[\hat{w}, \hat{\mathcal{H}}] \neq 0$, $[\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}] \neq 0$. Равновесный статистический оператор $\hat{w}(Y, \hat{F}(t)) \equiv \hat{w}(t)$ зависит, вообще говоря, от времени и удовлетворяет уравнению фон Неймана, вследствие чего

$$\mathrm{e}^{-i\hat{\mathcal{H}}\tau} \hat{w}(t)\, \mathrm{e}^{i\hat{\mathcal{H}}\tau} = \hat{w}(t+\tau) \tag{2.4}$$

(для нормальных систем оператор $\hat{w}$ не зависит от времени t).

Концепция квазисредних основывается на следующих предположениях:

— квазисреднее произвольного квазилокального оператора $\hat{a}(x)$ определяется формулой

$$\langle \hat{a}(x) \rangle \equiv \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} \mathrm{Sp}\, \hat{w}_\nu \hat{a}(x) < \infty, \tag{2.5}$$

и в общем случае зависит от структуры источника, нарушающего симметрию;

— для пары квазилокальных операторов $\hat{a}(x)$ и $\hat{b}(x')$ справедлив принцип пространственного ослабления корреляций:

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \operatorname{Sp}\hat{w}_\nu \hat{a}(x)\hat{b}(x') \xrightarrow{|x-x'|\to\infty} \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \operatorname{Sp}\hat{w}_\nu \hat{a}(x) \times \\ \times \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \operatorname{Sp}\hat{w}_\nu \hat{b}(x'); \quad (2.6)$$

— плотность термодинамического потенциала ω определяется соотношением

$$\omega = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \frac{\Omega_\nu}{V} < \infty, \quad (2.7)$$

и в общем случае зависит от структуры источника $\hat{F}$, нарушающего симметрию.

Описание конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией существенно опирается на представление о параметре порядка. Операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ на языке вторичного квантования строятся из полевых операторов рождения и уничтожения. Сформулируем трансформационные свойства операторов параметра порядка. Условие трансляционной инвариантности имеет вид

$$i[\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\Delta}_a(x)] = -\nabla_k \hat{\Delta}_a(x). \quad (2.8)$$

Генератором группы фазовых преобразований является оператор числа частиц $\hat{N}$. Операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуются согласно соотношениям

$$[\hat{N}, \hat{\Delta}(x)] = -g\hat{\Delta}_a(x). \quad (2.9)$$

Постоянные g зависят от тензорной размерности оператора параметра порядка.

При преобразованиях, связанных с группой внутренних симметрий с генераторами $\hat{S}_\alpha (\alpha = x, y, z)$, операторы $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуются по представлениям этой группы

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_{\alpha ab}\hat{\Delta}_b(x), \quad (2.10)$$

или в компактной записи

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}(x)] = -\hat{g}_\alpha \hat{\Delta}(x),$$

где $(\hat{g}_\alpha)_{ab} \equiv g_{\alpha ab}$ — некоторые постоянные. Генераторы группы внутренней симметрии $\hat{S}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_\gamma,$$

здесь антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ имеет смысл структурных постоянных. Из формул (2.10), используя тождество Якоби для операторов $\hat{T}_\alpha$ и $\hat{\Delta}(x)$, вытекает соотношение

$$[\hat{g}_\alpha, \hat{g}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{g}_\gamma. \tag{2.11}$$

При преобразованиях, связанных с группой пространственных поворотов с генераторами $\hat{\mathcal{L}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ в точке $x = 0$ преобразуются по представлениям этой группы

$$i\left[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\Delta}_a(0)\right] = -g_{iab}\hat{\Delta}_b(0).$$

Откуда, замечая, что $\left[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\mathcal{L}}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hat{\mathcal{L}}_k$, получим соотношения, аналогичные (2.11):

$$[\hat{g}_i, \hat{g}_j] = -\varepsilon_{ijk}\hat{g}_k. \tag{2.12}$$

Так как $\hat{\Delta}_a(x) = \mathrm{e}^{-i\hat{\mathcal{P}}x}\hat{\Delta}_a(0)\mathrm{e}^{i\hat{\mathcal{P}}x}$, $\mathrm{e}^{-i\hat{\mathcal{P}}x}\hat{\mathcal{L}}_i\mathrm{e}^{i\hat{\mathcal{P}}x} = \hat{\mathcal{L}}_i - \varepsilon_{ijk}x_j\hat{\mathcal{P}}_k$, то в силу (2.8) найдем

$$i\left[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\Delta}_a(x)\right] = -g_{iab}\hat{\Delta}_b(x) - \varepsilon_{ijk}x_k\nabla_j\hat{\Delta}_a(x). \tag{2.13}$$

Из феноменологической теории известно, что для адекватного описания термодинамики и неравновесных процессов в конденсированных средах с нарушенной симметрией, вообще говоря, необходимо ввести в теорию новые термодинамические параметры, не связанные с законами сохранения, а обусловленные физической природой термодинамической фазы. В случае нормальных конденсированных сред термодинамические параметры определяются только плотностями аддитивных интегралов движения.

Покажем, как формулируются свойства симметрии состояния равновесия и вводятся дополнительные термодинамические параметры для вырожденных конденсированных сред. Рассмотрим вначале трансляционно-инвариантные подгруппы ненарушенной симметрии H полной группы симметрии G. Трансляционная инвариантность означает, что равновесный статистический оператор удовлетворяет соотношению симметрии

$$\left[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k\right] = 0. \tag{2.14}$$

Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний в соответствии с [64] осуществим исходя из соотношения

$$\left[\hat{w}, \hat{T}\right] = 0, \tag{2.15}$$

где генератор ненарушенной симметрии $\hat{T}$ (генераторы подгруппы H) представляет собой линейную комбинацию интегралов движения

$$\hat{T} \equiv a_i \hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha \hat{S}_\alpha + c\hat{N} \equiv \hat{T}\,(\xi) \tag{2.16}$$

с некоторыми действительными параметрами $(a_i, b_\alpha, c \equiv \xi)$. Унитарные преобразования $U\,(\xi) = \exp i\hat{T}\,(\xi)$ образуют непрерывную подгруппу ненарушенной симметрии $U\,(\xi)\,U\,(\xi') = U\,(\xi''\,(\xi, \xi'))$ равновесного состояния. Из равенств

$$i\,\mathrm{Sp}\,\left[\hat{w}, \hat{T}\,(\xi)\right]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \quad i\,\mathrm{Sp}\,\left[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k\right]\hat{\Delta}_a(x) = 0,$$

учитывая алгебраические соотношения (2.8)–(2.10), (2.13) и определение (2.16), получаем уравнения

$$a_i g_{iab}\Delta_b + b_\alpha g_{\alpha ab}\Delta_b + ig\Delta_a = 0, \quad \nabla_k \Delta_a = 0. \tag{2.17}$$

Мы для простоты рассматриваем случай, когда векторы $Y_\alpha = Y_k = 0$. При этом в соответствии с (1.3)

$$T_{ab}\Delta_b = 0, \quad T_{ab} \equiv a_i g_{iab} + b_\alpha g_{\alpha ab} + igc\delta_{ab}. \tag{2.18}$$

Условие нетривиального решения $\Delta_a \neq 0$ системы линейных уравнений (2.18) приводит к равенству

$$\det |T_{ab}| = 0, \tag{2.19}$$

которое накладывает ограничения на допустимые значения параметров ξ, связанных с генератором ненарушенной симметрии. В разд. 3, 4 будут детально проанализированы возможные однородные состояния равновесия сверхтекучей жидкости со скалярным и тензорным параметрами порядка.

Рассмотрим теперь состояния равновесия, которые не обладают свойством трансляционной инвариантности (2.14). В сверхтекучей конденсированной среде в принципе могут существовать различные физические возможности нарушения такой инвариантности состояния равновесия. Это может произойти вследствие нарушения фазовой инвариантности (сверхтекучий импульс не равен нулю) [40, 57]. Возможны и другие механизмы нарушения трансляционной инвариантности. К ним относятся нарушения симметрии относительно поворотов спинов (вектор магнитной спирали отличен от нуля) [45, 57], нарушения симметрии относительно поворотов в конфигурационном пространстве (вектор холестерической спирали не равен нулю). Мы изучим все указанные механизмы возникновения пространственно-неоднородных структур и увидим, к каким следствиям это приводит в равновесной структуре параметра порядка. Полагаем, что пространственная симметрия такого рода состояний равновесия может быть задана соотношением

$$\left[\hat{w}, \hat{P}_k\right] = 0, \quad \hat{P}_k\left(\eta\right) \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k \hat{N} - q_{k\alpha}\hat{S}_\alpha - t_{kj}\hat{\mathcal{L}}_j, \tag{2.20}$$

здесь $\eta \equiv p_k, q_{k\alpha}, t_{kj}$ — некоторые действительные параметры. Генератор ненарушенной симметрии таких состояний теперь включает в себя оператор импульса

$$\hat{T} \equiv a_i \hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha \hat{S}_\alpha + c\hat{N} + d_i \hat{\mathcal{P}}_i, \qquad a_i, b_\alpha, c, d_i \equiv \xi. \tag{2.21}$$

Соотношения

$$i\,\mathrm{Sp}\,\left[\hat{w}, \hat{T}\left(\xi\right)\right]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \quad i\,\mathrm{Sp}\,\left[\hat{w}, \hat{P}_k\left(\eta\right)\right]\hat{\Delta}_a(x) = 0 \tag{2.22}$$

в соответствии с (2.20), (2.21) ведут к связям параметров, входящих в определение генератора ненарушенной и пространственной симметрии. Эти соотношения следует дополнить еще двумя условиями на параметры ненарушенной и пространственной симметрии, которые являются следствием тождеств Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{T}, \hat{P}_k$ и $\hat{w}, P_i, \hat{P}_k$:

$$\mathrm{Sp}\,\left[\hat{w}, \left[\hat{T}, \hat{P}_k\right]\right]\hat{\Delta}_a = 0, \quad \mathrm{Sp}\,\left[\hat{w}, \left[\hat{P}_i, \hat{P}_k\right]\right]\hat{\Delta}_a = 0. \tag{2.23}$$

Отметим, что $\hat{P}_k\left(\eta\right)$ не есть оператор трансляций в обычном смысле слова, так как, вообще говоря, $\left[\hat{P}_k, \hat{P}_i\right] \neq 0$. Ниже на примерах сверхтекучих конденсированных сред со скалярным и тензорным параметрами порядка будут детально проанализированы уравнения (2.22), (2.23). Отметим также, что эти же уравнения необходимы для решения задачи сосуществования ненулевых значений параметров порядка, например, при исследовании многощелевой сверхпроводимости [65].

3. РАВНОВЕСИЕ. СИНГЛЕТНОЕ СПАРИВАНИЕ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

Сверхтекучая ферми-жидкость с синглетным спариванием характеризуется скалярным параметром порядка

$$\hat{\Delta}(x) \equiv (i/2)\hat{\psi}(x)\sigma_2\hat{\psi}(x), \tag{3.1}$$

здесь $\hat{\psi}_\sigma(x)$ — фермиевский полевой оператор уничтожения частицы в точке x с проекцией спина σ и σ_2 (матрица Паули). Оператор параметра порядка удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \left[\hat{N}, \hat{\Delta}(x)\right] &= -2\hat{\Delta}(x), \qquad i\left[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}(x)\right] = 0, \\ i\left[\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\Delta}(x)\right] &= -\nabla_k \hat{\Delta}(x), \quad i\left[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\Delta}(x)\right] = -\varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l \hat{\Delta}(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для удобства мы рассмотрим конденсированную среду в системе покоя и положим эффективное магнитное поле равным нулю $Y_\alpha = Y_k = 0$. Оператор $\hat{F}$ в формуле (2.3) обладает симметрией исследуемой фазы конденсированной среды и снимает вырождение состояния равновесия

$$\hat{F} = \int d^3x \left(f(x,t)\hat{\Delta}(x) + \mathrm{h.\,c.}\right) = \hat{F}(t). \tag{3.3}$$

Здесь $f(x,t)$ — функция координат и времени, сопряженная оператору параметра порядка, которая задает его равновесные значения $\Delta(x,t) = \langle\hat{\Delta}(x)\rangle$.

Для трансляционно-инвариантных состояний равновесия $\left[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_k\right] = 0$ параметр порядка и функция f в силу (2.3) не зависят от координаты:

$$\Delta(x) = \operatorname{Sp}\hat{w}\hat{\Delta}(x) = \Delta\left(0, Y_0, Y_4\right), \quad f(x) = f(0). \tag{3.4}$$

Согласно (2.14), (2.15), (3.2), (3.3) найдем $c = 0$, так как $\Delta(x) \neq 0$. Генератор ненарушенной симметрии приобретает вид

$$\hat{T} \equiv a_i \hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha \hat{S}_\alpha. \tag{3.5}$$

Отсюда, ввиду произвольности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, получим свойства симметрии рассматриваемого состояния равновесия

$$\left[\hat{w}, \hat{S}_\alpha\right] = 0, \quad \left[\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i\right] = 0.$$

Параметр порядка для этого случая

$$\left\langle \hat{\Delta}(x) \right\rangle = \eta\left(Y_0, Y_4\right) \mathrm{e}^{2i\varphi}$$

характеризуется модулем η и сверхтекучей фазой φ. В силу алгебраических соотношений (3.2) фиксирован только параметр генератора ненарушенной симметрии c, а остальные параметры (a_i, b_α) остались произвольными, что находится в соответствии с характером нарушения симметрии рассмотренной конденсированной среды. Дальнейшая детализация свойств симметрии состояния равновесия возможна для конденсированных сред, в которых нарушены свойства инвариантности относительно поворотов в спиновом или конфигурационном пространствах. Проведение описанной процедуры классификации с расширенным набором параметров порядка позволяет, в принципе, установить возможные состояния равновесия, различающиеся своими анизотропными свойствами, а также исследовать вопрос о сосуществовании нескольких не равных нулю параметров порядка. Однако мы здесь на этом останавливаться не будем.

Рассмотрим теперь неоднородные состояния равновесия, которые заданы генератором пространственной симметрии (2.20) и генератором ненарушенной симметрии (2.21). Согласно (2.20), (3.2) приходим к соотношениям, которые связывают параметры генератора пространственной симметрии

$$t_{kj}\varepsilon_{juv}p_v = 0, \quad \nabla_k\Delta(x) = 2ip_k\Delta(x). \tag{3.6}$$

Первое соотношение в (3.6) является следствием требования отсутствия линейного по координате слагаемого в условии (2.22) и второго соотношения (3.6). Соотношения (2.22) с учетом (3.2), (3.6) ведут к уравнению связи параметров генератора ненарушенной симметрии

$$a_i\varepsilon_{ikl}x_k 2ip_l\Delta(x) + 2ic\Delta(x) + d_i 2ip_i\Delta(x) = 0.$$

Откуда получим соотношения

$$a_i\varepsilon_{ikl}p_l = 0, \quad c + \mathbf{dp} = 0, \tag{3.7}$$

совместные с ненулевым равновесным значением параметра порядка $\Delta(x)$.

Дополнительные связи параметров, введенных соотношениями (2.20), (2.21), установим, используя тождество Якоби. Для операторов $\hat{w}, \hat{T}, \hat{\mathbf{P}}$, принимая во внимание (2.20), (2.21), приходим к равенству $\mathrm{Sp}\left[\hat{w}, \left[\hat{T}, \hat{P}_k\right]\right]\hat{\Delta}(x) = 0$. Откуда, учитывая (3.2), имеем

$$p_ip_lt_{kl} - p^2t_{ik} = 0. \tag{3.8}$$

Используя тождество Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{P}_i, \hat{P}_k$, получаем соотношение $\mathrm{Sp}\left[\hat{w}, \left[\hat{P}_i, \hat{P}_k\right]\right]\hat{\Delta}(x) = 0$. Отсюда следует равенство

$$(t_{ij}t_{kl} - t_{il}t_{kj})\, p_l = 0. \tag{3.9}$$

Величину t_{kj} ищем в виде $t_{kj} = t\delta_{kj} + t_i\varepsilon_{ikj} + t^s_{kj}$, где t^s_{kj} — симметричный и бесшпуровый тензор. Умножив (3.8) на δ_{ik}, найдем $t = l_il_jt^s_{ij}/2$, где $\mathbf{l} \equiv \mathbf{p}/p$. Умножая далее (3.8) на $\varepsilon_{ikj}l_j$, видим, что $\mathbf{t}\perp\mathbf{l}$. Умножая первое соотношение в (3.6) на ε_{kus}, получаем $t_i = l_i\,(\mathbf{lt})$, поэтому $\mathbf{t} = 0$. Параметризуем симметричную и бесшпуровую матрицу t^s_{ik} соотношением

$$t^s_{ik} = An_in_k + Bm_im_k - (A+B)\,\delta_{ik}/3, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ — единичные и взаимно ортогональные векторы. Используя это представление и соотношение (3.6), легко понять, что $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$. Кроме того, в силу (3.8), (3.10) нетрудно показать, что $A = B$ и, следовательно, $t = -A/3$. Таким образом, матрица t_{ik} имеет вид

$$t_{ik} = Al_i l_k. \tag{3.11}$$

Формулы (3.6)–(3.8), (3.11) устанавливают допустимую структуру генераторов ненарушенной и пространственной симметрии квантовой жидкости с синглетным спариванием

$$\begin{aligned} \hat{T} &\equiv al_i\hat{\mathcal{L}}_i + b_\alpha\hat{S}_\alpha + d_i\left(\hat{\mathcal{P}}_i - pl_i\hat{N}\right), \\ \hat{P}_k &\equiv \hat{\mathcal{P}}_k - pl_k\hat{N} - q_{k\alpha}\hat{S}_\alpha - Al_k l_j\hat{\mathcal{L}}_j. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Видим, что ввиду оставшейся произвольности параметров генераторов ненарушенной и пространственной симметрии свойства симметрии состояния равновесия для рассмотренного случая сверхтекучей жидкости приобретают вид

$$\left[\hat{w}, \hat{P}_k\right] = 0, \qquad \hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k\hat{N}, \tag{3.13}$$

$$\left[\hat{w}, \hat{S}_\alpha\right] = 0, \qquad \left[\hat{w}, p_i\hat{\mathcal{L}}_i\right] = 0. \tag{3.14}$$

В соответствии с идеей бозе-конденсации термодинамический параметр p_k имеет смысл сверхтекучего импульса (импульса конденсатных частиц). Условие пространственной симметрии (3.13) означает, что макроскопически большое число частиц может находиться в состоянии с импульсом $\mathbf{p}$ (образует конденсат).

Заметим далее, что $\left[\hat{w}_\nu, Y_0\hat{\mathcal{H}} + Y_4\hat{N} + \nu\hat{F}\right] = 0$. Так как в силу канонических перестановочных соотношений оператор $\left[\hat{F}, \hat{a}(x)\right]$ также является квазилокальным, а среднее квазилокального оператора предполагается конечным, то $\lim\limits_{\nu\to 0}\lim\limits_{V\to\infty} \nu \operatorname{Sp}\hat{w}_\nu\left[\hat{F}, \hat{a}(x)\right] = 0$. Таким образом, приходим к условию стационарности

$$\left[\hat{w}_\nu, \hat{H}\right] = 0, \quad \hat{H} \equiv \hat{\mathcal{H}} + p_0\hat{N}, \quad p_0 \equiv Y_4/Y_0. \tag{3.15}$$

Здесь в качестве генераторов унитарных преобразований следует понимать операторы, определенные соотношениями (3.13), (3.15). Статистический оператор $\hat{w}$ удовлетворяет уравнению фон Неймана (2.4). Используя соотношение стационарности (3.15), получим

$$\hat{w}\,(t+\tau) = \mathrm{e}^{ip_0\hat{N}\tau}\hat{w}\,(t)\,\mathrm{e}^{-ip_0\hat{N}\tau}. \tag{3.16}$$

Условия пространственной однородности (3.13) и стационарности (3.15) приводят к зависимости функции $f(x,t)$ от координаты и времени

$$f(x,t) = \exp(-2i)\,\varphi(x,t), \quad \varphi(x,t) = \mathbf{px} - p_0 t + \varphi(0,0)\,. \tag{3.17}$$

Явный вид функции $f(x,t)$ согласуется с условием пространственной и спиновой изотропии (3.14). Соотношения (3.13), (3.17) позволяют также найти зависимость от координаты и времени равновесного значения параметра порядка

$$\Delta(x,t) = \mathrm{Sp}\,\hat{w}(t)\hat{\Delta}(x) = \eta(Y,\mathbf{p}) \exp 2i\varphi(x,t)\,. \tag{3.18}$$

Подгруппа ненарушенной симметрии сверхтекучего состояния ферми-жидкости с синглетным спариванием имеет вид

$$H = [SO(3)]_S \times [SO(3)]_{\mathcal{L}} \times [T(3)] \times [T(1)] \subset G. \tag{3.19}$$

В заключение раздела рассмотрим случай, когда векторные термодинамические силы в распределении Гиббса не равны нулю: $Y_k \neq 0, Y_\alpha \neq 0$ и свойство пространственной симметрии (3.13) остается в силе. Проведем те же рассуждения, что и при выводе соотношения (3.15), тогда условие стационарности в рассматриваемом случае приобретет вид

$$\begin{gathered}\left[\hat{w}_\nu, \hat{H}\right] = 0, \quad \hat{H} \equiv \hat{\mathcal{H}} + p_0\hat{N} + p_{0\alpha}\hat{S}_\alpha = \hat{H}(Y,\mathbf{p})\,,\\ p_0 \equiv (Y_4 + \mathbf{Yp})/Y_0, \quad p_{0\alpha} \equiv Y_\alpha/Y_0.\end{gathered} \tag{3.20}$$

Свойства симметрии равновесного статистического оператора относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах в соответствии с (1.3) представляются в виде

$$\begin{gathered}\left[\hat{w}, \hat{\Sigma}_\alpha\right] = 0, \quad \hat{\Sigma}_\alpha = \hat{S}_\alpha + S^Y_\alpha = \hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{Y})\,,\\ \left[\hat{w}, \hat{L}_i\right] = 0, \quad \hat{L}_i \equiv \hat{\mathcal{L}}_i + \hat{\mathcal{L}}^Y_i + \hat{\mathcal{L}}^p_i = \hat{L}_i(\mathbf{Y},\mathbf{p})\,.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Нетрудно показать, что для набора операторов $\hat{H}, \hat{P}_k, \hat{\Sigma}_\alpha, \hat{L}_i$, с учетом формул (1.3), (3.20), (3.21), справедливы алгебраические соотношения

$$\begin{gathered}\left[\hat{H}, \hat{L}_i\right] = 0,\ \left[\hat{H}, \hat{P}_i\right] = 0,\ \left[\hat{H}, \hat{\Sigma}_\alpha\right] = 0,\\ i\left[\hat{L}_i, \hat{P}_k\right] = -\varepsilon_{ikl}\hat{P}_l,\ i\left[\hat{L}_i, \hat{L}_k\right] = -\varepsilon_{ikl}\hat{L}_l,\ i\left[\hat{\Sigma}_\alpha, \hat{\Sigma}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Остальные квантовые скобки равны нулю. Генератор ненарушенной симметрии в терминах операторов $\hat{N}, \hat{P}_k, \hat{\Sigma}_\alpha, \hat{L}_i$ определим равенством

$$\hat{T} \equiv a_i\hat{L}_i + b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha + c\hat{N} + d_i\hat{P}_i \equiv \hat{T}(\xi, Y, \mathbf{p})\,.$$

Этот оператор действует как в пространстве вторичного квантования, так и в пространстве термодинамических параметров. Анализ допустимой структуры генератора ненарушенной симметрии для пространственной симметрии (3.13) приводит к свойствам симметрии состояния равновесия в рассматриваемом случае $\left[\hat{w}, \hat{\Sigma}_\alpha\right] = 0$, $\left[\hat{w}, p_i \hat{L}_i\right] = 0$, причем $\underline{c} \equiv c + \mathbf{dp} = 0$. Пространственно-временная структура параметра порядка в состоянии равновесия по-прежнему имеет вид (3.18), (3.17), где в качестве параметра p_0 теперь следует понимать величину, определенную равенством (3.20). Подгруппа ненарушенной симметрии сверхтекучего состояния ферми-жидкости с синглетным спариванием имеет вид (3.19), генераторы заданы равенствами (3.13), (3.20), (3.21).

4. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СВЕРХТЕКУЧЕГО $^3\mathrm{He}$

Параметр порядка сверхтекучей жидкости с триплетным спариванием содержит спиновый индекс $\alpha = 1, 2, 3$, соответствующий спиновому моменту количества движения $s = 1$, и векторный индекс $k = 1, 2, 3$, соответствующий, в силу принципа Паули, орбитальному моменту количества движения $l = 1$. Кроме того, триплетный оператор параметра порядка должен быть комплексным. Этот факт отражает то обстоятельство, что в рассматриваемом случае теряется симметрия относительно фазовых преобразований благодаря образованию куперовских пар. В качестве оператора $\hat{\Delta}_{\alpha k}(x)$ удобно выбрать оператор [57]

$$\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) \equiv \hat{\psi}(x)\sigma_2\sigma_\alpha\nabla_k\hat{\psi}(x) - \nabla_k\hat{\psi}(x)\sigma_2\sigma_\alpha\hat{\psi}(x). \tag{4.1}$$

Здесь σ_α — матрицы Паули. Матрицы $(\sigma_2\sigma_\alpha)_{\mu\nu} = (\sigma_2\sigma_\alpha)_{\nu\mu}$ симметричны по индексам μ и ν. В соответствии с этим определением и каноническими перестановочными соотношениями для ферми-операторов видим, что справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&i\left[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_{\beta i}(x)\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Delta}_{\gamma i}(x), \quad \left[\hat{N}, \hat{\Delta}_{\beta i}(x)\right] = -2\hat{\Delta}_{\beta i}(x),\\
&i\left[\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\Delta}_{\alpha i}(x)\right] = -\nabla_k\hat{\Delta}_{\alpha i}(x),\\
&i\left[\hat{\mathcal{L}}_k, \hat{\Delta}_{\alpha i}(x)\right] = -\varepsilon_{kjl}x_j\nabla_l\hat{\Delta}_{\alpha i}(x) - \varepsilon_{kil}\hat{\Delta}_{\alpha l}(x).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Следуя концепции квазисредних, равновесный статистический оператор рассматриваемой ферми-жидкости можно определить равенством (3.2). Оператор, нарушающий симметрию состояния равновесия, представляет собой линейный функционал оператора параметра порядка

$$\hat{F} = \int d^3x \left(\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) f_{k\alpha}(x,t) + \mathrm{h.\,c.}\right). \tag{4.3}$$

Квазисреднее значение параметра порядка является функцией термодинамических параметров и функционалом величины $f_{k\alpha}(x,t)$:

$$\Delta_{\alpha k}(x,t) = \mathrm{Sp}\,\hat{w}(t)\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) = \Delta_{\alpha k}\left(Y, f\left(x,t\right)\right). \tag{4.4}$$

В случае обращения в нуль термодинамических сил $Y_i = 0, Y_\alpha = 0$, сопряженных к аддитивным интегралам движения $\hat{\mathcal{P}}_i, \hat{S}_\alpha$, свойства ненарушенной симметрии трансляционно-инвариантного $\left([\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}_i] = 0\right)$ статистического оператора Гиббса и источника $\hat{F}$ совпадают:

$$\left[\hat{w}, \hat{T}\right] = 0, \quad \left[\hat{F}, \hat{T}\right] = 0. \tag{4.5}$$

В силу алгебры (4.2) и соотношений (2.14), (2.15) получим равенство, определяющее равновесную структуру параметра порядка:

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i} + 2ic\Delta_{\beta i} = 0. \tag{4.6}$$

Выясним, при каких условиях возможны ненулевые значения параметра порядка в состоянии равновесия. Рассмотрим вначале подгруппу ненарушенной симметрии, генератором которой является оператор вида $\hat{T} \equiv a_i \hat{\mathcal{L}}_i + c\hat{N}$, $b = 0$. Не ограничивая общности рассмотрения, полагаем $a_i^2 = 1, a_i = l_i$. Из условия симметрии (4.6) найдем $\left(a_i \varepsilon_{ikj} + 2ic\delta_{kj}\right)\Delta_{\beta j} = 0$. Ненулевое решение для параметра порядка обеспечивается обращением в нуль детерминанта

$$\det\left|a_i \varepsilon_{ikj} + 2ic\delta_{kj}\right| = 2ic\left(a^2 - 4c^2\right) \equiv F_3\left(\mathbf{a}, c\right) = 2ic\left(1 - 4c^2\right) = 0. \tag{4.7}$$

Решения этого уравнения $c = 0, \pm 1/2$ приводят к оператору $\hat{T}$ вида [57]

$$\hat{T} \equiv l_i \hat{\mathcal{L}}_i - \frac{m_l}{2}\hat{N}, \quad m_l = 0, \pm 1. \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь подгруппу ненарушенной симметрии, генератором которой является оператор вида $\hat{T} \equiv b_\alpha \hat{S}_\alpha + c\hat{N}$, $a = 0$. Так же, как и в предыдущем случае, полагаем $b_\alpha^2 = 1, b_\alpha = d_\alpha$. В соответствии с условием (4.6) и алгебраическими соотношениями (4.2) получим равенство $\left(b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + 2ic\delta_{\beta\gamma}\right)\Delta_{\gamma j} = 0$, отсюда найдем значение детерминанта

$$\det\left|b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + 2ic\delta_{\beta\gamma}\right| = 2ic\left(b^2 - 4c^2\right) \equiv F_3\left(\mathbf{b}, c\right) = 2ic\left(1 - 4c^2\right).$$

Из условия обращения этого детерминанта в нуль получим значения величины $c = 0, \pm 1/2$, и, следовательно, в этом случае оператор $\hat{T}$ имеет вид [57]

$$\hat{T} \equiv d_\alpha \hat{S}_\alpha - \frac{m_s}{2}\hat{N}, \quad m_s = 0, \pm 1. \tag{4.9}$$

Разъясним физический смысл условий ненарушенной симметрии, генерируемых операторами (4.8), (4.9). Для этого введем «волновую функцию» куперовской пары частиц системы:

$$\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) = \operatorname{Sp} \hat{w}\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\,\hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2)\,. \tag{4.10}$$

В силу условий ненарушенной симметрии (4.5) имеем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Sp}\left[\hat{w}, \mathbf{l}\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} - \frac{m_l}{2}\hat{N}\right]\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\,\hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) = 0,\\ &\operatorname{Sp}\left[\hat{w}, \mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{m_s}{2}\hat{N}\right]\hat{\psi}_{\alpha_1}(x_1)\,\hat{\psi}_{\alpha_2}(x_2) = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Так как

$$\left[\hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\psi}_\alpha(x)\right] = -i\varepsilon_{ikl}x_k\nabla_l\hat{\psi}_\alpha(x), \quad \left[\hat{S}_i, \hat{\psi}_\alpha(x)\right] = -\left(\sigma_i\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(x)/2,$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{l}\left(\hat{\mathbf{l}}^{(1)} + \hat{\mathbf{l}}^{(2)}\right)\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) &= m_l\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2)\,,\\ \mathbf{d}\left(\hat{\mathbf{s}}^{(1)} + \hat{\mathbf{s}}^{(2)}\right)\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) &= m_s\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2)\,, \end{aligned}$$

где $\hat{l}_i^{(a)} = -i\varepsilon_{ikl}x_k^{(a)}\nabla_l^{(a)}, s_i^{(a)}\,(a = 1, 2)$ — операторы момента количества движения и спина, действующие на первый и второй аргументы «волновой функции» соответственно. Состояние статистического равновесия, для которого выполняются соотношения (4.11), соответствует состоянию, в котором проекция на направление $\mathbf{l}$ орбитального момента количества движения куперовской пары равна m_l, проекция спина куперовской пары на направление $\mathbf{d}$ равна m_s. Выбор оператора параметра порядка в виде вектора по спиновому и орбитальному индексам (4.1) соответствует тому, что спин и момент количества движения куперовской пары предполагаются равными единице. Из соотношений (4.11) следует, что величина $\Delta_{\alpha k}$, определяющая источник $\hat{F}$, дается формулой

$$\Delta_{\alpha k} = d_\alpha(m_s)\xi_k(m_l), \tag{4.12}$$

где

$$d_\alpha(m_s) = \begin{cases} d_\alpha^+, m_s = -1\\ d_\alpha^-, m_s = 1\\ d_\alpha, m_s = 0 \end{cases}, \quad l_k(m_l) = \begin{cases} l_k^+, m_l = -1\\ l_k^-, m_l = 1\\ l_k, m_l = 0 \end{cases}, \tag{4.13}$$

здесь $\mathbf{d}^\pm = (\mathbf{e} \pm i\mathbf{f})/\sqrt{2}$, $\mathbf{l}^\pm = (\mathbf{m} \pm i\mathbf{n})/\sqrt{2}$ и $\mathbf{e}, \mathbf{f}\,(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ — единичные вещественные взаимно ортогональные векторы, ортогональные вектору $\mathbf{d}\,(\mathbf{l})$.

Равновесная структура параметров порядка ^{3}He для различных фазовых состояний может быть представлена в едином виде:

$$\Delta_{\alpha k} = \sum_{m_s m_l} a_{m_s m_l} d_\alpha\,(m_s)\, l_k\,(m_l).$$

Свойства симметрии состояния равновесия приводят к определенным связям амплитуд параметра порядка $a_{m_s m_l}$. Сверхтекучие состояния, генераторы ненарушенной симметрии которых имеют вид (4.8), (4.9), получили название инертных фаз [18]. В частности, для A-фазы квантовые числа куперовских пар принимают значения $m_l = \pm 1, m_s = 0$ [15]. Параметр порядка в равновесии имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = a_{0\mp} d_\alpha l_k^{\mp}. \tag{4.14}$$

Полярной фазе отвечает состояние с квантовыми числами $m_l = 0, m_s = 0$ [17]. Параметр порядка в этом случае принимает форму

$$\Delta_{\alpha k} = a_{00} d_\alpha l_k. \tag{4.15}$$

Значения квантовых чисел $m_l = 0, m_s = \pm 1$ соответствуют β-фазе [18]. Для этого состояния находим параметр порядка

$$\Delta_{\alpha k} = a_{\mp 0} d_\alpha^{\mp} l_k. \tag{4.16}$$

Случай $m_l = \pm 1, m_s = \pm 1$ соответствует A_1-фазе [16]. Параметр порядка в равновесии имеет вид

$$\Delta_{\alpha k} = a_{\mp\mp} d_\alpha^{\mp} l_k^{\mp}. \tag{4.17}$$

Равновесная структура параметров порядка ^{3}He (4.14)–(4.17) дает четыре анизотропных фазовых состояния, каждое из которых характеризуется одной независимой амплитудой.

Для множества возможных анизотропных состояний сверхтекучего ^{3}He не обязательно одновременное выполнение соотношений (4.11) с генераторами (4.8), (4.9). Еще четыре анизотропных состояния равновесия возникают в случаях, когда имеет место условие ненарушенной симметрии только с одним из этих генераторов. Если справедливо соотношение (3.9) с генератором (4.8), то при значении квантового числа $m_l = 0$ приходим к состоянию с параметром порядка [24]

$$\Delta_{\alpha k} = V_{\alpha 0} l_k, \tag{4.18}$$

где его спиновая составляющая $V_{\alpha 0} = Ae_\alpha + Bf_\alpha + Cd_\alpha \equiv \sum\limits_{m_s} a_{m_s 0} d_\alpha\,(m_s)$ представляет собой произвольный комплексный вектор. Для значения $m_l =$

± 1 параметр порядка в соответствии с (3.9) имеет вид [24]

$$\Delta_{\alpha k} = V_{\alpha \mp} l_k^{\mp}. \tag{4.19}$$

Здесь $V_{\alpha\mp} = A_{\mp} e_\alpha + B_{\mp} f_\alpha + C_{\mp} d_\alpha \equiv \sum\limits_{m_s} a_{m_s \mp} d_\alpha (m_s)$ — спиновая структура параметра порядка. Соотношение ненарушенной симметрии (3.9) с генератором (4.9) при значении $m_s = 0$ приводит к состоянию равновесия с параметром порядка [24]

$$\Delta_{\alpha k} = d_\alpha \Psi_{0k}, \tag{4.20}$$

где его пространственная часть $\Psi_{0k} = Am_k + Bn_k + Cl_k \equiv \sum\limits_{m_l} a_{0m_l} l_k (m_l)$ — произвольный комплексный вектор. Аналогично для значения $m_s = \pm 1$ параметр порядка в равновесии имеет вид [24]

$$\Delta_{\alpha k} = d_\alpha^{\mp} \Psi_{\mp k}, \tag{4.21}$$

где $\Psi_{\mp k} = A_{\mp} m_k + B_{\mp} n_k + C_{\mp} l_k \equiv \sum\limits_{m_l} a_{\mp m_l} l_k (m_l)$ — соответствующая пространственная структура параметра порядка. Представленные четыре анизотропных состояния (4.18)–(4.21), по сравнению с состояниями (4.14)–(4.17), обладают меньшей ненарушенной симметрией и поэтому содержат бо́льший произвол в структуре параметра порядка. Каждое из этих состояний характеризуется тремя независимыми амплитудами.

Рассмотрим теперь генератор ненарушенной симметрии (2.16) и найдем оставшиеся анизотропные состояния. Для этого выпишем соответствующий детерминант матрицы размером 9×9:

$$\det \left| a_i \varepsilon_{ikj} \delta_{\gamma\beta} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{kj} + 2ic\delta_{kj}\delta_{\beta\gamma} \right| = F_9 (\mathbf{a}, \mathbf{b}, c).$$

Не нарушая общности рассмотрения и в силу инвариантности детерминанта относительно поворотов в спиновом и конфигурационном пространствах, систему координат выбираем так, чтобы в спиновом пространстве $\mathbf{b} \equiv (0, 0, b)$ и в координатном $\mathbf{a} \equiv (0, 0, a)$. При этом вычисление детерминанта матрицы $F_9 (a, b, c)$ сводится к вычислению определителей третьего и шестого порядка:

$$F_9 (a, b, c) = F_3 (a, c) F_6 (a, b, c). \tag{4.22}$$

Здесь матрица $\hat{F}_6 (a, b, c)$ имеет блочный вид

$$\hat{F}_6 (a, b, c) = \begin{vmatrix} \hat{F}_3 (a, c) & b\hat{I}_3 \\ -b\hat{I}_3 & \hat{F}_3 (a, c) \end{vmatrix},$$

где $\hat{I}_3$ — единичная матрица размером 3×3, и матрица $\hat{F}_3\,(a, c)$ определяется равенством (4.7). Учитывая (4.7), видим, что справедливо соотношение

$$F_6\,(a, b, c) = F_3\,(a, c + b/2)\, F_3\,(a, c - b/2)\,. \qquad (4.23)$$

Согласно (4.22), (4.23) получим следующее выражение для детерминанта $F_9\,(a, b, c)$:

$$\begin{gathered} F_9\,(a, b, c) = F_3\,(a, c)\, F_3\,(a, c + b/2)\, F_3\,(a, c - b/2) = \\ = 2ic\left(a^2 - 4c^2\right)\left(b^2 - 4c^2\right)\left[(a - b)^2 - 4c^2\right]\left[(a + b)^2 - 4c^2\right]. \end{gathered} \qquad (4.24)$$

Здесь $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$, причем $a_i = al_i$, $b_\alpha = bd_\alpha$. Система линейных и однородных уравнений (4.6) имеет ненулевое решение, если определитель (4.24) обращается в нуль. Обращение в нуль только одного из пяти сомножителей в отдельности приводит к уже рассмотренным состояниям (см. (4.14)–(4.17)). Одновременное обращение в нуль произвольных двух из пяти сомножителей детерминанта (4.24) позволяет получить еще четыре нетривиальных состояния:

1. При обращении в нуль 1-го и 4-го или 1-го и 5-го сомножителей условие ненарушенной симметрии (2.15) приобретает вид $[\hat{w}, l_i\hat{\mathcal{L}}_i + d_\alpha\hat{S}_\alpha] = 0$. В этом случае возникает состояние ζ-фазы [18] с параметром порядка

$$\Delta_{\alpha k} = e_\alpha\,(Am_k - Bn_k) + f_\alpha\,(Bm_k + An_k) + Cd_\alpha l_k. \qquad (4.25)$$

2. Одновременное обращение в нуль 2-го и 3-го сомножителей описывает ε-состояние [18]. В этом случае генератор ненарушенной симметрии $\hat{T} = l_i\hat{\mathcal{L}}_i + d_\alpha\hat{S}_\alpha \mp \hat{N}/2$ приводит к параметру порядка

$$\Delta_{\alpha k} = Al_k\,(e_\alpha \pm if_\alpha) + Bd_\alpha\,(m_k \pm in_k)\,. \qquad (4.26)$$

3. Одновременное обращение в нуль 2-го и 4-го, а также 2-го и 5-го сомножителей приводит к состоянию равновесия с генератором ненарушенной симметрии $\hat{T} = l_i\hat{\mathcal{L}}_i \pm 2d_\alpha\hat{S}_\alpha \pm \hat{N}/2$ и структуре параметра порядка [22, 23]:

$$\Delta_{\alpha k} = A\,(m_k - in_k)\,(e_\alpha - if_\alpha) + Bl_k\,(e_\alpha + if_\alpha)\,. \qquad (4.27)$$

4. Одновременное обращение в нуль 3-го и 4-го, а также 3-го и 5-го сомножителей позволяет получить генератор ненарушенной симметрии вида $\hat{T} = \pm 2l_i\hat{\mathcal{L}}_i + d_\alpha\hat{S}_\alpha \pm \hat{N}/2$ и параметр порядка [22, 23]

$$\Delta_{\alpha k} = A\,(m_k - in_k)\,(e_\alpha - if_\alpha) + Bd_\alpha\,(m_k + in_k)\,. \qquad (4.28)$$

Одновременное зануление трех или более сомножителей в (4.24) ведет к уже найденным состояниям или не приводит к нетривиальному решению

Генератор ненарушенной симметрии	m_s	m_l	Параметр порядка $\Delta_{\alpha k}$	Фаза
$\hat{\mathcal{L}}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha$	—	—	$\Delta R_{\alpha k}$	B
$\mathbf{l}\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} - \frac{m_l}{2}\hat{N}$	0	± 1	$\Delta d_\alpha(m_k \mp in_k)$	A
	± 1	0	$\Delta(e_\alpha \mp if_\alpha)l_k$	β
$\mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{m_s}{2}\hat{N}$	± 1	± 1	$\Delta(e_\alpha \mp if_\alpha)(m_k \mp in_k)$	A_1
	0	0	$\Delta d_\alpha l_k$	Polar
$-2m_l\lvert m_s\rvert\mathbf{l}\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} + \mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}m_s\hat{N}$	0	$0, \pm 1$	$d_\alpha(Am_k + Bn_k + Cl_k)$	—
	± 1	± 1	$A(m_k \mp in_k)(e_\alpha \mp if_\alpha)+$ $Bd_\alpha(m_k \mp in_k)$	$A + A_1$
	± 1	0	$(e_\alpha \mp if_\alpha)(Am_k + Bn_k + Cl_k)$	—
$\mathbf{l}\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} - 2m_s\lvert m_l\rvert\mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}m_l\hat{N}$	0,± 1	0	$(Ae_\alpha + Bf_\alpha + Cd_\alpha)l_k$	—
	± 1	± 1	$A(m_k \mp in_k)(e_\alpha \mp if_\alpha)+$ $+Bl_k(e_\alpha \mp if_\alpha)$	$\beta + A_1$
	0	± 1	$(Ae_\alpha + Bf_\alpha + Cd_\alpha)(m_k \mp in_k)$	—
$\mathbf{l}\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} + \mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{m_l + m_s}{2}\hat{N}$	0	0	$e_\alpha(Am_k - Bn_k)+$ $+f_\alpha(Bm_k + An_k) + Cd_\alpha l_k$	ς
	0	± 1	$Al_k(e_\alpha \pm if_\alpha)+$	ε
	± 1	0	$Bd_\alpha(m_k \pm in_k)$	
	± 1	± 1	$\Delta(e_\alpha \mp if_\alpha)(m_k \mp in_k)$	A_1

($\Delta_{\alpha k} \neq 0$). Формулы (4.14)–(4.21), (4.25)–(4.28) описывают 12 анизотропных фаз сверхтекучего ^{3}He, соответствующих трансляционно-инвариантным состояниям [23].

Рассмотрим теперь состояние, соответствующее изотропной сверхтекучей фазе, которое возникает в результате обращения детерминанта (4.24) в нуль при значениях параметров $c = 0, \quad a = b$. Введем в рассмотрение ортогональную матрицу поворота, которая описывает разворот пространственной системы координат относительно спиновой равенством $b_\alpha = a_i R_{i\alpha}$. Учитывая (2.16), получаем $a_i \left[\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha\right] = 0$. Условие изотропии означает справедливость последнего соотношения для произвольных направлений вектора $\mathbf{a}$. Поэтому свойство симметрии состояния имеет вид [57]

$$\left[\hat{w}, \hat{\mathcal{L}}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha\right] = 0. \tag{4.29}$$

Это состояние описывает B-фазу сверхтекучего ^{3}He. Для состояний с симметрией (4.29) среднее значение параметра порядка

$$\Delta_{\alpha k} = a_B R_{k\alpha}, \tag{4.30}$$

где a_B — амплитуда параметра порядка.

Итоговая классификация свойств ненарушенной симметрии и соответствующих значений параметров порядка для трансляционно-инвариантного случая состояния равновесия типа ^{3}He представлена в таблице [31].

5. НЕОДНОРОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ СВЕРХТЕКУЧИХ ФАЗ $^3\mathrm{He}$

Так же, как и при решении вопроса о классификации однородных состояний, целесообразно вначале рассмотреть подгруппы пространственной симметрии, генератор которых состоит из двух операторов. Пусть

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k \hat{N}. \tag{5.1}$$

Согласно (5.1) и алгебре (4.2) для параметра порядка получим уравнение

$$\nabla_i \Delta_{\beta k}(x) = 2ip_i \Delta_{\beta k}(x), \tag{5.2}$$

решение которого имеет вид

$$\Delta_{\beta k}(x) = \mathrm{e}^{2i\varphi(\mathbf{x})} \underline{\Delta}_{\beta k}(0), \quad \varphi(x) = \varphi + \mathbf{px}, \tag{5.3}$$

здесь $\underline{\Delta}_{\beta k}(0)$ — однородная часть параметра порядка, которая не зависит от координаты. В силу явного вида генератора ненарушенной симметрии (2.21) и уравнения (5.2) справедливы равенства

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i} + a_i \varepsilon_{imn} x_m p_n \Delta_{\beta k}(x) + 2i\underline{c} \Delta_{\beta i} = 0,$$

где $\underline{c} \equiv c + \mathbf{pd}$. Из требования зануления линейного по координате слагаемого в этом уравнении следуют соотношения, определяющие равновесную структуру параметра порядка

$$a_k \varepsilon_{kil} \underline{\Delta}_{\beta l} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\Delta}_{\gamma i} + 2i\underline{c} \underline{\Delta}_{\beta i} = 0, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{p} = 0. \tag{5.4}$$

Видно, что для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\beta k}(0)$ (5.3) справедлива процедура классификации, изложенная выше. В работах [26–28] с использованием модельного гамильтониана изучался вопрос о стабильности неоднородных конфигураций в $^3\mathrm{He}-A$ и показана устойчивость конфигурации при $\mathbf{a}||\mathbf{p}$.

Рассмотрим случай, когда оператор пространственной симметрии имеет вид

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - q_{k\alpha} \hat{S}_\alpha. \tag{5.5}$$

Это условие приводит к уравнению для параметра порядка

$$\nabla_i \Delta_{\beta k}(x) = q_{i\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma k}(x). \tag{5.6}$$

Тождество Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{P}_i, \hat{P}_k$ позволяет получить соотношение

$$\mathrm{Sp}\left[\hat{w}, \left[\hat{P}_i, \hat{P}_k\right]\right] \hat{\Delta}_{\beta l}(x) = \left(q_{i\beta} q_{k\alpha} - q_{i\alpha} q_{k\beta}\right) \Delta_{\alpha l}(x) = 0,$$

откуда следует структура параметра $q_{i\alpha}$:

$$q_{i\alpha} = q_i n_\alpha. \tag{5.7}$$

Здесь q_k — вектор магнитной спирали; n_α — ось анизотропии в спиновом пространстве. Решение уравнения (5.6) с учетом (5.7) дает явную структуру параметра порядка для этого состояния:

$$\Delta_{\beta k}(x) = a_{\beta\gamma}\left(\mathbf{n}\theta(x)\right) \underline{\Delta}_{\gamma k}(0), \quad \theta(x) = \theta + \mathbf{q}\mathbf{x}, \tag{5.8}$$

где $a_{\beta\gamma}$ — ортогональная матрица поворота в спиновом пространстве. Условие ненарушенной симметрии (2.21) с учетом вида генератора пространственной симметрии (5.5) и уравнения (5.6) приводит к равенству

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l}(x) + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i}(x) + a_j \varepsilon_{jmn} x_m q_n n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i}(x) + 2ic \Delta_{\beta i}(x) = 0, \tag{5.9}$$

здесь $\underline{b}_\alpha \equiv b_\alpha + \mathbf{d}\mathbf{q} n_\alpha$. Отсюда, принимая во внимание требование отсутствия линейного по координате слагаемого, получим уравнения

$$a_k \varepsilon_{kil} \Delta_{\beta l}(x) + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\gamma i}(x) + 2ic \Delta_{\beta i}(x) = 0,$$

$$a_j \varepsilon_{jmn} q_n = 0,$$

которые задают равновесную структуру параметра порядка. Учитывая формулу (5.8), нетрудно получить уравнение только для однородной части параметра порядка, которая не зависит от координат:

$$a_k \varepsilon_{kil} \underline{\Delta}_{\beta l} + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\Delta}_{\gamma i} + 2ic \underline{\Delta}_{\beta i} = 0,$$

при условии, что $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = 0$. В результате анализ возможных состояний для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\beta k}$ сводится к уже рассмотренному случаю.

Исследуем теперь пространственную симметрию, определяемую равенством

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - t_{kj} \hat{\mathcal{L}}_j. \tag{5.10}$$

Условие симметрии (5.10) и алгебра (4.2) приводят к системе уравнений

$$\nabla_i \Delta_{\beta k}(x) = t_{ij}\varepsilon_{jkl}\Delta_{\beta l}(x), \quad t_{ij}\varepsilon_{juv}\nabla_v \Delta_{\beta k}(x) = 0, \tag{5.11}$$

откуда получим условие на допустимую структуру параметра t_{ij}:

$$t_{ij}\varepsilon_{juv}t_{vs}\varepsilon_{skl} = 0. \tag{5.12}$$

Величину t_{kj} будем искать в виде $t_{kj} = t\delta_{kj} + t_i\varepsilon_{ikj} + t^s_{kj}$, где t^s_{kj} — симметричный и бесшпуровый тензор. Подставим это выражение в соотношение (5.12) и учтем, что оно справедливо при любых значениях индексов. Сворачивая его с тензором $(\delta_{ki}\delta_{lu} - \delta_{ku}\delta_{li})$, получим уравнения связи на параметры матрицы t_{kj}:

$$6t^2 - t_n^2 - t^s_{ik}t^s_{ik} = 0. \tag{5.13}$$

Сворачивая соотношение (5.12) с тензором ε_{klu}, приходим к другому уравнению:

$$t_j\left(t\delta_{ij} + t^s_{ij}\right) = 0. \tag{5.14}$$

Следствием уравнений (5.13), (5.14) будет равенство $t_j = 0$.

Обратимся теперь к тождеству Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{P}_i, \hat{P}_k$. В соответствии с явным видом (5.10) найдем условия на структуру элементов матрицы t_{ij}:

$$t_{ii}t^2_{kl} - t_{ik}t_{kl}t_{li} = 0, \quad t_{ik}t_{ki} - t_{ii}t_{kk} = 0. \tag{5.15}$$

Нетрудно получить явный вид матрицы t_{ij}, удовлетворяющей (5.13)–(5.15):

$$t_{ik} = tl_il_k. \tag{5.16}$$

Пространственно-неоднородная часть параметра порядка может быть найдена из уравнения (5.11) с учетом (5.16). Решение имеет вид

$$\Delta_{\gamma i}(x) = a_{ik}\left(\mathbf{l}\psi(x)\right)\underline{\Delta}_{\gamma k}(0), \tag{5.17}$$

здесь $a_{ik}\left(\mathbf{l}\psi(x)\right)$ — ортогональная матрица поворота вокруг оси $\mathbf{l}$ в конфигурационном пространстве на угол $\psi(x) = \psi + t\mathbf{lx}$. Это решение описывает геликоидальную структуру. Величина $2\pi t^{-1}$ определяет шаг геликоида, направление которого задано единичным вектором $\mathbf{l}$. Условие ненарушенной симметрии с учетом (5.10), (5.17) приводит к уравнению

$$\underline{a}_k\left(\varepsilon_{kil}\Delta_{\beta l} + \varepsilon_{iuv}x_u\nabla_v\Delta_{\beta l}\right) + b_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma i} + 2ic\Delta_{\beta i} = 0, \tag{5.18}$$

где $\underline{a}_i \equiv a_i + tl_i\mathbf{ld}$. Отсюда получим соотношение $\underline{\mathbf{a}} \times \mathbf{l} = 0$, ограничивающее структуру параметра порядка, которое возникает из требования отсутствия линейного слагаемого по координате в уравнении (5.18), и уравнение для однородной части параметра порядка

$$\underline{a}_k \varepsilon_{kil} \underline{\Delta}_{\beta l} + b_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\Delta}_{\gamma i} + 2ic\underline{\Delta}_{\beta i} = 0.$$

Согласно (5.1), (5.5), (5.10) возможно обобщение структуры оператора пространственной симметрии [31]

$$\hat{P}_k \equiv \hat{\mathcal{P}}_k - p_k \hat{N} - q_k n_\alpha \hat{S}_\alpha - tl_j l_k \hat{\mathcal{L}}_j. \tag{5.19}$$

Условие пространственной симметрии состояния равновесия рассматриваемой ферми-жидкости следует дополнить условием ненарушенной симметрии состояния равновесия (2.15), где генератор $\hat{T}$ определяется равенством (2.21). В соответствии с этими условиями симметрии запишем равенства

$$i\,\mathrm{Sp}\left[\hat{w}, \hat{T}\right] \hat{\Delta}_{\beta k}(x) = 0, \quad i\,\mathrm{Sp}\left[\hat{w}, \hat{P}_i\right] \hat{\Delta}_{\beta k}(x) = 0.$$

Отсюда получим уравнения, устанавливающие равновесную структуру параметра порядка, и найдем ограничения на параметры a_i, b_α, c, d_i генератора $\hat{T}$ и параметры $p_k, q_k, n_\alpha, t, l_k$ оператора пространственной симметрии $\hat{P}_k$:

$$\begin{aligned}
&\underline{a}_i \left(\varepsilon_{ikl}\Delta_{\beta l}(x) + \varepsilon_{iuv} x_u \nabla_v \Delta_{\beta l}(x)\right) + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma l}(x) + 2i\underline{c}\Delta_{\beta k}(x) = 0,\\
&\nabla_i \Delta_{\beta k}(x) = 2ip_i \Delta_{\beta k}(x) + q_i n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma k}(x) + \\
&\qquad\qquad + tl_i l_j \left(\varepsilon_{jkm}\Delta_{\beta m}(x) + \varepsilon_{juv} x_u \nabla_v \Delta_{\beta m}(x)\right).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Параметры $\underline{a}_i, \underline{b}_\alpha, \underline{c}$ связаны с величинами a_i, b_α, c соотношениями

$$\underline{a}_i \equiv a_i + tl_i\mathbf{ld}, \quad \underline{b}_\alpha \equiv b_\alpha + \mathbf{dq}n_\alpha, \quad \underline{c} \equiv c + \mathbf{pd}.$$

Требование отсутствия линейных по координате слагаемых в обоих уравнениях (5.20) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
l_j \varepsilon_{juv}\left(2ip_v \Delta_{\beta k}(x) + q_v n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma k}(x)\right) = 0,\\
\underline{a}_j \varepsilon_{juv}\left(2ip_v \Delta_{\beta k}(x) + q_v n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma k}(x) + tl_v l_m \varepsilon_{mkn}\Delta_{\beta n}(x)\right) = 0,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

которые позволяют связать направления векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{l}$ между собой и с вектором $\underline{\mathbf{a}}$. Уравнения (5.20), (5.21) служат основой анализа классификации равновесных состояний сверхтекучих фаз ^{3}He с генератором пространственной симметрии (5.19). Решение второго уравнения в (5.20) имеет вид [31]

$$\Delta_{\beta i}(x) = \mathrm{e}^{2i\varphi(x)} a_{\beta\gamma}\left(\mathbf{n}\theta(x)\right) a_{ik}\left(\mathbf{l}\psi(x)\right) \underline{\Delta}_{\gamma k}(0). \tag{5.22}$$

Соотношения (5.21) выполняются, если векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{l}, \underline{\mathbf{a}}$ коллинеарны. В этом случае первое уравнение (5.20) позволяет свести уравнение для однородной части параметра порядка $\underline{\Delta}_{\gamma k}(0)$ (5.22), при выполнении равенства $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = 0$, к виду

$$\underline{a}_i \varepsilon_{ikl} \underline{\Delta}_{\beta l}(0) + \underline{b}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\Delta}_{\gamma l}(0) + 2i\underline{c}\underline{\Delta}_{\beta k}(0) = 0.$$

Изучим условие стационарности сверхтекучих состояний ^{3}He. Для равновесного оператора Гиббса справедливо соотношение (3.15). Уравнение фон Неймана совместно с условием стационарности позволяет определить временную зависимость равновесных средних. В частности, для параметра порядка получим

$$\mathrm{Sp}\,\hat{w}(t)\hat{\Delta}_{\alpha k}(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{w}(0)\mathrm{e}^{i\hat{N}p_0 t}\hat{\Delta}_{\alpha k}(x)\,\mathrm{e}^{-i\hat{N}p_0 t} = \mathrm{e}^{2ip_0 t}\mathrm{Sp}\,\hat{w}(0)\hat{\Delta}_{\alpha k}(x). \tag{5.23}$$

Соотношения (5.22) и (5.23) определяют пространственно-временную зависимость параметра порядка в состоянии равновесия.

6. АЛГЕБРА ЛОКАЛЬНЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ПЛОТНОСТЕЙ АДДИТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ И ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

Для конденсированных сред с нарушенной неабелевой группой симметрии неравновесные плотности потоков аддитивных интегралов движения не могут быть представлены в терминах равновесного термодинамического потенциала [57, 58, 66, 67]. Причина связана с тем, что в состоянии полного равновесия параметры сокращенного описания, связанные с градиентами локальных параметров преобразований, упрощаются и не отражают правильно неравновесную структуру этих величин. Поэтому при формулировке термодинамики и нахождении плотностей потоков аддитивных интегралов движения необходимо исходить из локально-равновесного состояния, для которого, как будет показано ниже, такая трудность не возникает.

В разд. 3, 4 были введены операторы параметра порядка синглетного и триплетного спаривания и показано, что при глобальных фазовых преобразованиях, спиновых поворотах и произвольных трансляциях эти операторы преобразуются сами через себя. Исследование локально-равновесных состояний потребует использования локальных унитарных преобразований, связанных с фазовыми преобразованиями, спиновыми поворотами и произвольными деформациями. Рассмотрим некоторые свойства этих унитарных преобразований, необходимые нам в дальнейшем. Локальные фазовые преобразования определяются унитарным оператором

$$U_\varphi = \exp i \int d^3x \hat{n}(x)\varphi(x), \tag{6.1}$$

где $\varphi(x)$ — локальная фаза, определяющая унитарный оператор U_φ. Из канонических перестановочных соотношений следует, что операторы $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}^+(x)$ преобразуются согласно формулам

$$U_\varphi \hat{\psi}(x) U_\varphi^+ = \hat{\psi}(x) \mathrm{e}^{-i\varphi(x)}, \quad U_\varphi \hat{\psi}^+(x) U_\varphi^+ = \hat{\psi}^+(x) \mathrm{e}^{i\varphi(x)}. \tag{6.2}$$

Так как $[\hat{n}(x), \hat{n}(x')] = 0$, то

$$U_\varphi \delta U_\varphi^+ = -i \int d^3x \delta\varphi(x) \hat{n}(x), \tag{6.3}$$

где δU_φ — вариация по параметру φ унитарного преобразования U_φ. Используя явный вид операторов плотностей аддитивных интегралов движения в терминах полевых ферми-операторов, находим

$$\begin{aligned} &U_\varphi \hat{n}(x) U_\varphi^+ = \hat{n}(x), \\ &U_\varphi \hat{s}_\alpha(x) U_\varphi^+ = \hat{s}_\alpha(x), \\ &U_\varphi \hat{\pi}_k(x) U_\varphi^+ = \hat{\pi}_k(x) - \hat{n}(x) \nabla_k \varphi(x). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Учитывая вид операторов параметра порядка (3.2), (4.2), получаем их трансформационные свойства при фазовых преобразованиях

$$U_\varphi \hat{\Delta}(x) U_\varphi^+ = \hat{\Delta}(x) \mathrm{e}^{-2i\varphi(x)}, \quad U_\varphi \hat{\Delta}_{i\alpha}(x) U_\varphi^+ = \hat{\Delta}_{i\alpha}(x) \mathrm{e}^{-2i\varphi(x)}. \tag{6.5}$$

Локальные спиновые преобразования определяются унитарным оператором

$$U_\theta = \exp i \int d^3x \hat{s}_\alpha(x) \theta_\alpha(x), \tag{6.6}$$

где $\theta_\alpha(x)$ — локальные углы поворота в спиновом пространстве. Так как $\hat{s}_\alpha(x) = \hat{\psi}^+(x) s_\alpha \hat{\psi}(x)$, то из канонических перестановочных соотношений имеем

$$\left[\hat{s}_\alpha(x), \hat{\psi}(x')\right] = -s_\alpha \hat{\psi}(x) \delta(x - x').$$

Введем унитарное преобразование

$$U_\theta(\lambda) = \exp i\lambda \int d^3x \theta_\alpha(x) \hat{s}_\alpha(x)$$

и заметим, что для оператора $\hat{\psi}_\lambda(x) \equiv U_\theta(\lambda)\,\hat{\psi}(x)U_\theta^+(\lambda)$ справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\psi}(x,\lambda) = -i\theta_a(x)s_\alpha\hat{\psi}(x,\lambda)\,,$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned} &U_\theta\hat{\psi}(x)U_\theta^+ = u_\theta(x)\hat{\psi}(x), \\ &u_\theta(x) \equiv \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha(x)s_\alpha}, \\ &U_\theta\hat{\psi}^+(x)U_\theta^+ = \hat{\psi}^+(x)u_\theta^+(x). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Аналогичным образом, вводя в спиновом пространстве операторы

$$u_\theta(\lambda) = \mathrm{e}^{-i\lambda\theta_\alpha s_\alpha}, \quad s_\alpha(\lambda) = u_\theta(\lambda)\,s_\alpha u_\theta(\lambda)^+\,,$$

легко найти, что

$$\frac{\partial s_\alpha(\lambda)}{\partial\lambda} = \varepsilon_{\alpha\gamma\beta}\theta_\beta s_\gamma(\lambda)\,.$$

Из последнего соотношения вытекает равенство

$$\begin{aligned} &u_\theta^+ s_\alpha u_\theta = a_{\alpha\beta}(\theta)\,s_\beta, \\ &a_{\alpha\beta}(\theta) \equiv (\exp(\varepsilon\theta))_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\cos\theta + n_\alpha n_\beta(1-\cos\theta) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma\sin\theta, \\ &\theta_\alpha = n_\alpha\theta, \quad n_\alpha^2 = 1. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Здесь $a_{\alpha\beta}(\theta)$ — ортогональная матрица поворота в спиновом пространстве, представленная в терминах локального угла поворота. С учетом соотношений (6.7), (6.8) получаем

$$u_\theta^+\delta u_\theta = \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\left(\tilde{a}\delta a\right)_{\alpha\beta}s_\gamma. \tag{6.9}$$

Заметим теперь, что из формулы (6.7) легко получить равенство

$$U_\theta\delta U_\theta^+ = \frac{i}{2}\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\int d^3x\delta R_{\alpha\beta}(x)\hat{s}_\gamma(x), \tag{6.10}$$

где

$$\delta R(x) \equiv \tilde{a}(x)\delta a(x). \tag{6.11}$$

Законы преобразования операторов плотностей аддитивных интегралов движения при локальных спиновых поворотах имеют вид

$$\begin{aligned} &U_\theta \hat{n}(x) U_\theta^+ = \hat{n}(x), \\ &U_\theta \hat{s}_\alpha(x) U_\theta^+ = a_{\alpha\beta}\left(\theta(x)\right) \hat{s}_\beta(x), \\ &U_\theta \hat{\pi}_k(x) U_\theta^+ = \hat{\pi}_k(x) - \underline{\omega}_{\alpha k}(x) \hat{s}_\alpha(x). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Величина $\underline{\omega}_{\alpha k}$, фигурирующая в соотношениях (6.12), представляет собой правую форму Картана, которая определяется ортогональной матрицей поворота [68]:

$$\underline{\omega}_{\alpha k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(a \nabla_k \tilde{a}\right)_{\beta\gamma}. \tag{6.13}$$

Левая форма Картана $\omega_{\alpha k}$ определяется формулой

$$\omega_{\alpha k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\tilde{a} \nabla_k a\right)_{\gamma\beta} \tag{6.14}$$

и связана с правой формой Картана соотношением $\underline{\omega}_{\alpha k} = a_{\alpha\beta} \omega_{\beta k}$. В соответствии с этими определениями имеют место тождества Маурера–Картана

$$\nabla_k \omega_{\alpha i} - \nabla_i \omega_{\alpha k} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\beta k} \omega_{\gamma i}, \quad \nabla_k \underline{\omega}_{\alpha i} - \nabla_i \underline{\omega}_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{\omega}_{\beta k} \underline{\omega}_{\gamma i}. \tag{6.15}$$

Принимая во внимание явный вид операторов параметра порядка $\hat{\Delta}(x)$, $\hat{\Delta}_{i\alpha}(x)$, находим трансформационные соотношения для этих операторов при локальных спиновых поворотах:

$$U_\theta \hat{\Delta}_{\alpha i}(x) U_\theta^+ = a_{\alpha\beta}\left(\theta(x)\right) \hat{\Delta}_{\beta i}(x) - \underline{\omega}_{\alpha i}\left(\theta(x)\right) \hat{\Delta}(x), \quad U_\theta \hat{\Delta}(x) U_\theta^+ = \hat{\Delta}(x). \tag{6.16}$$

В соответствии с (6.13) легко убедиться в справедливости формулы

$$\nabla_k \delta R_\alpha = \delta \underline{\omega}_{k\beta} a_{\beta\alpha}, \quad \delta R_\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta R_{\beta\gamma}. \tag{6.17}$$

Перейдем, наконец, к унитарному преобразованию

$$U_f = \exp i \int d^3x \hat{\pi}_i(x) f_i(x), \tag{6.18}$$

описывающему произвольные локальные деформации. Так как $\hat{\pi}_i(x) = -\dfrac{i}{2}\left\{\hat{\psi}_\sigma^+(x) \nabla_i \hat{\psi}_\sigma(x) - \nabla_i \hat{\psi}_\sigma^+(x) \hat{\psi}_\sigma(x)\right\}$, то из канонических перестановочных соотношений имеем

$$i\left[\hat{\pi}_l(x'), \hat{\psi}(x)\right] = -\frac{1}{2}\left(\delta\left(x - x'\right) \nabla_l \hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x') \nabla'_l \delta\left(x - x'\right)\right). \tag{6.19}$$

Введем унитарное преобразование

$$U_f(\lambda) = \exp i\lambda \int d^3x f_i(x)\hat{\pi}_i(x)$$

и заметим, что

$$i\int d^3x' f_l(x') \left[\hat{\pi}_l(x'), \hat{\psi}(x)\right] = -f_l(x)\nabla_l\hat{\psi}(x) - \frac{1}{2}\nabla_l(f_l(x))\hat{\psi}(x).$$

Отсюда для оператора $\hat{\psi}_\lambda(x) \equiv U_f(\lambda)\hat{\psi}(x)U_f^+(\lambda)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\hat{\psi}_\lambda}{\partial\lambda} + f_l\frac{\partial\hat{\psi}_\lambda}{\partial x_l} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f_l}{\partial x_l}\hat{\psi}_\lambda \tag{6.20}$$

с начальным условием $\hat{\psi}_0(x) = \hat{\psi}(x)$. Для решения этого уравнения воспользуемся методом характеристик. Рассмотрим с этой целью систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_l}{\partial\lambda} = f_l(x) \tag{6.21}$$

с начальными условиями $x_l|_{\lambda=0} = x_l^0$. Решение этой задачи Коши обозначим через $x = x(\lambda, x^0)$ или, обращая это уравнение, $x^0 = x^0(\lambda, x)$. Введем функцию

$$g(x,\lambda) = \int d^3x^0 g(x^0,0)\delta(x - x(x^0,\lambda)) = g(x^0,0)\left|\frac{\partial x^0}{\partial x}\right|_{x^0=x^0(x,\lambda)}. \tag{6.22}$$

Отсюда и из (6.21) следует дифференциальное уравнение для функции $g(x,\lambda)$ и начальное условие

$$\frac{\partial g(x,\lambda)}{\partial\lambda} + f_i(x)\frac{\partial g(x,\lambda)}{\partial x_i} = -g(x,\lambda)\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i},$$

$$g\,(x,\lambda)|_{\lambda=0} = g(x,0).$$

Введем вместо функции $g(x,\lambda)$ функцию $z(x,\lambda)$:

$$g(x,\lambda) = z^2(x,\lambda).$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z(x,\lambda)}{\partial\lambda} + f_i(x)\frac{\partial z(x,\lambda)}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}z(x,\lambda)\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}$$

и начальному условию

$$z\,(x,\lambda)|_{\lambda=0}=z\,(x,0)=\sqrt{g\,(x,0)}.$$

Решение этой задачи Коши согласно (6.22) дается формулой

$$z\,(x,\lambda)=z\,(x',0)\sqrt{\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x'=x'(x,\lambda)}}.$$

Отсюда и из (6.20) следует, что

$$U_f\hat{\psi}(x)U_f^+=\sqrt{\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|}\hat{\psi}(x'),\quad U_f\hat{\psi}^+(x)U_f^+=\sqrt{\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|}\hat{\psi}^+(x'),\tag{6.23}$$

где деформированная координата $x'=x'_f(x)\equiv x^0\,(1,x)$ является функцией первоначальной координаты x и функционалом $f_l(x)$. Вариации $\delta x'(x)$ отображения $x\to x'=x'(x)$ соответствует вариация унитарного оператора U_f. Согласно (6.22) получим

$$\left[U_f\delta U_f^+,\hat{\psi}(x')\right]=-\frac{\partial\hat{\psi}(x')}{\partial x'_k}\delta x'_k-\frac{1}{2}\hat{\psi}(x')\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\frac{\partial\,|\partial x'/\partial x|}{\partial(\partial x'_i\partial x_k)}\frac{\partial x'_l}{\partial x_k}\frac{\partial\delta x'_i}{\partial x'_l}.$$

Из теории определителей следует, что

$$\partial\frac{\partial\,|\partial x'/\partial x|}{\partial(\partial x'_i/\partial x_k)}\frac{\partial x'_l}{\partial x_k}=\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\delta_{il},$$

поэтому

$$\left[U_f\delta U_f^+,\hat{\psi}(x')\right]=-\frac{\partial\hat{\psi}(x')}{\partial x'_k}\delta x'_k-\frac{1}{2}\hat{\psi}(x')\frac{\partial\delta x'_i\,(x)}{\partial x'_i}.$$

Используя последнюю формулу и учитывая соотношение (6.19), получаем равенство

$$U_f\delta U_f^+=i\int d^3x\delta x'_l(x)\hat{\pi}_l(x).\tag{6.24}$$

Принимая во внимание явный вид плотностей аддитивных интегралов движения $\hat{n}(x),\hat{s}_\alpha(x),\hat{\pi}_i(x)$ в терминах полевых операторов, а также формулу (6.23), найдем их трансформационные свойства при произвольных локальных деформациях

$$U_f\hat{n}(x)U_f^+=\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\hat{n}(x'),\quad U_f\hat{s}_\alpha(x)U_f^+=\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\hat{s}_\alpha(x'),\tag{6.25}$$

$$U_f \hat{\pi}_l(x) U_f^+ = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \hat{\pi}_k(x').$$

Обращаясь к явному виду операторов параметров порядка (3.2), (4.2), легко найти их трансформационные свойства

$$U_f \hat{\Delta}(x) U_f^+ = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \hat{\Delta}(x'), \quad U_f \hat{\Delta}_{i\alpha}(x) U_f^+ = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \hat{\Delta}_{k\alpha}(x'). \tag{6.26}$$

Приведенные свойства локальных преобразований позволяют определить локально-равновесный статистический оператор

$$\begin{gathered} \hat{w}\left\{Y(x), \varphi(x), \theta_\alpha(x), f_i(x)\right\} \equiv \exp\left\{\Omega - \int d^3x Y_a(x) \hat{\zeta}_a(x) + \nu \hat{F}\{U\}\right\}, \\ \hat{F}\left\{U\right\} \equiv U \hat{F} U^+, \quad U \equiv U_\varphi U_\theta U_f, \end{gathered} \tag{6.27}$$

где $\nu \hat{F}$ — бесконечно малый источник, снимающий вырождение состояния полного статистического равновесия. В локально-равновесном состоянии термодинамические параметры $Y(x)$, фаза $\varphi(x)$, углы поворота в спиновом пространстве $\theta_\alpha(x)$, а также параметр деформации $f_i(x)$ являются произвольными функциями координат. В состоянии же полного статистического равновесия термодинамические силы не зависят от координат $Y(x) = Y$. Как было показано в разд. 3–5, состояние полного статистического равновесия вырожденной конденсированной среды характеризуется дополнительными термодинамическими параметрами. Их пространственная зависимость находится из условий симметрии изучаемой фазы, включая ее ненарушенную и пространственную симметрии (см. соотношения (2.15), (2.20)). Эти условия приводят в общем случае к зависимости от координат дополнительных термодинамических параметров в состоянии равновесия. На примерах сверхтекучей ферми-жидкости с синглетным и триплетным спариванием такая пространственная зависимость дополнительных термодинамических параметров была детально рассмотрена в разд. 3–5.

В связи с введением квазисредних для локально-равновесного распределения сделаем следующее замечание. Понятие квазисредних обычно вводится для состояния полного статистического равновесия. Введение квазисредних для локально-равновесного состояния основано на том, что для произвольного квазилокального оператора $\mathrm{Sp}\, \hat{w} \hat{c}(x) = \mathrm{Sp}\, \underline{\hat{w}} U^+ \hat{c}(x) U$, причем для снятия вырождения в статистическом операторе $\underline{\hat{w}} \equiv U^+ \hat{w} U$ на пространственной бесконечности (где система находится в состоянии полного статистического равновесия с постоянными заданными значениями Y_a), достаточно ввести пространственно-однородный источник, соответствующий состоянию полного статистического равновесия с синглетным или триплетным спариванием. Выражение (6.27) для локально-равновесного статистического оператора в главном приближении по малым пространственным градиентам термодинамических параметров должно совпадать с равновесным статистическим оператором Гиббса. Для случая синглетного спаривания этот источник нарушения симметрии распределения Гиббса имеет вид (3.3). Поэтому

$$U\hat{F}U^{+} = \int d^3x' \left(\hat{\Delta}(x')f'(x') + \text{h. c.}\right).$$

Здесь первоначальная $f(x)$ и преобразованная функции $f'(x')$ связаны соотношением

$$f'(x') = f(x)\exp(-2i)\,\varphi(x').$$

Источник $\hat{F}$ в распределении Гиббса в случае ферми-жидкости с триплетным спариванием был выбран в виде (4.3). Используя формулы (6.5), (6.16), (6.26), нетрудно получить равенство

$$U\hat{F}U^{+} = \int d^3x' \left(\hat{\Delta}_{\beta j}(x')\,f'_{\beta j}(x') + \hat{\Delta}(x')\,f'(x') + \text{h. c.}\right),$$

где преобразованные функции $f'_{\beta j}(x')$, $f'(x')$ связаны с первоначальной функцией $f_{\alpha k}(x)$ соотношениями

$$\begin{aligned} f'_{\beta j}(x') &= \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} f_{\alpha i}(x) a_{\alpha\beta}(x')\exp(-2i)\varphi(x'), \\ f'(x') &= \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} f_{\alpha i}(x)\underline{\omega}_{\alpha j}(x')\exp(-2i)\varphi(x'). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Ввиду перепутывания операторов синглетного и триплетного спаривания целесообразно модифицировать структуру источника в случае триплетного спаривания. С этой целью зададим источник в виде

$$\hat{F} = \int d^3x\,(\hat{\chi}_{\alpha i}(x)f_{\alpha i}(x) + \text{h. c.}), \tag{6.29}$$

здесь модифицированный оператор параметра порядка $\hat{\chi}_{i\alpha}(x)$ определяется равенством

$$\hat{\chi}_{i\alpha}(x) \equiv i\left(\hat{\Delta}^{+}(x)\hat{\Delta}_{\alpha i}(x) - \hat{\Delta}^{+}_{\alpha i}(x)\hat{\Delta}(x)\right)\,\hat{\Delta}(x). \tag{6.30}$$

Для последнего оператора, как легко видеть, также справедливы соотношения (4.2). Поэтому трансформационные соотношения для операторов $\hat{\chi}_{i\alpha}(x)$ и $\hat{\Delta}_{i\alpha}(x)$ при глобальных фазовых преобразованиях, однородных спиновых вращениях и трансляциях совпадают. Определенная в разделах 4, 5 классификация сверхтекучих равновесных состояний остается в силе. В силу определения (6.30) при локальных преобразованиях оператор параметра порядка

$\hat{\chi}_{i\alpha}(x)$ имеет более простые трансформационные свойства:

$$\begin{aligned} U_\varphi \hat{\chi}_{\alpha k}(x) U_\varphi^+ &= \hat{\chi}_{\alpha k}(x) \exp\left(-2i\right)\varphi(x), \\ U_\theta \hat{\chi}_{\alpha k}(x) U_\theta^+ &= a_{\alpha\beta}\left(\theta(x)\right) \hat{\chi}_{\beta k}(x), \\ U_f \hat{\chi}_{\alpha k}(x) U_f^+ &= \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^3 \frac{\partial x'^l}{\partial x^k} \hat{\chi}_{\alpha l}(x'), \end{aligned} \tag{6.31}$$

что и делает целесообразным его использование при анализе локальных термодинамических соотношений сверхтекучих конденсированных сред с триплетным спариванием. Локально-равновесный источник с учетом соотношений (6.29), (6.31) приобретает вид

$$U\hat{F}U^+ = \int d^3x' \left(\hat{\chi}_{\beta j}\left(x'\right) f'_{\beta j}(x') + \text{h. c.}\right), \tag{6.32}$$

где преобразованная функция $f'_{\beta j}(x')$ связана с исходной функцией $f_{\alpha k}(x)$ равенством

$$f'_{\beta j}(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} f_{\alpha i}(x) a_{\alpha\beta}(x') \exp\left(-2i\right)\varphi(x'). \tag{6.33}$$

Выписанные трансформационные свойства полевых операторов и операторов плотностей аддитивных интегралов движения будут использованы в следующем разделе для построения термодинамики и получения соотношений, устанавливающих связь плотностей аддитивных интегралов движения и соответствующих им потоков.

7. ВАРИАЦИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ЛОКАЛЬНО-РАВНОВЕСНОМ СОСТОЯНИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

Рассматривая локально-равновесное состояние, целесообразно перейти от оператора (6.27) к новому оператору

$$\underline{\hat{w}}\left\{Y, \varphi, \theta_\alpha, f_i\right\} \equiv U^+ \hat{w} U = \exp\left\{\Omega - \int d^3x \left(Y_a\left(x\right) \hat{U}^+ \hat{\zeta}_a(x) \hat{U} + \nu \hat{F}\right)\right\}. \tag{7.1}$$

Из (7.1) и формул (6.27) следует, что локально-равновесный термодинамический потенциал Ω является функционалом термодинамических сил $Y_a \equiv \{Y_0, Y_i, Y_4, Y_\alpha\}$ и параметров $\varphi, \theta_\alpha, f_l$:

$$\Omega = \Omega\left(Y, \varphi, \theta, f\right) \equiv \int d^3x \omega\left(x; Y(x'), \varphi(x'), \theta(x'), f(x')\right). \tag{7.2}$$

Здесь $\omega(x)$ — плотность термодинамического потенциала. Вариация потенциала Ω по термодинамическим силам приводит к средним значениям плотностей аддитивных интегралов движения в состоянии локального равновесия

$$\delta_Y\Omega = \int d^3x\delta Y_a(x)\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\hat{\varsigma}_a(x). \tag{7.3}$$

Выясним теперь, к чему приводит вариация термодинамического потенциала Ω по величинам φ, θ, f:

$$\delta_\varphi\Omega + \delta_\theta\Omega + \delta_f\Omega \equiv \underline{\delta}\Omega.$$

Заметим, что потенциал Ω находится из условия $\mathrm{Sp}\,\underline{\hat{w}} = 1$. В соответствии с определением (7.1) имеем

$$\underline{\delta}\Omega + \mathrm{Sp}\,\hat{w}\int d^3xY_a(x)\left[\hat{\varsigma}_a(x), U\delta U^+\right] = 0. \tag{7.4}$$

Используя явный вид унитарного оператора $U = U_\varphi U_\theta U_f$, получаем

$$U\delta U^+ = U_\varphi\delta U_\varphi^+ + U_\theta\delta U_\theta^+ + U_\varphi U_\theta U_f\delta U_f^+ U_\theta^+ U_\varphi^+.$$

Учитывая формулы (6.3), (6.10), (6.24) и последнее соотношение, находим

$$U\delta U^+ = i\int d^3x\delta x'_l(x)\hat{\pi}_l(x) - i\int d^3x\delta\underline{\varphi}(x)\hat{n}(x) - i\int d^3x\delta\underline{R}_\gamma(x)\hat{s}_\gamma(x), \tag{7.5}$$

где введены обозначения

$$\delta\underline{\varphi}(x) \equiv \delta\varphi(x) + \delta x'_l(x)\nabla_l\varphi(x), \quad \delta\underline{R}_\gamma(x) \equiv \delta R_\gamma(x) + \delta x'_l(x)\omega_{l\gamma}(x). \tag{7.6}$$

Для вычисления второго слагаемого в (7.4) обратимся к операторным соотношениям [69]

$$\begin{gathered} i\left[\hat{A}, \hat{b}(x)\right] = -i\left[\hat{B}, \hat{a}(x)\right] - \nabla_k\hat{b}_k(x), \\ \hat{b}_k(x) = i\int d^3x'x'_k\int_0^1 d\lambda\left[\hat{\varepsilon}\left(x-(1-\lambda)\,x'\right), \hat{b}\left(x+\lambda x'\right)\right], \end{gathered} \tag{7.7}$$

где $\hat{A} \equiv \int d^3x\hat{a}(x)$, $\hat{B} \equiv \int d^3x\hat{b}(x)$ и $\hat{a}(x), \hat{b}(x)$ — произвольные квазилокальные операторы. Формулы (7.7) вместе с требованиями симметрии гамильтониана позволяют выразить операторы плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах операторов плотностей физических величин

[69]. Полагая в формуле (7.7) $\hat{a}\,(x) = \hat{n}(x)$, $\hat{b}(x) = \hat{\varepsilon}(x)$ и учитывая требование фазовой инвариантности плотности энергии $\left[\hat{N}, \hat{\varepsilon}(x)\right] = 0$, получаем

$$\dot{\hat{n}}(x) = -\nabla_k \hat{j}_k(x). \tag{7.8}$$

Здесь

$$\hat{j}_k(x) = i\int d^3x' x'_k \int\limits_0^1 d\lambda \left[\hat{\varepsilon}\left(x-(1-\lambda)\,x'\right), \hat{n}\left(x+\lambda x'\right)\right] \tag{7.9}$$

есть оператор плотности потока числа частиц. Полагая далее в (7.7) $\hat{a}(x) = \hat{\pi}_i(x)$ и используя требование трансляционной инвариантности плотности энергии $i\left[\hat{\mathcal{P}}_i, \hat{\varepsilon}(x)\right] = -\nabla_i \hat{\varepsilon}(x)$, записываем

$$\dot{\hat{\pi}}_i(x) = -\nabla_k \hat{t}_{ik}(x), \tag{7.10}$$

где

$$\hat{t}_{ik}(x) = -\hat{\varepsilon}(x)\delta_{ik} + i\int d^3x' x'{}_k \int\limits_0^1 d\lambda \left[\hat{\varepsilon}\left(x-(1-\lambda)\,x'\right), \hat{\pi}_i\left(x+\lambda x'\right)\right]. \tag{7.11}$$

Эта величина представляет собой оператор плотности потока импульса (тензор натяжений). Полагая в формуле (7.7) $\hat{a}(x) = \hat{\varepsilon}(x)$ и замечая, что $i\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\varepsilon}(x)\right] = \dot{\hat{\varepsilon}}(x)$, получаем

$$\dot{\hat{\varepsilon}}(x) = -\nabla_k \hat{q}_k(x), \tag{7.12}$$

здесь

$$\hat{q}_k(x) = \frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int\limits_0^1 d\lambda \left[\hat{\varepsilon}\left(x-(1-\lambda)\,x'\right), \hat{\varepsilon}\left(x+\lambda x'\right)\right]. \tag{7.13}$$

Эта величина представляет собой оператор плотности потока энергии.

Рассмотрим свойство инвариантности плотности энергии по отношению к поворотам в спиновом пространстве $[\hat{\varepsilon}(x), \hat{S}_\alpha] = 0$. В этом случае уравнение движения для оператора плотности спина $\hat{s}_\alpha(x)$ согласно (7.7) имеет вид

$$\dot{\hat{s}}_\alpha(x) = -\nabla_k \hat{s}_{\alpha k}(x), \tag{7.14}$$

где оператор плотности потока спина $\hat{s}_{\alpha k}(x)$ определяется формулой

$$\hat{s}_{\alpha k}(x) = i \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda \, [\hat{\varepsilon}(x - (1-\lambda)x'), \hat{s}_\alpha(x + \lambda x')]. \qquad (7.15)$$

Поэтому с учетом формул (7.9), (7.11), (7.13), (7.15), определяющих плотности потоков аддитивных интегралов движения, имеем

$$\begin{gathered} i \operatorname{Sp} w \int d^3x' Y_0(x') \, [\hat{\varepsilon}(x'), \hat{n}(x)] = -\nabla_k (Y_0(x) j_k(x)), \\ i \operatorname{Sp} w \int d^3x' Y_0(x') \, [\hat{\varepsilon}(x'), \hat{s}_\alpha(x)] = -\nabla_k (Y_0(x) j_{\alpha k}(x)), \\ i \operatorname{Sp} w \int d^3x' Y_0(x') [\hat{\varepsilon}(x'), \hat{\pi}_l(x)] = -\varepsilon(x) \nabla_l Y_0(x) - \nabla_k (Y_0(x) t_{lk}(x)). \end{gathered} \qquad (7.16)$$

При получении этих формул мы пренебрегли под знаком градиентов производными по координате x_l от величины $Y_0(x)$. Это связано с тем, что коммутатор $[\hat{\varepsilon}(x), \hat{\varsigma}_a(x')]$ отличен от нуля только для близко расположенных координат $x \approx x'$ ввиду квазилокальности оператора плотности энергии. В формулах (7.16) величины $\varepsilon(x)$ и $j_k(x), j_{\gamma k}(x), t_{lk}(x)$ представляют собой средние значения в состоянии локального равновесия плотности энергии $\varepsilon(x) = \operatorname{Sp} w \hat{\varepsilon}(x)$ и плотностей потоков аддитивных интегралов движения (плотности частиц, спина и импульса): $j_k(x) = \operatorname{Sp} w \hat{j}_k(x)$, $j_{\gamma k}(x) = \operatorname{Sp} w \hat{j}_{\gamma k}(x)$, $t_{ik}(x) = \operatorname{Sp} w \hat{t}_{ik}(x)$. Используя известные коммутационные соотношения для плотностей аддитивных интегралов движения $\hat{n}(x), \hat{s}_\alpha(x), \hat{\pi}_k(x)$, получаем следующие ненулевые средние:

$$\begin{gathered} i \operatorname{Sp} w \int d^3x' Y_i(x') \, [\hat{\pi}_i(x'), \hat{n}(x)] = -\nabla_k (Y_k(x) n(x)), \\ i \operatorname{Sp} w \int d^3x' Y_i(x') \, [\hat{\pi}_i(x'), \hat{s}_\gamma(x)] = -\nabla_k (Y_k(x) s_\gamma(x)), \\ i \operatorname{Sp} w \int d^3x' Y_\alpha(x') \, [\hat{s}_\alpha(x'), \hat{s}_\gamma(x)] = -Y_\alpha(x) \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} s_\beta(x), \\ i \operatorname{Sp} w \int d^3x' Y_i(x') [\hat{\pi}_i(x'), \hat{\pi}_l(x)] = -\nabla_i (Y_i(x) \pi_l(x)) - \pi_i(x) \nabla_l Y_i(x), \\ i \operatorname{Sp} w \int d^3x Y_\alpha(x') \, [\hat{s}_\alpha(x'), \hat{\pi}_l(x)] = -s_\alpha(x) \nabla_l Y_\alpha(x), \\ i \operatorname{Sp} w \int d^3x Y_4(x') \, [\hat{n}(x'), \hat{\pi}_l(x)] = -n(x) \nabla_l Y_4(x). \end{gathered} \qquad (7.17)$$

Эти формулы, а также формулы (7.5), (7.16) позволяют представить вариацию термодинамического потенциала Ω, связанную с вариацией переменных φ, θ_α, f_i в виде

$$\begin{aligned} \underline{\delta}\Omega = \int d^3x \delta x'_l(x) \, \{\nabla_k (Y_0 t_{lk} + Y_l \pi_k) + \varsigma_a \nabla_l Y_a\} - \\ - \int d^3x \delta \underline{R}_\gamma(x) \, \{\nabla_k (Y_0 j_{\gamma k} + Y_k s_\gamma) + \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} Y_\alpha s_\beta\} - \\ - \int d^3x \delta \underline{\varphi}(x) \nabla_k (Y_0 j_k + Y_k n), \end{aligned} \qquad (7.18)$$

где вариации $\delta\underline{\varphi}$ и $\underline{\delta R}_\gamma$ связаны с вариациями $\delta\varphi, \delta R_\gamma, \delta x'_l$ формулами (7.6). Формула (7.18) справедлива как для нормальных состояний, так и для любых состояний со спонтанно нарушенной симметрией. Она будет в дальнейшем использована для получения плотностей потоков аддитивных интегралов движения $j_k, j_{\alpha k}, t_{ik}$ в терминах локально-равновесного термодинамического потенциала. Решение этой задачи приведет нас к построению уравнений идеальной гидродинамики для систем со спонтанно нарушенной симметрией.

8. ЛОКАЛЬНО-РАВНОВЕСНЫЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКОВ АДДИТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ СО СПОНТАННО НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

В предыдущем разделе мы нашли вариацию термодинамического потенциала, исходя из формулы $\mathrm{Sp}\,\underline{\hat{w}} = 1$, в которой источник в статистическом операторе $\underline{\hat{w}}$ не зависит от вариационных параметров φ, θ, f. Следует подчеркнуть, что полученная формула (7.18) имеет общий характер и не зависит от свойств симметрии исследуемой фазы. В этом разделе мы зафиксируем конкретную структуру источника в локально-равновесном распределении Гиббса (а тем самым и конкретную структуру исследуемой фазы) и выясним структуру параметров сокращенного описания и их зависимость от параметров φ, θ, f. Это позволит нам найти плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах локально-равновесного термодинамического потенциала. Так как при решении этих задач используются свойства симметрии исследуемой фазы (см. разд. 1–4), то в этом разделе мы проведем исследования для ряда конкретных фазовых состояний.

8.1. Нормальная жидкость. Для такой системы термодинамический потенциал Ω не зависит от дополнительных параметров φ, θ_α, f_i и, следовательно, $\underline{\delta}\Omega$ в формуле (7.4) следует положить равным нулю (нет вырождения состояния относительно U_φ-, U_θ-, U_f-преобразований). Тогда из (7.18) следует, что

$$\begin{gathered}\nabla_k(Y_0 j_k + Y_k n) = 0, \quad \nabla_k(Y_0 j_{\gamma k} + Y_k s_\gamma) + \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} Y_\alpha s_\beta = 0, \\ \nabla_k(Y_0 t_{lk} + Y_k \pi_l) + \varsigma_a \nabla_l Y_a = 0.\end{gathered} \tag{8.1}$$

Согласно формуле (7.3) $\varsigma_a = \dfrac{\delta\Omega}{\delta Y_a}$. Используя введенную плотность термодинамического потенциала (7.2), которая зависит от координаты x только посредством термодинамических параметров, в главном приближении по градиентам получаем

$$\varsigma_a = \frac{\partial\omega}{\partial Y_a}$$

и, следовательно, $\varsigma_a \nabla_l Y_a = \nabla_l \omega$. Поэтому последнюю из формул (8.1) можно написать в виде

$$\nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + Y_k \pi_l + \omega \delta_{kl} \right) = 0,$$

или, замечая, что $\pi_l = \dfrac{\partial \omega}{\partial Y_l}$, в виде

$$\nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + \frac{\partial}{\partial Y_k} \left(Y_l \omega \right) \right) = 0. \tag{8.2}$$

Так как параметры сокращенного описания Y_a являются произвольными функциями x, то из первой формулы (8.1) и формулы (8.2) следует, что

$$j_k = -\frac{Y_k}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial Y_4} + \frac{c_k}{Y_0}, \quad t_{lk} = -\frac{1}{Y_0} \frac{\partial}{\partial Y_l} \left(Y_k \omega \right) + \frac{c_{lk}}{Y_0},$$

где c_k, c_{lk} — произвольные константы, не зависящие от термодинамических параметров, в силу чего $c_k = 0, \quad c_{lk} = c\delta_{lk}$. Сравнивая выражения t_{lk} с соответствующим выражением в газовом приближении, найдем, что $c = 0$. Таким образом,

$$j_k = -\frac{Y_k}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial Y_4}, \quad t_{lk} = -\frac{1}{Y_0} \frac{\partial}{\partial Y_l} \left(Y_k \omega \right). \tag{8.3}$$

Рассмотрим теперь второе из уравнений (8.1). В силу предполагаемой инвариантности микроскопического гамильтониана относительно поворотов спина (обменное взаимодействие) величина $\omega(x)$ будет зависеть от $Y_\alpha(x)$ только посредством инвариантных относительно поворота спинов комбинаций $a = Y_\alpha Y_\alpha$, $b_k = Y_\alpha \nabla_k Y_\alpha$, $c_{kl} = \nabla_k Y_\alpha \nabla_l Y_\alpha, \ldots$ Ограничиваясь только этими выражениями, имеем

$$\omega(Y) = \omega \left(a, b_k, c_{kl} \right).$$

Поэтому

$$s_\alpha(x) = \frac{\delta \Omega}{\delta Y_\alpha(x)} = \frac{\partial \omega}{\partial Y_\alpha} - \nabla_k \frac{\partial \omega}{\partial \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_k}}$$

и, следовательно,

$$s_\alpha(x) = 2 \frac{\partial \omega}{\partial a} Y_\alpha - Y_\alpha \nabla_k \frac{\partial \omega}{\partial b_k} - 2 \nabla_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial c_{kl}} \nabla_l Y_\alpha \right).$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} Y_\alpha s_\beta = -2 \nabla_k \left(\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} Y_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial c_{kl}} \nabla_l Y_\alpha \right).$$

Из этой формулы и второго из уравнений (8.1) имеем

$$j_{\gamma k} = -\frac{Y_k}{Y_0} s_\gamma - 2\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \frac{Y_\alpha}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial c_{kl}} \nabla_l Y_\beta,$$

поэтому, пренебрегая в величине $j_{\gamma k}$ градиентами термодинамических параметров Y_a, получаем

$$j_{\gamma k} = -\frac{1}{Y_0} \frac{\partial \omega Y_k}{\partial Y_\gamma}. \tag{8.4}$$

8.2. Нормальный кристалл. Рассмотрим кристаллическое упорядочение. Источник в распределении Гиббса в этом случае выберем в виде

$$\hat{F} = \int d^3\xi \hat{\Delta}(\xi) \sum_\tau \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\tau\xi}}, \tag{8.5}$$

где оператор параметра определен равенством $\hat{\Delta}(\xi) = \hat{\psi}^+(\xi)\,\hat{\psi}(\xi)$ и $\tau_i = b_i^\alpha n_\alpha$ — векторы обратной решетки ($\mathbf{b}^\alpha$ — базисные векторы обратной решетки ($\alpha = 1, 2, 3$) и n_α — целые числа). Такой выбор источника в распределении Гиббса обеспечивает снятие вырождения по отношению к произвольным пространственным трансляциям ($[\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}] \neq 0$). Однако симметрия по отношению к трансляциям на вектор прямой решетки $\mathbf{a}_\alpha$, $\mathbf{a}_\alpha \mathbf{b}^\beta = 2\pi\delta_\alpha^\beta$ сохраняется:

$$\mathrm{e}^{i\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\mathbf{a}_\alpha} \hat{w} \mathrm{e}^{-i\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\mathbf{a}_\alpha} = \hat{w}$$

(мы предполагаем, что нет вырождения относительно U_φ-, U_θ-преобразований). Переменную интегрирования в источнике мы обозначили буквой ξ, так как эта переменная связывается с лагранжевыми координатами, соответствующими недеформированному равновесному состоянию. Рассмотрим унитарное преобразование (6.18) специального вида

$$U_f \hat{\psi}(\xi)\, U_f^+ = \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|} \hat{\psi}(x(\xi)), \tag{8.6}$$

описывающее переход от недеформированного состояния к деформированному ($x(\xi)$ — эйлерова координата, связь функций $f(x)$, $x(\xi)$ обсуждалась в разд. 6). Согласно формулам (8.5) и (6.5) источник в локально-равновесном распределении Гиббса

$$U_f \hat{F} U_f^+ = \int d^3x \hat{\Delta}(x) \sum_\tau \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\tau\xi}(x)},$$

где $\xi(x)$ — функция, обратная функции $x(\xi)$, $x(\xi(x)) = x$. Так как при вычислении средних в точке x важна окрестность $x+\eta$ этой точки, то, раскладывая величину $\boldsymbol{\tau\xi}(x+\eta)$ по степеням η, имеем

$$\boldsymbol{\tau\xi}(x+\eta) = (n_\alpha b_i^\alpha)\xi^i(x) + n_\alpha \left(b_l^\alpha \frac{\partial \xi^l(x)}{\partial x^k} \right) \eta_k.$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению вектора локально-деформированной обратной решетки $b_k^\alpha(x)$ в точке x:

$$b_k^\alpha(x) = b_l^\alpha \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k}. \tag{8.7}$$

Так как величины b_l^α и лагранжева координата ξ^l не преобразуются при переходе от одного деформированного состояния x к другому деформированному состоянию x':

$$x \to x' = x'(x), \tag{8.8}$$

а следовательно, $b_l^\alpha \xi^l(x) = {b'}_l^\alpha {\xi'}^l(x')$, то при преобразовании деформации (8.8) величины $b_k^\alpha(x)$ преобразуются как ковариантный вектор:

$$b_k^\alpha(x) \to {b'}_k^\alpha(x') = \frac{\partial x^l}{\partial {x'}^k} b_l^\alpha(x).$$

Чтобы ввести контравариантные величины, введем ковариантный и контравариантный метрические тензоры:

$$g^{ik}(x) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^l}, \quad g_{ik}(x) = \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^k}. \tag{8.9}$$

Тогда величины $b^{\alpha k}(x) = g^{kl}(x) b_l^\alpha(x)$ при преобразованиях (8.8) будут преобразовываться как контравариантные векторы:

$$b^{\alpha k}(x) \to {b'}^{\alpha k}(x') = \frac{\partial {x'}^k}{\partial x^l} b^{\alpha l}(x).$$

Подчеркнем, что в отличие от обычного тензорного анализа величины x^l обозначают не координаты одной и той же точки в разных координатных системах, а декартовы координаты одной и той же точки при различных деформациях.

Термодинамический потенциал Ω, если нет других тензорных полей, будет зависеть от $b_k^\alpha(x)$ только посредством величин

$$b_k^\alpha(x) b_k^\beta(x) = b_l^\alpha b_s^\beta \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k},$$

являющихся инвариантами по отношению к преобразованиям глобальных поворотов в пространстве эйлеровых координат. Величины $\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^l}\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^s}$ определяют тензор деформаций $u_{ls} \equiv \dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^l}\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^s} - \delta_{ls}$ и их нельзя отождествлять с метрическим тензором.

Найдем вариацию локальных векторов обратной решетки $b_k^\alpha(x)$, связанную с вариацией величин $x_k(\xi)$ (эта вариация обусловлена варьированием величин $f_k(x)$, см. (8.6)). С этой целью перепишем соотношения (8.7) в виде

$$b_l^\alpha = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^l} b_k^\alpha(x),$$

откуда

$$0 = \frac{\partial \delta x^k}{\partial \xi^l} b_k^\alpha(x) + \frac{\partial x^k}{\partial \xi^l} \delta b_k^\alpha(x) + \frac{\partial x^k}{\partial \xi^l}\frac{\partial b_k^\alpha(x)}{\partial x^s}\delta x^s$$

или

$$\delta b_k^\alpha(x) = -\frac{\partial \delta x^l}{\partial x^k} b_l^\alpha(x) - \frac{\partial b_k^\alpha(x)}{\partial x^l}\delta x^l.$$

Используя представление плотности термодинамического потенциала (7.2), имеем

$$\underline{\delta}\Omega = \int d^3x \delta x^l(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k}\left(b_l^\alpha(x)\frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha}\right) - \frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha}\frac{\partial b_k^\alpha}{\partial x^l}\right\}. \tag{8.10}$$

Так как наша модель не содержит спиновых переменных, то согласно (7.18), (8.10) найдем

$$j_k = -\frac{Y_k}{Y_0}\frac{\partial \omega}{\partial Y_4}, \quad t_{lk} = -\frac{1}{Y_0}\frac{\partial}{\partial Y_l}(Y_k\omega) + \frac{b_l^\alpha(x)}{Y_0}\frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha}. \tag{8.11}$$

8.3. Ферми-жидкость. Синглетное спаривание. В рассматриваемой системе нарушена только фазовая инвариантность, поэтому источник в распределении Гиббса имеет вид

$$\hat{F} = \int d^3x \left(\hat{\Delta}(x) \mathrm{e}^{-2i\mathbf{p}_0\mathbf{x}} + \mathrm{h.\,c.}\right)$$

и, следовательно (см. (6.5)),

$$U_\varphi \hat{F} U_\varphi^+ = \int d^3x \left(\hat{\Delta}(x) \mathrm{e}^{-2i\tilde{\varphi}(x)} + \mathrm{h.\,c.}\right), \quad \tilde{\varphi}(x) = \mathbf{p}_0\mathbf{x} + \varphi(x).$$

Таким образом, вариация величины $\tilde{\varphi}(x)$ определяется вариацией $\varphi(x)$. Так как плотность гамильтониана системы имеет структуру

$$\hat{\varsigma}_0(x) = \frac{1}{2m}\nabla_k\hat{\psi}^+(x)\nabla_k\hat{\psi}(x) + \frac{1}{2}\int d^3y\hat{\psi}^+(x+y)\hat{\psi}^+(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x+y)V(y), \tag{8.12}$$

то оператор $U_\varphi^+\hat{\varsigma}_0(x)U_\varphi$ является функционалом только $p_i(x) \equiv \nabla_i\varphi(x)$. По этой же причине, приняв во внимание (7.4), видим, что термодинамический потенциал Ω является функционалом только $p_i(x)$ и не зависит от величин θ_α, f_l. Таким образом,

$$\delta_\varphi\Omega = \int d^3x\frac{\delta\Omega}{\delta p_i(x)}\nabla_i\delta\varphi(x) = -\int d^3x\delta\varphi(x)\nabla_i\frac{\delta\Omega}{\delta p_i(x)},$$

и, следовательно, согласно (7.18) приходим к соотношениям

$$\begin{gathered}\nabla_k\left(Y_0j_k + Y_kn\right) - \nabla_k\frac{\delta\Omega}{\delta p_k} = 0, \quad \nabla_k\left(Y_0j_{\gamma k} + Y_ks_\gamma\right) + \varepsilon_{\alpha\gamma\beta}Y_\alpha s_\beta = 0,\\ \nabla_k\left(Y_0t_{lk} + Y_k\pi_l\right) + \varsigma_a\nabla_lY_a - p_l\nabla_k\tfrac{\delta\Omega}{\delta p_k} = 0.\end{gathered} \tag{8.13}$$

Если опять ввести плотность термодинамического потенциала, то в главном приближении по градиентам ω будет функцией вектора p_i: $\dfrac{\delta\Omega}{\delta p_i} = \dfrac{\partial\omega}{\partial p_i}$. Поэтому уравнения (8.13) примут вид

$$\begin{gathered}\nabla_k\left(Y_0j_k + Y_kn - \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\right) = 0, \quad \nabla_k\left(Y_0j_{\gamma k} + Y_ks_\gamma\right) = 0,\\ \nabla_k\left(Y_0t_{lk} + Y_k\pi_l - p_l\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\right) + \varsigma_a\nabla_lY_a + \nabla_kp_l\frac{\partial\omega}{\partial p_k} = 0\end{gathered} \tag{8.14}$$

(во втором из уравнений (8.13) так же, как и в случае нормальной ферми-жидкости, можно пренебречь вторым слагаемым). Замечая теперь, что $\varsigma_a = \dfrac{\partial\omega}{\partial Y_a}$, и, следовательно,

$$\varsigma_a\nabla_lY_a + \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\nabla_kp_l = \frac{\partial\omega}{\partial x_l}$$

(мы учли, что $\nabla_kp_i = \nabla_ip_k$), перепишем последнее из уравнений (8.14) в виде

$$\nabla_k\left(Y_0t_{lk} + \frac{\partial}{\partial Y_l}\omega Y_k - p_l\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\right) = 0.$$

Из полученных формул, так же, как и в случае нормальной ферми-жидкости, немедленно найдем

$$\begin{gathered} j_k = -\frac{Y_k}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial Y_4} + \frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k}, \quad j_{\gamma k} = -\frac{1}{Y_0}\frac{\partial}{\partial Y_\gamma}\omega Y_k, \\ t_{lk} = -\frac{1}{Y_0}\frac{\partial}{\partial Y_l}(Y_k\omega) + \frac{p_l}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k}. \end{gathered} \tag{8.15}$$

Эти выражения для плотностей потоков формально совпадают с соответствующими формулами для бозе-жидкости с синглетным спариванием.

8.4. Ферми-жидкость. Триплетное спаривание. B-фаза. Рассмотрим теперь систему, у которой в состоянии равновесия одновременно нарушена фазовая инвариантность и полностью нарушена инвариантность по отношению к поворотам в спиновом пространстве. Этому нарушению симметрии соответствует источник в равновесном распределении Гиббса

$$\hat{F} = \int d^3x \left(\hat{\chi}_{\alpha k}(x) R_{k\alpha} \mathrm{e}^{-2i\mathbf{p}_0\mathbf{x}} + \mathrm{h.\,c.}\right),$$

где $R_{k\alpha}$ — некоторая ортогональная матрица поворота ($R_{k\alpha}R_{l\alpha} = \delta_{kl}$). Такое состояние описывает изотропную сверхтекучую жидкость, свойство симметрии которой имеет вид (4.29). Как мы уже отмечали, такому источнику соответствует распределение Гиббса сверхтекучей B-фазы ^{3}He. Соответствующий источник $\hat{F}\{U\}$ в локально-равновесном распределении Гиббса определяется формулой

$$\begin{gathered} U_\varphi U_\theta \hat{F} U_\theta^+ U_\varphi^+ = \int d^3x \left(\hat{\chi}_{\alpha k}(x) R_{k\alpha}(x) \mathrm{e}^{-2i\tilde{\varphi}(x)} + \mathrm{h.\,c.}\right), \\ \tilde{R}_{k\alpha}(x) = R_{k\beta} a_{\beta\alpha}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \mathbf{p}_0\mathbf{x} + \varphi(x). \end{gathered} \tag{8.16}$$

Таким образом, вариации величин $R_{k\alpha}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$ определяются вариациями величин $a_{\alpha\beta}(x)$, $\varphi(x)$. Из формулы (8.12) и соотношений (6.7), (6.12) следует, что

$$U_\theta^+ \hat{\varsigma}_0(x) U_\theta =$$

$$= \hat{\varsigma}_0(x) + \frac{1}{2m}\left\{ i\underline{\omega}_{i\gamma}\nabla_i\hat{\psi}^+ s_\gamma\hat{\psi} - i\underline{\omega}_{i\gamma}\hat{\psi}^+ s_\gamma\nabla_i\hat{\psi} + \underline{\omega}_{i\gamma}\underline{\omega}_{i\lambda}\hat{\psi}^+ s_\gamma s_\lambda\hat{\psi}\right\}, \tag{8.17}$$

$$U_\theta^+ \left(Y_i\hat{\pi}_i + Y_4\hat{n} + Y_\alpha\hat{s}_\alpha\right) U_\theta = Y_i\hat{\pi}_i + Y_4\hat{n} + Y_i\underline{\omega}_{i\gamma}\hat{s}_\gamma + \underline{Y}_\beta\hat{s}_\beta,$$

где $\underline{Y}_\alpha = a_{\alpha\beta}Y_\beta$. Из этих формул и формулы (7.4) найдем, что термодинамический потенциал Ω является функционалом $\underline{\omega}_{i\gamma}$, p_i, $\underline{Y} \equiv (Y_0, Y_4, Y_i, \underline{Y}_\alpha)$:

$$\Omega = \Omega(\underline{\omega}_{i\gamma}, p_i, \underline{Y}). \tag{8.18}$$

Заметим, что это заключение справедливо не только для плотности энергии (8.12), но и для произвольной плотности энергии $\hat{\varsigma}_0(x)$, инвариантной относительно глобальных спиновых поворотов. Действительно, если плотность энергии $\hat{\varepsilon}(x)$ удовлетворяет свойству симметрии $[\hat{\varepsilon}(x), \hat{S}_\alpha] = 0$, то этот оператор строится из комбинаций операторов плотности спина, инвариантных относительно глобальных спиновых поворотов $\hat{s}_\alpha(x)\hat{s}_\alpha(x')$, где координаты точек x и x' свернуты с некоторым быстро убывающим ядром $J(x - x')$, определяемым обменными взаимодействиями. Учитывая определение (6.13) и замечая, что

$$a(x)\tilde{a}(x+y) = a(x)\exp{(y_k \nabla_k)}\tilde{a}(x) = \exp\, y_k D_k(\underline{\omega}(x)),$$

где

$$(D_k(\underline{\omega}(x)))_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}\nabla_k - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underline{\omega}_{\gamma k}(x),$$

мы приходим к сделанному заключению.

Вариация термодинамического потенциала $\underline{\delta}\Omega$ в соответствии с (7.18) может быть представлена в виде

$$\underline{\delta}\Omega = \delta_\varphi\Omega + \delta_\theta\Omega,$$

где

$$\delta_\varphi\Omega = \int d^3x \frac{\delta\Omega}{\delta p_i(x)}\nabla_i\delta\varphi(x) = -\int d^3x\delta\varphi(x)\nabla_i\frac{\delta\Omega}{\delta p_i(x)},$$

$$\delta_\theta\Omega = \int d^3x \left(\frac{\delta\Omega}{\delta\underline{\omega}_{k\gamma}(x)}\delta\underline{\omega}_{k\gamma}(x) + \frac{\delta\Omega}{\delta\underline{Y}_\alpha(x)}\delta a_{\alpha\beta}(x)Y_\beta(x)\right).$$

Последнее равенство, используя формулы (6.17), (6.11), можно записать в виде

$$\delta_\theta\Omega = \int d^3x \left(-\delta R_\alpha(x)\nabla_k\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\underline{\omega}_{k\gamma}(x)}a_{\gamma\alpha}(x)\right) + s_\lambda(x)\varepsilon_{\lambda\alpha\beta}\delta R_\alpha(x)Y_\beta(x)\right).$$

В терминах плотности термодинамического потенциала в главном приближении по градиентам термодинамических параметров имеем

$$\delta_\varphi\Omega = -\int d^3x\delta\varphi(x)\nabla_i\frac{\partial\omega}{\partial p_i(x)},$$

$$\delta_\theta\Omega = \int d^3x\delta R_\alpha(x)\,\left(-\nabla_k\left(\frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{k\gamma}(x)}a_{\gamma\alpha}\right) + s_\lambda(x)\varepsilon_{\lambda\alpha\beta}Y_\beta(x)\right).$$

Поэтому, приравнивая вариации при $\delta\varphi(x)$ в (7.4), получаем

$$\nabla_k \left(Y_0 j_k + Y_k n - \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \right) = 0, \tag{8.19}$$

приравнивая вариации при $\delta R_\alpha(x)$ в (7.4), находим

$$\nabla_k \left(Y_0 j_{\alpha k} + Y_k s_\alpha - \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{k\gamma}} a_{\gamma\alpha} \right) = 0. \tag{8.20}$$

После этого уравнение (7.4) примет вид

$$\int d^3x \delta x_l(x) \big\{ \nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + Y_k \pi_l \right) + \varsigma_a \nabla_l Y_a - \nabla_l \varphi \nabla_k \left(Y_0 j_k + Y_k n \right) - \\ - \omega_{l\gamma} \left(\nabla_k \left(Y_0 j_{\gamma k} + Y_k s_\gamma \right) + \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} Y_\alpha s_\beta \right) \big\} = 0, \tag{8.21}$$

или, с использованием (8.19), (8.20),

$$\nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + Y_k \pi_l \right) + \varsigma_a \nabla_l Y_a - \nabla_l \varphi \nabla_k \frac{\partial \omega}{\partial p_k} - \\ - \omega_{l\gamma} \left(\nabla_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} a_{\alpha\gamma} \right) + \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} Y_\alpha s_\beta \right) = 0.$$

Так как $\underline{Y}_\alpha = a_{\alpha\beta} Y_\beta$, $\varsigma_\alpha = \dfrac{\partial \omega}{\partial Y_\alpha}$, то $\varsigma_\alpha \dfrac{\partial Y_\alpha}{\partial x_l} = \dfrac{\partial \omega}{\partial \underline{Y}_\beta} \nabla_l \underline{Y}_\beta - s_\alpha Y_\gamma \varepsilon_{\gamma\alpha\lambda} \omega_{l\lambda}$ и, следовательно,

$$\nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + Y_k \pi_l - p_l \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial \underline{Y}_a} \nabla_l \underline{Y}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \nabla_l p_k - \\ - \underline{\omega}_{l\alpha} \nabla_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \underline{\omega}_{\beta l} a_{\beta\gamma} \nabla_k a_{\alpha\gamma} = 0. \tag{8.22}$$

Используя далее тождество Маурера–Картана (6.15), находим

$$\underline{\omega}_{l\alpha} \nabla_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \underline{\omega}_{\beta l} a_{\beta\gamma} \nabla_k a_{\alpha\gamma} = \nabla_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{k\alpha}} \underline{\omega}_{l\alpha} \right) - \nabla_l \underline{\omega}_{k\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{k\alpha}}.$$

После чего равенство (9.22) приобретает вид

$$\nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + \frac{\partial}{\partial Y_l} \omega Y_k - p_l \frac{\partial \omega}{\partial p_k} - \underline{\omega}_{l\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \right) = 0. \tag{8.23}$$

Из формул (8.19), (8.20), (8.23), как и прежде, следует, что

$$
\begin{gathered}
j_k = -\frac{Y_k}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial Y_4} + \frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k}, \quad j_{\alpha k} = -\frac{1}{Y_0}\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\omega Y_k + \frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{k\gamma}}a_{\gamma\alpha}, \\
t_{lk} = -\frac{1}{Y_0}\frac{\partial}{\partial Y_l}(Y_k\omega) + \frac{p_l}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} + \frac{\underline{\omega}_{l\alpha}}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{k\alpha}}.
\end{gathered} \tag{8.24}
$$

Приведенные формулы представляют собой локально-равновесные средние плотности потоков аддитивных интегралов движения для рассмотренного случая нарушенной симметрии [45].

8.5. Квантовый кристалл. Синглетное спаривание. Рассмотрим пространственно-периодическое упорядочение при наличии спонтанного нарушения фазовой инвариантности (квантовый кристалл). Такому упорядочению соответствует следующий источник в полностью равновесном распределении Гиббса (ср. с (3.3)):

$$
\hat{F} = \int d^3\xi(\hat{\Delta}(\xi)f_0(\xi) + \mathrm{h.\,c.}), \quad f_0(\xi) = \mathrm{e}^{-2i\mathbf{p}_0\boldsymbol{\xi}}\sum_{\tau}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\xi}},
$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — векторы обратной решетки, $\tau_i = b_i^\alpha n_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$; n_α — целые числа. Переменную интегрирования мы обозначили буквой ξ, чтобы подчеркнуть, что полностью равновесное состояние является недеформированным и, следовательно, переменную ξ можно отождествить с лагранжевой координатой. Источник в локально-равновесном распределении Гиббса определяется формулой

$$
\hat{F}\{U\} = U_\varphi U_f\hat{F}U_f^+U_\varphi^+. \tag{8.25}
$$

Так как

$$
U_\varphi U_f\hat{\Delta}(\xi)U_f^+U_\varphi^+ = \left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|U_\varphi\hat{\Delta}(x)U_\varphi^+ = \left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|\mathrm{e}^{-2i\varphi(x(\xi))}\hat{\Delta}(x(\xi)),
$$

то

$$
\begin{gathered}
\hat{F}\{U\} = U_\varphi U_f\hat{F}U_f^+U_\varphi^+ = \int d^3x\left(\hat{\Delta}(x)f(x) + \mathrm{h.\,c.}\right), \\
f(x) = \mathrm{e}^{-2i\tilde{\varphi}(x)}\sum_{\tau}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\xi}(x)}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \mathbf{p}_0\boldsymbol{\xi}(x) + \varphi(x).
\end{gathered}
$$

В силу равенства $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\xi}(x) = n_\alpha b_i^\alpha\xi_i(x)$ в окрестности точки x справедливо разложение

$$
\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\xi}\,(x+\eta) \approx n_\alpha b_i^\alpha\xi_i(x) + n_\alpha b_i^\alpha\nabla_j\xi_i(x)\eta_j.
$$

Деформированные векторы обратной решетки в точке x

$$b_j^\alpha(x) = b_i^\alpha \nabla_j \xi_i(x) \tag{8.26}$$

(η_j играют роль x_j в выражении для $f_0(\xi)$, мы предполагаем, что $a << \Delta << L$, где $a \approx 1/b$ — период решетки, L — характерные размеры неоднородностей и η — характерные размеры области усреднения). Термодинамический потенциал Ω в рассматриваемом случае будет, очевидно, функционалом переменных Y, p_i, b_j^α:

$$\Omega = \Omega(Y, p_i, b_j^\alpha), \quad p_i = p_k^0 \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i}.$$

Найдем вариацию p_i, связанную с варьированием $\varphi(x)$ и $x_j(\xi)$. Так как $\delta p_k^0 = 0$, то из последней формулы следует, что

$$\delta p_i = -p_l \frac{\partial \delta x_k}{\partial x^i} - \frac{\partial p_i}{\partial x^l}\delta x_l + \frac{\partial \delta \underline{\varphi}}{\partial x^i}, \tag{8.27}$$

где $\delta\underline{\varphi} = \delta x_l \nabla_l \varphi + \delta\varphi$. Поступая так же, как и при выводе формулы (8.27), найдем вариацию b_k^α, связанную с варьированием функций $x_j(\xi)$:

$$\delta b_j^\alpha(x) = -\frac{\partial b_j^\alpha(x)}{\partial x_l}\delta x_l - b_k^\alpha(x)\frac{\partial \delta x_k}{\partial x_j}. \tag{8.28}$$

Так как

$$\underline{\delta}\Omega = \int d^3x \left(\frac{\delta\Omega}{\delta p_i(x)}\delta p_i(x) + \frac{\delta\Omega}{\delta b_j^\alpha(x)}\delta b_j^\alpha(x) \right),$$

то в главном приближении по градиентам получим вариацию термодинамического потенциала

$$\underline{\delta}\Omega = \int d^3x \Big\{ -\delta\underline{\varphi}\nabla_i \frac{\partial\omega}{\partial p_i} + \delta x_l \left(-\frac{\partial\omega}{\partial b_j^\alpha}\nabla_l b_j^\alpha + \nabla_j \left(b_l^\alpha \frac{\partial\omega}{\partial b_j^\alpha} \right) \right) - \\ - \frac{\partial\omega}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_l \frac{\partial\omega}{\partial p_i} \right) \Big\}.$$

Отсюда и из (7.18) следует, что

$$\nabla_k \left(Y_0 j_k + Y_k n - \frac{\partial\omega}{\partial p_k} \right) = 0,$$

$$\nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + Y_k \frac{\partial}{\partial Y_l}\omega - p_l \frac{\partial \omega}{\partial p_k} - b_l^\alpha \frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha} \right) + \\ + \frac{\partial \omega}{\partial Y_a} \nabla_k b_j^\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial p_l} \nabla_k p_l + \frac{\partial \omega}{\partial b_j^\alpha} \nabla_k b_j^\alpha = 0.$$

Последние три слагаемых представляют собой градиент потенциала ω. Поэтому

$$\nabla_k \left(Y_0 t_{lk} + \frac{\partial Y_k \omega}{\partial Y_l} - p_l \frac{\partial \omega}{\partial p_k} - b_l^\alpha \frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha} \right) = 0.$$

Отсюда получим выражения для плотностей потоков аддитивных интегралов движения в локально-равновесном состоянии

$$j_k = -\frac{Y_k}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial Y_4} + \frac{1}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial p_k}, \quad t_{lk} = -\frac{1}{Y_0} \frac{\partial}{\partial Y_l} (Y_k \omega) + \frac{p_l}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial p_k} + \frac{b_l^\alpha}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha}. \quad (8.29)$$

Эти формулы совпадают с полученными ранее в работах [70] плотностями потоков аддитивных интегралов движения.

8.6. Ферми-жидкость. Триплетное спаривание. A-фаза. Рассмотрим теперь нарушение симметрии, аналогичное тому, которое имеет место в сверхтекучей A-фазе ^{3}He. Равновесный источник в распределении Гиббса имеет вид

$$\hat{F} = \int d^3\xi \left(\hat{\chi}_{\alpha k}(\xi) d_\alpha \Delta_k \mathrm{e}^{-2i\mathbf{p}_0 \boldsymbol{\xi}} + \mathrm{h.\,c.} \right), \quad (8.30)$$

где d_α — постоянный вещественный единичный спиновый вектор $d_\alpha d_\alpha = 1$ и Δ_k — постоянный комплексный пространственный вектор, такой, что

$$\Delta_k \Delta_k = 0, \quad \Delta_k \Delta_k^* = 2. \quad (8.31)$$

Источник $\hat{F}\{U\}$ в локально-равновесном распределении Гиббса имеет вид

$$\hat{F}\{U\} = U_\varphi U_\theta U_f \hat{F} U_f^+ U_\theta^+ U_\varphi^+ = \int d^3x \left(\hat{\chi}_{\beta l}(x) \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^2 d_\beta(x) \Delta^l(x) + \mathrm{h.\,c.} \right), \\ d_\beta(x) = d_\alpha a_{\alpha\beta}(x), \quad \Delta^l(x) = \mathrm{e}^{-2i(\varphi(x) + \mathbf{p}_0 \boldsymbol{\xi}(x))} \frac{\partial x^l}{\partial \xi_k} \Delta_k \quad (8.32)$$

(нарушены все три симметрии, связанные с преобразованиями U_φ, U_θ, U_f). Отсюда видно, что в качестве параметров, функционалом которых является термодинамический потенциал, следует выбрать комплексный пространственный вектор $\Delta^l(x)$ и действительный спиновый вектор $d_\beta(x)$ (фазовый множитель в рассматриваемом случае может быть включен в определение $\Delta^l(x)$).

Рассмотрим теперь трансформационные свойства величин $\Delta^l(x)$, которые при $\varphi(x) = 0$, $\mathbf{p}_0 = 0$ имеют вид $\Delta^l(x) = \dfrac{\partial x^l}{\partial \xi_k}\Delta_k$. При преобразовании $x^l \to x'^l = x'^l(x)$ эти величины преобразуются согласно формуле

$$\Delta^l(x) \to \Delta'^l(x') \equiv \frac{\partial x'^l}{\partial \xi_k}\Delta_k = \frac{\partial x'^l}{\partial x_k}\Delta_k(x)$$

(ξ_k и Δ_k не преобразуются).

Таким образом, параметры $\Delta^l(x)$ обладают свойствами контравариантного вектора, в соответствии с чем индекс l у этих величин, так же, как и у координаты x^l, будем писать вверху:

$$\Delta^l(x) = \frac{\partial x^l}{\partial \xi^k}\Delta^k, \quad \Delta^k \equiv \Delta_k. \tag{8.33}$$

В отличие от обычного тензорного анализа, x^l обозначает, как мы уже подчеркивали, не координаты одной и той же точки в разных координатных системах, а декартовы координаты одной и той же точки при различных деформациях. Используя вид ковариантного и контравариантного метрических тензоров (см. формулы (8.9)), определим ковариантный вектор

$$\Delta_l(x) = g_{li}(x)\Delta^i(x) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\Delta_i, \tag{8.34}$$

закон преобразования которого имеет вид

$$\Delta'_l(x') \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^l}\Delta_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\Delta_i(x).$$

Введем далее в рассмотрение символы Кристоффеля

$$\Gamma^j_{kl}(x) = g^{ij}(x)\frac{1}{2}\left(\nabla_k g_{il}(x) + \nabla_l g_{ik}(x) - \nabla_i g_{kl}(x)\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^r}\frac{\partial^2 \xi^r}{\partial x^k \partial x^l} \tag{8.35}$$

и с их помощью определим операцию ковариантного дифференцирования векторов $A_k(x), A^k(x)$:

$$D_i A_k(x) = \nabla_i A_k(x) - \Gamma^l_{ki}(x)A_l(x), \quad D_i A^k(x) = \nabla_i A^k(x) - \Gamma^k_{il}(x)A^l(x). \tag{8.36}$$

Легко проверить, что ковариантная производная контравариантного вектора $\frac{\partial x^l}{\partial \xi^k}\Delta^k$ равна нулю:

$$D_i\left(\frac{\partial x^l}{\partial \xi^k}\Delta^k\right) = 0, \quad \Delta^k - \text{const}.$$

Из определений (8.33), (8.34) следует, что и для деформированных состояний справедливы соотношения типа (8.30):

$$\Delta_l(x)\Delta^l(x) = 0, \quad \Delta_l^*(x)\Delta^l(x) = 2. \tag{8.37}$$

Так как фазовые преобразования эквивалентны умножению $\Delta^l(x)$ на фазовый множитель $\exp(-2i)\varphi(x)$, $\Delta^l(x) \to \Delta^l(x)\exp(-2i)\varphi(x)$, то естественно определить сверхтекучий импульс

$$p_i(x) = \frac{1}{8i}\left(\Delta_j(x)D_i\Delta^{j*}(x) - \Delta_j^*(x)D_i\Delta^j(x)\right). \tag{8.38}$$

Так как $\Delta^l(x) = \frac{\partial x^l}{\partial \xi^k}\Delta^k\exp(-2i)\left(\varphi(x) + \mathbf{p}_0\boldsymbol{\xi}(x)\right)$, то согласно (8.38)

$$p_i(x) = p_{0l}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + \nabla_i\varphi(x). \tag{8.39}$$

Введем полностью антисимметричный тензор третьего ранга

$$E^{ijl}(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}\varepsilon^{ijl}, \quad g(x) = \det|g_{ij}(x)| \tag{8.40}$$

и определим контравариантный вектор пространственной анизотропии

$$l^i(x) \equiv \frac{i}{2}E^{ijl}(x)\Delta_j(x)\Delta_l^*(x), \tag{8.41}$$

ортогональный вектору $\Delta_j(x)$: $l^i(x)\Delta_i(x) = 0$ и ковариантный вектор

$$l_i(x) \equiv g_{ij}(x)l^j(x).$$

Легко проверить, что $l^i(x)l_i(x) = 1$. Справедлива также формула

$$l_i(x) = \frac{\partial \xi^s}{\partial x^i}l_s, \quad l_s = i\varepsilon^{ijs}\Delta_i\Delta_j^*/2. \tag{8.42}$$

Мы выберем в качестве параметров, от которых зависит потенциал Ω, величины $Y(x)$, $l_i(x)$, $p_i(x)$, $d_\alpha(x)$, $g_{ik}(x)$. Мы выпишем зависимость плотности термодинамического потенциала $\omega(x)$ от метрического тензора $g_{ik}(x)$, чтобы правильно учесть зависимость от ко- и контравариантных величин. Таким образом, будем считать, что в приближении малых градиентов плотность термодинамического потенциала $\omega(x)$ зависит от координаты x посредством этих параметров и их градиентов:

$$\omega(x) = \omega\left(Y(x), l_i(x), \frac{\partial l_i(x)}{\partial x^k}, p_i(x), d_\alpha(x), \frac{\partial d_\alpha(x)}{\partial x^k}, g^{ij}(x)\right).$$

Найдем вариацию сверхтекучего импульса $p_i(x)$, обусловленную вариацией координат $x^l(\xi)$ и фазы $\varphi(x)$. Представим формулу (8.10) в виде

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} p_i(x) = p_{0k} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \xi^k}.$$

Так как $\delta p_{0l} = 0$, то

$$p_i(x)\frac{\partial \delta x^i}{\partial \xi^k} + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\left(\delta p_i(x) + \delta x_l \frac{\partial p_i(x)}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}\left(\delta\varphi + \delta x^l \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^l}\right),$$

или окончательно (см. формулу (7.6), определяющую $\delta\underline{\varphi}(x)$):

$$\delta p_i(x) = -\delta x^l \frac{\partial p_i(x)}{\partial x^l} - p_l(x)\frac{\partial \delta x^l(x)}{\partial x^i} + \frac{\partial \delta\underline{\varphi}(x)}{\partial x^i}. \tag{8.43}$$

Аналогичным образом из соотношения (8.42) получим вариацию ковариантного вектора пространственной анизотропии

$$\delta l_i(x) = -\delta x^l \frac{\partial l_i(x)}{\partial x^l} - l_k(x)\frac{\partial \delta x^k(x)}{\partial x^i}. \tag{8.44}$$

Найдем вариацию единичного вектора спиновой анизотропии. В соответствии с (8.32), (7.6) имеем

$$\delta d_\alpha(x) + \delta x^l \frac{\partial d_\alpha(x)}{\partial x^l} = d_\lambda \left(\delta a(x) + \delta x^l \frac{\partial a(x)}{\partial x^l}\right)_{\lambda\alpha}.$$

Согласно (6.11), (7.6) правую часть этого равенства можно переписать в виде

$$d_\lambda(x)\left(R(x) + \delta x^l \tilde{a}(x)\nabla_l a(x)\right)_{\lambda\alpha} = \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda} d_\gamma(x)\underline{R}_\lambda(x).$$

Таким образом,

$$\delta d_\alpha(x) = -\delta x^l \frac{\partial d_\alpha(x)}{\partial x^l} + \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda} d_\gamma(x)\delta\underline{R}_\lambda(x). \tag{8.45}$$

Выпишем, наконец, вариацию метрического тензора $g_{ik}(x)$. С этой целью заметим, что при переходе от одного деформированного состояния к другому метрический тензор $g_{ik}(x)$ обладает трансформационными свойствами:

$$g_{ik}(x) = g'_{mn}(x') \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k}.$$

Варьируя это соотношение, предварительно сделав замену переменных $x \to \xi$, $x' \to x$, можно записать

$$\delta g_{ik}(x) = -\frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^s} \delta x^s(x) - g_{mk}(x) \frac{\partial \delta x^m(x)}{\partial x^i} - g_{im}(x) \frac{\partial \delta x^m(x)}{\partial x^k}. \qquad (8.46)$$

Используя формулы (8.43)–(8.46), вариацию локально-равновесного потенциала Ω легко представить в виде

$$\underline{\delta}\Omega = \delta_p \Omega + \delta_l \Omega + \delta_d \Omega + \delta_g \Omega,$$

где

$$\delta_p \Omega = -\int d^3x \delta \underline{\varphi}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \omega}{\partial p_i} + \int d^3x \delta x^s(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(p_s \frac{\partial \omega}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial p_i}{\partial x^s} \frac{\partial \omega}{\partial p_i} \right),$$

$$\delta_l \Omega = -\int d^3x \delta x^s(x) \left(\frac{\partial l_i}{\partial x^s} \frac{\partial \omega}{\partial l_i} + \frac{\partial \dfrac{\partial l_i}{\partial x^k}}{\partial x^s} \frac{\partial \omega}{\partial \dfrac{\partial l_i}{\partial x^k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial l_i}{\partial x^s} \frac{\partial \omega}{\partial \dfrac{\partial l_i}{\partial x^k}} + \frac{\partial l_s}{\partial x^i} \frac{\partial \omega}{\partial \dfrac{\partial l_k}{\partial x^i}} + l_s \frac{\partial \omega}{\partial l_k} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(l_s \frac{\partial \omega}{\partial \dfrac{\partial l_k}{\partial x^i}} \right) \right] \right),$$

$$\delta_d \Omega = \int d^3x \left\{ \delta \underline{R}_\lambda \varepsilon_{\alpha\gamma\lambda} d_\gamma \left(\frac{\partial \omega}{\partial d_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \omega}{\partial \dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}} \right) + \right.$$

$$\left. + \delta x^s(x) - \frac{\partial d_\alpha}{\partial x^s} \frac{\partial \omega}{\partial d_\alpha} - \frac{\partial \dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}}{\partial x^s} \frac{\partial \omega}{\partial \dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}} + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial d_\alpha}{\partial x^s} \frac{\partial \omega}{\partial \dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}} \right) \right\},$$

$$\delta_g \Omega = \int d^3x \delta x^l \left(2 \frac{\partial}{\partial x^l} \left(g_{lj} \frac{\partial \omega}{\partial g_{kj}} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right).$$

Подставляя эти вариации в (7.4), после несложных вычислений получаем

$$\nabla_k\left(Y_0 j^k + Y^k n - \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\right) = 0,\ \nabla_k\left(Y_0 j^k_\gamma + Y^k s_\gamma - \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma} d_\lambda \frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^k}}\right) + Q = 0,$$

$$\nabla_k\left(Y_0 t_{lk} + Y_k \pi_l + \omega\delta_{kl} - p_l\frac{\partial\omega}{\partial p_k} - l_l\left(\frac{\partial\omega}{\partial l_k} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial l_k}{\partial x^i}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial l_i}{\partial x^l}\frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial l_i}{\partial x^k}} - \frac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}\frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^k}} - 2g_{lj}\frac{\partial\omega}{\partial g_{kj}}\right) = 0,$$

где

$$Q_\gamma = \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} Y_\alpha s_\beta + \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma} d_\lambda \frac{\partial\omega}{\partial d_\alpha} + \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma}\frac{\partial d_\lambda}{\partial x^l}\frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}}. \tag{8.47}$$

Так как термодинамический потенциал ω должен быть симметричным относительно глобальных поворотов в спиновом пространстве, то он будет зависеть только от инвариантов $\underline{Y} = Y_\alpha d_\alpha$, $q_l = Y_\alpha \dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}$, $q_{lr} = \dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}\dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^r}$. В этом случае

$$\frac{\partial\omega}{\partial d_\alpha} = \frac{\partial\omega}{\partial\underline{Y}} Y_\alpha, \quad \frac{\partial\omega}{\partial Y_\alpha} = s_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial\underline{Y}} d_\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial q_l}\frac{\partial d_\alpha}{\partial x^l},$$
$$d_\lambda\frac{\partial\omega}{\partial d_\alpha} = d_\lambda Y_\alpha \frac{\partial\omega}{\partial\underline{Y}} = Y_\alpha\left(s_\lambda - \frac{\partial\omega}{\partial q_l}\frac{\partial d_\lambda}{\partial x^l}\right).$$

Учитывая эти выражения, получаем

$$Q_\gamma = \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma}\frac{\partial d_\lambda}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\omega}{\partial q_{lp}}\frac{\partial d_\alpha}{\partial x^p} + \frac{\partial\omega}{\partial q_{pl}}\frac{\partial d_\alpha}{\partial x^p}\right) = 0.$$

В результате имеем следующие выражения для плотностей потоков аддитивных интегралов движения в локально-равновесном состоянии:

$$j_k = -\frac{\partial}{\partial Y_4}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p^k}, \quad j_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{1}{Y_0}\varepsilon_{\alpha\lambda\gamma} d_\lambda \frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial d_\gamma}{\partial x^k}},$$

$$t_{lk} = -\frac{\partial}{\partial Y^l}\frac{Y_k\omega}{Y_0} + \frac{p_l}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p^k} + \frac{l_l}{Y_0}\left(\frac{\partial\omega}{\partial l^k} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial l^k}{\partial x^i}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{Y_0}\frac{\partial l_i}{\partial x^l}\frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial l_i}{\partial x^k}} + \frac{1}{Y_0}\frac{\partial d_\alpha}{\partial x^l}\frac{\partial\omega}{\partial\dfrac{\partial d_\alpha}{\partial x^k}} + \frac{2g_{lj}}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial g^{kj}}. \quad (8.48)$$

9. СВЯЗЬ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ В СОСТОЯНИИ ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ С ОСТАЛЬНЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ ПОТОКОВ АДДИТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

В этом разделе мы установим общую связь между всеми плотностями потоков аддитивных интегралов движения в состоянии локального статистического равновесия. Будем исходить из равенства

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{a}(x)+\hat{b}(x)\right] \equiv 0, \quad (9.1)$$

где

$$\hat{A} = \int d^3x\hat{a}(x) = \int d^3xY_0(x)\hat{\varepsilon}_\nu(x), \quad \hat{B} = \int d^3x\hat{b}(x) = \int d^3xY_{a'}(x)\hat{\zeta}_{a'}(x),$$

$a' \equiv i$, 4, α и $\hat{w}$ — локально-равновесный статистический оператор (6.27). В соответствии с тождеством (9.1) получим (см. формулы (7.7))

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\left[\hat{A},\hat{a}(x)\right] = -\nabla_kQ_k(x), \quad i\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\left[\hat{B},\hat{b}(x)\right] = -\nabla_kT_k(x),$$

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\left[\hat{A},\hat{b}(x)\right] + i\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\left[\hat{B},\hat{a}(x)\right] = -\nabla_kR_k(x),$$

здесь

$$Q_k(x) = \frac{i}{2}\int d^3x'x'_k\int_0^1 d\lambda Y_0\left(x-(1-\lambda)\,x'\right)Y_0\left(x+\lambda x'\right)\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\left[\hat{\varepsilon}_\nu\left(x-(1-\lambda)\,x'\right),\hat{\varepsilon}_\nu\left(x+\lambda x'\right)\right],$$

$$T_k(x) = \frac{i}{2}\int d^3x'x'_k\int_0^1 d\lambda Y_{a'}\left(x-(1-\lambda)\,x'\right)Y_{b'}\left(x+\lambda x'\right)\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\,\hat{w}\left[\hat{\zeta}_{a'}\left(x-(1-\lambda)\,x'\right),\hat{\zeta}_{b'}\left(x+\lambda x'\right)\right],\ a',b' \neq 0,$$

$$R_k(x) = \frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int\limits_0^1 d\lambda Y_0\left(x-(1-\lambda)x'\right) Y_{b'}\left(x+\lambda x'\right) \times \\ \times \operatorname{Sp}\hat{w}\left[\hat{\varepsilon}_\nu\left(x-(1-\lambda)x'\right), \hat{\zeta}_{b'}\left(x+\lambda x'\right)\right],\ b' \neq 0.$$

Пренебрегая здесь градиентами термодинамических параметров Y_a и учитывая соотношения (7.9), (7.11), (7.13), (7.15), находим

$$\nabla_k(Q_k + R_k + T_k) = 0, \tag{9.2}$$

где $Q_k = Y_0^2 q_k$, $D_k = Y_0 Y_a j_{ak} + Y_0 Y_k \varepsilon$, $T_k = Y_k Y_a \zeta_a$. При нахождении величины T_k мы воспользовались известными коммутационными соотношениями плотностей аддитивных интегралов движения. Отсюда следует, что вектор $Q_k + R_k + T_k$ не зависит от термодинамических параметров, т. е. является постоянным, и в силу отсутствия какого-либо выделенного направления в пространстве этот вектор равен нулю. Переходя к термодинамическому пределу, из (9.2) получаем [45]

$$Y_a(Y_k\zeta_a + Y_0\zeta_{ak}) = 0. \tag{9.3}$$

Это соотношение обобщает теорему о связи потоков аддитивных интегралов движения [71] на случай локально-равновесных состояний. Обратим внимание, что (9.3) не зависит от типа нарушенной симметрии и является универсальным для широкого класса конденсированных сред. Из (9.3) получаем следующее выражение для плотности потока энергии:

$$q_k = -\frac{Y_{a'}}{Y_0}\varsigma_{a'k} - \frac{Y_k}{Y_0}\frac{Y_a\varsigma_a}{Y_0}, \quad a' \neq 0. \tag{9.4}$$

Приведем ниже выражения для плотности потока энергии и общее выражение всех плотностей потоков аддитивных интегралов движения для рассмотренных в предыдущем разделе случаев.

9.1. Нормальная жидкость. В соответствии с формулами (8.3), (8.4), принимая во внимание (9.4), имеем выражение для плотности потока энергии

$$q_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0}. \tag{9.5}$$

Объединив формулы (8.3), (8.4), (9.5), запишем

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0}.$$

9.2. Нормальный кристалл. В этом случае найдем

$$q_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial b_0^\alpha}{\partial Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial b_k^\alpha},$$

где величина b_0^α определяется равенством $b_0^\alpha \equiv Y_0^{-1}\left(Y_k b_k^\alpha\right)$. Поэтому выражение для всех плотностей потоков имеет вид

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial b_0^\alpha}{\partial Y_a}\frac{\partial\omega}{\partial b_k^\alpha}.$$

9.3. Ферми-жидкость. Синглетное спаривание. Формула (9.4) и выражения для плотностей потоков (8.15) позволяют найти плотность потока энергии в терминах термодинамического потенциала

$$q_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{p_0}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k}.$$

В результате плотности всех потоков можно представить в виде единой формулы

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\frac{\partial p_0}{\partial Y_a}.$$

9.4. Ферми-жидкость. Триплетное спаривание. B-фаза. Подставляя формулы (8.24) в (9.4), находим плотность потока энергии в случае полного нарушения спиновой и фазовой симметрии

$$q_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{p_0}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} - \frac{\underline{\omega}_{\alpha 0}}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}}, \tag{9.6}$$

где

$$p_0 = \left(Y_4 + p_k Y_k\right)/Y_0, \quad \underline{\omega}_{\alpha 0} = \left(\underline{Y}_\alpha + Y_k\underline{\omega}_{\alpha k}\right)/Y_0. \tag{9.7}$$

Поэтому найденные выражения для плотностей потоков (8.24) и (9.6) в локально-равновесном состоянии можно записать в компактной форме [45]:

$$\underline{\zeta}_{ak} = -\frac{\partial}{\partial\underline{Y}_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_0}{\partial\underline{Y}_a}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} + \frac{\partial\underline{\omega}_{\alpha 0}}{\partial\underline{Y}_a}\frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}}. \tag{9.8}$$

При получении этих формул мы использовали тот факт, что соотношение (9.3) в случае полного нарушения спиновой симметрии можно переписать в виде

$$\underline{Y}_a\left(Y_k\underline{\zeta}_a + Y_0\underline{\zeta}_{ak}\right) = 0,$$

где $\underline{Y}_a = (Y_0, Y_k, Y_4, \underline{Y}_\alpha)$, $\underline{\varsigma}_a = \left(\varsigma_0, \varsigma_k, \varsigma_4, \underline{\varsigma}_\alpha\right)$, $\underline{\varsigma}_{ak} = \left(\varsigma_{0k}, \varsigma_{lk}, \varsigma_{4k}, \underline{\varsigma}_{\alpha k}\right)$ и $\underline{Y}_\alpha = a_{\alpha\beta} Y_\beta$, $\underline{\varsigma}_\alpha = a_{\alpha\beta}\varsigma_\beta$, $\underline{\varsigma}_{\alpha k} = a_{\alpha\beta}\varsigma_{\beta k}$. Если в формулах (9.8) исключить из набора термодинамических параметров форму Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}$ и величину $\underline{Y}_\alpha$, то мы получим выражения для потоков физических величин сверхтекучих систем с синглетным спариванием. Если в формулах (9.8) исключить сверхтекучий импульс p_i и параметры Y_4, Y_i, то приходим к выражениям для потоков, соответствующих многоподрешеточным магнетикам [58].

9.5. Квантовый кристалл. Синглетное спаривание. Согласно формулам (8.29) и (9.4) найдем выражение для плотности потока энергии в рассматриваемом случае

$$q_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_0}{\partial Y_0}\frac{\partial \omega}{\partial p_k} + \frac{\partial b_0^\alpha}{\partial Y_0}\frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha},$$

где величина b_0^α определяется равенством $b_0^\alpha \equiv Y_0^{-1}\left(Y_k b_k^\alpha\right)$. Аналогично можно представить плотности потоков аддитивных интегралов движения, когда наряду с фазовой инвариантностью нарушена трансляционная инвариантность [69]:

$$\varsigma_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_0}{\partial Y_a}\frac{\partial \omega}{\partial p_k} + \frac{\partial b_0^\alpha}{\partial Y_a}\frac{\partial \omega}{\partial b_k^\alpha}.$$

9.6. Ферми-жидкость. Триплетное спаривание. A-фаза. В соответствии с (8.48), (9.4) получим плотность потока энергии в локально-равновесном состоянии

$$\begin{aligned} q_k = &-\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_0}{\partial Y_0}\frac{\partial \omega}{\partial p^k} + \frac{\partial d_0^\gamma}{\partial Y_0}\frac{\partial \omega}{\partial \nabla^k d_\gamma} + \\ &+ \left[\frac{\partial \omega}{\partial \nabla^k l_j}\nabla^i l_j + l^i\frac{\partial \omega}{\partial l^k} - l^i\nabla_j\frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j l^k}\right]\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{Y_i}{Y_0} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial Y_0}\frac{\partial \omega}{\partial g^{kj}}, \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$d_0^\gamma \equiv \left([\mathbf{d}\times\mathbf{Y}]_\gamma + Y_k\nabla^k d_\gamma\right)/Y_0, \quad g_{0j} \equiv 2Y_k g_{lj}/Y_0.$$

В результате все плотности потоков записываются в виде

$$\begin{aligned} \zeta_{ak} = &-\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_0}{\partial Y_a}\frac{\partial \omega}{\partial p^k} + \frac{\partial d_0^\gamma}{\partial Y_a}\frac{\partial \omega}{\partial \nabla^k d_\gamma} + \\ &+ \left[\frac{\partial \omega}{\partial \nabla^k l_j}\nabla^i l_j + l^i\frac{\partial \omega}{\partial l^k} - l^i\nabla_j\frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j l^k}\right]\frac{\partial}{\partial Y_a}\frac{Y_i}{Y_0} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial Y_a}\frac{\partial \omega}{\partial g^{kj}}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Выписанные формулы решают задачу нахождения плотностей потоков аддитивных интегралов движения ζ_{ak} в терминах термодинамического потенциала.

10. ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ЭТАП ЭВОЛЮЦИИ И ПАРАМЕТРЫ СОКРАЩЕННОГО ОПИСАНИЯ

Как было показано в разд. 2, возникновение дополнительных термодинамических параметров в состоянии статистического равновесия связано с условиями ненарушенной и пространственной симметрии. С помощью концепции квазисредних возможно введение этих параметров в равновесный статистический оператор Гиббса. В отличие от термодинамических сил, которые в состоянии равновесия не зависят от координат, другие дополнительные термодинамические параметры, такие как, например, сверхтекучая фаза или ортогональная матрица поворота, в состоянии равновесия могут нести пространственную и временную зависимость. Обобщение концепции квазисредних на локально-равновесные состояния заключается во введении локальных унитарных преобразований (6.26), для которых параметры преобразований, так же, как и термодинамические силы, теперь являются произвольными функциями координат.

Рассмотренные ранее примеры структуры локально-равновесного статистического оператора естественным образом подсказывают формулировку гипотезы сокращенного описания при рассмотрении эволюции произвольного неравновесного статистического оператора в области достаточно больших времен. При построении уравнений гидродинамики в случае систем со спонтанно нарушенной симметрией физическими величинами, играющими роль параметров сокращенного описания, являются плотности аддитивных интегралов движения, как это имеет место в нормальных системах, и дополнительные параметры сокращенного описания, которые тесно связаны с унитарными преобразованиями (6.1), (6.6), (6.18). Как мы видели, величины $\{\varphi_\eta(x)\} \equiv \varphi(x)$, $\theta_\alpha(x)$, $f_l(x)$ определяют локально-равновесный статистический оператор, структура которого в случае систем со спонтанно нарушенной симметрией теснейшим образом связана с методом квазисредних. В свою очередь, для правильного понимания метода квазисредних необходимо знать свойства дополнительных параметров сокращенного описания, которые снимают вырождение изучаемой физической системы. В общем случае дополнительные физические параметры, необходимые для описания состояния системы со спонтанно нарушенной симметрией, будем обозначать

$$g_\alpha(x, \hat{\rho}) = g_\alpha(x, \operatorname{Sp} \hat{\rho}\hat{\Delta}(x)). \tag{10.1}$$

Они являются функциями пространственной переменной x и функционалами произвольного статистического оператора $\hat{\rho}$. Такие переменные можно представить в терминах некоторых нелинейных функционалов статистического оператора $\hat{\rho}$ и операторов параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$. Полевая структура оператора параметра порядка в терминах операторов рождения и уничтожения определяется характером вырождения.

Вариацию параметров $g_\alpha(x,\hat\rho)$ по статистическому оператору $\hat\rho$ можно, очевидно, представить в виде

$$\delta g_\alpha(x,\hat\rho) = g_\alpha(x,\hat\rho+\delta\hat\rho) - g_\alpha(x,\hat\rho) \equiv \operatorname{Sp}\delta\hat\rho\hat g_\alpha(x,\hat\rho). \tag{10.2}$$

Это соотношение является определением варьированного оператора $\hat g_\alpha(x,\hat\rho)$, который также является функционалом статистического оператора $\hat\rho$. Здесь согласно определению (10.2) оператор $\hat g_\alpha(x,\hat\rho)$ может быть найден в терминах оператора параметра порядка. Отметим, что введенный варьированный оператор (10.2) определен с точностью до преобразования $\hat g \to \hat g' = \hat g + c(\hat\rho)$, где $c(\hat\rho)$ — некоторый произвольный c-числовой функционал статистического оператора $\hat\rho$. Это связано с тем, что в силу условия нормировки $\operatorname{Sp}\hat\rho = 1$. Мы полностью фиксируем оператор $\hat g(x,\hat\rho)$, если наложим условие

$$\operatorname{Sp}\hat\rho\hat g(x,\hat\rho) = 0. \tag{10.3}$$

Обратим внимание на то, что величины $g_a(x)$ действительны, поэтому варьированные операторы $\hat g_\alpha(x,\hat\rho)$ — эрмитовы, хотя в общем случае операторы параметра порядка не являются эрмитовыми. Линейные функционалы $a(x,\hat\rho) = \operatorname{Sp}\hat\rho\hat a(x)$ определяют обычное среднее оператора $\hat a(x)$. В этом случае $\hat a(x,\hat\rho) = \hat a(x)$.

Сформулируем уравнение движения для параметров $g_a(x)$. Так как согласно уравнению фон Неймана $\dfrac{\partial\hat\rho(t)}{\partial t} = i[\hat\rho(t),\hat{\mathcal H}]$ изменение статистического оператора $\hat\rho(t)$ за время δt определяется формулой $\delta\rho = -i[\hat{\mathcal H},\hat\rho]\delta t$, то временная эволюция параметров $g_\alpha(x,\hat\rho)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial g_\alpha\left(x,\hat\rho(t)\right)}{\partial t} = i\operatorname{Sp}\hat\rho(t)\left[\hat{\mathcal H},\hat g_\alpha(x,\hat\rho(t))\right]. \tag{10.4}$$

Таким образом, варьированные операторы играют аналогичную роль для физических величин, являющихся нелинейным функционалом статистического оператора, как и обычные линейные операторы физических величин.

Как мы увидим в приведенных далее примерах, параметры $g_\alpha(x,\hat\rho)$ связаны со свойствами симметрии исследуемой фазы и характеризуются определенными трансформационными свойствами при унитарных преобразованиях U_φ, U_θ, U_f статистического оператора $\hat\rho$:

$$g_\alpha\left(x', U\hat\rho U^+\right) = G_{\alpha\beta}\left(x'\right)g_\beta(x,\hat\rho), \quad x' = x_f(x). \tag{10.5}$$

Матрица $G_{\alpha\beta}$ задает трансформационные свойства параметров $g_\alpha(x,\hat\rho)$.

Рассмотрим вопрос о построении уравнений идеальной гидродинамики конденсированной среды со спонтанно нарушенной симметрией. Такая система на гидродинамическом этапе эволюции может быть описана сокращенным набором параметров — плотностями аддитивных интегралов движения $\zeta_a(x)$ и дополнительными параметрами $g_\alpha(x, \hat{\rho})$. Для плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_a(x) = \operatorname{Sp}\hat{\rho}\hat{\zeta}_a(x)$ согласно (7.8)–(7.15) справедливы дифференциальные законы сохранения

$$\dot{\varsigma}_a(x,t) = -\nabla_k \varsigma_{ak}(x,t) \equiv L_a(x,t), \quad \zeta_{ak}(x,t) = \operatorname{Sp}\hat{\rho}(t)\hat{\zeta}_{ak}(x). \tag{10.6}$$

Функциональная гипотеза, отражающая концепцию сокращенного описания для вырожденных конденсированных сред, записывается в виде асимптотического соотношения

$$\hat{\rho}(t) \underset{t>>\tau_r}{\rightarrow} \hat{\sigma}\left\{\zeta(x,t,\hat{\rho}), g(x,t,\hat{\rho})\right\}, \tag{10.7}$$

где τ_r — время релаксации. Параметры сокращенного описания как функционалы статистического оператора вводятся равенствами

$$\zeta_a(x) = \operatorname{Sp}\hat{\sigma}(\zeta(x'), \varphi(x'))\hat{\zeta}_a(x), \;\; g_\alpha(x) = g_\alpha\Big(x, \operatorname{Sp}\hat{\sigma}(\zeta(x'), g(x'))\hat{\Delta}(x)\Big). \tag{10.8}$$

Операторный функционал $\hat{\sigma}(\zeta, g)$ зависит от времени и начального статистического оператора $\hat{\rho}$ только посредством средних значений плотностей $\zeta_a(x)$ и $g(x)$. В соответствии с (10.7) и (10.8) получим уравнения движения для параметров сокращенного описания

$$\begin{gathered}\dot{\zeta}_a(x) = -\nabla_k \operatorname{Sp}\hat{\sigma}(\zeta, g)\,\hat{\zeta}_{ak}(x) \equiv L_a(x) \equiv L_a(x; \zeta, g), \\ \dot{g}_\alpha(x) = i\operatorname{Sp}\hat{\sigma}(\zeta, g)\Big[\hat{\mathcal{H}}, \hat{g}_\alpha(x, \hat{\sigma}(\zeta, g))\Big] \equiv L_{g_\alpha}(x) \equiv L_{g_\alpha}(x; \zeta, g).\end{gathered} \tag{10.9}$$

Следующий шаг в конкретном построении уравнений движения для параметров сокращенного описания заключается в нахождении статистического оператора $\hat{\sigma}(\zeta, g)$. В общем случае его можно представить в виде

$$\hat{\sigma}(\zeta, g) = \hat{w}(Y, \varphi) + \hat{\sigma}'(\zeta, g), \tag{10.10}$$

где $\hat{w}(Y,\varphi) \equiv \hat{w}(\zeta(Y,\varphi), g(Y,\varphi))$ — локально-равновесный статистический оператор, который описывает только обратимые процессы, а статистический оператор $\hat{\sigma}'(\zeta, g)$ определяет диссипативные процессы. Обратим внимание на то, что введенные дополнительные параметры сокращенного описания g (10.1) в общем случае не совпадают с параметрами преобразований φ (6.1), возникающих в локально-равновесном распределении Гиббса. Ниже мы сформулируем соотношения, которые связывают эти функционалы.

Использование уравнения фон Неймана и функциональной гипотезы (10.7) показывает, что для статистического оператора $\hat{\sigma}(\varsigma, \varphi)$ справедливо уравнение

$$\int d^3x \left\{ \frac{\delta \hat{\sigma}\,(\varsigma, \varphi)}{\delta \varsigma_a(x)} L_{\zeta_a}(x) + \frac{\delta \hat{\sigma}\,(\varsigma, \varphi)}{g_\alpha(x)} L_{g_\alpha}(x) \right\} = i \left[\hat{\sigma}\,(\varsigma, g)\,, \hat{\mathcal{H}} \right].$$

В пренебрежении диссипативными процессами ($\hat{\sigma} \approx \hat{w}$) уравнение движения для параметров g_α приобретает вид

$$\dot{g}_\alpha(x, t) = i \operatorname{Sp} \hat{w}\,(\zeta, \varphi) \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{g}_\alpha\,(x, \hat{w}\,(\zeta, \varphi)) \right].$$

Решение задачи конкретного введения параметров сокращенного описания, связанных с нарушенной симметрией, и их законов преобразования в случае синглетного спаривания фермионов будет приведено ниже в разд. 11, а для случая триплетного спаривания — в разд. 12 и 13.

При выводе уравнений гидродинамики существенным является построение теории возмущений по малым пространственным градиентам. Разложения

$$\begin{gathered} \varsigma_a\,(x + x') = \varsigma_a(x) + x' \nabla_k \varsigma_a(x) + ..., \\ g_\alpha\,(x + x') = g_\alpha(x) + x' \nabla_k g_\alpha(x) + \frac{1}{2} x' x' \nabla_i \nabla_k g_\alpha(x) + ... \end{gathered} \tag{10.11}$$

ведут к разложению оператора $\hat{\sigma}(x) \equiv \hat{\sigma}\{\varsigma(x + x'), g(x + x')\}$ в ряд по градиентам

$$\hat{\sigma}(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\sigma}^{(n)}(x), \tag{10.12}$$

где $\sigma^{(n)} \approx \lambda^n$; $\lambda \approx L^{-1}$; L — характерный размер неоднородности. Согласно (10.11) и (10.12) имеет место разложение функций $Y_a(x + x', \sigma)$ и $\varphi_\eta(x + x', \sigma)$, входящих в локально-равновесный статистический оператор $\hat{w}(x) \equiv \hat{w}\{Y(x + x'), \varphi(x + x')\}$, по градиентам гидродинамических параметров в точке x:

$$\begin{gathered} Y_a(x + x', \sigma) = Y_a(x, \sigma) + x' \nabla_k Y_a(x, \sigma) + ..., \\ \varphi_\eta(x + x', \sigma) = \varphi_\eta(x, \sigma) + x'_k \nabla_k \varphi_\eta(x, \sigma) + ..., \end{gathered}$$

а также разложение величин $Y_a(x, \sigma(x))$ и $\varphi_\eta(x, \sigma(x))$, связанное с разложением статистического оператора $\hat{\sigma}(x)$:

$$Y_a(x, \hat{\sigma}(x)) = Y_a \left(x, \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\sigma}^{(n)}(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_a^{(n)}(x),$$

$$\varphi_\eta\left(x, \hat{\sigma}(x)\right) = \varphi_\eta\left(x, \sum_{n=0}^{\infty}\hat{\sigma}^{(n)}(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_\eta^{(n)}(x).$$

Слагаемые $Y_a^{(n)}(x)$ и $\varphi_\eta^{(n)}(x)$ находим из условий

$$\varsigma_a(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\left(\varsigma, \varphi\right)\hat{\varsigma}_a(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}^{(0)}(x)\hat{\varsigma}_a(0) = \mathrm{Sp}\,\hat{w}^{(0)}(x)\left(Y^{(0)}, \varphi^{(0)}\right)\hat{\varsigma}_a(0),$$

$$g_\alpha(x) = g_\alpha\left(x, \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\left(\varsigma, g\right)\hat{\Delta}(x)\right) = g_\alpha\left(x, \mathrm{Sp}\,\hat{w}^{(0)}\left(Y^{(0)}, \varphi^{(0)}\right)\hat{\Delta}(x)\right).$$

11. ГИДРОДИНАМИКА. СИНГЛЕТНОЕ СПАРИВАНИЕ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

Для сверхтекучей жидкости с синглетным спариванием введем среднее значение оператора параметра порядка $\hat{\Delta}(x) \equiv (i/2)\,\hat{\psi}(x)\sigma_2\hat{\psi}(x)$ (3.1) в состоянии $\hat{\rho}$:

$$\Delta(x, \hat{\rho}) = \mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\hat{\Delta}(x). \tag{11.1}$$

Тогда сверхтекучая фаза $\varphi(x, \hat{\rho}) \equiv g(x, \hat{\rho})$ определяется формулой

$$g(x, \hat{\rho}) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\ln\Delta(x, \hat{\rho}). \tag{11.2}$$

Для сверхтекучей жидкости со скалярным параметром порядка набор параметров сокращенного описания состоит из плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta(x,t)$ и сверхтекучей фазы $\varphi(x,t)$:

$$\hat{\rho}(t) \underset{t>>\tau_r}{\longrightarrow} \hat{\sigma}\left\{\zeta\left(x, t, \hat{\rho}\right), \varphi\left(x, t, \hat{\rho}\right)\right\}, \tag{11.3}$$

$$\zeta(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\left(\zeta, \varphi\right)\hat{\zeta}(x), \quad \varphi(x) = \mathrm{Im}\,\ln\mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\left(\zeta, \varphi\right)\hat{\Delta}(x)/2.$$

Исходя из уравнения Лиувилля, получаем функциональное уравнение для $\hat{\sigma}(\zeta, \varphi)$:

$$-i\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\sigma}\left(\zeta, \varphi\right)\right] = \int d^3x\left(\frac{\delta\hat{\sigma}\left(\zeta, \varphi\right)}{\delta\zeta_a(x)}L_a(x) + \frac{\delta\hat{\sigma}\left(\zeta, \varphi\right)}{\delta\varphi(x)}L_\varphi(x)\right). \tag{11.4}$$

Параметры сокращенного описания $\zeta_a(x,t), \quad \varphi(x,t)$ удовлетворяют уравнениям движения

$$\dot{\zeta}_a(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\left(\zeta(t), \varphi(t)\right)\hat{\zeta}_{ak}(x) \equiv L_a(x) \equiv L_a\left(x, \zeta(t), \varphi(t)\right), \tag{11.5}$$

$$\dot{\varphi}(x,t) = i\,\mathrm{Sp}\,\sigma\left(\zeta\left(t\right),\varphi(t)\right)\left[\hat{\mathcal{H}},\hat{\varphi}\left(x,\sigma\left(\zeta(t),\varphi(t)\right)\right)\right] = L_{\varphi}\left(x,\zeta\left(t\right),\varphi(t)\right). \tag{11.6}$$

Здесь в соответствии с (10.2) введен в рассмотрение варьированный оператор фазы сверхтекучей ферми-жидкости

$$\hat{\varphi}(x,\hat{\rho}) = \frac{1}{4i}\left(\frac{\hat{\Delta}(x)}{\Delta\left(x,\hat{\rho}\right)} - \frac{\hat{\Delta}^{+}(x)}{\Delta^{*}(x,\hat{\rho})}\right), \tag{11.7}$$

где $\Delta(x,\hat{\rho}) = \mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\hat{\Delta}(x)$. В силу явного вида оператора сверхтекучей фазы (11.2) справедливы соотношения

$$\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\hat{\varphi}(x,\hat{\rho}) = 0, \quad \hat{\varphi}(x,\hat{\rho}) = \hat{\varphi}^{+}(x,\hat{\rho}). \tag{11.8}$$

Используя (6.5), (6.16), (6.25), (11.2), легко показать, что фаза $\varphi(x,\hat{\rho})$ обладает следующими трансформационными свойствами:

$$\varphi\left(x,U_{\varphi'}\hat{\rho}U^{+}_{\varphi'}\right) = \varphi(x,\hat{\rho}) + \varphi'(x),$$

$$\varphi\left(x,U_{\theta}\hat{\rho}U^{+}_{\theta}\right) = \varphi(x,\hat{\rho}), \quad \varphi\left(x',U_{f}\hat{\rho}U^{+}_{f}\right) = \varphi(x,\hat{\rho}).$$

Использование определения оператора сверхтекучей фазы (11.7) и операторных выражений для плотностей аддитивных интегралов движения приводит к соотношениям

$$\begin{gathered}
i\,\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\left[\hat{n}(x),\hat{\varphi}\left(x',\hat{\rho}\right)\right] = -\delta\left(x-x'\right), \quad i\,\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\left[\hat{s}_{\alpha}(x),\hat{\varphi}\left(x',\hat{\rho}\right)\right] = 0,\\
i\,\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\left[\hat{\pi}_{k}(x),\hat{\varphi}\left(x',\hat{\rho}\right)\right] = -\delta\left(x-x'\right)\nabla_{k}\varphi(x,\hat{\rho}),
\end{gathered} \tag{11.9}$$

справедливым для произвольного статистического оператора.

Сверхтекучий импульс $\mathbf{p}(x,\hat{\rho})$ и фаза $\varphi(x,t)$ для произвольного статистического оператора, так же, как и в состоянии равновесия, связаны равенством

$$\mathbf{p}(x,\hat{\rho}) = \nabla\varphi(x,\hat{\rho}). \tag{11.10}$$

Для нахождения однозначного решения уравнений (11.5), (11.6) рассмотрим среднее $a(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}(\zeta(x'),\varphi(x'))\hat{a}(x)$. В силу принципа ослабления пространственных корреляций основной вклад в это среднее будут давать те значения параметров $\zeta_a(x')$ и $\varphi(x')$, значение аргумента x' которых близко к x. В соответствии с этим разложим оператор $\hat{\sigma}(\zeta,\varphi)$ в ряд по градиентам параметров $\zeta_a(x)$ и $\varphi(x)$. При этом следует иметь в виду, что величина

$\nabla\varphi$ не является малой, однако вторая производная $\nabla\nabla\varphi$ порядка $\nabla\zeta$. В соответствии со сказанным имеем

$$\overset{(0)}{\hat{\sigma}}(x) = \hat{\sigma}\left\{\zeta(x), \varphi(x) + (x_k - x'_k)\nabla_k\varphi(x)\right\},$$

т. е. статистический оператор $\overset{(0)}{\sigma}$ является функцией (а не функционалом) аргументов $\zeta(x)$, $\varphi(x)$, $\nabla\varphi(x)$. Для состояний равновесия с пространственной симметрией (3.13) получим

$$\overset{(0)}{\sigma}\left\{\zeta(x), \varphi(x) + x'\nabla\varphi(x)\right\} = \hat{w}\left\{Y(x), \nabla\varphi(x), \varphi(x)\right\}. \tag{11.11}$$

Здесь параметры $Y_a(x)$, как функции величин $\zeta(x), \mathbf{p}(x)$, определяются равенством $\mathrm{Sp}\,\hat{w}\,(Y, \mathbf{p}, \varphi)\,\hat{\zeta}_a(x) = \zeta_a(x)$. Подставляя оператор $\overset{(0)}{\sigma}$ в уравнения (11.5), (11.6), учитывая (8.15) и свойства симметрии (3.20), приходим к уравнениям сверхтекучей гидродинамики в главном приближении по пространственным градиентам

$$\dot{\zeta}_a = -\nabla_k \overset{(0)}{\zeta}_{ak}, \quad \dot{\varphi} = p_0 \equiv \frac{Y_4 + \mathbf{Y}\nabla\varphi}{Y_0}, \tag{11.12}$$

где плотности и потоки аддитивных интегралов движения $\zeta_a(x)$ и $\overset{(0)}{\zeta}_{ak}(x)$ связаны с термодинамическим потенциалом формулами (7.3), (8.15). Так как фаза φ входит в правые части этих уравнений только посредством $\nabla\varphi$, но не явно, то последнее уравнение (11.12) обычно записывают в виде

$$\dot{\mathbf{p}} = \nabla p_0, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{p} = 0. \tag{11.13}$$

Введем в рассмотрение плотность энтропии

$$s = -\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\mathrm{Sp}\,\hat{w}_\nu \ln\hat{w}_\nu = -\omega + Y_a\zeta_a.$$

Используя уравнения (11.12), получаем $\dot{s} = \nabla_k s Y_k/Y_0$, откуда следует, что перенос энтропии осуществляется нормальной компонентой жидкости, которая движется со скоростью $\mathbf{v}_n = -\mathbf{Y}/Y_0$.

Рассмотрим случай, когда система инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца $x^\mu \to x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu (x^0 \equiv t, x^k \equiv x_k)$. Равновесный статистический оператор релятивистской сверхтекучей жидкости имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{w}\,(Y_\mu, p_\mu, \varphi) = \exp\bigl[&V\omega - Y_\mu\hat{\mathcal{P}}^\mu - Y_4\hat{Q} - \\ &- \nu Y_\mu \int d\sigma^\mu \left\{\hat{\Delta}(x)\exp\left[-2i\left(p_\nu x^\nu + \varphi\right)\right] + \mathrm{h.\,c.}\right\}\bigr],\end{aligned} \tag{11.14}$$

где $Y_\mu \equiv (Y_0, Y_k)$, $p_\mu \equiv (p_0, p_k)$, $p_0 \equiv (Y_4 +, Y_k p_k)/Y_0$. Из формулы (11.14) следует закон преобразования статистического оператора Гиббса при преобразованиях Лоренца

$$U_a \hat{w}(Y_\mu, p_\mu, \varphi) U_a^+ = \hat{w}(Y'_\mu, p'_\mu, \varphi'),$$

$$Y'_\mu = Y_\nu a^\nu_\mu, \quad p'_\mu = p_\nu a^\nu_\mu, \quad \varphi' = \varphi.$$

Величины Y_μ и p_μ образуют 4-векторы, причем величина $Y_4 = -Y_\mu p^\mu$ представляет собой инвариант. Условие пространственной однородности (3.13) и условие стационарности (3.20) объединяются в релятивистски-инвариантное соотношение

$$\left[\hat{w}, \hat{\mathcal{P}}^\mu - p^\mu \hat{Q}\right] = 0.$$

При построении релятивистской термодинамики и гидродинамики целесообразно перейти к релятивистски-инвариантному потенциалу Гиббса $\omega' = \omega/Y_0$, который имеет физический смысл давления. Потенциал ω' является функцией релятивистских инвариантов:

$$\omega' = \omega'(Y^2, p^2, Y_\mu p^\mu). \tag{11.15}$$

Формулы (7.3), (8.15) можно переписать в эквивалентном виде, если в качестве независимых переменных выбрать величины $Y_\mu = (Y_0, Y_k)$, $p_\mu = (p_0, p_k)$ и от термодинамического потенциала ω перейти к потенциалу Гиббса $\omega' \equiv \omega/Y_0$:

$$j^\mu = \frac{\partial \omega'}{\partial p_\mu}, \quad t^{\mu\nu} = \frac{\partial \omega' Y^\nu}{\partial Y_\mu} + p^\mu \frac{\partial \omega'}{\partial p_\nu}. \tag{11.16}$$

Здесь введены релятивистские обозначения $j^\mu \equiv (n, j_k)$, $t^{00} \equiv \varepsilon$, $t^{0k} \equiv q_k$, $t^{ik} \equiv t_{ik}$, $t^{k0} \equiv \pi_k$. Поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ $(g_{00} = -1, g_{ik} = \delta_{ik}, g_{0k} = 0)$. Благодаря этому в соотношениях (11.16) величина j^μ представляет собой 4-вектор тока, а $t^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса. Уравнения идеальной гидродинамики релятивистской сверхтекучей жидкости имеют вид

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \frac{\partial j^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \quad \frac{\partial p^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial p^\nu}{\partial x^\mu} = 0. \tag{11.17}$$

Последнее уравнение получено объединением уравнения движения для сверхтекучего импульса с условием потенциальности течения (11.13), причем 4-импульс p_ν связан с фазой φ соотношением $p_\nu = \partial\varphi/\partial x^\nu$.

Плотность энтропии $s = -\omega + Y_a\zeta_a \equiv \overset{(0)}{s} = Y_0 Y_\mu \partial\omega'/\partial Y_\mu$ и плотность потока энтропии $s^k = -\overset{(0)}{s}\, Y_k/Y_0$ объединяются в 4-вектор

$$\overset{(0)}{s^\mu} = -Y^\mu Y_\nu \frac{\partial\omega'}{\partial Y_\nu},$$

который представляет собой 4-ток энтропии. Следствием уравнений (11.17) является условие адиабатичности течения сверхтекучей жидкости

$$\frac{\partial \overset{(0)}{s^\mu}}{\partial x^\mu} = 0.$$

Полученные в микроскопическом подходе [40] уравнения релятивистской гидродинамики (11.17) эквивалентны уравнениям, впервые найденным в работах [38, 39], в основе которых лежит феноменологический подход.

При нерелятивистском предельном переходе следует учесть, что выражения для операторов плотности энергии-импульса $\hat{t}_{\mu\nu}$ и тока $\hat{j}_\mu$ связаны при $c \to \infty$ с нерелятивистскими операторами плотностей потоков соотношениями

$$\hat{j}_0 \to \hat{n}, \quad \hat{j}_k \to \frac{1}{m}\hat{\pi}_k,$$

$$\hat{t}_{00} \to mc^2\hat{n} + \hat{\varepsilon}, \quad \hat{t}_{0k} \to c\hat{\pi}_k + \hat{q}_k, \quad \hat{t}_{ik} \to \hat{t}_{ik}$$

(мы учли при этом симметричность релятивистского тензора энергии-импульса). Используя эти формулы, можно показать, что релятивистские уравнения сверхтекучей гидродинамики переходят в уравнения гидродинамики галилеевской инвариантной теории.

12. ГИДРОДИНАМИКА A-ФАЗЫ ^{3}He

Для получения уравнений гидродинамики мы, согласно общей схеме, свяжем величины $\Delta^i(x)$, $d_\alpha(x)$ и средние значения параметра порядка наподобие того, как это сделал Боголюбов, введя для сверхтекучего ^{4}He фазу $\varphi(x,\hat{\rho}) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\ln \mathrm{Sp}\,\hat{\rho}\hat{\psi}(x)$ параметра порядка. Построенные таким образом величины $\Delta^i(x,\hat{\rho})$, $d_\alpha(x,\hat{\rho})$ являются функционалами неравновесного статистического оператора и удовлетворяют определенным трансформационным свойствам при унитарных преобразованиях U_φ, U_θ, U_f. Именно величины

$d_\alpha(x,\hat\rho)$ должны удовлетворять соотношениям

$$d_\alpha\left(x,U_\varphi\hat\rho U_\varphi^+\right)=d_\alpha(x,\hat\rho),\ d_\alpha\left(x,U_\theta\hat\rho U_\theta^+\right)=d_\beta(x,\hat\rho)a_{\beta\alpha}\left(\theta(x)\right),$$
$$d_\alpha\left(x',U_f\hat\rho U_f^+\right)=d_\alpha(x,\hat\rho), \tag{12.1}$$

а величины $\Delta^i(x,\hat\rho)$ — соотношениям

$$\Delta^i\left(x,U_\varphi\hat\rho U_\varphi^+\right)=\mathrm{e}^{2i\varphi(x)}\Delta^i(x,\hat\rho),\quad \Delta^i\left(x,U_\theta\hat\rho U_\theta^+\right)=\Delta^i(x,\hat\rho),$$
$$\Delta^i\left(x',U_f\hat\rho U_f^+\right)=\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\Delta^l(x,\hat\rho), \tag{12.2}$$

где функция $x'(x)$ связана с функцией $f(x)$, определяющей унитарное преобразование U_f, соотношением

$$U_f\hat\psi(x)U_f^+=\sqrt{\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|}\hat\psi\left(x'(x)\right). \tag{12.3}$$

В разд. 8 мы ввели величины $\Delta^i(x)$, связав их с функциями $x'=x'(\xi)$, которые определяют эйлеровы координаты x' в терминах лагранжевых координат ξ. Сделаем аналогичное построение для функционалов $\Delta^i(x,\hat\rho)$. Для этого заметим, что эйлеровы координаты x^i теперь рассматриваются как функции лагранжевых координат ξ и функционалы неравновесного статистического оператора $\hat\rho$

$$x^i=x^i\left(\xi,\hat\rho\right).$$

Разрешая это уравнение относительно ξ^i, имеем

$$\xi^i=\xi^i(x,\hat\rho).$$

Совершим над статистическим оператором $\hat\rho$ унитарное преобразование U_f, связанное с преобразованием деформации $x'=x'(x)$ соотношением (12.3):

$$\hat\rho\to\hat\rho'=U_f\hat\rho U_f^+,\quad x\to x'=x'(x). \tag{12.4}$$

Тогда в силу неизменности лагранжевых координат функционалы $\xi(x,\hat\rho)$ удовлетворяют соотношениям

$$\xi(x,\hat\rho)=\xi\left(x',\hat\rho'\right). \tag{12.5}$$

Положим (ср. с (8.33))

$$\Delta^i(x,\hat\rho)=\frac{\partial x^k\left(\xi,\hat\rho\right)}{\partial\xi^l}\Delta^l,$$

тогда

$$\Delta^k(x',\hat{\rho}') = \frac{\partial x'^k(\xi,\hat{\rho}')}{\partial \xi^s}\Delta^s = \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^r}\frac{\partial x^r(\xi,\hat{\rho}')}{\partial \xi^s}\Delta^s = \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^r}\Delta^r(x,\hat{\rho}). \tag{12.6}$$

Мы видим, что при деформациях величина $\Delta^i(x,\hat{\rho})$ преобразуется как контравариантный вектор. Аналогичным образом легко получить, что величины

$$g_{ik}(x,\hat{\rho}) \equiv \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^k}, \quad g^{ik}(x,\hat{\rho}) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^l} \tag{12.7}$$

преобразуются как ко- и контравариантные метрические тензоры, являющиеся функционалами произвольного статистического оператора. Для метрического тензора при локальных преобразованиях справедливы законы преобразования

$$\begin{gathered} g^{ik}\left(x',U_f\hat{\rho}U_f^+\right) = g^{mn}(x,\hat{\rho})\frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^k}{\partial x^n}, \\ g_{ik}\left(x',U_f\hat{\rho}U_f^+\right) = g_{lj}(x,\hat{\rho})\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^k}, \\ g^{ik}\left(x,U_\varphi\hat{\rho}U_\varphi^+\right) = g^{ik}(x,\hat{\rho}), \quad g^{ik}\left(x,U_\theta\hat{\rho}U_\theta^+\right) = g^{ik}(x,\hat{\rho}), \\ g_{ik}\left(x,U_\varphi\hat{\rho}U_\varphi^+\right) = g_{ik}(x,\hat{\rho}), \quad g_{ik}\left(x,U_\theta\hat{\rho}U_\theta^+\right) = g_{ik}(x,\hat{\rho}). \end{gathered} \tag{12.8}$$

Ковариантный пространственный вектор $\Delta_i(x,\hat{\rho})$ в соответствии с этим определим равенством

$$\Delta_i(x,\hat{\rho}) \equiv g_{ik}(x,\hat{\rho})\Delta^k(x,\hat{\rho}). \tag{12.9}$$

Введем варьированный оператор единичного вектора спиновой анизотропии $\hat{d}_\alpha(x,\hat{\rho})$ соотношением

$$\delta d_\alpha(x,\hat{\rho}) = \operatorname{Sp}\delta\hat{\rho}\hat{d}_\alpha(x,\hat{\rho}), \tag{12.10}$$

здесь $\hat{d}_\alpha(x,\hat{\rho})$ — эрмитов оператор, зависящий от исходного статистического оператора $\hat{\rho}$. Получим свойства этого оператора, основываясь на трансформационных соотношениях (12.1). Рассмотрим бесконечно малый спиновый поворот $\delta a_{\alpha\beta}(\theta) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta\theta_\gamma$:

$$\delta d_\alpha\left(x,U_\theta\hat{\rho}U_\theta^+\right) = -d_\beta(x,\hat{\rho})\varepsilon_{\alpha\beta\lambda}\delta\theta_\lambda(x). \tag{12.11}$$

С другой стороны, так как

$$\delta\left(U_\theta\hat{\rho}U_\theta^+\right) = i\int d^3x\delta\theta_\alpha(x)\left[\hat{s}_\alpha(x),\hat{\rho}\right],$$

то вариацию $\delta d_\alpha(x, U_\theta \hat{\rho} U_\theta^+)$ можно представить в виде

$$\delta d_\alpha \left(x, U_\theta \hat{\rho} U_\theta^+\right) = -i \int d^3x' \delta\theta_\gamma(x') \mathrm{Sp}\, [\hat{\rho}, \hat{s}_\gamma(x')]\, \hat{d}_\alpha(x, \hat{\rho}). \tag{12.12}$$

Откуда, сравнивая соотношения (12.11) с (12.12), получаем

$$i\, \mathrm{Sp}\, \hat{\rho} \left[\hat{s}_\alpha(x'), \hat{d}_\gamma(x, \hat{\rho})\right] = \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma} d_\lambda(x, \hat{\rho}) \delta(x - x'). \tag{12.13}$$

Другие соотношения для варьированного оператора спиновой анизотропии получим, рассмотрев локальные фазовые преобразования и произвольные деформации. Повторяя аналогичные рассуждения, приходим к равенствам

$$\begin{gathered} i\, \mathrm{Sp}\, \hat{\rho} \left[\hat{n}(x'), \hat{d}_\gamma(x, \hat{\rho})\right] = 0, \\ i\, \mathrm{Sp}\, \hat{\rho} \left[\hat{\pi}_k(x'), \hat{d}_\gamma(x, \hat{\rho})\right] = -\delta(x - x') \nabla_k d_\gamma(x, \hat{\rho}). \end{gathered} \tag{12.14}$$

Обращаясь к формулам (12.6), (12.9), находим соотношения, которым удовлетворяют варьированные операторы ко- и контравариантных векторов $\hat{\Delta}_i(x, \hat{\rho})$, $\hat{\Delta}^i(x, \hat{\rho})$:

$$\begin{gathered} \mathrm{Sp}\, \hat{\rho} \left[\hat{s}_\alpha(x'), \hat{\Delta}_k(x, \hat{\rho})\right] = 0, \\ \mathrm{Sp}\, \hat{\rho} \left[\hat{n}(x'), \hat{\Delta}_k(x, \hat{\rho})\right] = -2\delta(x - x') \Delta_k(x, \hat{\rho}), \\ i\, \mathrm{Sp}\, \hat{\rho} \left[\hat{\pi}_l(x'), \hat{\Delta}_i(x, \hat{\rho})\right] = -\Delta_l(x, \hat{\rho}) \nabla'_i \delta(x - x') + \delta(x - x') \nabla_l \Delta_i(x, \hat{\rho}), \\ i\, \mathrm{Sp}\, \hat{\rho} \left[\hat{\pi}_l(x'), \hat{\Delta}^j(x, \hat{\rho})\right] = \delta_l^j \Delta^m(x, \hat{\rho}) \nabla'_m \delta(x - x') + \delta(x - x') \nabla_l \Delta^j(x, \hat{\rho}). \end{gathered} \tag{12.15}$$

Введем теперь вектор смещения, рассматривая его как функцию эйлеровых координат и функционал неравновесного статистического оператора:

$$x_k\, (\xi, \hat{\rho}) \equiv \xi_k + u_k(x, \hat{\rho}). \tag{12.16}$$

Тогда

$$\left(\delta_k^i - \frac{\partial u^i\, (x, \hat{\rho})}{\partial x^k}\right) \delta x^k\, (\xi, \hat{\rho}) = \delta u^i(x, \hat{\rho}),\ \delta u^i(x, \hat{\rho}) = \mathrm{Sp}\, \delta\hat{\rho}\hat{u}^i(x, \hat{\rho}). \tag{12.17}$$

Пусть $\delta\hat{\rho}$ — вариация статистического оператора, связанная с унитарным преобразованием $U = U_\varphi U_\theta U_f$. В случае бесконечно малых функций f, φ, θ в унитарном преобразовании U запишем

$$\delta\hat{\rho} = i \int d^3x' \left[f^l(x') \hat{\pi}_l(x') + \varphi(x') \hat{n}\, (x') + \theta_\beta(x') \hat{s}_\beta\, (x'), \hat{\rho}\right].$$

Согласно (12.3), (12.4) вариация эйлеровых координат может быть представлена в виде

$$\delta x^k \equiv x'^k(x) - x^k = -\delta f^k(x). \tag{12.18}$$

Поэтому из (12.17), (12.18) следуют соотношения

$$\begin{gathered} i \operatorname{Sp} \rho \left[\hat{\pi}_l(x'), \hat{u}^i(x,\hat{\rho})\right] = \left(\delta^i_k - \frac{\partial u^i(x,\hat{\rho})}{\partial x^k}\right) \delta(x-x'), \\ \operatorname{Sp} \rho \left[\hat{s}_\alpha(x'), \hat{u}^i(x,\hat{\rho})\right] = 0, \quad \operatorname{Sp} \rho \left[\hat{n}(x'), \hat{u}^i(x,\hat{\rho})\right] = 0. \end{gathered} \tag{12.19}$$

Для получения динамических уравнений величин $d_\alpha(x,\hat{\rho})$, $\Delta^i(x,\hat{\rho})$ и $u^i(x,\hat{\rho})$ выберем вариацию статистического оператора $\delta\hat{\rho}$ в виде $\delta\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t+\delta t) - \hat{\rho}(t) = i\left[\hat{\rho}(t), \hat{\mathcal{H}}\right]\delta t$. Тогда согласно (9.4) найдем

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Delta_k(x,\hat{\rho}(t))}{\partial t} = i \operatorname{Sp} \hat{\rho}(t) \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\Delta}_k(x,\hat{\rho}(t))\right], \\ \frac{\partial d_\alpha(x,\hat{\rho}(t))}{\partial t} = i \operatorname{Sp} \hat{\rho}(t) \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{d}_\alpha(x,\hat{\rho}(t))\right], \\ \frac{\partial u(x,\hat{\rho}(t))}{\partial t} = i \operatorname{Sp} \hat{\rho} \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{u}^i(x,\hat{\rho}\,(t))\right]. \end{gathered} \tag{12.20}$$

Приведем пример конкретной реализации векторов спиновой и пространственной анизотропии в терминах оператора параметра порядка $\chi_{\alpha i}(x,\hat{\rho}) \equiv \operatorname{Sp} \hat{\rho}\hat{\chi}_{\alpha i}(x)$:

$$\begin{gathered} d_\alpha(x,\hat{\rho}) \equiv D_\alpha(x,\hat{\rho})/D(x,\hat{\rho}), \\ D_\alpha(x,\hat{\rho}) \equiv i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\chi_{\beta k}(x,\hat{\rho}) g^{kl}(x,\hat{\rho}) \chi^*_{\gamma l}(x,\hat{\rho}). \end{gathered} \tag{12.21}$$

Принимая во внимание трансформационные соотношения (6.31) для параметра порядка и учитывая определение (12.21), нетрудно убедиться в справедливости соотношений (12.1). Комплексный вектор пространственной анизотропии $\Delta^i(x,\hat{\rho})$ в терминах оператора параметра порядка определим равенством

$$\Delta_i(x,\hat{\rho}) \equiv \chi_{\alpha i}(x,\hat{\rho}) d_\alpha(x,\hat{\rho}) \left(\det g(x,\hat{\rho})\right)^{-3/2}. \tag{12.22}$$

С помощью этого определения и законов преобразования (6.31), (12.9) легко проверить справедливость трансформационных свойств (12.2).

Теорию гидродинамических процессов в сверхтекучем ^{3}He–A удобно строить, основываясь на методе сокращенного описания. Согласно этому методу при временах $t \gg \tau_0$ статистический оператор $\hat{\rho}(t)$ зависит от времени посредством набора параметров сокращенного описания. В качестве этих параметров следует взять плотности аддитивных интегралов движения, а также величины, связанные с нарушенной симметрией, то есть комплексные векторы пространственной анизотропии $\Delta_i(x,\hat\rho)$ и $\Delta^i(x,\hat\rho)$, а также действительный вектор спиновой анизотропии $d_\alpha(x,\hat\rho)$:

$$\hat\rho(t) \underset{t>>\tau_r}{\to} \hat\sigma\left\{\zeta\left(x,t,\hat\rho\right),\boldsymbol{\Delta}\left(x,t,\hat\rho\right),\mathbf{d}\left(x,t,\hat\rho\right)\right\},$$
$$\zeta_a(x)=\operatorname{Sp}\hat\sigma\left(\zeta,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\hat\zeta_a(x), \tag{12.23}$$
$$\boldsymbol{\Delta}(x)=\boldsymbol{\Delta}\left(x,\hat\sigma\left(\zeta,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\right),\quad \mathbf{d}(x)=\mathbf{d}\left(x,\hat\sigma\left(\zeta,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\right).$$

Для сокращения записи введено обозначение $\Delta(x)\equiv\left(\Delta_i(x),\Delta^i(x)\right)$. В этих соотношениях гидродинамические параметры $\boldsymbol{\Delta}\left(x,\hat\sigma\right)$ и $\mathbf{d}\left(x,\hat\sigma\right)$ определяются равенствами (12.21), (12.22), где вместо произвольного неравновесного статистического оператора выбирается огрубленный статистический оператор, описывающий эволюцию A-фазы сверхтекучей жидкости на гидродинамическом этапе. Исходя из уравнения Лиувилля для статистического оператора $\hat\sigma\left(\varsigma,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)$

$$i\left[\hat\sigma\left(\varsigma,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right),\hat{\mathcal{H}}\right]=\int d^3x\left\{\frac{\delta\hat\sigma\left(\varsigma,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)}{\delta\varsigma(x)}L_\zeta(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta\hat\sigma\left(\varsigma,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)}{\delta\boldsymbol{\Delta}(x)}L_{\boldsymbol{\Delta}}(x)+\frac{\delta\hat\sigma\left(\varsigma,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)}{\delta\mathbf{d}(x)}L_{\mathbf{d}}(x)\right\}, \tag{12.24}$$

найдем уравнения движения для параметров сокращенного описания. В силу (12.20) получим макроскопические уравнения движения

$$\dot\varsigma_a(x)\equiv L_a(x)=-\nabla_k\varsigma_{ak}(x),\quad \varsigma_{ak}(x)=\operatorname{Sp}\hat\sigma\left(\varsigma,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\hat\varsigma_{ak}(x),$$
$$\dot{\boldsymbol{\Delta}}(x)\equiv L_\Delta(x)=i\operatorname{Sp}\hat\sigma\left(\zeta,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\left[\hat{\mathcal{H}},\hat{\boldsymbol{\Delta}}\left(x\hat\sigma\left(\zeta,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\right)\right], \tag{12.25}$$
$$\dot{\mathbf{d}}(x)\equiv L_{\mathbf{d}}(x)=i\operatorname{Sp}\hat\sigma\left(\zeta,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\left[\hat{\mathcal{H}},\hat{\mathbf{d}}\left(x,\hat\sigma\left(\zeta,\boldsymbol{\Delta},\mathbf{d}\right)\right)\right].$$

Статистический оператор $\hat\sigma(t)$ в главном бездиссипативном приближении совпадает с локально-равновесным статистическим оператором $\hat\sigma(t)=\hat w+...$ и поэтому

$$\dot d_\alpha(x)=i\operatorname{Sp}\hat w\left[\hat{\mathcal{H}},\hat d_\alpha\left(x,\hat w\right)\right]$$

или, в пренебрежении градиентами $Y_0(x)$,

$$\dot d_\alpha(x)=-i\operatorname{Sp}\hat w\int d^3x'\left[Y^l(x')\hat\pi_l(x')+\right.$$
$$\left.+Y_4\left(x'\right)\hat n(x')+Y_\beta(x')\hat s_\beta(x'),\hat d_\alpha\left(x,\hat w\right)\right]/Y_0(x)$$

(мы воспользовались формулой (6.27) и тем, что коммутатор $\left[\hat{\varepsilon}(x'), \hat{d}_\alpha(x, \hat{w})\right]$ отличен от нуля только при $x \approx x'$). Используя формулы (12.13) и (12.14), получаем окончательно уравнение движения для единичного вектора спиновой анизотропии

$$\dot{d}_\alpha(x) - \frac{Y_l}{Y_0}\frac{\partial d_\alpha}{\partial x^l} = \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} d_\gamma \frac{Y_\beta}{Y_0}. \tag{12.26}$$

Уравнение движения для параметра сокращенного описания пространственного комплексного вектора анизотропии $\Delta^i(x)$ в бездиссипативном приближении имеет вид

$$\dot{\Delta}^i(x) = i \operatorname{Sp} \hat{w} \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\Delta}^i(x, \hat{w})\right]$$

или, в пренебрежении градиентами Y_0,

$$\dot{\Delta}^i(x) = -\frac{i}{Y_0(x)} \operatorname{Sp} \hat{w} \int d^3x' \big[Y^l(x')\hat{\pi}_l(x') + Y_4(x')\hat{n}(x') + \\ + Y_\beta(x')\hat{s}_\beta(x'), \hat{\Delta}^i(x, \hat{w})\big].$$

Учитывая формулы (12.15), получаем

$$\dot{\Delta}^i - \frac{Y^l}{Y_0}\frac{\partial \Delta^i}{\partial x^l} = -\Delta^l \nabla_l \frac{Y^i}{Y_0} - 2i\mu\Delta^i. \tag{12.27}$$

С целью преобразования этого уравнения обратимся к формулам (12.14). В главном приближении уравнение движения для вектора смещения

$$\dot{u}^i(x, \hat{w}) = i \operatorname{Sp} \hat{w} \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{u}^i(x, \hat{w})\right].$$

Так как в пренебрежении градиентами Y_0

$$\dot{u}^i(x, \hat{w}) = \frac{i}{Y_0(x)} \operatorname{Sp} \hat{w} \int d^3x' \left[Y_0(x')\hat{\varepsilon}(x'), \hat{u}^i(x, \hat{w})\right],$$

то, используя (6.27) и преобразования, аналогичные тем, которые привели к (12.26), (10.27), имеем

$$\dot{u}^i = \left(\delta^i_k - \frac{\partial u^i(x, \hat{\rho})}{\partial x^k}\right) v^l, \quad \dot{x}^i(\xi, \hat{\rho}) = v^i(x, t), \tag{12.28}$$

где $v^l \equiv -Y^l/Y_0$ — нормальная скорость сверхтекучей жидкости.

Вычислим временную производную метрического тензора. Заметим с этой целью, что из соотношения $\dfrac{\partial \xi^s}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi^s}{\partial x^l}v^l=0$ следует равенство

$$\frac{\partial^2 \xi^s}{\partial x^i \partial t}=-\frac{\partial^2 \xi^s}{\partial x^j \partial x^l}v^l-\frac{\partial \xi^s}{\partial x^l}\frac{\partial v^l}{\partial x^i},$$

откуда, учитывая определение символов Кристоффеля (8.35), получаем

$$\frac{\partial^2 \xi^s}{\partial x^i \partial t}=-\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k}D_i v^k.$$

Поэтому окончательно уравнение движения для метрического тензора имеет вид

$$\dot{g}_{ij}=-D_i v_j-D_j v_i. \tag{12.29}$$

Используя определение ковариантных производных, уравнение (12.27) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\Delta}^l+v^k D_k \Delta^l=\Delta^k D_k v^l-2i\mu\Delta^l. \tag{12.30}$$

Найдем теперь уравнение движения для ковариантных компонент вектора Δ_i. Заметим, что $\Delta_i=g_{ij}\Delta^j$ и $D_k g_{ij}=0$, тогда с учетом (12.29), (12.30) получим

$$\dot{\Delta}_i+v^k\nabla_k\Delta_i=-\Delta_k\nabla_i v^k-2i\mu\Delta_i. \tag{12.31}$$

Из уравнений (12.30), (12.31) следует, что

$$\frac{\partial \Delta_l\Delta^l}{\partial t}+v^k\nabla_k\left(\Delta_l\Delta^l\right)+4i\mu\Delta_l\Delta^l=0,\quad \frac{\partial \Delta_l\Delta^{l^*}}{\partial t}+v^k\nabla_k\left(\Delta_l\Delta^{l^*}\right)=0.$$

Поэтому в соответствии со структурой равновесного параметра порядка Δ можно считать, что

$$\Delta_l\Delta^l=0,\quad \Delta_l^*\Delta^l=2. \tag{12.32}$$

Выпишем, наконец, полную систему уравнений, описывающих гидродинамическую эволюцию A-фазы ^{3}He. Таковыми являются, прежде всего, дифференциальные законы сохранения для плотности числа частиц $n(x)$, плотности спина $s_\alpha(x)$ и плотности импульса $\pi_k(x)$:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial j_k}{\partial x^k}=0,\quad \frac{\partial s_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial j_{\alpha k}}{\partial x^k}=0,\quad \frac{\partial \pi_i}{\partial t}+\frac{\partial t_{ik}}{\partial x^k}=0, \tag{12.33}$$

где соответствующие плотности потоков $j_k, j_{\alpha k}, t_{ik}$ определяются формулами (8.48). Напомним, что в этих уравнениях вектор $\mathbf{l}$ и сверхтекучий импульс $\mathbf{p}$ определяются формулами

$$l^i(x) = \frac{i}{2} E^{ijl}(x)\Delta_j(x)\Delta_l^*(x), \quad l_i = g_{ij} l^j,$$

$$p_i(x) = \frac{1}{8i}\left(\Delta_j(x) D_i \Delta^{j^*}(x) - \Delta_j^*(x) D_i \Delta^j(x)\right).$$

Уравнения (12.33), (12.29)–(12.31) составляют полную систему уравнений идеальной гидродинамики сверхтекучей жидкости типа A-фазы ^{3}He.

Выписанные уравнения значительно упрощаются, если справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right| >> \left|\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right|, \quad i \neq k. \tag{12.34}$$

Это означает, что угловая скорость нормальной компоненты много больше компонент скоростей деформации. Тогда для метрического тензора справедливо решение $g_{ik} = \delta_{ik}$. В этом случае единичный вектор пространственной анизотропии и сверхтекучий импульс приобретают вид [72]

$$\mathbf{l} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{\Delta}^*, \boldsymbol{\Delta}\right], \quad p_i = -\frac{1}{4}\mathrm{Im}\,\Delta_j \nabla_i \Delta_j^*.$$

Очевидно, что векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{p}$ удовлетворяют тождеству Мермина–Хо

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{p} = \frac{1}{4}\varepsilon_{spq} l_s \left[\boldsymbol{\nabla} l_q, \boldsymbol{\nabla} l_p\right].$$

Уравнение для вектора $\boldsymbol{\Delta}$ переходит в уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\Delta}} + v_k \nabla_k \boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \boldsymbol{\Delta}\right] - 2i\mu\boldsymbol{\Delta}.$$

Используя это уравнение, получаем

$$\dot{\mathbf{l}} + v_k \nabla_k \mathbf{l} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \mathbf{l}\right]. \tag{12.35}$$

Из определения сверхтекучего импульса p_i имеем

$$\dot{p}_i = -\nabla_i p_0 - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\dot{\Delta}_j \nabla_i \Delta_j^*, \quad p_0 \equiv \frac{1}{4}\Delta_j \dot{\Delta}_j^* = \mu + p_i v_i + \frac{1}{4}\left(\mathbf{l}, \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\right).$$

Раскладывая вектор $\dot{\mathbf{\Delta}}$ по трем линейно независимым векторам $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}^*$, $\mathbf{l}$, легко определить, что

$$\dot{\mathbf{\Delta}} = a\mathbf{\Delta} + \left(\mathbf{l}\dot{\mathbf{\Delta}}\right)\mathbf{l}, \quad a = \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^*\dot{\mathbf{\Delta}} = -a^*,$$

где учтены соотношения (12.32). Поэтому

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\dot{\mathbf{\Delta}}\nabla_i\mathbf{\Delta}^* = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\mathbf{l}\dot{\mathbf{\Delta}}\right)(\mathbf{l}\nabla_i\mathbf{\Delta}^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\dot{\mathbf{l}}\mathbf{\Delta}\right)(\mathbf{\Delta}^*\nabla_i\mathbf{l})\,.$$

С помощью определения вектора $\mathbf{l}$ это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\dot{\mathbf{\Delta}}\nabla_i\mathbf{\Delta}^* = \frac{1}{2}\mathbf{l}\left[\nabla_i\mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}\right].$$

Таким образом, уравнение для вектора $\mathbf{p}$ приобретает форму

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial p_0}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\mathbf{l}\left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t}\right]. \tag{12.36}$$

Уравнения (12.33) совместно с (12.35), (12.36) составляют полную систему уравнений идеальной гидродинамики A-фазы ^{3}He. Анализ решений этих уравнений гидродинамики и соответствующие ссылки можно найти в монографии [11].

13. ГИДРОДИНАМИКА B-ФАЗЫ ^{3}He

Введем ортогональную матрицу спинового поворота $R_{i\alpha}(x,\hat{\rho})$ и сверхтекучую фазу $\varphi(x,\hat{\rho})$ как функционалы произвольного статистического оператора $\hat{\rho}$. Эти величины являются исходными при изучении гидродинамических процессов в B-фазе сверхтекучей ферми-жидкости с триплетным спариванием. Так как в состоянии равновесия нет нарушения симметрии относительно произвольных деформаций, то мы не будем для этого сверхтекучего состояния различать ко- и контравариантные индексы при построении уравнений гидродинамики. Определим ортогональную матрицу поворота $R_{i\alpha}(x,\hat{\rho})$ как функционал статистического оператора $\hat{\rho}$ равенством

$$R_{i\alpha}(x,\hat{\rho}) \equiv (A(x,\hat{\rho}))^{-1/2}_{\alpha\beta}\,\eta_{i\beta}(x,\hat{\rho}). \tag{13.1}$$

Положительно определенная симметричная матрица $A_{\alpha\beta}(x,\hat{\rho})$ имеет вид

$$A_{\alpha\beta}(x,\hat{\rho}) \equiv \eta_{\alpha i}(x,\hat{\rho})\eta_{\beta i}(x,\hat{\rho}), \quad \tilde{A} = A, \quad A > 0. \tag{13.2}$$

Здесь среднее значение величины $\eta_{\alpha i}\left(x,\hat{\rho}\right)$ задано равенством

$$\eta_{\alpha i}(x,\hat{\rho})=\eta^{*}_{\alpha i}(x,\hat{\rho})=\operatorname{Sp}\hat{\rho}\hat{\eta}_{\alpha i}(x) \tag{13.3}$$

и эрмитов оператор $\hat{\eta}_{\alpha i}(x)$ представлен в терминах операторов параметра порядка

$$\hat{\eta}_{\alpha i}(x)\equiv i\left(\hat{\Delta}^{+}(x)\hat{\Delta}_{\alpha i}(x)-\hat{\Delta}^{+}_{\alpha i}(x)\hat{\Delta}(x)\right). \tag{13.4}$$

Величина $\eta_{\alpha i}(x,\hat{\rho})$ имеет трансформационные свойства в соответствии с формулами (13.3), (6.8), (6.19), (6.28):

$$\begin{gathered}\eta_{\alpha i}\left(x,U_{\theta}\hat{\rho}U^{+}_{\theta}\right)=\eta_{\beta i}(x,\hat{\rho})a_{\beta\alpha}(\theta(x)),\\ \eta_{\alpha i}\left(x,U_{\varphi}\hat{\rho}U^{+}_{\varphi}\right)=\eta_{\alpha i}(x,\hat{\rho}),\\ \eta_{\alpha i}\left(x',U_{f}\hat{\rho}U^{+}_{f}\right)=\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{2}\frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{i}}\eta_{\alpha j}(x,\hat{\rho}).\end{gathered} \tag{13.5}$$

Принимая во внимание формулы (13.5), (13.2) и равенства

$$\left(B^{-1}\right)_{c'c}=\frac{1}{2\det B}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}B_{aa'}B_{bb'},\quad \det B=\frac{1}{6}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}B_{aa'}B_{bb'}B_{cc'}, \tag{13.6}$$

нетрудно убедиться в справедливости соотношений ортогональности матрицы $R_{l\alpha}$:

$$R_{l\alpha}(x,\hat{\rho})R_{l\beta}(x,\hat{\rho})=\delta_{\alpha\beta},\quad R_{i\alpha}(x,\hat{\rho})R_{k\alpha}(x,\hat{\rho})=\delta_{ki}. \tag{13.7}$$

В силу определения (13.1) и формул (13.2), (13.5) при локальных преобразованиях U_{θ}, U_{φ}, U_{f} (6.1), (6.6), (6.18) статистического оператора для ортогональной матрицы поворота $R_{i\alpha}(x,\hat{\rho})$ имеют место трансформационные соотношения

$$\begin{gathered}R_{i\alpha}\left(x,U_{\theta}\hat{\rho}U^{+}_{\theta}\right)=R_{i\beta}(x,\hat{\rho})a_{\beta\alpha}\left(\theta(x)\right),\\ R_{i\alpha}(x,U_{\varphi}\hat{\rho}U^{+}_{\varphi})=R_{i\alpha}(x,\hat{\rho}),\quad R_{i\alpha}(x',U_{f}\hat{\rho}U^{+}_{f})=\frac{\partial x'_{i}}{\partial x_{i}}R_{i\alpha}(x,\hat{\rho}).\end{gathered} \tag{13.8}$$

Определим сверхтекучую фазу $\varphi(x,\hat{\rho})$ как функционал статистического оператора $\hat{\rho}$ равенством

$$\varphi(x,\hat{\rho})=\frac{1}{4}\operatorname{Im}\ln\chi_{i\alpha}(x,\hat{\rho})\chi_{i\alpha}\left(x,\hat{\rho}\right), \tag{13.9}$$

где среднее $\chi_{i\alpha}(x,\hat\rho) = \mathrm{Sp}\,\hat\rho\hat\chi_{i\alpha}(x)$ определено формулой (6.29). В силу явного вида оператора (6.29) и трансформационных свойств (6.30) при локальных преобразованиях получим трансформационные соотношения для сверхтекучей B-фазы

$$\varphi\left(x, U_{\varphi'}\hat\rho U^+_{\varphi'}\right) = \varphi(x,\hat\rho) + \varphi'(x), \quad \varphi\left(x, U_\theta\hat\rho U^+_\theta\right) = \varphi(x,\hat\rho),$$
$$\varphi\left(x', U_f\hat\rho U^+_f\right) = \varphi(x,\hat\rho). \tag{13.10}$$

Запишем вариацию ортогональной матрицы поворота $R_{i\beta}(x,\hat\rho)$, связанную с вариацией статистического оператора $\delta\hat\rho$:

$$\delta R_{i\beta}(x,\hat\rho) = R_{i\beta}\left(x,\hat\rho+\delta\hat\rho\right) - R_{i\beta}(x,\hat\rho) = \mathrm{Sp}\,\delta\hat\rho\hat R_{i\beta}(x,\hat\rho), \tag{13.11}$$

здесь $\hat R_{i\beta}(x,\hat\rho)$ — оператор ортогональной матрицы поворота, зависящий от исходного статистического оператора $\hat\rho$. Изучим некоторые свойства оператора $\hat R_{i\beta}(x,\hat\rho)$. Рассмотрим с этой целью бесконечно малый поворот в спиновом пространстве $\delta a_{\alpha\beta}\left(\theta\right) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta\theta_\gamma$. Согласно (13.8) вариация ортогональной матрицы $R_{i\beta}\left(x, U^+_\theta\hat\rho U_\theta\right)$ определяется формулой

$$\delta R_{i\beta}\left(x, U^+_\theta\hat\rho U_\theta\right) = -R_{i\gamma}(x,\hat\rho)\varepsilon_{\beta\gamma\lambda}\delta\theta_\lambda(x). \tag{13.12}$$

С другой стороны, учитывая, что

$$\delta\left(U_\theta\hat\rho U^+_\theta\right) = i\int d^3x\delta\theta_\alpha(x)\left[\hat s_\alpha\left(x\right),\hat\rho\right],$$

имеем

$$\delta R_{i\beta}\left(x, U_\theta\hat\rho U^+_\theta\right) = -i\int d^3x'\delta\theta_\alpha(x')\mathrm{Sp}\,\left[\hat\rho,\hat s_\alpha(x')\right]\hat R_{i\beta}(x,\hat\rho). \tag{13.13}$$

Сравним формулы (13.12), (13.13), тогда получим

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat\rho\left[\hat s_\alpha(x'),\hat R_{i\gamma}(x,\hat\rho)\right] = \varepsilon_{\alpha\lambda\gamma}R_{i\lambda}(x,\hat\rho)\delta(x-x'). \tag{13.14}$$

Аналогично можно легко доказать соотношение

$$\mathrm{Sp}\,\hat\rho\left[\hat n(x'),\hat R_{i\gamma}(x,\hat\rho)\right] = 0. \tag{13.15}$$

Для этого достаточно рассмотреть бесконечно малое фазовое преобразование

$$\delta\left(U_\varphi\hat\rho U^+_\varphi\right) = i\int d^3x\delta\varphi(x)\left[\hat n(x),\hat\rho\right],$$

учесть, что следствием трансформационных свойств (13.8) является соотношение $\delta R_{i\beta}(x,\hat\rho)=0$, и использовать определение оператора варьированной матрицы поворота (13.11).

Рассмотрим теперь бесконечно малые деформации

$$\delta\left(U_f\hat\rho U_f^+\right)=i\int d^3x\delta f_k(x)\left[\hat\pi_k(x),\hat\rho\right].$$

В этом случае в соответствии с равенством (13.8) имеем

$$\delta R_{i\alpha}\left(x',U_f\hat\rho U_f^+\right)=-\nabla_i\delta f_l(x)R_{l\alpha}(x,\hat\rho)-\nabla_l R_{i\alpha}(x,\hat\rho)\delta f_l(x).$$

Откуда, с учетом (3.11), следует соотношение

$$i\,\mathrm{Sp}\,\hat\rho\left[\hat\pi_l(x'),\hat R_{i\alpha}(x,\hat\rho)\right]=\nabla_i'\delta(x-x')R_{l\alpha}(x,\hat\rho)-\delta(x-x')\nabla_l R_{i\alpha}(x,\hat\rho). \tag{13.16}$$

Формулы (13.1)–(13.3), (13.11) позволяют найти в явном виде оператор ортогональной матрицы поворота в терминах оператора параметра порядка:

$$\hat R_{i\alpha}(x,\hat\rho)=\left(A^{-1/2}(x,\hat\rho)\right)_{\alpha\beta}\hat\eta_{i\beta}(x)-\frac{1}{2}\left(A^{-3/2}(x,\hat\rho)\right)_{\alpha\gamma}\times$$
$$\times\left(\hat\eta_{l\gamma}(x)\eta_{l\beta}(x,\hat\rho)+\eta_{l\gamma}(x,\hat\rho)\hat\eta_{l\beta}(x)\right)\eta_{i\beta}(x,\hat\rho). \tag{13.17}$$

Рассмотрим вариацию сверхтекучей фазы, связанную с вариацией статистического оператора

$$\delta\varphi(x,\hat\rho)=\varphi\left(x,\hat\rho+\delta\hat\rho\right)-\varphi\left(x,\hat\rho\right)\equiv\mathrm{Sp}\,\delta\hat\rho\hat\varphi\left(x,\hat\rho\right). \tag{13.18}$$

Эта формула определяет оператор сверхтекучей фазы $\hat\varphi(x,\hat\rho)$. Согласно определению (13.9) и формуле (13.1) оператор сверхтекучей фазы $\hat\varphi(x,\hat\rho)$ в терминах оператора параметра порядка имеет вид

$$\hat\varphi(x,\hat\rho)=\frac{1}{2i}\left\{\frac{\chi_{\alpha k}(x,\hat\rho)\hat\chi_{\alpha k}(x)-\hat\chi_{\alpha k}(x)\chi_{\alpha k}(x,\hat\rho)}{\chi_{\beta j}\left(x,\hat\rho\right)\chi_{\beta j}(x,\hat\rho)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\chi^*_{\alpha k}(x,\hat\rho)\hat\chi^+_{\alpha k}(x)-\hat\chi^+_{\alpha k}(x)\chi^*_{k\alpha}(x,\hat\rho)}{\chi^*_{\beta j}(x,\hat\rho)\chi^*_{\beta j}(x,\hat\rho)}\right\}. \tag{13.19}$$

Действуем аналогично тому, как получались свойства оператора ортогональной матрицы (13.8) при локальных преобразованиях произвольного статистического оператора, тогда найдем, используя трансформационные соотношения операторов параметра порядка (6.8), (6.19), (6.28), равенства, которым удовлетворяет оператор сверхтекучей фазы:

$$\begin{gathered}\operatorname{Sp}\hat\rho\,[\hat s_\alpha(x'),\hat\varphi(x,\hat\rho)]=0,\quad i\operatorname{Sp}\hat\rho\,[\hat n(x'),\hat\varphi(x,\hat\rho)]=-\delta\,(x-x')\,,\\ i\operatorname{Sp}\hat\rho\,[\hat\pi_k(x'),\hat\varphi(x,\hat\rho)]=-\delta(x-x')\nabla_k\varphi(x,\hat\rho).\end{gathered}\tag{13.20}$$

Соотношения (13.14)–(13.16), (13.20) будут использованы при построении идеальной гидродинамики рассматриваемой сверхтекучей жидкости.

Сверхтекучий импульс $\mathbf{p}\,(x,\hat\rho)$ как функционал статистического оператора в B-фазе определим равенством

$$\mathbf{p}(x,\hat\rho)=\nabla\varphi(x,\hat\rho).\tag{13.21}$$

Сформулируем уравнения эволюции величин $R_{k\alpha}(x,\hat\rho)$, $\varphi(x,\hat\rho)$, исходя из уравнения фон Неймана. Заметим, что $\rho\,(t+\delta t)=\hat\rho(t)+i\left[\hat\rho(t),\hat{\mathcal{H}}\right]\delta t$, и используем вид операторов $\hat R_{k\alpha}(x,\hat\rho)$, $\hat\varphi(x,\hat\rho)$ (13.18), (13.19), тогда получим динамические уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{k\alpha}(x,\hat\rho(t))}{\partial t}&=i\operatorname{Sp}\hat\rho(t)\left[\hat{\mathcal{H}},\hat R_{k\alpha}(x,\hat\rho(t))\right],\\ \frac{\partial\varphi(x,\hat\rho(t))}{\partial t}&=i\operatorname{Sp}\hat\rho(t)\left[\hat{\mathcal{H}},\hat\varphi(x,\hat\rho(t))\right].\end{aligned}\tag{13.22}$$

Дифференциальные законы сохранения для плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_a(x)=\operatorname{Sp}\hat\rho\hat\zeta_a(x)$ $(a\equiv 0,i,4,\alpha)$ имеют вид

$$\dot\varsigma_a(x,t)=-\nabla_k\varsigma_{ak}(x,t)\equiv L_a(x,t),\quad \zeta_{ak}(x,t)=\operatorname{Sp}\hat\rho(t)\hat\zeta_{ak}(x),\tag{13.23}$$

где соответствующие операторы плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах операторов плотностей определяются равенствами (7.9), (7.11), (7.13), (7.15).

При построении гидродинамики сверхтекучих фаз ^{3}He обычно исходят из модельных гамильтонианов, представляющих собой квадратичную форму от гидродинамических параметров [73–75]. Дальнейшие исследования [76–78] показали, что учет только этих слагаемых недостаточен. Поэтому в этих работах было предложено устранить возникшие расхождения путем учета в исходном гамильтониане слагаемых высших порядков (третьего и выше), связанных с взаимодействием между спиновыми и орбитальными степенями свободы. В предлагаемом микроскопическом выводе уравнений гидродинамики нет необходимости использовать конкретный модельный вид гамильтониана, и эта задача может быть решена в достаточно общем виде.

В настоящем рассмотрении сверхтекучей ферми-жидкости с триплетным спариванием изначально мы не требуем наличия специальной динамической симметрии, что позволяет рассмотреть на единой основе как галилеево-инвариантный, так и релятивистски-инвариантный случаи. Кроме того, мы не предполагаем обращения в нуль равновесных значений вектора спирали и спина, как это имеет место в A- или B-фазе ^{3}He, а изучим более широкий класс возможных квантовых состояний.

Рассмотрим вопрос построения идеальной гидродинамики B-фазы сверхтекучей ферми-жидкости. Такая жидкость на гидродинамическом этапе эволюции может быть описана сокращенным набором параметров — плотностями аддитивных интегралов движения $\zeta_\alpha(x)$, ортогональной матрицей поворота $R_{i\beta}(x)$ и сверхтекучей фазой $\varphi(x)$. Функциональная гипотеза в этом случае имеет вид

$$\hat{\rho}(t) \underset{t>>\tau_r}{\rightarrow} \hat{\sigma}\left\{\zeta\left(x,t,\hat{\rho}\right), R\left(x,t,\hat{\rho}\right), \varphi\left(x,t,\hat{\rho}\right)\right\}, \tag{13.24}$$

здесь τ_r — время релаксации;

$$\zeta(x) = \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\left(\zeta, R, \varphi\right)\hat{\zeta}(x) \tag{13.25}$$

— средние значения плотностей аддитивных интегралов движения. Сверхтекучая фаза и ортогональная матрица поворота

$$\varphi(x) = \varphi\left(x, \hat{\sigma}\left(\zeta, R, \varphi\right)\right), \quad R_{i\beta}(x) = R_{i\beta}\left(x, \hat{\sigma}\left(\zeta, R, \varphi\right)\right) \tag{13.26}$$

связаны с огрубленным статистическим оператором соотношениями (13.1), (13.9). В соответствии с (13.24)–(13.26) получим уравнения движения для параметров сокращенного описания

$$\dot{\zeta}_a(x) = -\nabla_k \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\left(\zeta, R, \varphi\right)\hat{\zeta}_{ak}(x) \equiv L_a(x) \equiv L_a\left(x; \zeta, R, \varphi\right),$$

$$\dot{\varphi}(x) = i\,\mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}(\zeta, R, \varphi)\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\varphi}(x, \hat{\sigma}(\zeta, R, \varphi))\right] \equiv L_\varphi(x) \equiv L_\varphi(x; \zeta, R, \varphi), \tag{13.27}$$

$$\dot{R}_{i\beta}(x,t) = i\,\mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}(\zeta, R, \varphi)\left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{R}_{i\beta}(x, \hat{\sigma}(\zeta, R, \varphi))\right] \equiv L_{i\beta}(x) \equiv L_{i\beta}(x; \zeta, R, \varphi).$$

Следующий шаг в конкретном построении уравнений движения для параметров сокращенного описания заключается в нахождении статистического оператора $\hat{\sigma}\left(\zeta, R, \varphi\right)$, который в общем случае можно представить в виде

$$\hat{\sigma}\left(\zeta, R, \varphi\right) = \hat{w}\left(Y, a, \varphi\right) + \hat{\sigma}'\left(\zeta, R, \varphi\right),$$

где $\hat{w}\left(Y, a, \varphi\right) \equiv \hat{w}\left(\zeta(Y), a, \varphi\right)$ — локально-равновесный статистический оператор, описывающий только обратимые процессы, а $\hat{\sigma}'\left(\zeta, R, \varphi\right)$ определяет диссипативные процессы. Получим уравнение для ортогональной матрицы поворота $R_{i\beta}$ и для сверхтекучей фазы φ в главном приближении по пространственным неоднородностям. В пренебрежении диссипативными процессами ($\hat{\sigma} \approx \hat{w}$) уравнение движения для $R_{i\beta}$ имеет вид

$$\dot{R}_{k\beta}(x) = i \operatorname{Sp} \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi) \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{R}_{k\beta}\,(x, \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi))\right]$$

или же, в пренебрежении градиентами Y_0,

$$\dot{R}_{k\beta}(x) = i \operatorname{Sp} \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi) \left[\int d^3x' Y_0(x')\hat{\varepsilon}\,(x')\,, \hat{R}_{k\beta}\,(x, \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi))\right] Y_0^{-1}(x).$$

Отсюда и из определения $\hat{w}$ (см. (6.26)) следует, что

$$\dot{R}_{k\beta}(x) = -i \operatorname{Sp} \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi) \left[\int d^3x' \big(Y_l(x')\hat{\pi}_l(x') + Y_4(x')\hat{n}(x') + \right.$$

$$\left. + Y_\alpha(x')\hat{s}_\alpha(x')\big), \hat{R}_{k\beta}\,(x, \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi))\right] Y_0^{-1}(x)$$

или, с учетом соотношений (13.14)–(13.16),

$$\dot{R}_{k\alpha} = \{Y_l \nabla_l R_{k\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\beta R_{k\gamma}\}\, Y_0^{-1}. \tag{13.28}$$

Аналогичным образом уравнение для сверхтекучей фазы в пренебрежении процессами диссипации записывается в виде

$$\dot{\varphi}(x) = i \operatorname{Sp} \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi) \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\varphi}\,(x, \hat{w}\,(\zeta, a, \varphi))\right],$$

принимая далее во внимание (13.20), получаем

$$\underline{\dot{\varphi}} = Y_0^{-1} \left\{Y_l \nabla_l \underline{\varphi} + Y_4\right\}. \tag{13.29}$$

Заметим, что ортогональная матрица $a_{\alpha\beta}(x)$ и фаза $\varphi(x)$, входящие в распределение Гиббса и термодинамический потенциал, не совпадают с матрицей поворота $R_{k\alpha}(x)$ и фазой $\underline{\varphi}(x)$, входящими в уравнения движения (13.28), (13.29). Установим связь между этими величинами. Так как $R_{k\alpha}(x) \equiv R_{k\alpha}(x, \hat{w})$, то, используя формулы (7.1), (13.1), получаем

$$R_{k\alpha}(x, \hat{w}) = a_{\alpha\beta}(x) R_{k\alpha}(x, \underline{\hat{w}}).$$

Записывая уравнения движения в форме $\dot{R}_{k\alpha} = \hat{A}_{\alpha\beta} R_{k\beta}$ и пренебрегая пространственно-временными производными медленно изменяющихся величин $R_{k\alpha}\,(x, \underline{\hat{w}})$, получаем $\dot{a}_{\alpha\beta} = \hat{A}_{\beta\rho} a_{\alpha\rho}$ или

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = Y_0^{-1} \{Y_l \nabla_l a_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\gamma\delta} Y_\gamma a_{\alpha\delta}\}. \tag{13.30}$$

Аналогичным образом, замечая, что

$$\underline{\varphi}(x) \equiv \varphi\left(x, \hat{w}\right) = \varphi(x) + \varphi\left(x, \underline{\hat{w}}\right)$$

и пренебрегая пространственно-временными производными медленно изменяющейся величины $\varphi\left(x, \underline{\hat{w}}\right)$, получаем

$$\dot{\varphi} = Y_0^{-1}\left\{Y_l \nabla_l \varphi + Y_4\right\}. \tag{13.31}$$

Уравнения (13.30), (13.31), дополненные уравнениями, отражающими законы сохранения интегралов движения

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla_k q_k, \quad \dot{\pi}_i = -\nabla_k t_{ik}, \quad \dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}, \quad \dot{n} = -\nabla_k j_k, \tag{13.32}$$

представляют собой замкнутую систему уравнений гидродинамики сверхтекучей B-фазы ^{3}He. При этом необходимо иметь в виду выражения (7.28), (8.6), (8.7) для плотностей потоков энергии q_k, импульса t_{ik}, спина $j_{\alpha k}$ и числа частиц j_k в терминах термодинамического потенциала, а также соотношения (7.3) между термодинамическими силами $\underline{Y}_a$ и плотностями $\varepsilon, \boldsymbol{\pi}, n, \underline{s}_\alpha$. Следствием этих уравнений является адиабатичность течения сверхтекучей ферми-жидкости

$$\dot{s} = \nabla_i\left(sY_i/Y_0\right), \tag{13.33}$$

где $s \equiv -\omega + Y_a \zeta_a$ — плотность энтропии.

Если термодинамический потенциал является функцией только термодинамических параметров p_i, Y_i, Y_4, т. е. из набора переменных исключены термодинамические параметры, описывающие магнитные свойства системы, — $\underline{\omega}_{\alpha k}, Y_\alpha$, то уравнения (13.30)–(13.34) примут вид уравнений гидродинамики сверхтекучей ферми-жидкости с синглетным спариванием (см. разд. 11). Если же этот потенциал является функцией только термодинамических параметров $\underline{\omega}_{\alpha i}, Y_\alpha$ (из набора термодинамических параметров исключены переменные p_i, Y_i, Y_4), то полученные уравнения перейдут в уравнения динамики многоподрешеточных магнетиков [58, 79]. При конкретном модельном виде плотности энергии, предложенном в [78, 80, 81], получаются результаты, согласующиеся с этими работами.

Придадим полученной системе уравнений более компактный квазирелятивистский вид. Это достигается путем перехода к новым независимым термодинамическим параметрам. Для того чтобы сформулировать соответствующую замену переменных, введем формы Картана, связанные не с пространственным дифференцированием, а с временным:

$$\omega_{0\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\left(\tilde{a}\dot{a}\right)_{\beta\alpha}, \quad \underline{\omega}_{0\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\left(a\dot{\tilde{a}}\right)_{\alpha\beta}.$$

Тогда уравнения (13.30), (13.31) можно переписать в виде

$$\underline{\omega}_{0\gamma} = \frac{Y_l \underline{\omega}_{l\gamma} + Y_\gamma}{Y_0}, \quad \dot{\varphi} = \frac{Y_l p_l + Y_4}{Y_0}. \tag{13.34}$$

Введем теперь вместо переменных Y_γ, Y_4 переменные $p_{0\gamma}, p_0$:

$$p_{0\gamma} = \frac{Y_l \underline{\omega}_{l\gamma} + Y_\gamma}{Y_0}, \quad p_0 = \frac{Y_l p_l + Y_4}{Y_0},$$

так что уравнения (13.34) примут вид

$$\underline{\omega}_{0\gamma} = p_{0\gamma}, \quad \dot{\varphi} = p_0.$$

Введем термодинамический потенциал Гиббса ω', связанный с потенциалом ω соотношением

$$\omega' = \frac{\omega}{Y_0}.$$

Всюду в дальнейшем потенциал ω' рассматривается как функция термодинамических параметров Y_0, Y_k, p_0, p_k, $p_{0\alpha}$, $p_{k\alpha}$. Можно показать, что в этом случае «4-тензор» энергии импульса $t^{\mu\nu}$, «4-вектор» тока j^ν и «4-вектор» спина $\underline{j}^\nu_\alpha$ определяются формулами

$$t^{\mu\nu} = -\frac{\partial\,(Y^\nu \omega')}{\partial Y_\mu} + p^\mu j^\nu + \underline{\omega}^\mu_\alpha \underline{j}^\nu_\alpha, \quad j^\nu = \frac{\partial \omega'}{\partial p_\nu}, \quad \underline{j}^\nu_\alpha = \frac{\partial \omega'}{\partial \underline{p}_{\alpha\nu}}. \tag{13.35}$$

Здесь $t^{\mu\nu} \equiv \left(t^{00} = \varepsilon, t^{0k} = q_k, t^{k0} = \pi_k, t^{kl} = t_{kl}\right)$ — «4-тензор» энергии-импульса; $j^\nu \equiv (n, g_k)$ — «4-ток» заряда; $\underline{j}^\nu_\alpha \equiv \left(\underline{s}_\alpha, \underline{j}_{\alpha k}\right)$ — «4-ток» спина; $p^\nu \equiv (p_0, p_k)$ — сверхтекучий 4-импульс; $\underline{p}^\nu_\alpha \equiv \left(\underline{p}_{0k}, \underline{p}_{\alpha k}\right)$ — 4-форма Картана; $Y_\mu \equiv (Y_0, Y_i)$. Индексы поднимаются и опускаются с помощью «метрического» тензора $g_{\mu\nu} \equiv (1, -1, -1, -1)$.

Уравнения идеальной гидродинамики сверхтекучей ферми-жидкости с триплетным спариванием в квазирелятивистской форме можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\nabla_\nu t^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\nu j^\nu = 0, \quad \nabla_\nu \underline{j}^\nu_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{p}_{\beta\mu} \underline{j}^\mu_\gamma, \\
\nabla^\mu p^\nu - \nabla^\nu p^\mu = 0, \quad \nabla^\mu \underline{p}^\nu_\alpha - \nabla^\nu \underline{p}^\mu_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{p}^\nu_\beta \underline{p}^\mu_\gamma.
\end{gathered} \tag{13.36}$$

Первые три уравнения включают в себя уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения. Два последующих содержат уравнения движения для сверхтекучего импульса и правой формы Картана, а также условие потенциальности и тождество Маурера–Картана. Вводя 4-ток энтропии $s^\mu \equiv (s, s_k = sv_{nk})$, второй закон термодинамики в квазирелятивистской форме приобретает вид

$$ds^\mu = Y_\nu dt^{\nu\mu} + Y_4 dj^\mu + \underline{Y}_\alpha d\underline{j}^\mu_\alpha - \\ - (Y^\mu j^\nu - Y^\nu j^\mu)\, dp_\nu - \left(Y^\mu \underline{j}^\nu_\alpha - Y^\nu \underline{j}^\mu_\alpha\right) d\underline{p}_{\alpha\nu}, \quad (13.37)$$

где 4-ток энтропии удовлетворяет условию адиабатичности

$$\nabla_\mu s^\mu = 0, \quad s^\mu = -Y^\mu Y_\nu \frac{\partial \omega'}{\partial Y_\nu}. \quad (13.38)$$

Выписанные уравнения нельзя рассматривать как релятивистски-инвариантные уравнения, описывающие спиновую динамику, так как понятие спина в релятивистской теории возникает в результате изучения свойств симметрии теории по отношению к пространственно-временным преобразованиям. Кроме того, разделение взаимодействий на сильные обменные и, например, слабые магнитодипольные теряет смысл в релятивистской теории. Однако если понятие «спина» связано с внутренними степенями свободы (с внутренней симметрией), то можно считать, что найденные уравнения описывают релятивистскую динамику системы. Так обстоит дело, например, с ядерной материей, состоящей из нейтронов и протонов, между которыми действуют изотопически-инвариантные силы, благодаря чему возникает возможность описывать макроскопическое состояние системы плотностью изотопического спина и плотностью потока изотопического спина. Таким образом, уравнения (13.38)–(13.40) могут описывать релятивистскую динамику сверхтекучей ядерной материи с триплетным по изотопическому спину спариванием типа B-фазы. В этом случае потенциал ω' является релятивистским скаляром, зависящим от следующей системы семи инвариантов: $Y^2, p^2, \underline{p}^2, Yp, \left(Y\underline{p}\right)^2, \left(p\underline{p}\right)^2, \left(Y\underline{p}\right)\left(p\underline{p}\right)$.

При преобразованиях Галилея, определяемых унитарным преобразованием

$$U_{\mathbf{u}} = \exp\left(-i\mathbf{u}\int d^3x m\mathbf{x}\hat{n}(x)\right)$$

($\mathbf{u}$ — параметр преобразования, m — масса ферми-частицы), операторы плотностей аддитивных интегралов движения обладают трансформационными свойствами

$$U_{\mathbf{u}}\hat{n}(x)U^+_{\mathbf{u}} = \hat{n}(x), \quad U_{\mathbf{u}}\hat{\pi}_i(x)U^+_{\mathbf{u}} = \hat{\pi}_i(x) + u_i m\hat{n}(x),$$

$$U_{\mathbf{u}}\hat{s}_\alpha(x)U^+_{\mathbf{u}} = \hat{s}_\alpha(x), \quad U_{\mathbf{u}}\hat{\varepsilon}(x)U^+_{\mathbf{u}} = \hat{\varepsilon}(x) + u_i\hat{\pi}_i(x) + \frac{1}{2}mu^2\hat{n}(x).$$

В этом случае термодинамический потенциал зависит от меньшего числа инвариантов: Y_0', $\underline{Y}^2$, ${Y'}^2$, Y_4', $\underline{\omega}_k^2$, $Y_k'\underline{\omega}_{\alpha k}\underline{Y}_\alpha$, $(\underline{Y}\underline{\omega}_k)^2$, $(Y_i'\underline{\omega}_i)^2$. Здесь $Y_0' = Y_0$, $Y_i' = Y_i + Y_0 v_i$, $Y_4' = Y_4 + Y_k m v_k + Y_0(mv^2/2)$, $v_k = p_k/m$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изложении материала мы придерживались концепции квазисредних и гипотезы сокращенного описания, принятых в статистической механике при исследовании конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией. В рамках такого микроскопического подхода последовательно рассмотрены вопросы описания состояния равновесия ряда квантовых жидкостей и кристаллов с достаточно сложным параметром порядка, включая задачу классификации вырожденных состояний. Изучены динамические процессы в таких квантовых конденсированных средах. Важно отметить, что проблема фазовых переходов II рода, обычно рассматриваемая на основе феноменологических подходов, изначально модельно зависима. Представление о ненарушенной и пространственной симметрии состояния равновесия, подход Гиббса в сочетании с концепцией квазисредних позволяют предложить альтернативный подход, свободный от каких-либо модельных предположений.

При построении уравнений гидродинамики введение понятия варьированных динамических величин и связанных с ними операторов позволяет проследить связь микроскопического подхода с гамильтоновым подходом (см. формулы (11.9), (12.14), (12.15), (12.19), (13.14), (13.16), (13.20)). Микроскопический подход дает возможность в принципе рассмотреть также и другие достаточно сложные конденсированные среды с векторным или тензорным параметрами порядка, в частности, сверхтекучую ядерную материю, сверхпроводники с d- и f-спариванием, жидкие кристаллы, магнетики. Более общие уравнения гидродинамики, полученные для анизотропной фазы (см. разд. 12), позволяют интерпретировать дополнительные термодинамические параметры как конформационные степени свободы, описывающие форму куперовской пары. Здесь проявляется определенная аналогия с двухосными жидкими кристаллами [82].

Авторы благодарны фонду INTAS (грант 00-00577) за финансовую поддержку работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 592.
2. *Халатников И. М.* Теория сверхтекучести. М., 1971, С. 320.
3. *Боголюбов Н. Н.* // Изв. АН СССР, сер. физ. 1947. Т. 11. С. 77.

4. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., 1962. С. 443.
5. *Каданов Л., Бейм Г.* Квантовая статистическая механика. М., 1962.
6. *Osheroff D. D., Richardson R. C., Lee D. M.* // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 885.
7. *Leggett A. J. A.* // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47, No 2. P. 331.
8. *Anderson P. W., Brinkman W. F.* // The Physics of Liquid and Solid Helium / Ed. by K. H. Bennemann, Ketterson. N. Y.: Willey, 1978. Part II. Chap. 3.
9. *Минеев В. П.* // УФН. 1983. Т. 139. С. 303.
10. *Брусов П. Н., Попов В. Н.* Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей. М., 1988. С. 216.
11. *Vollhardt D., Wolfle P.* The Superfluid Phases of Helium 3 / Ed. by F. Taylor Francis; London; N. Y.; Philadelphia, 1990. P. 620.
12. *Volovick G. E.* Exotic Properties of Superfluid ^{3}He. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong: World Scientific, 1992.
13. *Питаевский Л. П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1794.
14. *Balian R., Werthamer N. R.* // Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 1553.
15. *Anderson P. W., Morel P.* // Phys. Rev. 1961. V. 123. P. 1911.
16. *Ambegaokar V., Mermin N. D.* // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 81.
17. *Galasiewicz Z. M.* // Acta Phys. Polon. 1960. V. 19. P. 467; Bull. Acad. Polon. Sci. 1961. V. 9. P. 605.
18. *Barton G., Moore M.* // J. Phys. C. 1974. V. 7. P. 4220.
19. *Varma C. M., Werthamer N. R.* // Phys. Rev. A. 1974. V. 9. P. 1465.
20. *Воловик Г. Е., Хазан М. В.* // ЖЭТФ. 1983. Т. 85, вып. 3(9). С. 948.
21. *Nijhoff F. W., Capel H. W., Breems A.* // Physica A. 1985. V. 130. P. 375.
22. *Nijhoff F. W., Capel H. W., Breems A.* // Physica A. 1986. V. 135. P. 295; V. 139. P. 256.
23. *Bruder C., Vollhardt D.* // Phys. Rev. B. 1986. V. 34. P. 131.
24. *Schakel A. M. J., Bais F. A.* // J. Phys.: Conden. Matter. 1989. V. 1. P. 1743.
25. *Fetter A.* // Phys. Rev. B. 1979. V. 20, No 1. P. 303.
26. *Lin-Liu Y. R., Vollhardt D., Maki K.* // Ibid. P. 159.
27. *Fetter A.* // Phys. Rev. B. 1981. V. 23, No 5. P. 218.
28. *Kotzev J. N., Shopova D. V.* // Phys. Lett. A. 1994. V. 187. P. 264.
29. *Ruutu V. M. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 5058.
30. *Kopu J., Hanninen R., Thuneberg E. V.* // Phys. Rev. B. 2000. V. 62. P. 12374.
31. *Ковалевский М., Пелетминский С., Чеканова Н.* // ФНТ. 2002. Т. 28, № 4. С. 327.
32. *Takatsuka T., Tamagaki R.* // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1993. V. 112. P. 27.
33. *Schaab Ch. et al.* // Nucl. Phys. A. 1996. V. 605. P. 531.
34. *Iwasaki M.* // Progr. Theor. Phys. 1995. V. 120. P. 187.
35. *Elgaroy O.* // Nucl. Phys. 1996. V. 607. P. 425.
36. *Alm Th., Roepke G., Sedrakian A.* // Nucl. Phys. A. 1996. V. 604. P. 491.
37. *Ахиезер А. И. и др.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 85. С. 1.

38. *Carter B.* // Journees Relativistes. 1976. P. 12; 1979. P. 166.
39. *Лебедев В. В., Халатников И. М.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 56. С. 923.
40. *Ковалевский М. Ю. и др.* Препринт ИТФ-83-151Р. Киев, 1983. 19 с.
41. *Боголюбов Н. Н. (мл.) и др.* // ЭЧАЯ. 1985. Т. 16, № 4. С. 875.
42. *Carter B., Khalatnikov I. M.* // Phys. Rev. D. 1992. V. 45, No 12. P. 4536.
43. *Вильчинский С. И.* // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. С. 1430.
44. *Власов Ю. В.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, вып. 4. С. 1320.
45. *Ковалевский М. Ю., Рожков А. А.* // ТМФ. 1997. Т. 113, № 2. С. 313.
46. *Sprague D. T. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 4568.
47. *Mineev V. P.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 66. С. 693.
48. *Baramidze G., Kharadze G.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 115, вып. 2. С. 754.
49. *Korf A., Brand H. R.* // J. Low Temp. Phys., 1997. V. 109, No 1/2. P. 183.
50. *Khalatnikov I. M., Lebedev V. V.* // Phys. Lett. A. 1977. V. 61. P. 319; *Лебедев В. В., Халатников И. М.* // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 1537.
51. *Brand H., Pleiner H.* // Phys. Rev. B. 1981. V. 23. P. 155.
52. *Liu M.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 441.
53. *Hu C. R., Saslow W. M.* // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 605.
54. *Brand H., Dorfle M., Graham R.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1979. V. 119. P. 434.
55. *Nagai K.* // Progr. Theor. Phys. 1981. V. 65. P. 793.
56. *Miyake K., Usui T.* // Progr. Theor. Phys. 1980. V. 64. P. 1119.
57. *Боголюбов Н. Н. (мл.) и др.* // УФН. 1989. Т. 159, вып. 4. С. 585.
58. *Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* // ТМФ. 1994. Т. 100, № 1. С. 59.
59. *Galasiewicz Z.* // J. Low Temp. Phys. 1984. V. 57, No 1/2. P. 123.
60. *Galasiewicz Z.* // J. Low Temp. Phys. 1988. V. 72, No 1/2. P. 153.
61. *Ковалевский М. Ю., Шишкин А. Л.* // ТМФ. 1991. Т. 89, № 2. С. 293.
62. *Bogoliubov N. N.* // Physica. 1960. V. 26. P. 51.
63. *Ковалевский М. Ю., Рожков А. А.* // ТМФ. 2001. Т. 127, № 2. С. 317.
64. *Mineev V. P.* // Sov. Scien. Rev., Sect. A. 1980. V. 2. P. 173.
65. *Akhiezer A. I. et al.* // Phys. Lett. B. 1999. V. 451. P. 430.
66. *Воловик Г. Е.* // УФН. 1984. Т. 143. С. 73.
67. *Пелетминский С. В., Тарасов А. Н., Шишкин А. Л.* // Укр. физ. журн. 1990. Т. 35, № 8. С. 1267.
68. *Картан Э.* Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М., 1949. С. 248.
69. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Методы статистической физики. М., 1977. С. 377.
70. *Пелетминский С. В., Лавриненко Н. М.* // ТМФ. 1986. Т. 66, № 2. С. 314.
71. *Ковалевский М. Ю., Красников В. А., Пелетминский С. В.* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. С. 337.
72. *Mermin N. D., Ho T. L.* // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 594.
73. *Liu M.* // Phys. Rev. 1976. V. 13. P. 4174.

74. *Graham P., Pleiner H.* // J. Phys. C. 1976. V. 9. P. 279.

75. *Brinkman W. F., Gross M. C.* // Progr. in Low Temp. Phys. 1978. V. 7. P. 105.

76. *Liu M., Gross M. C.* // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 250.

77. *Combescot R., Dombre T.* // Phys. Lett. A. 1980. V. 76. P. 293.

78. *Combescot R.* // J. Phys. C. 1981. V. 14. P. 1619.

79. *Kovalevsky M. Y., Rozhkov A. A.* // Physica. 1995. V. 216. P. 169.

80. *Wolfle P.* // Phys. Rev. B. 1976. V. 14. P. 89.

81. *Maki K., Kumar P.* // Phys. Rev. B. 1977. V. 16. P. 182.

82. *Kovalevsky M. Y., Shishkin A. L.* // Problems of Atomic Science and Technology. 2001. No. 6. P. 309.