*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2004. Т. 35. ВЫП. 3*

УДК 530.145

# ГРАВИТИРУЮЩИЕ СИГМА-МОДЕЛИ В ТЕОРИИ СТРУН

*О. В. Кечкин**

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, МГУ, Москва



*E-mail: kechkin@depni.npi.msu.su

*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2004. Т. 35. ВЫП. 3*

УДК 530.145

# ГРАВИТИРУЮЩИЕ СИГМА-МОДЕЛИ В ТЕОРИИ СТРУН

*О. В. Кечкин**

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, МГУ, Москва

Для изучения трехмерной и двумерной гравитирующих сигма-моделей, возникающих в результате тороидальной компактификации низкоэнергетического предела бозонного сектора теории гетеротической струны, разработан новый формализм. Он является естественным матричным обобщением хорошо известного в теории Эйнштейна–Максвелла формализма потенциалов Эрнста и связанных с ними величин на случай рассматриваемой струнно-гравитационной системы. Применение нового формализма оказалось особенно эффективным при исследовании группы скрытых симметрий теории и в задачах о генерации новых классов ее точных решений при помощи этих симметрий. Например, удалось установить явный вид общего конечного преобразования из подгруппы трехмерных заряжающих симметрий и разработать наиболее общую технику генерации трехмерных асимптотически-плоских решений. Двумерные заряжающие симметрии могут быть найдены в рамках решения обратной задачи теории рассеяния; при этом представление нулевой кривизны теории также является одним из элементов установленного нового формализма. В частности, удается выписать в явном виде общий класс асимптотически-плоских солитонных решений, допускающих инфинитезимальный предел в форме элемента алгебры группы Героча. Изложению перечисленных общих результатов, проиллюстрированных соответствующими примерами, в основном и посвящен настоящий обзор.

A new formalism is developed for the study of 3D and 2D sigma-models coupled to gravity which arise as result of the toroidal compactification of low-energy limit of the bosonic sector of heterotic string theory. This formalism is the natural matrix generalization of the well-known formalism of the Ernst potentials and related structures from Einstein–Maxwell theory to the field of the string gravity system under consideration. It turned out that an application of the new formalism was especially effective in the study of group of hidden symmetries of the theory and in the problems related to generation of new classes of its exact solutions using these symmetries. For example, it was succeeded in the finding of explicit form of general finite transformation of the three-dimensional charging symmetry subgroup and in the developing of the most general technique of generation of three-dimensional asymptotically flat solutions. The two-dimensional charging symmetries can be found in the framework of solution of inverse scattering transform problem, whereas the corresponding null-curvature representation of the theory is also one of the elements of the new formalism established. In particular, it becomes possible to write down the general class of asymptotically flat soliton solutions which possess an infinithesimal limit of the Geroch algebra form. This review is devoted to expound the general results mentioned and to illustrate them using the corresponding examples.

*E-mail: kechkin@depni.npi.msu.su

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение пространств классических решений различных предельных режимов теории суперструн представляет интерес с точки зрения дальнейшего развития как самой струнной теории [1–5], так и ее естественных приложений — физики черных дыр [6–10] и космологии [11–15]. В настоящей работе делается обзор некоторых результатов, полученных при изучении низкоэнергетического предела бозонного сектора теории гетеротической струны методами теории симметрий [16–21]. Особенностью используемого подхода является последовательное развитие и применение формализма матричных потенциалов Эрнста, в рамках которого данная теория выступает в качестве своего рода «матричнозначного обобщения» теории Эйнштейна–Максвелла [22–26].

Первые результаты общего характера в области изучения симметрий бозонного сектора теории гетеротической струны (ТГС) принадлежат Д. Махаране и Дж. А. Шварцу, которые, в частности, показали, что после тороидальной компактификации на три измерения рассматриваемая теория становится нелинейной гравитирующей $\sigma$-моделью [27]. А. Сен, в свою очередь, установил, что указанная $\sigma$-модель обладает симметрическим пространством потенциалов, и первым получил представление нулевой кривизны для данной теории [28]. Представление Сена использовалось многими авторами для построения новых классов точных решений как при помощи непосредственного интегрирования уравнений движения в тех или иных частных случаях, так и с использованием некоторых специальных преобразований симметрии [29]. Соответствующая работа активно продолжается и в настоящее время; при этом настоящая публикация подводит определенную черту под вторым из упомянутых подходов — так называемым «методом генерации».

Обратимся теперь к описанию структуры работы. В разд. 1 делается обзор тех результатов Махараны, Шварца и Сена, которые являются базовыми для последующего изложения. В разд. 2 устанавливается явный вид матричных потенциалов Эрнста теории и определяемое ими представление нулевой кривизны [30]. В разд. 3 формализм матричных потенциалов Эрнста используется для нахождения и классификации полной группы трехмерных симметрий теории. При этом сначала непосредственно устанавливается «явный» линейный сектор непрерывных преобразований симметрии, затем — некоторое дискретное нелинейное преобразование симметрии, и, наконец, приводится нелинейный сектор «истинно скрытых» непрерывных симметрий, получаемый из линейного сектора применением найденного дискретного преобразования. Отметим, что нелинейный сектор непрерывных симметрий рассматриваемой теории состоит из матричных обобщений хорошо известных в теории Эйнштейна–Максвелла преобразований Элерса и Харрисона [31].

В разд. 4 представление Эрнста используется для отыскания явного вида преобразований, образующих группу трехмерных заряжающих симметрий (ГЗС) теории. Эти преобразования по определению сохраняют асимптотическую плоскостность решений, т. е. переводят решения с тривиальными асимптотическими значениями всех полей трехмерной $\sigma$-модели в решения, обладающие тем же свойством. Результатом применения преобразований из ГЗС является, в частности, «генерация» кулоновских зарядов в случае изначально нейтрального семейства решений. Такая ситуация имеет место и в теории Эйнштейна–Максвелла, в которой, например, нейтральное решение Керра при помощи заряжающих симметрий переводится в обладающее электрическим и магнитным зарядами решение Керра–Ньюмена. Далее в разд. 4 определяется явный вид нового представления ТГС, в рамках которого группа заряжающих симметрий имеет простейшую — линейную и однородную — реализацию. Это «линеаризующее» представление оказывается наиболее естественным и удобным во всех задачах, связанных с исследованием пространства трехмерных асимптотически-плоских решений теории. Разд. 5 посвящен развитию лагранжевой части соответствующего формализма и изучению его связи с ранее установленным представлением нулевой кривизны. Анализируется структура полной группы трехмерных симметрий теории с точки зрения ее разложения на заряжающую и незаряжающую части [32].

В разд. 6 в качестве примера применения разработанного общего формализма и ввиду многочисленных приложений, связанных с изучением суперсимметричных свойств семейств классических струнно-гравитационных решений [33], строится общий класс экстремальных решений теории, обобщающий на рассматриваемый случай семейство решений Израэля–Вильсона–Переша из теории Эйнштейна–Максвелла [34, 35]. Построенный класс решений обладает явной инвариантностью относительно действия полной группы заряжающих симметрий и, кроме того, содержит все известные из литературы решения подобного типа (см., например, [36, 37]). В разд. 7 и 8 формулируются генерационные процедуры, в рамках которых в явном виде определяются струнно-гравитационные продолжения пространств решений некоторых хорошо изученных «классических» $\sigma$-модельных систем. Так, в разд. 7 в качестве базы генерации используется главная киральная модель с группой симметрии $SL(2, R)$, а в разд. 8 — допускающая один вектор Киллинга теория Эйнштейна с произвольным числом максвелловских полей. С учетом естественных приложений развитого формализма к физике черных дыр указывается явная процедура, переводящая решение Керра–Ньюмена из теории Эйнштейна–Максвелла в область низкоэнергетической теории гетеротической струны [38]. Получающееся при этом семейство решений, описывающее вращающийся заряженный источник керр-ньюменовского типа, содержит в качестве своих частных случаев целый набор широко известных решений, построенных в рассматриваемой струнно-гравитационной теории при помощи более элементарных методов.

Разделы 9 и 10 посвящены изучению тех свойств низкоэнергетической ТГС, тороидально скомпактифицированной на два измерения, которые характеризуют ее как интегрируемую систему в смысле обратной задачи рассеяния Белинского и Захарова [39, 40]. При этом используется установленное ранее представление нулевой кривизны теории и пара Лакса, введенная Дж. А. Шварцем в [41] для исследования инфинитезимальных симметрий двумерных систем рассматриваемого типа. В настоящей работе основной акцент делается на построении соответствующих конечных преобразований симметрии, реализуемых в рамках солитонного решения уравнений обратной задачи рассеяния [39, 40, 42–44], а именно: в разд. 9 строится солитонный оператор симметрии, обладающий инфинитезимальным пределом и сохраняющий свойство асимптотической плоскостности используемого в качестве генерационной базы фона. Построенное солитонное решение определяет класс двумерных заряжающих преобразований симметрии, допускающих предельный переход к инфинитезимальному элементу, принадлежащему алгебре группы Героча данной струнно-гравитационной системы [45]. В разд. 10 полученные общие результаты проиллюстрированы построением двухсолитонного семейства асимптотически-плоских решений, описывающего заряженный источник керр-ньюменовского типа в удобных для физического анализа координатах Бойера и Линдквиста. Отметим, что ближайшим классическим аналогом построенного решения является семейство решений Боннора из теории Эйнштейна–Максвелла [46].

## 1. ТРЕХМЕРНАЯ $\sigma$-МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ГЕТЕРОТИЧЕСКОЙ СТРУНЫ

В пределе низких энергий бозонный сектор теории гетеротической струны описывается теорией поля с действием

$$S_D = \int d^DX\,|\det\,G_{MN}|^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\Phi}\left(R_D - \frac{1}{4}F^I_{MN}F^{IMN} + \Phi_{,M}\Phi^{,M} - \frac{1}{12}H_{MNK}H^{MNK}\right), \quad (1)$$

где $G_{MN}$ $(M, N = 1, \ldots, D)$ — метрическое поле с сигнатурой $-, +, \ldots, +$; $R_D$ — скаляр кривизны; $\Phi$ — дилатон;

$$\begin{gathered} F^I_{MN} = \partial_M A^I_N - \partial_N A^I_M, \\ H_{MNK} = \partial_M B_{NK} - \frac{1}{2}A^I_M F^I_{NK} + \text{cyclic } MNK, \end{gathered} \quad (2)$$

$A_N^I$ — набор из $n$ абелевых калибровочных полей (индекс $I$ пробегает значения от 1 до $n$), а $B_{MN}$ — антисимметричное тензорное поле Калба–Рамона [1]. Последовательное квантовое рассмотрение теории гетеротической струны приводит к значениям $D = 10$ и $n = 16$, однако при классическом анализе теории (1), (2) как размерность физического пространства-времени, так и число калибровочных полей могут оставляться произвольными, что и будет предполагаться далее при отсутствии специальных уточнений. Отметим также, что частный случай $D = 26$ и $n = 0$, соответствующий последовательной квантовой теории бозонной струны, также будет охватываться нашим рассмотрением.

Нас интересует подпространство решений ТГС, соответствующее случаю независимости полей теории от первых $d = D-3$ пространственно-временных координат, т. е. ТГС с первыми $d$ тороидально скомпактифицированными измерениями. Введем обозначения $Y^a$ и $x^\mu$ ($a = 1, \ldots, d$; $\mu = 1, 2, 3$) для координат $X^a$ и $X^{d+\mu}$ и воспользуемся для $D$-мерного линейного элемента следующей параметризацией:

$$ds_D^2 = (dY + V_{1\mu} dx^\mu)^T G(dY + V_{1\nu} dx^\nu) + \mathrm{e}^{2\phi} ds_3^2, \tag{3}$$

где под $Y$ понимается столбец высотой $d$ с компонентами $Y^a$, под $G$ — $d \times d$-матрица с компонентами $G_{ab}$ и полагается

$$\phi = \Phi - \ln|\det G|^{1/2}. \tag{4}$$

Далее, обозначим через $A$ и $B$ соответственно $d \times n$- и $d \times d$-мерные матрицы с компонентами $A_a^I$ и $B_{ab}$, а через $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$ — столбцы высотой $d$, $d$ и $n$ с компонентами

$$\begin{aligned} V_{1\,m\mu} &= G_{mk}^{-1} G_{k\,d+\mu}, \\ V_{2\,m\mu} &= B_{m\,d+\mu} - B_{mk} V_{1\,k\mu} + \frac{1}{2} A_m^I V_{3\,I\mu}, \\ V_{3\,I\mu} &= -A_{d+\mu}^I + A_m^I V_{1\,m\mu}; \end{aligned} \tag{5}$$

положим также

$$b_{\mu\nu} = B_{d+\mu d+\nu} - B_{mk} V_{1m\mu} V_{1k\nu} - \frac{1}{2}\left[V_{1m\mu} V_{2m\nu} - V_{1m\nu} V_{2m\mu}\right]. \tag{6}$$

В интересующем нас случае независимости полей трехмерной $\sigma$-модели от координат $Y^a$ на рассматриваемом подпространстве решений теории можно без наложения дополнительных связей на остающиеся переменные положить $b_{\mu\nu} = 0$ и ввести псевдоскалярные столбцы $U$, $V$ и $W$ в соответствии с соотношениями

$$\nabla U = \mathrm{e}^{-2\phi}\left\{\left[G + AA^T - \left(B - \frac{1}{2}AA^T\right)G^{-1}\left(B + \frac{1}{2}AA^T\right)\right]\nabla\times\mathbf{V}_1 - \right.$$
$$\left. - \left(B - \frac{1}{2}AA^T\right)G^{-1}\nabla\times\mathbf{V}_2 - \left(G - B + \frac{1}{2}AA^T\right)G^{-1}A\nabla\times\mathbf{V}_3\right\},$$
$$\nabla V = \mathrm{e}^{-2\phi}G^{-1}\left[\left(B + \frac{1}{2}AA^T\right)\nabla\times\mathbf{V}_1 + \nabla\times\mathbf{V}_2 - A\nabla\times\mathbf{V}_3\right], \qquad (7)$$
$$\nabla W = \mathrm{e}^{-2\phi}\left\{-A^TG^{-1}\left[\left(G + B + \frac{1}{2}AA^T\right)\nabla\times\mathbf{V}_1 + \nabla\times\mathbf{V}_2\right] + \right.$$
$$\left. + (1 + A^TG^{-1}A)\nabla\times\mathbf{V}_3\right\}.$$

Утверждение состоит в том, что эффективное действие для результирующей трехмерной системы дается выражением

$$S_3 = \int d^3x\sqrt{\det\, h_{\mu\nu}}(-R_3 + L_3), \qquad (8)$$

в котором скаляр кривизны $R_3$ определяется 3-метрикой $h_{\mu\nu}$, а лагранжиан трехмерных полей материи определяется в терминах введенных величин следующим образом:

$$L_3 = \mathrm{tr}\left[\frac{1}{4}(J_G^2 - J_B^2) + \frac{1}{2}\nabla A^TG^{-1}\nabla A\right] + (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}\left\{\left[\nabla U + \right.\right.$$
$$\left. + \left(B + \frac{1}{2}AA^T\right)\nabla V + A\nabla W\right]^T G^{-1}\left[\nabla U + \left(B + \frac{1}{2}AA^T\right)\nabla V + \right.$$
$$\left.\left. + A\nabla W\right] + \nabla V^TG\nabla V + (\nabla W - A^T\nabla V)^T(\nabla W - A^T\nabla V)\right\}, \qquad (9)$$

где $J_G = G^{-1}\nabla G$ и $J_B = G^{-1}[\nabla B + 1/2(A\nabla A^T - \nabla AA^T)]$ [27]. Тем самым устанавливается, что эффективная трехмерная теория, получающаяся в результате тороидальной компактификации низкоэнергетической ТГС, действительно описывается гравитирующей нелинейной $\sigma$-моделью.

Для изучения свойств симметрии этой $\sigma$-модели А. Сен ввел в рассмотрение матрицу $M$ размером $(2d+n)\times(2d+n)$, определяемую соотношением

$$M = N^TG^{-1}N - L, \qquad (10)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 1 & X & A \end{pmatrix}, \quad X = G + B + \frac{1}{2}AA^T \qquad (11)$$

и

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1_d & 0 \\ 1_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_n \end{pmatrix}, \tag{12}$$

а также матрицу-строку $\psi$ длиной $2d+n$ следующего вида:

$$\psi = \begin{pmatrix} U & V & W \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Матрица $M$ удовлетворяет, как легко убедиться, определяющим фактор-пространство $O(d,\, d+n)/O(d) \times O(d+n)$ соотношениям

$$M^T L M = M, \quad M^T = M \tag{14}$$

и, более того, в общем виде эти соотношения разрешает. Таким образом, матрица $M$ параметризует указанное фактор-пространство, являясь для него матрицей представления нулевой кривизны. Нетрудно далее проверить, что в терминах величин $M$, $\psi$ и $\phi$ трехмерный лагранжиан (9) принимает следующий вид:

$$L_3 = (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\phi}\,\nabla\psi M \nabla\psi^T + \frac{1}{8}\,\mathrm{tr}\,(M^{-1}\,\nabla M)^2; \tag{15}$$

этот результат используется нами в дальнейшем. А. Сен показал, что данная $\sigma$-модель параметризует, в действительности, фактор-пространство $O(d+1,\, d+1+n)/O(d+1) \times O(d+1+n)$, и первым построил для нее конкретное представление нулевой кривизны (с матрицей нулевой кривизны, определяемой величинами $M$, $\psi$ и $\phi$ [28]).

Развиваемый далее альтернативный формализм связан с последовательным использованием допускаемого рассматриваемой теорией представления в терминах матричных потенциалов Эрнста. Новый формализм оказывается особенно удобным для изучения и классификации скрытых симметрий теории, а также при построении классов ее точных решений, инвариантных относительно действия той или иной подгруппы полной группы ее симметрий.

## 2. МАТРИЧНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ЭРНСТА

Изложение элементов альтернативного формализма удобнее всего начать с построения нового представления нулевой кривизны, естественным образом приводящего к описанию теории в терминах матричных потенциалов Эрнста. Новая матрица нулевой кривизны $\mathcal{M}$ по определению разрешает соотношения

$$\mathcal{M}^T\,\mathcal{L}\,\mathcal{M} = \mathcal{L}, \quad \mathcal{M}^T = \mathcal{M}, \tag{16}$$

определяющие фактор-пространство $O(d{+}1,\, d{+}1{+}n)/O(d{+}1)\times O(d{+}1{+}n)$, причем элемент $\mathcal{L}$ группы $O(d+1,\, d+1+n)$ выбирается в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{d+1} & 0 \\ 1_{d+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_n \end{pmatrix}, \tag{17}$$

т. е. получается из определенного в (12) элемента $L$ группы $O(d,\, d+n)$ формальной заменой $d \to d+1$. Имея в виду эту замену, а также материал предыдущего раздела, определяем матрицу $\mathcal{M}$ соотношением

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^T \mathcal{G}^{-1} \mathcal{N} - \mathcal{L}, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \mathcal{N} \mathcal{L} \mathcal{N}^T, \tag{19}$$

а $\mathcal{N}$ — некоторая матрица размером $(d+1) \times [2(d+1)+n]$. В силу предполагаемой невырожденности матрицы $\mathcal{G}$ строки матрицы $\mathcal{N}$ являются линейно независимыми. Очевидно также, что преобразование $\mathcal{N} \to \mathcal{C}\mathcal{N}$ с любой невырожденной матрицей $\mathcal{C}$ переводит матрицу $\mathcal{M}$ в себя и является, таким образом, калибровочным. Представим, далее, матрицу $\mathcal{N}$ в виде $\mathcal{N} = \begin{pmatrix}\mathcal{N}_{\mathrm{I}} & \mathcal{N}_{\mathrm{II}} & \mathcal{N}_{\mathrm{III}}\end{pmatrix}$, где $\mathcal{N}_{\mathrm{I}}$ и $\mathcal{N}_{\mathrm{II}}$ — квадратные матричные блоки, и обеспечим линейную независимость строк матрицы $\mathcal{N}$ требованием невырожденности блока $\mathcal{N}_{\mathrm{I}}$. Положим после этого $\mathcal{C} = \mathcal{N}_{\mathrm{I}}^{-1}$ и применим к $\mathcal{N}$ указанное выше преобразование. В результате получим значение матрицы $\mathcal{N}$ с уже фиксированной калибровкой:

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{X} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $\mathcal{X} = \mathcal{N}_{\mathrm{I}}^{-1} \mathcal{N}_{\mathrm{II}}$, $\mathcal{A} = \mathcal{N}_{\mathrm{I}}^{-1} \mathcal{N}_{\mathrm{III}}$, а также соответствующее значение матрицы $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\mathcal{X} + \mathcal{X}^T - \mathcal{A}\mathcal{A}^T). \tag{21}$$

Далее, имея в виду соотношение (15), естественно предположить, что трехмерный лагранжиан $L_3$ в терминах $\mathcal{M}$ должен иметь следующий вид:

$$L_3 = \frac{1}{8} \operatorname{tr} (\mathcal{M}^{-1} \nabla \mathcal{M})^2, \tag{22}$$

из которого (при учете соотношений (18), (20) и (21)) заключаем также, что

$$L_3 = \operatorname{tr} \left[ \frac{1}{4} (\nabla \mathcal{X} - \nabla \mathcal{A} \mathcal{A}^T) \mathcal{G}^{-1} (\nabla \mathcal{X}^T - \mathcal{A} \nabla \mathcal{A}^T) \mathcal{G}^{-1} + \frac{1}{2} \nabla \mathcal{A}^T \mathcal{G}^{-1} \nabla \mathcal{A} \right]. \tag{23}$$

Утверждение состоит в том, что при выборе параметризации матричных потенциалов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$ в виде

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2\phi} + V^T X V + V^T A W + \dfrac{1}{2} W^T W & V^T X - U^T \\ XV + U + AW & X \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} W^T + V^T A \\ A \end{pmatrix} \tag{24}$$

трехмерные лагранжианы (9) и (23) действительно оказываются тождественно-равными [30]. Тем самым указанная параметризация доопределяет новое представление нулевой кривизны теории (18), (20), (21) и связанное с ним представление в терминах матричных потенциалов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$.

Остановимся на обсуждении этого последнего представления более подробно. Прежде всего, матрицы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$, имеющие размеры $(d+1) \times (d+1)$ и $(d+1) \times n$ соответственно, естественно называть «матричными потенциалами Эрнста» рассматриваемой теории. Действительно, соотношение (23) является непосредственным и очевидным матричным обобщением соотношения

$$L_3 = \frac{1}{2f^2} \left|\nabla \mathcal{E} - \bar{\mathcal{F}} \nabla \mathcal{F}\right|^2 - \frac{1}{f} \left|\nabla \mathcal{F}\right|^2, \tag{25}$$

в котором $f = 1/2(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}} - |\mathcal{F}|^2)$, описывающего в терминах (нематричных) потенциалов Эрнста $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ лагранжиан стационарной теории Эйнштейна–Максвелла. Более того, в частном случае ТГС с $d = 1$ и $n = 2$ совместный с уравнениями движения анзац с матричными потенциалами Эрнста, равными

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}' & -\mathcal{E}'' \\ \mathcal{E}'' & \mathcal{E}' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}' & -\mathcal{F}'' \\ \mathcal{F}'' & \mathcal{F}' \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}' + i\mathcal{E}''$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}' + i\mathcal{F}''$, оказывается эквивалентным стационарной теории Эйнштейна–Максвелла. Действительно, формулы (26) определяют вещественное матричное представление комплексных потенциалов Эрнста $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, в то время как размерность этого представления обеспечивает численное равенство трехмерных лагранжианов рассматриваемой на указанном анзаце ТГС и стационарной теории Эйнштейна–Максвелла [31].

## 3. КЛАССИФИКАЦИЯ СКРЫТЫХ СИММЕТРИЙ

Основанное на использовании матричных потенциалов Эрнста представление (23) существенно упрощает изучение скрытых симметрий рассматриваемой теории и приводит естественным образом к их «эйнштейн-максвелловской» классификации [30,31]. Действительно, очевидно прежде всего, что преобразование

$$\mathcal{X} \to \mathcal{X} + \Lambda_g, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A} \tag{27}$$

с постоянным (как и все последующие в этом разделе) матричным параметром $\Lambda_g = -\Lambda_g^T$ является симметрией. Другие явные симметрии даются преобразованиями

$$\mathcal{X} \to \Lambda_s^T \mathcal{X} \Lambda_s, \quad \mathcal{A} \to \Lambda_s^T \mathcal{A} \tag{28}$$

с невырожденным параметром $\Lambda_s$, и

$$\mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \mathcal{A} \to \mathcal{A}\Lambda_r \tag{29}$$

с параметром $\Lambda_r$, являющимся ортогональной матрицей ($\Lambda_r^T \Lambda_r = 1$). Менее очевидна симметрия

$$\mathcal{X} \to \mathcal{X} + \mathcal{A}\Lambda_{\mathrm{em}}^T + \frac{1}{2}\Lambda_{\mathrm{em}}\Lambda_{\mathrm{em}}^T, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{A} + \Lambda_{\mathrm{em}}, \tag{30}$$

наличие которой, тем не менее, легко проверяется. Преобразования (27)–(30), определяющие линейный сектор симметрий теории в представлении матричных потенциалов Эрнста, будут далее называться «гравитационным сдвигом, масштабным преобразованием, электромагнитным вращением» и «электромагнитным сдвигом» по аналогии с соответствующими симметриями стационарной теории Эйнштейна–Максвелла.

Нетрудно также проверить, что лагранжиан (23) инвариантен относительно отображения

$$\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{-1}, \quad \mathcal{A} \to -\mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}, \tag{31}$$

являющегося нелинейной дискретной симметрией теории. Это отображение переводит преобразование гравитационного сдвига (27) в преобразование симметрии

$$\mathcal{X} \to (1 + \mathcal{X}\Lambda_E)^{-1}\mathcal{X}, \quad \mathcal{A} \to (1 + \mathcal{X}\Lambda_E)^{-1}\mathcal{A}, \tag{32}$$

в котором $\Lambda_{\mathcal{E}}^T = -\Lambda_{\mathcal{E}}$. Преобразование (32) является матричным обобщением на случай рассматриваемой теории известного преобразования Элерса из теории Эйнштейна–Максвелла; далее оно будет называться «матричным преобразованием Элерса». Наконец, «матричное преобразование Харрисона» получается применением отображения (31) к преобразованию электромагнитного сдвига (30) и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\to \left(1 - \mathcal{A}\Lambda_H^T + \frac{1}{2}\mathcal{X}\Lambda_H\Lambda_{\mathcal{H}}^T\right)^{-1} \mathcal{X}, \\ \mathcal{A} &\to \left(1 - \mathcal{A}\Lambda_H^T + \frac{1}{2}\mathcal{X}\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1} (\mathcal{A} - \mathcal{X}\Lambda_H). \end{aligned} \tag{33}$$

Матричные преобразования Элерса и Харрисона составляют нелинейный и «истинно скрытый» сектор симметрий изучаемой теории в представлении матричных потенциалов Эрнста.

Нетрудно, далее, проверить, что преобразования (27)–(30) действуют на матрицу $\mathcal{N}$ как отображения вида

$$\mathcal{N} \to \mathcal{N}\,\mathcal{C} \tag{34}$$

с соответствующим образом подобранной постоянной матрицей $\mathcal{C}$. При этом в случае гравитационного сдвига и масштабного преобразования соответственно $\mathcal{C} = \mathcal{C}_g$ и $\mathcal{C} = \mathcal{C}_s$, где

$$\mathcal{C}_g = \begin{pmatrix} 1_{d+1} & \Lambda_g & 0 \\ 0 & 1_{d+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_s = \begin{pmatrix} \Lambda_s^{T\,-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & 1_n \end{pmatrix}; \tag{35}$$

в случае же электромагнитного вращения и электромагнитного сдвига $\mathcal{C} = \mathcal{C}_r$ и $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\rm em}$ соответственно с

$$\mathcal{C}_r = \begin{pmatrix} 1_{d+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{d+1} & \\ 0 & 0 & \Lambda_r \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{\rm em} = \begin{pmatrix} 1_{d+1} & \frac{1}{2}\Lambda_{\rm em}^T\Lambda_{\rm em} & \Lambda_{\rm em} \\ 0 & 1_{d+1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\rm em}^T & 1_n \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Под действием указанных преобразований, как опять же легко установить, матрица $\mathcal{M}$ преобразуется стандартным для матрицы нулевой кривизны образом:

$$\mathcal{M} \to \mathcal{C}^T\,\mathcal{M}\,\mathcal{C}, \tag{37}$$

причем трансформационная матрица $\mathcal{C}$ принимает одно из четырех приведенных выше значений.

Далее, дискретное преобразование (31) в $\mathcal{N}$-представлении сводится к отображению $\mathcal{N} \to \mathcal{X}^{-1}\mathcal{N}\mathcal{L}$, в то время как его действие на матрицу $\mathcal{M}$ совпадает с отображением $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{-1}$, а на трансформационную матрицу — с отображением $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{T\,-1}$. Легко видеть, что матрицы преобразований электромагнитного вращения и изменения масштаба переходят при этом отображении в себя (в терминах параметров получаются соответственно тождественное преобразование $\Lambda_r \to \Lambda_r$ и несущественная репараметризация $\Lambda_s \to \Lambda_s^{T\,-1}$), а матрицы гравитационного и электромагнитного сдвигов — в трансформационные матрицы преобразований Элерса и Харрисона:

$$\mathcal{C}_E = \begin{pmatrix} 1_{d+1} & 0 & 0 \\ \Lambda_E & 1_{d+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_H = \begin{pmatrix} 1_{d+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\Lambda_H\Lambda_H^T & 1_{d+1} & -\Lambda_H \\ -\Lambda_H^T & 0 & 1_n \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Легко также проверить, что каждая из трансформационных матриц (35), (36) и (38) удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{C}^T \mathcal{L} \mathcal{C} = \mathcal{L}, \tag{39}$$

т. е. указанные матрицы действительно являются элементами группы $O(d+1,\, d+1+n)$, составляющей полную группу трехмерных скрытых симметрий теории. Из дальнейшего изложения будет следовать, что общий элемент этой группы в представлении нулевой кривизны может быть получен как произведение шести написанных выше трансформационных матриц, составленное в произвольном порядке.

## 4. ГРУППА ЗАРЯЖАЮЩИХ СИММЕТРИЙ

Рассмотрим теперь произвольную конфигурацию полей теории, имеющую на пространственной бесконечности конечные предельные значения матричных потенциалов Эрнста, которые мы обозначим как $\mathcal{X}_\infty$ и $\mathcal{A}_\infty$. Утверждается, что с помощью определенной последовательности специальных преобразований симметрии асимптотические значения матричных потенциалов Эрнста можно привести к их простейшему виду, который определяется далее [31].

Действительно, применяя преобразование электромагнитного сдвига с параметром $\Lambda_{\rm em} = -\mathcal{A}_\infty$, для трансформированных асимптотических значений матричных потенциалов Эрнста получаем следующий результат:

$$\mathcal{X}'_\infty = \mathcal{X}_\infty - \frac{1}{2}\mathcal{A}_\infty \mathcal{A}^T_\infty, \quad \mathcal{A}'_\infty = 0. \tag{40}$$

Далее, используя преобразование гравитационного сдвига с параметром $\Lambda_g = 1/2(\mathcal{X}_\infty - \mathcal{X}^T_\infty)$, приходим к следующим значениям асимптотик матричных потенциалов Эрнста:

$$\mathcal{X}''_\infty = \frac{1}{2}\left(\mathcal{X}_\infty + \mathcal{X}^T_\infty - \mathcal{A}_\infty \mathcal{A}^T_\infty\right), \quad \mathcal{A}''_\infty = 0. \tag{41}$$

Видно, что $\mathcal{X}''_\infty = \mathcal{G}_\infty$; применяя масштабное преобразование симметрии с параметром

$$\Lambda_s = \begin{pmatrix} {\rm e}^{-\phi_\infty} & 0 \\ -{\rm e}^{-\phi_\infty} & \Theta^{-1}_\infty \end{pmatrix}, \tag{42}$$

в котором постоянная матрица $\Theta$ удовлетворяет соотношению $G_\infty = \Theta^T_\infty G_v\, \Theta_\infty$ и $G_v = {\rm diag}\,(-1; 1, \ldots, 1)$, приходим окончательно к асимптотическим значениям матричных потенциалов Эрнста, равным

$$\mathcal{X}_v = \Sigma, \quad \mathcal{A}_v = 0, \tag{43}$$

где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Эти значения являются простейшими и далее будут называться «вакуумными» ввиду того факта, что они соответствуют многомерному пространству Минковского с тривиальными значениями всех материальных полей. Отметим, что обращение приведенной процедуры позволяет перевести конфигурацию полей теории с вакуумными значениями их асимптотик в конфигурацию с уже произвольными значениями асимптотик этих полей. Таким образом, конечные значения асимптотик полей теории можно без потери общности положить равными их вакуумным значениям. В дальнейшем класс асимптотически-плоских решений будет определяться по отношению именно к вакуумным значениям асимптотик матричных потенциалов Эрнста, т. е. будет предполагаться, что для решений из указанного класса в окрестности пространственной бесконечности выполняются приближенные равенства $\mathcal{X} \sim \Sigma$ и $\mathcal{A} \sim 0$.

Перейдем теперь к изучению трехмерной группы заряжающих симметрий в рассматриваемой теории. По определению эта группа, являясь подгруппой группы скрытых трехмерных симметрий, состоит из преобразований, сохраняющих свойство асимптотической плоскостности решений. Таким образом, вакуумная конфигурация полей теории с $\mathcal{X} = \Sigma$ и $\mathcal{A} = 0$ является инвариантом данной группы преобразований. При этом явный вид преобразований из ГЗС нетрудно установить, используя результаты предыдущего раздела.

Действительно, из (29) немедленно следует, что преобразования электромагнитных вращений составляют $O(n)$-подгруппу ГЗС ($\Lambda_r \in O(n)$). Далее, масштабные преобразования с параметром $\Lambda_s$, подчиненным соотношению

$$\Lambda_s^T \Sigma \Lambda_s = \Sigma, \tag{45}$$

также составляют подгруппу ГЗС (изоморфную $O(d-1,\, 2)$). Две указанные подгруппы преобразований ГЗС выступают как явные; неявные преобразования связаны со специальным образом нормированными преобразованиями Элерса и Харрисона.

Для построения нормированного преобразования Элерса рассмотрим действие преобразования (32) с параметром $\Lambda_E$ на произвольное асимптотически-плоское решение ТГС; очевидно, что вакуумное значение потенциала $\mathcal{A}$ оно сохраняет. Применяя к результату преобразования Элерса преобразование гравитационного сдвига (27) с параметром

$$\Lambda_g = (1 + \Sigma\Lambda_E)^{-1}\Sigma\Lambda_E\Sigma(1 - \Lambda_E\Sigma)^{-1}, \tag{46}$$

устраним приобретенную антисимметричную часть вакуумного значения потенциала $\mathcal{X}$. Далее, приобретенная нетривиальная симметричная часть того же потенциала устраняется масштабным преобразованием (28) с параметром

$$\Lambda_s = 1 - \Lambda_E \Sigma. \tag{47}$$

В итоге получаем комбинацию из указанных трех преобразований симметрии, «жестко привязанную» к преобразованию Элерса и сохраняющую вакуумные значения матричных потенциалов Эрнста. Это преобразование и есть по определению нормированное преобразование Элерса:

$$\begin{aligned} &\mathcal{X} \to (1 + \Sigma\Lambda_E)(1 + \mathcal{X}\Lambda_E)^{-1}\mathcal{X}(1 - \Lambda_E\Sigma) + \Sigma\Lambda_E\Sigma, \\ &\mathcal{A} \to (1 + \Sigma\Lambda_E)(1 + \mathcal{X}\Lambda_E)^{-1}\mathcal{A}. \end{aligned} \tag{48}$$

Аналогичным образом строится и нормированное преобразование Харрисона, а именно: рассматривается действие преобразования Харрисона с параметром $\Lambda_H$ на произвольное асимптотически-плоское решение ТГС. Полученная нетривиальная асимптотика потенциала $\mathcal{A}$ устраняется преобразованием электромагнитного сдвига (30) с параметром

$$\Lambda_{\rm em} = \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}\Sigma\Lambda_H, \tag{49}$$

в то время как возникшая симметричная часть нетривиальной асимптотики потенциала $\mathcal{X}$ — масштабным преобразованием (28) с параметром

$$\Lambda_s = \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right). \tag{50}$$

Результирующая комбинация трех указанных преобразований, являющаяся по построению заряжающей симметрией теории, и есть по определению нормированное преобразование Харрисона. Это преобразование имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \to &\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)\left(1 - \mathcal{A}\Lambda_H^T + \frac{1}{2}\mathcal{X}\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1} \times \\ &\qquad\qquad \times \left[\mathcal{X} + \left(\mathcal{A} - \frac{1}{2}\mathcal{X}\Lambda_H\right)\Lambda_H^T\Sigma\right] + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\Sigma, \\ \mathcal{A} \to &\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)\left(1 - \mathcal{A}\Lambda_H^T + \frac{1}{2}\mathcal{X}\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}(\mathcal{A} - \mathcal{X}\Lambda_H) + \Sigma\Lambda_H. \end{aligned} \tag{51}$$

Соотношения (28), (29), (45), (48) и (51) полностью определяют ГЗС в ее действии на матричные потенциалы Эрнста и могут быть использованы для генерации асимптотически-плоских решений теории. При этом, однако, нормированные преобразования Элерса и Харрисона оказываются нелинейно реализованными, что на практике существенно усложняет процедуру генерации.

Для снятия указанной проблемы и дальнейшего изучения группы заряжающих симметрий перейдем от матричных потенциалов Эрнста к потенциалам

$$\mathcal{Z}_1 = 2\,(\mathcal{X}+\Sigma)^{-1} - \Sigma, \qquad \mathcal{Z}_2 = \sqrt{2}\,(\mathcal{X}+\Sigma)^{-1}\,\mathcal{A}. \tag{52}$$

Легко определить, что в их терминах действие подгрупп электромагнитных вращений и масштабных преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}_1 \to \mathcal{Z}_1, && \mathcal{Z}_2 \to \mathcal{Z}_2\Lambda_r,\\ &\mathcal{Z}_1 \to \Lambda_s^{-1}\mathcal{Z}_1\Lambda_s^{T\,-1}, && \mathcal{Z}_2 \to \Lambda_s^{-1}\mathcal{Z}_2. \end{aligned} \tag{53}$$

Далее, нормированное преобразование Элерса есть

$$\mathcal{Z}_1 \to \mathcal{Z}_1\Lambda_{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{Z}_2 \to \mathcal{Z}_2, \tag{54}$$

где $\Lambda_{\mathcal{E}} = (1-\Sigma\Lambda_E)(1+\Sigma\Lambda_E)^{-1}$; нетрудно проверить, что параметр $\Lambda_{\mathcal{E}}$ является элементом группы $O(d-1,2)$, т.к. $\Lambda_{\mathcal{E}}^T\Sigma\Lambda_{\mathcal{E}} = \Sigma$. С учетом этого факта удобно «нормировать» масштабное преобразование с параметром $\Lambda_s$ при помощи следующего за ним нормированного преобразования Элерса с параметром $\Lambda_{\mathcal{E}} = \Lambda_s^T$. Результирующее преобразование дается соотношениями

$$\mathcal{Z}_1 \to \Lambda_s^{-1}\mathcal{Z}_1, \quad \mathcal{Z}_2 \to \Lambda_s^{-1}\mathcal{Z}_2 \tag{55}$$

и называется далее «нормированным масштабным преобразованием». Наконец, нормированное преобразование Харрисона в новом представлении имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{Z}_1 &\left(1-\frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)\left(1+\frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1} - \\ &\qquad\qquad - \sqrt{2}\mathcal{Z}_2\Lambda_H^T\left(1+\frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}, \\ \mathcal{Z}_2 \to \sqrt{2}\mathcal{Z}_1 &\left(1+\frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}\Sigma\Lambda_H + \\ &\qquad + \mathcal{Z}_2\left[1-\Lambda_H^T\left(1+\frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}\Sigma\Lambda_H\right]. \end{aligned} \tag{56}$$

Таким образом, действие всех установленных преобразований из группы заряжающих симметрий теории на потенциалы $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ является линейным и однородным.

Введем теперь в рассмотрение кулоновские зарядовые характеристики асимптотически-плоских полей теории. Они могут быть объединены в постоянные матричные коэффициенты — зарядовые матрицы $Q_1$ и $Q_2$, входящие в асимптотические разложения матричных потенциалов Эрнста в соответствии с выражениями

$$\mathcal{X} \sim \Sigma - \frac{2\Sigma Q_1 \Sigma}{R}, \quad \mathcal{A} \sim \frac{\Sigma Q_2}{\sqrt{2}R}, \tag{57}$$

в которых трехмерная радиальная координата $R \to \infty$. При таком определении зарядовых матриц соответствующие асимптотики потенциалов $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ принимают простейший вид:

$$\mathcal{Z}_1 \sim \frac{Q_1}{R}, \qquad \mathcal{Z}_2 \sim \frac{Q_2}{R}. \tag{58}$$

Из него (в силу прямой пропорциональной зависимости между соответствующими величинами) немедленно следует, что величины $Q_1$ и $Q_2$ преобразуются под действием преобразований из ГЗС в точности так же, как и потенциалы $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$.

Этот факт позволяет установить вид одного нетривиального инварианта группы заряжающих симметрий (как в зарядовом, так и в потенциальном представлении), а именно: эффективный трехмерный лагранжиан, очевидно, является инвариантом ГЗС; при этом его значение на потенциалах Эрнста вида (57) есть

$$L_3 \sim \frac{1}{R^4}\,\mathrm{tr}\,(Q_1^T\,\Sigma Q_1 \Sigma + Q_2^T \Sigma Q_2). \tag{59}$$

Поэтому и постоянный коэффициент при $1/R^4$ является инвариантом, который может быть также переписан в виде $I(Q) = \mathrm{tr}\,(Q^T\,\Sigma\,Q\,\Xi)$, где $Q = (Q_1\,Q_2)$ и

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}. \tag{60}$$

При этом функциональный инвариант группы заряжающих симметрий $I(\mathcal{Z})$ получается из ее зарядового инварианта $I(Q)$ заменой $Q \to \mathcal{Z}$, где $(d+1) \times (d+1+n)$-мерный матричный потенциал $\mathcal{Z}$ определяется как

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_2 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Следует отметить, что полученные ранее преобразования из ГЗС принимают особенно простую форму именно в терминах матричного потенциала $\mathcal{Z}$.

Действительно, непосредственные вычисления показывают, что все эти преобразования записываются в следующем виде:

$$\mathcal{Z} \to C_l\, \mathcal{Z}\, C_r, \tag{62}$$

где $C_l$ и $C_r$ — соответствующие трансформационные матрицы. При этом матрица $C_l$ оказывается отличной от тождественной только в случае нормированного масштабного преобразования; ее значение есть

$$C_l(\Lambda_s) = \Lambda_s^{-1}. \tag{63}$$

Нетождественные значения матрицы $C_r$ получаются в остающемся случае электромагнитного вращения, а также для нормированных преобразований Элерса и Харрисона. Соответствующие выкладки приводят к следующему результату:

$$\begin{gathered} C_r(\Lambda_r) = \begin{pmatrix} 1_{d+1} & 0 \\ 0 & \Lambda_r \end{pmatrix}, \quad C_r(\Lambda_{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \\ C_r(\Lambda_H) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1} & \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}\Sigma\Lambda_H \\ -\sqrt{2}\Lambda_H^T\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1} & 1 - \Lambda_H^T\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}\Sigma\Lambda_H \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{64}$$

Также непосредственно проверяется, что перечисленные трансформационные матрицы удовлетворяют соотношениям

$$C_l^T\, \Sigma\, C_l = \Sigma, \qquad C_r^T\, \Xi\, C_r = \Xi, \tag{65}$$

в силу которых, в свою очередь, инвариантность величин $I(Q)$ и $I(Z)$ относительно рассматриваемых преобразований оказывается явной.

Положим теперь $C_l = C_l(\Lambda_s)$ и $C_r = C_r(\Lambda_r)C_r(\Lambda_{\mathcal{E}})C_r(\Lambda_H)$. Мы собираемся показать, что так определенные матрицы $C_l$ и $C_r$ разрешают соотношения (65) в общем виде по крайней мере в окрестности тождественного преобразования. Действительно, переходя сразу к нетривиальному случаю матрицы $C_r$, удовлетворяющей второму из соотношений (65), рассмотрим ее инфинитезимальный предел $C_r = 1 + \gamma_r$, где $\gamma_r$ — инфинитезимальный параметр, такой, что $\gamma_r^T = -\Xi\, \gamma_r\, \Xi$. Решая это уравнение, получаем

$$\gamma_r = \begin{pmatrix} -2\Sigma\lambda_{\mathcal{E}} & \sqrt{2}\Sigma\lambda_H \\ -\sqrt{2}\lambda_H^T & \lambda_r \end{pmatrix}, \tag{66}$$

где $\lambda_{\mathcal{E}}$ и $\lambda_r$ — параметры, удовлетворяющие соотношениям $\lambda_{\mathcal{E}}^T = -\Sigma\, \lambda_{\mathcal{E}}\, \Sigma$ и $\lambda_r^T = -\lambda_r$. Но аналогичный результат получается и из данного выше определения матрицы $C_r$ в терминах параметров нормированных преобразований, когда в инфинитезимальном случае положено $\Lambda_{\mathcal{E}} = 1 + \lambda_{\mathcal{E}}$, $\Lambda_r = 1 + \lambda_r$, $\Lambda_H = \lambda_H$; это обстоятельство и доказывает сделанное утверждение. Но тогда, в качестве следствия, заключаем, что соотношения (62) и (65) являются альтернативной компактной формой записи установленных ранее преобразований из ГЗС. Более того, из подсчета числа независимых параметров найденных преобразований следует, что они составляют полную группу заряжающих симметрий; в силу (65) эта группа изоморфна $O(2, d-1) \times O(2, d-1+n)$. Отметим также, что дискретное преобразование (31) в терминах матричного потенциала $\mathcal{Z}$ записывается следующим образом:

$$\mathcal{Z} \to -\Sigma\, \mathcal{Z}\, \Xi. \tag{67}$$

При этом действие данного преобразования на трансформационные матрицы $C_l$ и $C_r$ описывается отображениями $C_l \to \Sigma\, C_l\, \Sigma$ и $C_r \to \Xi\, C_r\, \Xi$ [31].

## 5. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕАРИЗУЮЩЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В этом разделе развивается представление, в рамках которого группа трехмерных заряжающих симметрий имеет линейную и однородную реализацию. Использование подобного «линеаризующего» представления позволяет получать результаты в форме, явно инвариантной по отношению к действию указанной группы преобразований симметрии. Данное обстоятельство оказывается особенно важным при изучении имеющего большое прикладное значение класса трехмерных асимптотически-плоских решений теории.

Из результатов предыдущего раздела следует, что линеаризующее представление может быть связано с использованием введенного при помощи соотношения (61) матричного потенциала $\mathcal{Z}$. В его терминах потенциал $\mathcal{N}$, определяющий матрицу $\mathcal{M}$ нулевой кривизны теории (см. начало разд. 2), может быть записан в виде $\mathcal{N} = (\Sigma + \mathcal{Z}_1)^{-1}(\mathcal{D}_1 + \mathcal{Z}\mathcal{D}_2)$, где постоянные матрицы $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ даются выражениями

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Непосредственной проверкой можно также убедиться в том, что имеют место тождества

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{L} \mathcal{D}_1^T = 2\Sigma, \quad \mathcal{D}_1 \mathcal{L} \mathcal{D}_2^T = 0, \quad \mathcal{D}_2 \mathcal{L} \mathcal{D}_2^T = -2\Xi, \tag{69}$$

существенно упрощающие процесс получения приводимых далее результатов. С их помощью и при учете соотношений (18) и (19) для матрицы представления нулевой кривизны нетрудно получить следующее выражение:

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_1^T \mathcal{M}_1 \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_1^T \mathcal{M}_2 \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_2^T \mathcal{M}_2^T \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2^T \mathcal{M}_3 \mathcal{D}_2 - \mathcal{L}, \tag{70}$$

в котором под матричными потенциалами $\mathcal{M}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) понимаются величины

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{H}^{-1}, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{Z}, \quad \mathcal{M}_3 = \mathcal{Z}^T\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Z}, \tag{71}$$

и полагается $\mathcal{H} = \Sigma - \mathcal{Z}\Xi\mathcal{Z}^T$. Подстановка выражений (70) и (71) в соотношение (22) приводит после несложной алгебры к следующей формуле, представляющей трехмерный лагранжиан теории $L_3$ в терминах ее линеаризующего потенциала $\mathcal{Z}$:

$$L_3 = \mathrm{tr}\,[\nabla\mathcal{Z}(\Xi - \mathcal{Z}^T\Sigma\mathcal{Z})^{-1}\nabla\mathcal{Z}^T(\Sigma - \mathcal{Z}\Xi\mathcal{Z}^T)^{-1}]. \tag{72}$$

Отметим, что получение данного результата более прямолинейным способом связано со значительными вычислительными трудностями. Далее, соответствующие лагранжиану (72) уравнения движения таковы:

$$\begin{gathered}\nabla^2\mathcal{Z} + 2\nabla\mathcal{Z}\Xi\mathcal{Z}^T(\Sigma - \mathcal{Z}\Xi\mathcal{Z}^T)^{-1}\nabla\mathcal{Z} = 0,\\ R_{3\,\mu\nu} = \mathrm{tr}\,[\mathcal{Z}_{,(\mu}(\Xi - \mathcal{Z}^T\Sigma\mathcal{Z})^{-1}\mathcal{Z}^T_{,\nu)}(\Sigma - \mathcal{Z}\Xi\mathcal{Z}^T)^{-1}].\end{gathered} \tag{73}$$

Легко понять, что определяемая соотношениями (62) и (65) группа заряжающих симметрий является явной симметрией теории в рассматриваемом представлении.

Определим далее векторную матрицу $\mathbf{\Omega}$ соотношением

$$\nabla \times \mathbf{\Omega} = -\mathcal{L}\,\mathcal{M}^{-1}\nabla\mathcal{M}, \tag{74}$$

совместным на пространстве решений уравнений движения теории. Тогда из (69)–(71) немедленно следует, что

$$\mathbf{\Omega} = \mathcal{D}_1^T\mathbf{\Omega}_1\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1^T\mathbf{\Omega}_2\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_2^T\mathbf{\Omega}_2^T\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2^T\mathbf{\Omega}_3\mathcal{D}_2, \tag{75}$$

где

$$\begin{gathered}\nabla \times \mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{J}, \quad \nabla \times \mathbf{\Omega}_2 = \mathcal{H}^{-1}\nabla\mathcal{Z} - \mathbf{J}\mathcal{Z},\\ \nabla \times \mathbf{\Omega}_3 = \nabla\mathcal{Z}^T\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^T\mathcal{H}^{-1}\nabla\mathcal{Z} + \mathcal{Z}^T\mathbf{J}\mathcal{Z},\end{gathered} \tag{76}$$

и $\mathbf{J} = \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{Z}\Xi\nabla\mathcal{Z}^T - \nabla\mathcal{Z}\Xi\mathcal{Z}^T)\mathcal{H}^{-1}$. Получившийся набор трехмерных линейно независимых векторных матричных полей $\mathbf{\Omega}_\alpha$, определяемых соответствующими ковариантно-сохраняющимися матричными токами, является полным по построению. Формулы (70) и (75) описывают переход от определяемых потенциалом $\mathcal{Z}$ величин $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{\Omega}_\alpha$ к матрице нулевой кривизны $\mathcal{M}$ и с ней связанной векторной матрице $\mathbf{\Omega}$. Обратный переход, как в этом нетрудно убедиться, дается соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 = \Pi_1^T \mathcal{M} \Pi_1 + \frac{1}{2}\Sigma, && \boldsymbol{\Omega}_1 = \Pi_1^T \boldsymbol{\Omega} \Pi_1, \\
&\mathcal{M}_2 = \Pi_1^T \mathcal{M} \Pi_2, && \boldsymbol{\Omega}_2 = -\Pi_1^T \boldsymbol{\Omega} \Pi_2, \\
&\mathcal{M}_3 = \Pi_2^T \mathcal{M} \Pi_2 - \frac{1}{2}\Xi, && \boldsymbol{\Omega}_3 = \Pi_2^T \boldsymbol{\Omega} \Pi_2,
\end{aligned}
\tag{77}
$$

в которых для удобства были введены следующие связанные с матрицами $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ «проекционые операторы» $\Pi_1$ и $\Pi_2$:

$$
\Pi_1 = \frac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{D}_1^T \Sigma, \quad \Pi_2 = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{D}_2^T \Xi. \tag{78}
$$

Для этих операторов справедливы легко проверяемые тождества

$$
\mathcal{D}_1 \Pi_1 = 1, \quad \mathcal{D}_1 \Pi_2 = 0, \quad \mathcal{D}_2 \Pi_1 = 0, \quad \mathcal{D}_2 \Pi_2 = 1, \tag{79}
$$

а также и связанные с ними соотношения

$$
\Pi_1^T \mathcal{L} \Pi_1 = \frac{1}{2}\Sigma, \quad \Pi_1^T \mathcal{L} \Pi_2 = 0, \quad \Pi_2^T \mathcal{L} \Pi_2 = -\frac{1}{2}\Xi. \tag{80}
$$

Покажем теперь, как результаты, полученные в терминах линеаризующего представления, могут быть переведены на язык физических полей теории гетеротической струны. Итак, сначала по известному значению линеаризующего потенциала $\mathcal{Z}$ и трехмерной метрики $h_{\mu\nu}$ вычисляется набор матричных потенциалов $\mathcal{M}_\alpha$ и $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$. Затем эти потенциалы разбиваются на блоки в соответствии со следующей схемой:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{M}_1, \boldsymbol{\Omega}_1 \sim \begin{pmatrix} 1\times 1 & 1\times d \\ d\times 1 & d\times d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_2, \boldsymbol{\Omega}_2 \sim \begin{pmatrix} 1\times 1 & 1\times d & 1\times n \\ d\times 1 & d\times d & d\times n \end{pmatrix}, \\
\mathcal{M}_3, \boldsymbol{\Omega}_3 \sim \begin{pmatrix} 1\times 1 & 1\times d & 1\times n \\ d\times 1 & d\times d & d\times n \\ n\times 1 & n\times d & n\times n \end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{81}
$$

Обозначая далее через $\mathcal{M}_{\alpha,\beta\gamma}$ блок $\beta\gamma$ матрицы $\mathcal{M}_\alpha$, вводим следующий набор скалярных матричных потенциалов:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= G_0 \mathcal{M}_{1,22} G_0 + G_0 \mathcal{M}_{2,22} + (\mathcal{M}_{2,22})^T G_0 + \mathcal{M}_{3,22}, \\
U_2 &= G_0 \mathcal{M}_{1,22} - G_0 \mathcal{M}_{2,22} G_0 + (\mathcal{M}_{2,22})^T - \mathcal{M}_{3,22} G_0, \\
U_3 &= \sqrt{2}(G_0 \mathcal{M}_{2,23} + \mathcal{M}_{3,23}), \\
W_1 &= -\mathcal{M}_{1,12} G_0 - \mathcal{M}_{2,12} + (\mathcal{M}_{2,21})^T G_0 + \mathcal{M}_{3,12}, \\
W_2 &= \mathcal{M}_{1,12} - \mathcal{M}_{2,12} G_0 + (\mathcal{M}_{2,21})^T - \mathcal{M}_{3,12} G_0, \\
W_3 &= \sqrt{2}(\mathcal{M}_{2,13} + \mathcal{M}_{3,13}),
\end{aligned}
\tag{82}
$$

где $G_0 = \mathrm{diag}\,(-1, 1, \ldots, 1)$ — вакуумное значение матрицы $G$, а также (нематричный) скалярный потенциал $S_0 = -\mathcal{M}_{1,11} + 2\mathcal{M}_{2,11} - \mathcal{M}_{3,11}$. По введенным величинам вычисляем скалярные потенциалы $S_\alpha = U_\alpha + S_0^{-1} W_1^T W_\alpha$, а по матрице $S_1$ — связанные с ней величины

$$\begin{gathered}\det\, S_1 = (1 + S_0 W_1 U_1^{-1} W_1^T)\, \det\, U_1, \\ S_1^{-1} = U_1^{-1} - \frac{S_0^{-1} U_1^{-1} W_1^T W_1 U_1^{-1}}{1 + S_0^{-1} W_1 U_1^{-1} W_1^T}.\end{gathered} \tag{83}$$

Наконец, необходимый для дальнейшего набор векторных потенциалов $\mathbf{V}_\alpha$ вводим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= [-\mathbf{\Omega}_{1,12} G_0 + \mathbf{\Omega}_{2,12} + (\mathbf{\Omega}_{2,21})^T G_0 + \mathbf{\Omega}_{3,12}]^T, \\ \mathbf{V}_2 &= [-\mathbf{\Omega}_{1,12} - \mathbf{\Omega}_{2,12} G_0 + (\mathbf{\Omega}_{2,21})^T - \mathbf{\Omega}_{3,12} G_0]^T, \\ \mathbf{V}_3 &= \sqrt{2}(\mathbf{\Omega}_{2,13} + \mathbf{\Omega}_{3,13})^T. \end{aligned} \tag{84}$$

Утверждение состоит в том, что в терминах определенных величин метрика физического пространства-времени дается выражением

$$ds_D^2 = (dY + V_{1\mu} dx^\mu)^T S_1^{-1} (dY + V_{1\nu} dx^\nu) + S_0 ds_3^2, \tag{85}$$

в то время как набор физических полей многомерной материи описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^\Phi = |S_0 \det S_1|^{1/2}, \\ &B_{mk} = \frac{1}{2}(S_1^{-1} S_2 - S_2^T S_1^{-1})_{mk}, \\ &B_{m\, d+\nu} = \left\{ V_{2\nu} + \frac{1}{2}(S_1^{-1} S_2 - S_2^T S_1^{-1}) V_{1\nu} - S_1^{-1} S_3 V_{3\nu} \right\}_m, \\ &B_{d+\mu\, d+\nu} = \frac{1}{2}[V_{1\mu}^T (S_1^{-1} S_2 - S_2^T S_1^{-1}) V_{1\nu} + V_{1\mu}^T V_{2\nu} - V_{1\nu}^T V_{2\mu}], \\ &A_m^I = (S_1^{-1} S_3)_{mI}, \\ &A_{d+\mu}^I = (-V_{3\mu} + S_3^T S_1^{-1} V_{1\mu})_I. \end{aligned} \tag{86}$$

Таким образом, перевод результатов с языка $\mathcal{Z}$-представления на язык физических полей теории сводится к следующему: сначала вычисляются величины $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{\Omega}_\alpha$, затем потенциалы $S_0$, $U_\alpha$ и $W_\alpha$. Далее следует стадия получения в явном виде потенциалов $S_\alpha$ и $\mathbf{V}_\alpha$ и, наконец, собственно метрики и полей струнной материи. Следует также отметить, что при помощи соотношений (77) величины $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{\Omega}_\alpha$ могут быть получены непосредственно из объектов $\mathcal{M}$ и $\mathbf{\Omega}$, являющихся основными в рамках применения метода обратной задачи рассеяния (в случае компактификации теории на два измерения).

Полученные в этом разделе результаты могут быть использованы для дополнительного исследования группы скрытых трехмерных симметрий теории. Так, из соотношений (62), (65), (71) и (76) вытекает, что действие группы заряжающих симметрий на матричные потенциалы $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathbf{\Omega}_\alpha$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}_1 \to C_l^{-1\,T}\mathcal{M}_1 C_l^{-1}, & \mathbf{\Omega}_1 \to C_l^{-1\,T}\mathbf{\Omega}_1 C_l^{-1}, \\ \mathcal{M}_2 \to C_l^{-1\,T}\mathcal{M}_2 C_r, & \mathbf{\Omega}_2 \to C_l^{-1\,T}\mathbf{\Omega}_2 C_r, \\ \mathcal{M}_3 \to C_r^T \mathcal{M}_3 C_r, & \mathbf{\Omega}_3 \to C_r^T \mathbf{\Omega}_3 C_r. \end{array} \tag{87}$$

В представлении нулевой кривизны трансформационные формулы (87) в своей скалярной части должны описываться преобразованием вида (37), в то время как в векторной — преобразованием $\mathbf{\Omega} \to \mathcal{C}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathcal{C}$, причем матрица преобразования $\mathcal{C}$ должна удовлетворять основному групповому соотношению (39). Используя «прямые» соотношения (70) и (75) и «обратные» к ним соотношения (77), а также тождества (69), (79) и (80), нетрудно показать, что сделанное утверждение действительно имеет место. При этом трансформационные матрицы представления нулевой кривизны $\mathcal{C}_l$ и $\mathcal{C}_r$ оказываются связанными с соответствующими матрицам $C_l$ и $C_r$ линеаризующего представления следующим образом:

$$\mathcal{C}_l = 1 + \Pi_1(C_l^{-1} - 1)\mathcal{D}_1, \quad \mathcal{C}_r = 1 + \Pi_2(C_r - 1)\mathcal{D}_2. \tag{88}$$

Используя еще раз тождества (79), легко проверить, что имеет место коммутация матриц $\mathcal{C}_l$ и $\mathcal{C}_r$:

$$[\mathcal{C}_l,\ \mathcal{C}_r] = 0; \tag{89}$$

это факт естественный, ввиду формы трансформационного соотношения (62). Определим теперь общую матрицу $\mathcal{C}$ преобразований из ГЗС формулой

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_l\,\mathcal{C}_r, \tag{90}$$

в которой, в силу (89), порядок множителей несуществен. Непосредственно проверяется, что так определенная трансформационная матрица $\mathcal{C}$, помимо основного группового соотношения (39), удовлетворяет также связанному с «сохранением» вакуумного решения дополнительному групповому соотношению

$$\mathcal{C}^T\,\mathcal{M}_v\,\mathcal{C} = \mathcal{M}_v, \tag{91}$$

в котором

$$\mathcal{M}_v = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Xi \end{pmatrix} \tag{92}$$

есть «вакуумное» значение матрицы нулевой кривизны теории. Нетрудно также показать, что данная трансформационная матрица $\mathcal{C}$ описывает всю связную с тождественным преобразованием часть ГЗС. Действительно, полагая $C_l = 1 + \gamma_l$ и $C_r = 1 + \gamma_r$ и используя соотношения (88), заключаем, что $\mathcal{C} = 1 + \Gamma$, где $\Gamma = \Gamma_l + \Gamma_r$ и

$$\Gamma_l = -\Pi_1 \gamma_l \mathcal{D}_1, \quad \Gamma_r = \Pi_2 \gamma_r \mathcal{D}_2. \tag{93}$$

Но данная матрица $\Gamma$ является в инфинитезимальном случае общим решением следующей из (39) и (91) системы уравнений

$$\Gamma^T = -\mathcal{L}\,\Gamma\,\mathcal{L}, \qquad \Gamma^T = -\mathcal{M}_v\,\Gamma\,\mathcal{M}_v, \tag{94}$$

определяющей алгебру полной ГЗС. Это обстоятельство и доказывает сделанное утверждение (при проверке нужно воспользоваться соответствующими алгебраическими свойствами матриц $\gamma_l$ и $\gamma_r$).

Можно далее показать, что общее решение первого из уравнений системы (94) может быть представлено в следующем виде:

$$\Gamma = \Gamma_l + \Gamma_r + \Gamma_m, \tag{95}$$

где величины $\Gamma_l$ и $\Gamma_r$ даются, как и прежде, соотношениями (93), в то время как матрица $\Gamma_m$ определяется через произвольный инфинитезимальный параметр $\gamma_m$ размером $(d+1) \times (d+1+n)$ при помощи соотношения

$$\Gamma_m = 2\left(\Pi_2 \Xi \gamma_m^T \Pi_1^T - \Pi_1 \gamma_m \Xi \Pi_2^T\right)\mathcal{L}. \tag{96}$$

Очевидно, что преобразования симметрии, соответствующие параметру $\Gamma_m$, составляют часть полной группы преобразований симметрии, дополнительную к группе заряжающих симметрий. Далее, действие инфинитезимальных преобразований симметрии на матрицу нулевой кривизны $\mathcal{M}$ описывается выражением

$$\delta_a \mathcal{M} = \Gamma_a^T \mathcal{M} + \mathcal{M}\Gamma_a, \tag{97}$$

в котором индекс $a$ принимает значения $l, r$ и $m$. Используя соотношения перехода (77), можно вычислить действие инфинитезимальных преобразований с параметрами $\gamma_l, \gamma_r$ и $\gamma_m$ сначала на потенциалы $\mathcal{M}_\alpha$, а затем и на потенциал $\mathcal{Z}$. Результат пересчета таков:

$$\begin{gathered} \delta_l \mathcal{Z} = \gamma_l \mathcal{Z}, \quad \delta_r \mathcal{Z} = \mathcal{Z}\gamma_r, \\ \delta_m \mathcal{Z} = \gamma_m - \mathcal{Z}\Xi\gamma_m^T \Sigma \mathcal{Z}; \end{gathered} \tag{98}$$

при этом его нетривиальная часть связана, разумеется, с незаряжающим $m$-преобразованием. Оно соответствует, как легко видеть, процедуре устранения или генерации произвольных асимптотик асимптотически-плоского решения, описанной в начале разд. 3.

Установим теперь коммутационные соотношения для алгебры группы симметрий теории, обозначив через $T(\gamma_a)$ генераторы в $T$-представлении (при этом вычисления удобно производить в $\mathcal{C}$-представлении). Для коммутаторов генераторов из группы заряжающих симметрий получаем следующий очевидный результат:

$$\begin{aligned}[T(\gamma_l'), T(\gamma_l'')] &= T([\gamma_l', \gamma_l'']), \\ [T(\gamma_r'), T(\gamma_r'')] &= T([\gamma_r', \gamma_r'']),\end{aligned} \tag{99}$$

т. е. замыкание коммутаторов из $l$- и $r$-подалгебр на себя, а также

$$[T(\gamma_l), T(\gamma_r)] = 0, \tag{100}$$

т. е. факт коммутации этих подалгебр. Далее, «смешанные» коммутаторы имеют вид

$$[T(\gamma_l), T(\gamma_m)] = T(\gamma_m'), \quad [T(\gamma_r), T(\gamma_m)] = T(\gamma_m''), \tag{101}$$

где $\gamma_m' = -\gamma_l\gamma_m$ и $\gamma_m'' = -\gamma_m\gamma_r$. Наконец, коммутаторы генераторов из незаряжающей части группы симметрии даются выражениями

$$[T(\gamma_m'), T(\gamma_m'')] = T(\gamma_l) + T(\gamma_r), \tag{102}$$

где $\gamma_l = (\gamma_m''\Xi\gamma_m'^T - \gamma_m'\Xi\gamma_m''^T)\Sigma$ и $\gamma_r = \Xi(\gamma_m'^T\Sigma\gamma_m'' - \gamma_m''^T\Sigma\gamma_m')$. Как этого и следовало ожидать, исходя из общих соображений, незаряжающие преобразования симметрии теории не образуют какой бы то ни было подгруппы.

## 6. ГЕНЕРАЦИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИЗРАЭЛЯ–ВИЛЬСОНА–ПЕРЕША

В качестве иллюстрации разработанного в разд. 2–5 формализма рассмотрим класс полей теории, в рамках которого матричные потенциалы Эрнста определяются выражениями

$$\mathcal{X} = (1+\zeta)^{-1}(1+\zeta)\Sigma, \quad \mathcal{A} = \sqrt{2}(1+\zeta)^{-1}\zeta\,\mathcal{B}, \tag{103}$$

где $\zeta = \zeta(x^\mu)$ является матричной функцией, а $\mathcal{B}$ — матричной константой. Такая конфигурация полей, как это следует из материала разд. 2, служит непосредственным обобщением на случай рассматриваемой струнно-гравитационной системы семейства решений Израэля–Вильсона–Переша (ИВП) из теории Эйнштейна–Максвелла. Действительно, замена $\mathcal{X} \to \mathcal{E}, \mathcal{A} \to \mathcal{F}, \mathcal{B} \to \exp{(i\delta)}$, где $\delta$ — вещественный числовой параметр, переводит выражения (103) в формулы, определяющие потенциалы Эрнста указанного семейства решений. Нас интересуют свойства симметрии рассматриваемого класса и ответ на вопрос о том, является ли данная конфигурация полей теории решением ее уравнений движения (73).

Прежде всего заметим, что в терминах линеаризующего потенциала данная конфигурация принимает вид

$$\mathcal{Z} = \Sigma\,\zeta\left(1 \quad \mathcal{B}\right). \tag{104}$$

Используя этот факт и материал разд. 4, нетрудно установить, что при электромагнитных вращениях входящие в определение рассматриваемого класса полей величины $\zeta$ и $\mathcal{B}$ преобразуются следующим образом:

$$\zeta \to \zeta, \quad \mathcal{B} \to \mathcal{B}\,\Lambda_r. \tag{105}$$

Далее, для нормированных масштабного преобразования и преобразования Элерса получаем соответственно

$$\begin{aligned} &\zeta \to \Lambda_s^T \zeta, \quad \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \\ &\zeta \to \zeta \Lambda_{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{B} \to \Lambda_{\mathcal{E}}^{-1} \mathcal{B}, \end{aligned} \tag{106}$$

в то время как для нормированного преобразования Харрисона результат таков:

$$\begin{aligned} &\zeta \to \zeta\left(1 - \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T - \sqrt{2}\mathcal{B}\Lambda_H^T\right)\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}, \\ &\mathcal{B} \to \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)\left(1 - \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T - \sqrt{2}\mathcal{B}\Lambda_H^T\right)^{-1} \times \\ &\times\left\{\mathcal{B}\left[1 - \Lambda_H^T\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}\Sigma\Lambda_H\right] + \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\Sigma\Lambda_H\Lambda_H^T\right)^{-1}\Sigma\Lambda_H\right\}. \end{aligned} \tag{107}$$

Видно, что во всех приведенных формулах не нарушается природа матричного параметра $\mathcal{B}$ (его независимость от координат $x^\mu$). Таким образом, рассматриваемый анзац (103) инвариантен относительно полной группы заряжающих симметрий ТГС подобно своему прообразу из теории Эйнштейна–Максвелла. Нетрудно, наконец, проверить, что уравнения движения теории выполняются, если трехмерная метрика $h_{\mu\nu}$ плоская, матричная функция $\zeta$ гармоническая (заметим, что линейные преобразования из ГЗС не нарушают условия гармоничности), а матричная константа $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующему условию связи:

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^T = -\Sigma. \tag{108}$$

Указанное условие, представляющее собой алгебраическое уравнение на матричный параметр $\mathcal{B}$, в случае $d = 1$ (и при произвольном значении $n$) может быть очевидным образом разрешено; в случае же $d > 1$ вещественных решений у рассматриваемого уравнения не существует. Нас интересует инвариантное относительно ГЗС обобщение анзаца (103), (104), позволяющее обойти проблему условия связи (108).

Искомое обобщение естественным образом возникает при последовательном использовании линеаризующего представления [32]. Рассмотрим анзац с

$$\mathcal{Z} = \Lambda\, \mathcal{Q}, \tag{109}$$

где $\Lambda = \Lambda(x^\mu)$ и $\mathcal{Q}$ есть соответственно матричные функция и константа с размерами $(d+1) \times \mathcal{K}$ и $\mathcal{K} \times (d+1+n)$, причем $\mathcal{K}$ — пока произвольный натуральный параметр. Очевидно, что при $\mathcal{K} = d+1$, положив $\Lambda = \Sigma\zeta$ и $\mathcal{Q} = (1\ \mathcal{B})$, мы вернемся к уже рассмотренному случаю, так что анзац (109) действительно обобщает класс полей (103).

Приступая к изучению нового анзаца (109), отметим сразу, что уравнения движения теории выполняются, если метрика $h_{\mu\nu}$ плоская, матричная функция $\Lambda$ гармоническая и если, кроме того, матричная константа $\mathcal{Q}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{Q}\, \Xi\, \mathcal{Q}^T = 0, \tag{110}$$

которое является обобщением условия связи (108). Совершенно очевидно, что рассматриваемый класс решений является инвариантным относительно действия группы заряжающих симметрий теории. Действительно, общее ГЗС-преобразование (62) реализуется на определяющих данный класс решений величинах $\Lambda$ и $\mathcal{Q}$ в виде отображения

$$\Lambda \to C_l \Lambda, \quad \mathcal{Q} \to \mathcal{Q} C_r, \tag{111}$$

сохраняющего как условие гармоничности функции $\Lambda$, так и условие связи (110), наложенное на параметр $\mathcal{Q}$.

Далее, очевидно, что без потери общности строки матрицы $\mathcal{Q}$ можно считать линейно независимыми. Действительно, пусть, например, ее $\mathcal{K}$-я строка $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}$ есть линейная комбинация оставшихся строк $\mathcal{Q}_l$ ($l = 1, \ldots, \mathcal{K}-1$), т. е. пусть существуют константы $\beta_l$ такие, что $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}} = \sum_{l=1}^{\mathcal{K}-1} \beta_l \mathcal{Q}_l$. Тогда вычеркивание из матрицы $\mathcal{Q}$ этой строки вместе с одновременным вычеркиванием из матрицы $\Lambda$ ее $\mathcal{K}$-го столбца и сдвигом оставшихся столбцов в соответствии с формулой $\Lambda_l \to \Lambda_l + \beta_l \Lambda_{\mathcal{K}}$ переводит анзац (109) в себя. Указанные вычеркивание и сдвиг соответствуют замене $\mathcal{K} \to \mathcal{K} - 1$ в рассматриваемом анзаце; делая подобные преобразования, получаем, в конце концов, ситуацию с $\mathcal{K} \leqslant d+1+n$. Можно считать, однако, что имеет место строгое неравенство

$\mathcal{K} < d+1+n$, т. к. в случае $\mathcal{K} = d+1+n$ из (110) мы имели бы $\det\,\mathcal{Q} = 0$, т. е. случай линейной зависимости между строками матрицы $\mathcal{Q}$, от которой, как мы это предполагаем, нам уже удалось избавиться. По этой причине матрица $\mathcal{Q}$ оказывается представимой в виде $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1\,\mathcal{Q}_2)$, где $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ — матрицы с размерами $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}\times(d+1+n-\mathcal{K})$ соответственно. При этом матрица $\mathcal{Q}$ имеет $\mathcal{K}$ линейно независимых столбцов; далее рассматривается ситуация, когда первые $\mathcal{K}$ столбцов указанной матрицы являются линейно независимыми. В этом, формально наиболее близком к эйнштейн-максвелловскому, случае $\det\,\mathcal{Q}_1 \neq 0$ при помощи нормированного преобразования Элерса с параметром $\Lambda_{\mathcal{E}} = \mathcal{Q}_1$ и последующего переопределения $\Lambda\,\mathcal{Q}_1 \to \Lambda$ получаем анзац (109) с

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{N} \end{pmatrix}, \tag{112}$$

где было положено $\mathcal{N} = \mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{Q}_2$. Если, далее, предположить, что $\mathcal{K} \geqslant 3$, то для третьей строки $\mathcal{N}_3$ матрицы $\mathcal{N}$ из соотношения (110) немедленно получаем уравнение $\mathcal{N}_3\mathcal{N}_3^T = -1$, не имеющее вещественных решений. Для значений же $\mathcal{K} \leqslant 2$ условие связи (110) превращается в алгебраическое уравнение

$$\mathcal{N}\mathcal{N}^T = 1_{\mathcal{K}}, \tag{113}$$

у которого вещественные решения уже есть. Итак, окончательно для экстремального класса решений ИВП в рамках рассматриваемой струнно-гравитационной теории получаем определяющие соотношения (109), (112) и (113) со значениями $\mathcal{K} = 1$ и 2.

В случае $\mathcal{K} = 1$ матричное поле $\Lambda = \Lambda^{(1)}$ является столбцом высотой $d+1$, а параметр $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{(1)}$ — строкой длиной $d+n$. Эта строка, параметризованная как $\mathcal{N}^{(1)} = (\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}\,\bar{\mathcal{N}}^{(1)})$, где $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$ — число, а $\bar{\mathcal{N}}^{(1)}$ — строка длиной $d-1+n$, удовлетворяет следующему алгебраическому соотношению:

$$\bar{\mathcal{N}}^{(1)}\bar{\mathcal{N}}^{(1)\,T} = 1 + (\tilde{\mathcal{N}}^{(1)})^2. \tag{114}$$

Далее, в случае $\mathcal{K} = 2$ матрица $\Lambda = \Lambda^{(2)}$ имеет размер $(d+1)\times 2$, а параметр $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{(2)}$ состоит из двух ортонормированных строк $\mathcal{N}_1^{(2)}$, $\mathcal{N}_2^{(2)}$ длиной $d-1+n$:

$$\begin{gathered} \mathcal{N}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1^{(2)} \\ \mathcal{N}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{N}_1^{(2)}\mathcal{N}_1^{(2)\,T} = \mathcal{N}_2^{(2)}\mathcal{N}_2^{(2)\,T} = 1, \quad \mathcal{N}_1^{(2)}\mathcal{N}_2^{(2)\,T} = 0. \end{gathered} \tag{115}$$

При этом случай $\mathcal{K} = 1$ определен для значений $d$ и $n$ таких, что $d+n \geqslant 2$, в то время как для случая $\mathcal{K} = 2$ в силу проведенного анализа $d+n > 2$.

Таким образом, первый случай реализуется, в частности, при $d+n=2$, т. е. в рамках теорий с $d=n=1$ и $d=2$, $n=0$. Утверждается, что только для двух указанных теорий случай $\mathcal{K}=1$ является независимым от случая $\mathcal{K}=2$. Точнее, утверждается, что при $d+n>2$ случай $\mathcal{K}=1$ может быть реализован в рамках случая $\mathcal{K}=2$; соответствующие «соотношения вложения» первого случая во второй имеют вид

$$\begin{gathered}\Lambda_1^{(2)}=\Lambda^{(1)}, \quad \Lambda_2^{(2)}=\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}\Lambda^{(1)},\\ \mathcal{N}_1^{(2)}+\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}\mathcal{N}_2^{(2)}=\bar{\mathcal{N}}^{(1)}.\end{gathered} \tag{116}$$

Действительно, в рассматриваемом вложении $\bar{\mathcal{N}}^{(1)}$ является вектором евклидова пространства размерностью $d-1+n\geqslant 2$; норма этого вектора равна $\sqrt{1+(\tilde{\mathcal{N}}^{(1)})^2}$. Очевидно, далее, что в указанном пространстве существует пара ортонормированных векторов $\mathcal{N}_1^{(2)}$ и $\mathcal{N}_2^{(2)}$ таких, что вектор $\bar{\mathcal{N}}^{(1)}$ имеет единичную проекцию на $\mathcal{N}_1^{(2)}$ и проекцию на $\mathcal{N}_2^{(2)}$, равную $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}$. Именно этой геометрической ситуации и соответствуют формулы (116).

Обсудим теперь вкратце «процедуру раскодирования» полученного класса экстремальных решений ИВП в струнной теории, ограничившись, ради экономии места, вычислением матричных потенциалов $\mathcal{M}_a$ и $\boldsymbol{\Omega}_a$. Указанные вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_1=\Sigma, \quad \mathcal{M}_2=\Sigma\Lambda\mathcal{Q}, \quad \mathcal{M}_3=\mathcal{Q}^T\Lambda^T\Sigma\Lambda\mathcal{Q},\\ &\boldsymbol{\Omega}_1=0, \qquad \boldsymbol{\Omega}_2=\Sigma\boldsymbol{\Theta}_1\mathcal{Q}, \quad \boldsymbol{\Omega}_3=\mathcal{Q}^T\boldsymbol{\Theta}_2\mathcal{Q},\end{aligned} \tag{117}$$

в котором векторные поля $\boldsymbol{\Theta}_1$ и $\boldsymbol{\Theta}_2$ определяются соотношениями

$$\nabla\times\boldsymbol{\Theta}_1=\nabla\Lambda, \quad \nabla\times\boldsymbol{\Theta}_2=\nabla\Lambda^T\Sigma\Lambda-\Lambda^T\Sigma\nabla\Lambda, \tag{118}$$

совместными в случае любой матричной гармонической функции $\Lambda$. Очевидно, что для решений с $\mathcal{K}=1$ векторное поле $\boldsymbol{\Theta}_2$ есть тождественный ноль; для решений же с $\mathcal{K}=2$ это поле является антисимметричной $2\times 2$-матрицей. При этом нетривиальная 12-компонента указанной матрицы удовлетворяет соотношению $\nabla\times\boldsymbol{\Theta}_{2,12}=\nabla\Lambda_1^{(2)\,T}\Sigma\Lambda_2^{(2)}-\nabla\Lambda_2^{(2)\,T}\Sigma\Lambda_1^{(2)}$.

В заключение этого раздела отметим, что построенный класс решений является асимптотически-плоским в случае, когда в качестве $\Lambda$ взято решение уравнения Лапласа, бесконечно малое в окрестности пространственной бесконечности. Легко также проверить, что в случае кулоновского асимптотического поведения величины $\Lambda$ векторная матрица $\boldsymbol{\Theta}_1$ генерирует в решении особенности типа дираковских струн, в то время как поле $\boldsymbol{\Theta}_2$ отвечает, в частности, за дипольные моменты физических полей теории.

## 7. ГЕНЕРАЦИЯ В ТЕОРИЯХ С $d + n = 2$

В этом и следующем за ним разделах изучается возможность обобщения подхода, использованного для построения класса экстремальных решений ИВП, на случай нетривиального значения параметра $\kappa$, определяемого соотношением

$$\kappa = \mathcal{Q}\, \Xi\, \mathcal{Q}^T. \tag{119}$$

Рассматриваемое обобщение оказывается эквивалентным генерационной процедуре, связанной с отображением пространства решений (вообще говоря, негармонической и неэкстремальной) эффективной системы, связанной с матричным потенциалом $\Lambda$, в пространство решений изучаемой теории.

В настоящем разделе рассматривается случай (двух) теорий, для которых $d + n = 2$ и параметр $\kappa$ является числовым (здесь $\mathcal{K} = 1$). Подстановка соотношений (109) и (119) в уравнения движения теории (73) показывает, что эти уравнения выполняются при наложении на матричный потенциал $\Lambda$ и трехмерную метрику $h_{\mu\nu}$ следующих динамических соотношений:

$$\begin{gathered} \nabla^2\Lambda + 2\,\kappa\, \nabla\Lambda\Lambda^T \left(\Sigma - \kappa\, \Lambda\Lambda^T\right)^{-1} \nabla\Lambda = 0, \\ R_{3\,\mu\nu} = \kappa\, \mathrm{tr}\, [\Lambda_{,(\mu}(1 - \kappa\, \Lambda^T\Sigma\Lambda)^{-1}\Lambda^T_{,\nu)}(\Sigma - \kappa\, \Lambda\Lambda^T)^{-1}]. \end{gathered} \tag{120}$$

В случае $\kappa = 0$ мы возвращаемся к уже рассмотренному классу экстремальных решений ИВП; если же $\kappa \neq 0$ (что и будет далее предполагаться), то указанные соотношения оказываются уравнениями движения для теории с эффективным лагранжианом, равным

$$L_3 = \kappa\, \mathrm{tr}\, [\nabla\Lambda(1 - \kappa\, \Lambda^T\Sigma\Lambda)^{-1}\nabla\Lambda^T(\Sigma - \kappa\, \Lambda\Lambda^T)^{-1}]. \tag{121}$$

Изучение получившейся эффективной системы может производиться одновременно для обеих теорий, удовлетворяющих условию $d + n = 2$. Точнее, анзац для теории с $d = n = 1$ и матричным потенциалом $\Lambda = (\Lambda_1\, \Lambda_2)^T$ рассматривается как совместное усечение анзаца теории с $d = 2$, $n = 0$, описываемое матричным потенциалом $\Lambda = (\Lambda_1\, \Lambda_2\, 0)^T$. Далее, несложный анализ показывает, что лагранжиан (121) принадлежит к классу лагранжианов (72) в случае $\kappa < 0$. Действительно, имея в виду указанный выбор знака константы $\kappa$ и принятую унификацию процедуры рассмотрения двух струнных теорий, перейдем к новой динамической переменной (матрице-строке длиной 3)

$$\zeta = \sqrt{-\kappa}\, \Lambda^T, \tag{122}$$

и осуществим вложение потенциала $\zeta$ в потенциал $\mathcal{Z}$ размером $2\times 3$ в качестве его первой строки, сделав при этом вторую строку указанного потенциала тривиальной:

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{123}$$

Утверждение состоит в том, что произведенное вложение также является совместным, если $\mathcal{Z}$ рассматривается в качестве линеаризующего потенциала для теории с эффективным лагранжианом (72) и определяющими параметрами $d = n = 1$.

Последующие действия связаны с вычислением по линеаризующему потенциалу (123) соответствующих ему матричных потенциалов Эрнста и их последующей подстановкой в соотношение (23). Указанные выкладки естественным образом приводят к введению следующего набора динамических переменных:

$$F = \frac{1 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_3^2}{(1 - \zeta_1)^2}, \quad V = \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_1}, \quad U = \frac{\zeta_3}{1 - \zeta_1}, \tag{124}$$

в терминах которых

$$L_3 = \frac{1}{4F^2} \nabla F^2 + \frac{1}{F} (\nabla V^2 - \nabla U^2). \tag{125}$$

В соответствии с принятой договоренностью при произвольном значении поля $U$ лагранжиан (125) описывает анзац для теории с $d = 2$, $n = 0$; случаю же теории с $d = n = 1$ отвечает тождество $U \equiv 0$.

Очевидное сходство между лагранжианом (125) и хорошо известным эффективным лагранжианом общей теории относительности (ОТО) позволяет установить представление нулевой кривизны для получившейся эффективной системы, а именно: нетрудно проверить, что в терминах $2 \times 2$-матрицы

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} f^{-1} & f^{-1}\chi_r \\ f^{-1}\chi_l & f + f^{-1}\chi_l\chi_r \end{pmatrix}, \tag{126}$$

в которой положено $f = \sqrt{|F|}$; $\chi_r = V + U$ и $\chi_l = \operatorname{sign}(F)(V - U)$, лагранжиан (125) принимает канонический для представления нулевой кривизны вид

$$L_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\mathcal{M}^{-1} \nabla \mathcal{M})^2. \tag{127}$$

Очевидно далее, что $\det \mathcal{M} = 1$; таким образом, в случае теории с $d = 2$, $n = 0$ рассматриваемая эффективная система есть главная киральная модель (ГКМ) с группой симметрии $Sl(2, R)$. В случае же теории с $d = n = 1$

и при $F > 0$ (когда $\mathcal{M}^T = \mathcal{M}$) изучаемый анзац оказывается $\sigma$-моделью с симметрическим пространством потенциалов (МСП) вида $Sl(2, R)/SO(2)$ (при этом случай $F < 0$ сводится к обсуждаемому при помощи стандартного преобразования Боннора).

Далее, для преобразований симметрии в случае главной киральной модели имеем следующую очевидную формулу:

$$\mathcal{M} \to C_l^T \, \mathcal{M} \, C_r, \tag{128}$$

в которой трансформационные матрицы $C_{l,r}$ являются унимодулярными. Их явный вид может быть получен из явного вида $\mathcal{M}$ заменой потенциалов $f$, $\chi_r$ и $\chi_l$ на постоянные параметры $s_{l,r}$, $\alpha_{l,r}$ и $\beta_{l,r}$ соответственно. При этом рассмотрению МСП отвечает частный случай $\chi_l = \chi_r$, $s_l = s_r$, $\alpha_l = \alpha_r$ и $\beta_l = \beta_r$. В случае ГКМ трансформационные матрицы $C_l$ и $C_r$ являются независимыми, и можно рассмотреть преобразование с $C_l = 1_2$ и определить явный вид однопараметрических подгрупп преобразований, соответствующих параметрам $s_r$, $\alpha_r$ и $\beta_r$. Результат описывается следующими выражениями:

$$f \to s_r f, \quad \chi_r \to s_r^2 \chi_r, \quad \chi_l \to \chi_l; \tag{129}$$

$$f \to f, \quad \chi_r \to \chi_r + \alpha_r, \quad \chi_l \to \chi_l; \tag{130}$$

$$f \to \frac{f}{1 + \beta_r \chi_r}, \quad \chi_r \to \frac{\chi_r}{1 + \beta_r \chi_r}, \quad \chi_l \to \frac{\chi_l + \beta_r (f^2 + \chi_l \chi_r)}{1 + \beta_r \chi_r}. \tag{131}$$

Видно, что подгруппы (129) и (130) описывают масштабное преобразование и сдвиг, а подгруппа (131) соответствует преобразованию элерсовского типа. Ясно также, что результаты для преобразования с $C_r = 1_2$ и нетривиальной $C_l$ получаются из приведенных заменой всюду индексов $r$ и $l$ соответственно на индексы $l$ и $r$.

Преобразования из группы заряжающих симметрий должны сохранять неизменным вакуумное значение матрицы нулевой кривизны $\mathcal{M}_v = 1_2$ (см. (126)). Из трансформационной формулы (128) тогда немедленно получаем, что в случае ГКМ это сохранение достигается при выполнении условия $C_l = C_r^{T-1}$. При этом в терминах параметров трансформационных матриц указанное условие принимает следующий вид:

$$s_l = \frac{s_r}{s_r^2 + \alpha_r \beta_r}, \quad \alpha_l = -\frac{\beta_r}{s_r^2 + \alpha_r \beta_r}, \quad \beta_l = -\frac{\alpha_r}{s_r^2 + \alpha_r \beta_r}. \tag{132}$$

Таким образом, в данном случае ГЗС изоморфна $Sl(2, R)$. В случае же МСП с учетом сделанных выше замечаний ГЗС оказывается однопараметрической; по существу, эта группа совпадает с группой заряжающих симметрий стационарной ОТО.

Возвращаясь к эффективной системе уравнений (120), проведем ее редукцию на систему с одной $\sigma$-модельной степенью свободы в рамках рассмотрения нового анзаца

$$\Lambda = \Psi \mathcal{P}^T, \tag{133}$$

в котором $\Psi = \Psi(x^\mu)$ является (нематричной) функцией, а $\mathcal{P}$ — постоянной строкой соответствующей длины (начиная с этого момента теории с $d = 2$, $n = 0$ и $d = n = 1$ будут рассматриваться по отдельности). Нетрудно показать, что уравнения движения оказываются автоматически выполненными, если удовлетворяются динамические соотношения

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad R_{3\mu\nu} = \sigma \psi_{,\mu} \psi_{,\nu}, \tag{134}$$

описывающие взаимодействующие минимальным образом с константой связи $\sigma$ поле дилатонного типа $\psi$ и трехмерную метрику $h_{\mu\nu}$, где

$$\sigma = \kappa\, \tau, \tag{135}$$

$\tau = \mathcal{P} \Sigma \mathcal{P}^T$ и

$$\Psi = \frac{\operatorname{th}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{\sigma}}. \tag{136}$$

При $\sigma < 0$ соотношение (136) может быть записано в виде $\Psi = \operatorname{tg}(\sqrt{-\sigma}\psi)/\sqrt{-\sigma}$, и, таким образом, оно является вещественным. При $\sigma = 0$ оно понимается в предельном (по Лопиталю) смысле и есть просто $\Psi = \psi$. Отметим сразу, что с произвольным решением системы (134) может быть связана векторная функция $\boldsymbol{\omega}$, определяемая дифференциальным соотношением

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \psi. \tag{137}$$

Из дальнейшего изложения следует, что величины $\psi, h_{\mu\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ полностью определяют базу генерационной процедуры, развиваемой на протяжении оставшейся части настоящего раздела.

В качестве примера можно указать следующее решение системы уравнений (134), имеющее монопольный тип:

$$\begin{gathered} \psi = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \ln\left(\frac{R + m\sqrt{\sigma}}{R - m\sqrt{\sigma}}\right), \\ ds_3^2 = dR^2 + (R^2 - \sigma m^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \end{gathered} \tag{138}$$

где $m$ — произвольный вещественный параметр. В этом решении выражение для поля $\psi$ в случае $\sigma < 0$ может быть переписано в виде $\psi =$

$\operatorname{arctg}[2m\sqrt{-\sigma}R/(R^2+m^2\sigma)]/\sqrt{-2\sigma}$, а при $\sigma = 0$ оно понимается снова в предельном смысле как $\psi = \sqrt{2}m/R$. Данное решение является асимптотически-плоским и заряженным; его кулоновская асимптотика не зависит от величины параметра $\sigma$. Далее это решение будет использоваться в качестве конкретной генерационной базы. В более общей постановке все соответствующие рассуждения будут связаны с произвольным асимптотически-плоским и заряженным решением системы (134), имеющим ту же кулоновскую асимптотику, что и решение (138). Единственной нетривиальной компонентой, связанной с решением (138) векторной функции $\boldsymbol{\omega}$, является

$$\omega_\varphi = \sqrt{2}m\,\cos\theta. \tag{139}$$

В рамках «более общей постановки» в указанном выше смысле формула (139) описывает соответствующую асимптотику данного векторного поля в окрестности пространственной бесконечности. В обоих случаях рассматриваемое выражение имеет вид, типичный для дираковской струны.

Вычисление соответствующих анзацу (109), (133) матричных потенциалов $\mathcal{M}_\alpha$, $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$ и последующее упрощающее конечный результат преобразование $\mathcal{P} \to \mathcal{P}\Sigma$ дают

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \Sigma + \frac{\operatorname{sh}^2(\sqrt{\sigma}\psi)}{\tau}\,\mathcal{P}^T\mathcal{P}, & \boldsymbol{\Omega}_1 &= 0,\\
\mathcal{M}_2 &= \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{\sigma}}\,\mathcal{P}^T\mathcal{Q}, & \boldsymbol{\Omega}_2 &= \boldsymbol{\omega}\,\mathcal{P}^T\mathcal{Q},\\
\mathcal{M}_3 &= \frac{\operatorname{sh}^2(\sqrt{\sigma}\psi)}{\kappa}\,\mathcal{Q}^T\mathcal{Q}, & \boldsymbol{\Omega}_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{140}$$

Для теории с $d = n = 1$ постоянные матрицы-строки имеют вид $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ и $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3)$, в то время как $\Sigma = -1_2$. Вычисление потенциалов $\mathbf{V}_\alpha$ приводит к следующему результату:

$$\mathbf{V}_1 = (\mathcal{P}_1\mathcal{Q}_2 - \mathcal{P}_2\mathcal{Q}_1)\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{V}_2 = (\mathcal{P}_1\mathcal{Q}_2 + \mathcal{P}_2\mathcal{Q}_1)\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{V}_3 = \sqrt{2}\mathcal{P}_1\mathcal{Q}_3\,\boldsymbol{\omega}. \tag{141}$$

В соответствии с этими выражениями в случае, когда база генерации описывается соотношениями (138), (139) или имеет такое же асимптотическое поведение, как указанная, физические поля теории содержат, вообще говоря, дираковские струны, т. е. пропорциональные $\cos\theta$ асимптотики на пространственной бесконечности. Для устранения дираковских струн, которого мы будем требовать от развиваемой в этом разделе генерационной процедуры, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\mathbf{V}_\alpha = 0. \tag{142}$$

На языке параметров генерации эти равенства реализуются при $\mathcal{P}_1 = \mathcal{Q}_1 = 0$ и при произвольных значениях остающихся параметров $\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2$ и $\mathcal{Q}_3$. В этом специальном случае

$$S_0 = 1, \tag{143}$$

а вычисление потенциалов $S_\alpha$ дает

$$\begin{aligned} S_1 &= -\left[\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}\psi) + \mathcal{Q}_2 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{-\kappa}}\right]^2, \\ S_2 &= -\left[\mathcal{Q}_3 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{-\kappa}}\right]^2, \\ S_3 &= -\sqrt{2}\mathcal{Q}_3 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{-\kappa}} \left[\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}\psi) + \mathcal{Q}_2 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{-\kappa}}\right], \end{aligned} \tag{144}$$

где $\tau = -\mathcal{P}_2^2$ и $\kappa = -\mathcal{Q}_2^2 + \mathcal{Q}_3^2$. Соотношения (142)–(144) полностью определяют свободную от дираковских струн процедуру генерации в теории с $d = n = 1$.

В случае теории с $d = 2$, $n = 0$ удобно параметризовать матрицы-строки $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ в виде $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1,\, P)$ и $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1,\, Q)$, где $P = (\mathcal{P}_2,\, \mathcal{P}_3)$ и $Q = (\mathcal{Q}_2,\, \mathcal{Q}_3)$. Вычисление векторных потенциалов приводит к следующему результату:

$$\mathbf{V}_1 = (\mathcal{P}_1 Q^T - \mathcal{Q}_1 \sigma_3 P^T)\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{V}_2 = (\mathcal{P}_1 \sigma_3 Q^T + \mathcal{Q}_1 P^T)\boldsymbol{\omega}. \tag{145}$$

Требование отсутствия дираковских струн снова приводит к занулению этих потенциалов, которое достигается при $\mathcal{P}_1 = \mathcal{Q}_1 = 0$ и при произвольных значениях параметров строк $P$ и $Q$. В данном случае опять получается равенство (143), а для потенциалов $S_\alpha$ вычисление и упрощающая конечный результат замена $P \to \sigma_3 P$ дают

$$\begin{aligned} S_1 &= -\sigma_3 + \operatorname{sh}^2(\sqrt{\sigma}\psi)\left[\frac{P^T P}{\tau} + \frac{Q^T Q}{\kappa}\right] - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{\sigma}}[P^T Q + Q P^T], \\ S_2 &= \operatorname{sh}^2(\sqrt{\sigma}\psi)\left[-\frac{P^T P}{\tau} + \frac{Q^T Q}{\kappa}\right]\sigma_3 + \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{\sigma}}[Q^T P - P Q^T]\sigma_3, \end{aligned} \tag{146}$$

где $\tau = -P\,\sigma_3 P^T$ и $\kappa = -Q\,\sigma_3 Q^T$. Наконец, для остающихся скалярных потенциалов теории получаем

$$\det S_1 = -\left[\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}\psi) + \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}\psi)}{\sqrt{\sigma}}\, Q\sigma_3 P^T\right]^2, \quad S_1^{-1} = -\frac{\sigma_2 S_1^T \sigma_2}{\det S_1}. \tag{147}$$

В результате имеем выражения (143), (146) и (147) для скалярных потенциалов, которые (при учете тривиальных значений векторных потенциалов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$) полностью определяют свободную от дираковских струн генерационную процедуру для теории с $d = 2$, $n = 0$. В частности, все выписанные потенциалы принимают соответствующие конкретные значения, если в качестве генерационной базы используется решение (138).

## 8. ГЕНЕРАЦИЯ В ТЕОРИЯХ С $d + n > 2$

В случае теорий, для которых $d+n > 2$, величина $\kappa$ является симметричной $2\times 2$-матрицей. В этом разделе мы будем считать входящий в определение рассматриваемого анзаца параметр $\mathcal{Q}$ подобранным таким образом, что матрица $\kappa$ оказывается невырожденной и имеющей сигнатуру, равную $\tilde{\Sigma} = -1_2$. Утверждение состоит в том, что при указанном уточнении результирующая динамическая система принадлежит к классу теорий (72).

Действительно, повторяя рассуждения предыдущего раздела, для эффективного лагранжиана рассматриваемой системы получаем следующий обобщающий соотношение (121) результат:

$$L_3 = \mathrm{tr}\,[\nabla\Lambda\kappa(1 - \Lambda^T\Sigma\Lambda\kappa)^{-1}\nabla\Lambda^T(\Sigma - \Lambda\kappa\Lambda^T)^{-1}]. \tag{148}$$

Далее, из соответствующей алгебраической теоремы следует существование матрицы $K$ такой, что

$$\kappa = K\tilde{\Sigma}K^T. \tag{149}$$

Введем теперь новый матричный потенциал

$$\tilde{\mathcal{Z}} = K^T\Lambda^T \tag{150}$$

и положим $\tilde{\Xi} = \Sigma$. Тогда для доказательства сделанного утверждения остается только проверить, что эффективный лагранжиан (148), записанный в терминах величин $\tilde{\mathcal{Z}}$, $\tilde{\Sigma}$ и $\tilde{\Xi}$, имеет вид (72). При этом соответствующие эффективные значения чисел скомпактифицированных измерений и исходных абелевых полей получившейся системы оказываются равными $\tilde{d} = 1$ и $\tilde{n} = d - 1$.

Очевидно, что линеаризующие потенциалы исходной и результирующей теорий связаны соотношением

$$\mathcal{Z} = \tilde{\mathcal{Z}}^T T, \tag{151}$$

в котором величина $T$ играет роль оператора симметрии и дается следующим выражением:

$$T = K^{-1}\mathcal{Q}. \tag{152}$$

Входящая в (152) матрица $\mathcal{Q}$ может быть без потери общности параметризована согласно

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n_1^T \\ 0 & 1 & n_2^T \end{pmatrix}, \tag{153}$$

где $n_1$ и $n_2$ — столбцы высотой $(d+n-1)$. Как было показано в разд. 6, в случае класса экстремальных решений ИВП эти столбцы составляют ортонормированную систему; материал настоящего раздела связан с иной геометрией рассматриваемого анзаца. Далее, входящую в соотношение (152) матрицу $K$ можно вычислить, приводя к каноническому виду определяемую соотношениями (119) и (153) симметричную матрицу $\kappa$. В результате для частного решения уравнения (149) получаем

$$K = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - n_1^T n_1} & 0 \\ -\dfrac{n_1^T n_2}{\sqrt{1 - n_1^T n_1}} & \sqrt{\dfrac{1 - n_1^T n_1 - n_2^T n_2 + (n_1^T n_1)(n_2^T n_2) - (n_1^T n_2)^2}{1 - n_1^T n_1}} \end{pmatrix}. \tag{154}$$

Заметим, что для получения соответствующего общего решения нужно воспользоваться преобразованием $K \to K\mathcal{C}$ с матрицей $\mathcal{C}$, удовлетворяющей соотношению $\mathcal{C}^T \tilde{\Sigma} \mathcal{C} = \tilde{\Sigma}$. Однако указанное преобразование эквивалентно, как легко понять, отображению $\tilde{\mathcal{Z}} \to \mathcal{C}_l \tilde{\mathcal{Z}}$ эффективного линеаризующего потенциала с трансформационной матрицей $C_l = \mathcal{C}^{T-1}$ и совпадает, таким образом, с «левой» подгруппой группы заряжающих симметрий эффективной теории. Поэтому можно без потери общности считать матрицу $K$ определяемой соотношением (154) в случае, когда используемый при генерации затравочный класс решений эффективной теории инвариантен относительно действия указанной подгруппы ГЗС. Отметим, что в силу (152) установленные выражения (153) и (154) полностью определяют лежащий в основе генерационного отображения (151) оператор симметрии $T$.

Рассмотрим теперь класс теорий с $d = 2k+1$ (к этому классу принадлежат и критические теории как гетеротической, так и бозонной струны, для которых соответственно $k = 3$ и $k = 11$), в рамках которого матричный потенциал $\tilde{\mathcal{Z}}$ может быть разбит на $k+1$ двумерных матричных блоков:

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \left(\tilde{\mathcal{Z}}_1, \quad \tilde{\mathcal{Z}}_2, \quad \ldots, \quad \tilde{\mathcal{Z}}_{k+1}\right). \tag{155}$$

Утверждается, что анзац с

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} z'_{\mathcal{P}} & -z''_{\mathcal{P}} \\ z''_{\mathcal{P}} & z''_{\mathcal{P}} \end{pmatrix}, \tag{156}$$

где $\mathcal{P} = 1, 2, \ldots, k+1$, является совместным и инвариантным относительно «левой» подгруппы группы заряжающих симметрий. Введем теперь $k+1$ комплексную функцию $z_{\mathcal{P}} = z'_{\mathcal{P}} + iz''_{\mathcal{P}}$ и положим $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_{k+1})$. Утверждение состоит в том, что в рамках анзаца (156) уравнения движения эффективной теории в точности соответствуют лагранжиану

$$L_3 = 2\frac{\nabla\tilde{z}(\tilde{\sigma}_3 - \tilde{z}^+\tilde{z})^{-1}\nabla\tilde{z}^+}{1 - \tilde{z}\tilde{\sigma}_3\tilde{z}^+}, \tag{157}$$

в котором $\tilde{\sigma}_3 = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, \ldots, -1)$. Нетрудно далее проверить, что в терминах комплексных потенциалов

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \tilde{z}_1}{1 + \tilde{z}_1}, \quad \mathcal{F}_p = \frac{\sqrt{2}\tilde{z}_{p+1}}{1 + \tilde{z}_1}, \tag{158}$$

где $p = 1, 2, \ldots, k$, лагранжиан (157) принимает вид

$$L_3 = \frac{1}{2f^2}\left|\nabla\mathcal{E} - \sum_{p=1}^{k}\bar{\mathcal{F}}_p\nabla\mathcal{F}_p\right|^2 - \frac{1}{f}\sum_{p=1}^{k}\left|\nabla\mathcal{F}_p\right|^2, \tag{159}$$

где $f = 1/2(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}} - \sum_1^k|\mathcal{F}_p|^2)$. Таким образом, рассматриваемый анзац эквивалентен стационарной теории Эйнштейна с $k$ максвелловскими полями (при этом $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}_p$ имеют смысл общепринятых потенциалов Эрнста). Данная теория может быть использована в качестве базы для генерации трехмерных решений в теории гетеротической струны с $2k+1$ скомпактифицированным измерением и с произвольным числом абелевых калибровочных полей.

Для получения в явном виде соответствующих генерационных соотношений заметим, что лагранжиан (157) является образом лагранжиана (72) при отображении

$$\mathcal{Z} \to \tilde{z}, \quad \Sigma \to -1, \quad \Xi \to -\tilde{\sigma}_3. \tag{160}$$

Это отображение, как легко увидеть, переводит потенциалы $\mathcal{M}_\alpha$ и $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$ в соответствующие величины

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_1 &= \tilde{h}^{-1}, & \nabla\times\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 &= \tilde{\mathbf{j}},\\
\tilde{m}_2 &= \tilde{h}^{-1}\tilde{z}, & \nabla\times\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 &= \tilde{h}^{-1}\nabla\tilde{z} - \tilde{\mathbf{j}}\,\tilde{z},\\
\tilde{m}_3 &= \tilde{h}^{-1}\tilde{z}^+\tilde{z}, & \nabla\times\tilde{\boldsymbol{\omega}}_3 &= \tilde{h}^{-1}(\nabla\tilde{z}^+\tilde{z} - \tilde{z}^+\nabla\tilde{z}) + \tilde{\mathbf{j}}\,\tilde{z}^+\tilde{z},
\end{aligned} \tag{161}$$

где $\tilde{h} = -(1 - \tilde{z}\tilde{\sigma}_3\tilde{z}^+)$ и $\tilde{\mathbf{j}} = -\tilde{h}^{-2}(\tilde{z}\tilde{\sigma}_3\nabla\tilde{z}^+ - \nabla\tilde{z}\tilde{\sigma}_3\tilde{z}^+)$. Очевидно, что необходимые для генерации потенциалы $\tilde{M}_\alpha$ и $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_\alpha$ могут быть получены из величин $\tilde{m}_\alpha$ и $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\alpha$ при помощи процедуры, обратной к использованной при переходе от потенциала $\tilde{\mathcal{Z}}$ к величине $\tilde{z}$. Применяя далее основное соотношение (151) для генерации в терминах обсуждаемых матричных потенциалов, после несложной алгебры получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= \Sigma + \Sigma\,\tilde{M}_3\,\Sigma, & \mathbf{\Omega}_1 &= -\Sigma\,\tilde{\mathbf{\Omega}}_3\,\Sigma, \\ M_2 &= -\Sigma\,\tilde{M}_2^T\,T, & \mathbf{\Omega}_2 &= -\Sigma\,\tilde{\mathbf{\Omega}}_2^T\,T, \\ M_3 &= -\Xi + T^T\tilde{M}_1 T, & \mathbf{\Omega}_3 &= -T^T\,\tilde{\mathbf{\Omega}}_1\,T. \end{aligned} \tag{162}$$

Для нахождения явного вида описывающих результат генерации потенциалов $S_0$, $W_\alpha$, $U_\alpha$ и $\mathbf{V}_\alpha$ параметризуем базовый потенциал $\tilde{\mathcal{Z}}$ следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{I}} & \tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}, \tag{163}$$

где

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1' \\ \tilde{z}_1'' \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} -\tilde{z}_1'' & \tilde{z}_{1+p}' & -\tilde{z}_{1+p}'' \\ \tilde{z}_1' & \tilde{z}_{1+p}'' & \tilde{z}_{1+p}' \end{pmatrix}. \tag{164}$$

Параметризуем далее оператор симметрии $T$ согласно сегментации

$$T = (T_{\mathrm{I}}\ \ T_{\mathrm{II}}\ \ T_{\mathrm{III}}), \tag{165}$$

в которой $T_\beta = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{Q}_\beta$ ($\beta =$ I, II, III) и

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 0 & r_1^T \\ 1 & r_2^T \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} l_1^T \\ l_2^T \end{pmatrix}, \tag{166}$$

а столбцы $r_a$ и $l_a$ $(a = 1, 2)$ составлены соответственно из первых $2k$ и последующих $n$ компонент столбца $n_a$. В результате для потенциалов скалярного типа получаем

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 - T_{\mathrm{I}}^T T_{\mathrm{I}} - \tilde{h}^{-1}(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{I}})^T(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{I}}), \\ W_1 &= T_{\mathrm{I}}^T T_{\mathrm{II}} + \tilde{h}^{-1}(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{I}})^T(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{II}}), \\ W_2 &= -[T_{\mathrm{I}}^T T_{\mathrm{II}} + \tilde{h}^{-1}(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{I}})^T(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} + T_{\mathrm{II}})]G_0, \\ W_3 &= \sqrt{2}\,[T_{\mathrm{I}} + \tilde{h}^{-1}(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{I}})]^T T_{\mathrm{III}}, \\ U_1 &= G_0 + T_{\mathrm{II}}^T T_{\mathrm{II}} + \tilde{h}^{-1}(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{II}})^T(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{II}}), \\ U_2 &= -[T_{\mathrm{II}}^T T_{\mathrm{II}} - \tilde{h}^{-1}(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{II}})^T(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} + T_{\mathrm{II}})]G_0, \\ U_3 &= \sqrt{2}\,[T_{\mathrm{II}} - \tilde{h}^{-1}(\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{II}})]^T T_{\mathrm{III}}. \end{aligned} \tag{167}$$

Используя для векторных матриц $\tilde{\mathbf{\Omega}}_\alpha$ параметризацию

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_1 = \boldsymbol{\omega}\,\sigma_2, \quad \tilde{\mathbf{\Omega}}_2 = (\tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{I}}\;\tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{II}}), \quad \tilde{\mathbf{\Omega}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{I\,II}} \\ \tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{II\,I}} & \tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{II\,II}} \end{pmatrix}, \tag{168}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1''$ (величина $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1$ — чисто мнимая) и

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1}' \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1}'' \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1}'' & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1+p}' & -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1+p}'' \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1}' & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1+p}'' & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{2,1+p}' \end{pmatrix}, \tag{169}$$

а также $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{II\,I}} = -\tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{I\,II}}^T$ и $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{I\,II}} = \begin{pmatrix}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3,1\;1}'' & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3,1\;1+p}' & -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3,1\;1+p}''\end{pmatrix}$, для потенциалов векторного типа получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}\,T_{\mathrm{II}}^T\sigma_2 T_{\mathrm{I}} - \tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{II}}^T T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{II}}^T\tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{I}} - \tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{I\,II}}^T, \\ \mathbf{V}_2 &= -\mathcal{G}_0(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\,T_{\mathrm{II}}^T\sigma_2 T_{\mathrm{I}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{II}}^T T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{II}}^T\tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{I}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}_{3,\mathrm{I\,II}}^T), \\ \mathbf{V}_3 &= \sqrt{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\sigma_2 T_{\mathrm{I}} + \tilde{\mathbf{\Omega}}_{2,\mathrm{I}})^T T_{\mathrm{III}}. \end{aligned} \tag{170}$$

Формулы (167) и (170) полностью описывают процедуру генерации решений теории гетеротической струны исходя из решений стационарной теории Эйнштейна с соответствующим числом максвелловских полей. Отметим, что в частном случае $n = 2J$ при

$$T = \frac{1}{\sqrt{1-N^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_p' & -r_p'' & l_j' & -l_j'' \\ 0 & 1 & r_p'' & r_p' & l_j'' & l_j' \end{pmatrix}, \tag{171}$$

где $N^2 = \sum_1^k (r_p'^2 + r_p''^2) + \sum_1^J (l_j'^2 + l_j''^2)$, оператор симметрии $T$ является вещественным матричным представлением комплексной величины $t = (1 - N^2)^{-1/2}(1\; r_p\; l_j)$, в которой $r_p = r_p' + ir_p''$ и $l_j = l_j' + il_j''$. Легко понять, что в указанном частном случае преобразование симметрии (151) сохраняет «комплексную структуру», которой обладала база генерации.

В качестве используемой генерационной базы может быть взят, например, уточненный анзац, в рамках которого

$$\tilde{z} = \lambda\,\tilde{q}, \tag{172}$$

где $\lambda$ — (нематричный) комплексный потенциал, а $\tilde{q}$ — постоянная комплексная строка длиной $k+1$. Соответствующий эффективный лагранжиан, как нетрудно показать, дается следующей формулой:

$$L_3 = 2I\,\frac{|\nabla\lambda|^2}{(1 - I\,|\lambda|^2)^2}, \tag{173}$$

в которой $I = \tilde{q}\tilde{\sigma}_3\tilde{q}^+$. Утверждается, далее, что функция

$$\lambda = \frac{1}{R - ia\,\cos\theta}, \tag{174}$$

где $a$ — вещественная константа, и метрика

$$ds_3^2 = \Delta\left(\frac{dR^2}{R^2 + a^2 - I} + d\theta^2\right) + (R^2 + a^2 - I)\,\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{175}$$

где $\Delta = R^2 + a^2\,\cos^2\,\theta - I$, описывают конкретное аксиально-симметричное решение рассматриваемой системы. Этому решению соответствуют потенциалы

$$\begin{aligned} &\tilde{m}_1 = -\left(1 + \frac{I}{\Delta}\right), && \tilde{\omega}_{1\,\varphi} = -i\,\frac{aI\,\sin^2\,\theta}{\Delta}, \\ &\tilde{m}_2 = -\tilde{q}\,\frac{R + ia\,\cos\theta}{\Delta}, && \tilde{\omega}_{2\,\varphi} = \tilde{q}\left(-\cos\theta + ia\,\sin^2\,\theta\,\frac{R + ia\,\cos\theta}{\Delta}\right), \\ &\tilde{m}_3 = -\tilde{q}^+\tilde{q}\frac{1}{\Delta}, && \tilde{\omega}_{3\,\varphi} = -i\,\tilde{q}^+\tilde{q}\,\frac{a\,\sin^2\,\theta}{\Delta}, \end{aligned} \tag{176}$$

которые вместе с установленными общими генерационными формулами полностью определяют поля гетеротической струны.

Выбранное в качестве затравочного решение теории Эйнштейна–Максвелла совпадает, как нетрудно установить, с семейством решений Керра–Ньюмена–НУТ [46]. Действительно, записанное в терминах потенциалов Эрнста, оно имеет следующий хорошо известный для указанного решения вид:

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{2\,\tilde{q}_1}{r + i(N - a\,\cos\theta)}, \quad \mathcal{F}_p = \frac{\sqrt{2}\,q_{1+p}}{r + i(N - a\,\cos\theta)}, \tag{177}$$

где была введена новая радиальная координата $r = R + \mathrm{Re}\,(\tilde{q}_1)$. Нетрудно проверить также, что метрика сгенерированного решения не содержит особенности типа дираковской струны — параметров типа НУТ (т. е. векторный потенциал $V_{1\varphi}$ не содержит пространственной асимптотики, пропорциональной $\cos\theta$), если выполняется соотношение $\tilde{\mathcal{Q}}_{\mathrm{I}}^T T_{\mathrm{II}} = T_{\mathrm{I}}^T \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathrm{II}}$. В допускающем комплексное представление случае (171) указанное соотношение имеет место при $\mathrm{Im}\,(\tilde{q}_1) = 0$ и $\tilde{q}_{1+p} = r_p\,\mathrm{Re}\,(\tilde{q}_1)$. Дополнительные ограничения на оператор симметрии и кулоновские характеристики затравочного решения позволяют устранить аналогичные особенности также из максвелловских и калб-рамоновского полей.

## 9. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИИ И СОЛИТОНЫ

Использовавшийся в качестве конкретной генерационной базы класс полей Керра–Ньюмена–НУТ является, пожалуй, наиболее известным и важным для приложений стационарным и аксиально-симметричным решением уравнений теории Эйнштейна–Максвелла. Его продолжение в струнную область, построенное в предыдущем разделе, принадлежит, как легко понять, к подпространству решений теории, получающемуся при ее тороидальной компактификации на два измерения. Соответствующая двумерная гравитирующая $\sigma$-модель обладает, как выясняется, рядом замечательных свойств, среди которых появление так называемых «обобщенных» (т. е. зависящих от координат) преобразований симметрии. Приложению обобщенных симметрий к задаче о генерации асимптотически-плоских решений в рассматриваемой струнно-гравитационной теории в основном и посвящена оставшаяся часть настоящего обзора.

Заметим сразу, что тороидальная компактификация теории на два измерения эквивалентна наложению условия аксиальной симметрии на эту теорию, предварительно тороидально скомпактифицированную на три измерения. Имея в виду это очевидное обстоятельство и изложенный выше материал, рассмотрим в аксиально-симметричном случае допускающую представление нулевой кривизны эффективную трехмерную $\sigma$-модель. Для этого введем систему цилиндрических координат $(\rho, z, \varphi)$, параметризуем трехмерный линейный элемент в форме Льюиса и Папапетру

$$ds_3^2 = \mathrm{e}^{\Upsilon}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \tag{178}$$

и рассмотрим ситуацию, когда метрический коэффициент $\Upsilon$ и матрица нулевой кривизны $\mathcal{M}$ являются функциями координат $\rho$ и $z$ и не зависят от угловой координаты $\varphi$. Считая, что эффективная трехмерная теория описывается лагранжианом

$$L_3 = c\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{M}^{-1}\ \nabla\mathcal{M})^2, \tag{179}$$

в котором константа $c$ пока оставлена произвольной, и переходя к более удобным координатам $x^{\pm} = \rho \pm iz$, для «материальной части» уравнений движения получаем

$$(\rho\,\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}_{,+})_{,-} + (\rho\,\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}_{,-})_{,+} = 0. \tag{180}$$

Далее, уравнения Эйнштейна приводят к следующей определяющей функцию $\Upsilon$ системе:

$$\Upsilon_{,\pm} = -2\,c\rho\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{M}_{,\pm}\mathcal{M}^{-1}_{,\pm}). \tag{181}$$

Схема решения полученной задачи, очевидно, такова: решая уравнение (180), находим матрицу $\mathcal{M}$, по которой, используя систему (181), вычисляем функцию $\Upsilon$. Отметим, что условием совместности указанной системы как раз и является уравнение (180).

Изучение симметрий уравнения (180) удобно проводить в рамках так называемого метода обратной задачи рассеяния. В данном случае его применение сводится к следующему. Введем пару «токовых переменных»

$$\mathcal{J}_{\pm} = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}_{,\pm}; \tag{182}$$

в их терминах уравнение (180) принимает следующий вид:

$$(\rho\,\mathcal{J}_{-})_{,+} + (\rho\,\mathcal{J}_{+})_{,-} = 0. \tag{183}$$

Еще одно уравнение на эти токи, а именно

$$\mathcal{J}_{-,+} - \mathcal{J}_{+,-} + [\mathcal{J}_{+}\,\mathcal{J}_{-}] = 0, \tag{184}$$

получается при учете определений (182) из равенства $\mathcal{M}_{,+-} = \mathcal{M}_{,-+}$. Далее, «токовые» уравнения (183), (184) являются условиями совместности переопределенной линейной системы

$$\Psi(t;\, x^{\pm})_{,\pm} = \frac{1}{1 \mp \tau(t;\, x^{\pm})}\Psi(t;\, x^{\pm})\mathcal{J}_{\pm}, \tag{185}$$

где

$$\tau(t;\, x^{\pm}) = \frac{\sqrt{1+tx^{-}} - \sigma\sqrt{1-tx^{+}}}{\sqrt{1+tx^{-}} + \sigma\sqrt{1-tx^{+}}} \tag{186}$$

при произвольном значении постоянного «спектрального» параметра $t$ и при $\sigma = \pm 1$. Матричнозначная функция $\Psi(t;\, x^{\pm})$, являющаяся решением указанной линейной системы, используется для определения в инфинитезимальной форме симметрий уравнения (180).

Пусть $\epsilon$ — инфинитезимальная постоянная матрица, принадлежащая к алгебре той группы, элементом которой является $\mathcal{M}$, и пусть $\eta(t;\epsilon,x^{\pm})$ — инфинитезимальное матричное поле, получающееся из $\epsilon$ преобразованием подобия с элементом $\Psi(t;\, x^{\pm})$:

$$\eta(t;\epsilon,x^{\pm}) = \Psi(t;\, x^{\pm})^{-1}\epsilon\Psi(t;\, x^{\pm}). \tag{187}$$

Утверждение состоит в следующем: в том случае, когда на матрицу нулевой кривизны не накладываются никакие ограничения помимо группового (случай главных киральных моделей), инфинитезимальное преобразование

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M} + \delta\,\mathcal{M}, \tag{188}$$

где
$$\delta\,\mathcal{M} = H\mathcal{M}\eta(t;\epsilon,x^{\pm}) \tag{189}$$
и
$$H = \frac{1}{\sqrt{(1-tx^{+})(1+tx^{-})}}\,, \tag{190}$$

является симметрией системы. Если же матрица $\mathcal{M}$ должна быть еще и симметричной (случай $\sigma$-модели с симметрическим пространством потенциалов), то инфинитезимальное преобразование (188) должно быть соответствующим образом видоизменено:

$$\delta\,\mathcal{M} = H[\mathcal{M}\eta(t;\epsilon,x^{\pm}) + \eta(t;\epsilon,x^{\pm})^{T}\mathcal{M}]. \tag{191}$$

Указанные преобразования симметрии, как зависящие от пространственных координат, являются обобщенными. Можно показать, что они определяют (через зависимость от спектрального параметра) счетный набор линейно независимых генераторов симметрии, от спектрального параметра уже не зависящих [41].

Переходя к построению конечных преобразований симметрии обсуждаемого здесь типа, рассмотрим множество решений линейной системы (185), регулярных при $t = 0$, $\sigma = 1$. Будем также для краткости пользоваться обозначением $\Psi(t) \equiv \Psi(t;\, x^{\pm})$. Видно, что при $t = 0$ система (185) приобретает эквивалентный соотношениям (182) вид, что приводит к естественному отождествлению
$$\mathcal{M} = \Psi(0). \tag{192}$$

Определенная соотношением (192) матрица $\mathcal{M}$ оказывается должным образом связанной с токами $\mathcal{J}_{\pm}$ и автоматически удовлетворяющей уравнению (180) как одному из условий совместности системы (185). Все это и обосновывает сделанное отождествление.

Пусть теперь $\mathcal{M}_0$ — частное решение уравнения (180), $\mathcal{J}_{0\,\pm}$ — вычисленные по этому решению токи, а $\Psi_0(t)$ — соответствующее ему решение линейной системы (185). Сделаем в линейной системе замену матричной переменной, положив
$$\Psi(t) = \Psi_0(t)X(t); \tag{193}$$

в новых терминах рассматриваемая задача принимает следующий вид:

$$X(t)_{,\,\pm} = \frac{1}{1 \mp \tau(t)}[X(t)\mathcal{J}_{\pm} - \mathcal{J}_{0\,\pm}X(t)]. \tag{194}$$

Имея в виду регулярные при $t = 0$ решения этой задачи, из соотношений (192) и (193) тогда получаем

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0\,X(0), \tag{195}$$

т. е. формулу для конечного преобразования симметрии в его действии на матрицу представления нулевой кривизны. При этом роль оператора симметрии, переводящего «начальное» решение $\mathcal{M}_0$ в «конечное» решение $\mathcal{M}$, играет величина $S = X(0)$.

Построение в явном виде матричной функции $X(t; x^{\pm})$ можно произвести в рамках т. н. «$\mathcal{N}$-солитонного анзаца» [39, 40, 42]. Этот анзац определяется выражением

$$X = 1 + \sum_{k,l=1}^{\mathcal{N}} C_{lk}^{-1} \, \frac{m_k \, n_l^T}{\tau - \mu_k}, \tag{196}$$

где $C_{lk}^{-1}$ — коэффициенты матрицы, обратной к $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$-матрице $C$, коэффициенты которой, в свою очередь, равны

$$C_{kl} = \frac{m_k^T n_l}{\mu_k - \nu_l}. \tag{197}$$

Основное утверждение состоит в том, что динамические уравнения оказываются тождественно выполненными в случае, когда функции $\mu_k$ и $\nu_l$, а также столбцы $m_k$ и $n_l$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mu_k &= \tau(\sigma_k', t_k'), \quad & m_k &= \Psi_0^{-1}(\mu_k) m_{0k}, \\ \nu_l &= \tau(\sigma_l'', t_l''), \quad & n_l &= \Psi_0^T(\nu_l) n_{0l}, \end{aligned} \tag{198}$$

в которых $m_{0k}$ и $n_{0l}$ — постоянные столбцы (в случае $\mu_k = \nu_l$ нужно положить $C_{kl} = 0$ и удовлетворить равенству $m_{0k}^T n_{0l} = 0$). Таким образом, для оператора симметрии $\mathcal{N}$-солитонного типа $S$ получаем

$$S = 1 - \sum_{k,l=1}^{\mathcal{N}} C_{lk}^{-1} \mu_k^{-1} m_k n_l^T. \tag{199}$$

Представляя далее этот оператор в экспоненциальной форме, находим также, что

$$\det S = \prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\nu_k}{\mu_k}. \tag{200}$$

При помощи непосредственных вычислений убеждаемся далее в том, что закон преобразования токовых переменных может быть представлен в виде

$$J_{\pm} = J_{0\pm} \mp \frac{1}{\rho} \left( \rho \sum_{k,l=1}^{\mathcal{N}} C_{lk}^{-1} m_k n_l^T \right)_{,\pm}, \tag{201}$$

после чего для трансформированных в соответствии с рассматриваемым солитонным преобразованием симметрии величин $\Omega = (\mathbf{\Omega})_\varphi$ (единственной нетривиальной компоненты матричного потенциала $\mathbf{\Omega}$) и $\Upsilon$ получаем следующие выражения:

$$\Omega = \Omega_0 - i\rho \sum_{k,l=1}^{\mathcal{N}} C_{lk}^{-1} m_k n_l^T + c(\Omega),$$
$$\mathrm{e}^{\Upsilon} = \mathrm{e}^{\Upsilon_0} \left( \det\, C \prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{4\mu_k \nu_k}{\rho\sqrt{(1-\mu_k^2)(1-\nu_k^2)}} \right)^{4c} c(\Omega). \tag{202}$$

При этом в (202) величины $\Omega_0$ и $\Upsilon_0$ соответствуют «начальному» значению матрицы нулевой кривизны $\mathcal{M}_0$, матрица же $c(\Omega)$ и параметр $c(\Upsilon)$ являются константами интегрирования.

Соотношения (199), (200) и (202) составляют основу всего последующего рассмотрения. Положим $\mathcal{N} = 2N$ и уточним рассматриваемый анзац, потребовав, чтобы выполнялись дополнительные соотношения

$$\begin{aligned} \mu_{N+i} &= \nu_i^{-1}, &\qquad m_{N+i} &= \mathcal{M}_0^{-1} n_i, \\ \nu_{N+j} &= \mu_j^{-1}, &\qquad n_{N+j} &= \mathcal{M}_0\ m_j, \end{aligned} \tag{203}$$

где $i, j = 1, \ldots, N$. В этом случае, как легко проверить, определитель матрицы оператора симметрии оказывается равным $\det\, S = \left(\prod_{i=1}^{N} \nu_i/\mu_i\right)^2$, в то время как для остальных потенциалов, связанных с представлением нулевой кривизны, получаются следующие выражения [45]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 - \sum_{i,j=1}^{N} \big[ & D_{ji}^{-1} \mu_i^{-1} \big( \mathcal{M}_0 m_i n_j^T + n_j m_i^T \mathcal{M}_0 \big) + \\
& + D_{N+j i}^{-1} \mu_i^{-1} \mu_j^{-1} \mathcal{M}_0 m_i m_j^T \mathcal{M}_0 + D_{jN+i}^{-1} n_i n_j^T \big], \\
\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}_0^{-1} + \sum_{i,j=1}^{N} \big[ & D_{ji}^{-1} \nu_j^{-1} \big( m_i n_j^T \mathcal{M}_0^{-1} + \mathcal{M}_0^{-1} n_j m_i^T \big) + \\
& + D_{jN+i}^{-1} \nu_i^{-1} \nu_j^{-1} \mathcal{M}_0^{-1} n_i n_j^T \mathcal{M}_0^{-1} + D_{N+j\ i}^{-1} m_i m_j^T \big], \\
\Omega = \Omega_0 - i\rho \sum_{i,j=1}^{N} \big[ & D_{ji}^{-1} \big( m_i n_j^T + \mu_i^{-1} \mu_j^{-1} \mathcal{M}_0^{-1} n_j m_i^T \mathcal{M}_0 \big) + \\
& + D_{N+j i}^{-1} \mu_j^{-1} m_i m_j^T \mathcal{M}_0 + D_{jN+i}^{-1} \nu_i^{-1} \mathcal{M}_0^{-1} n_i n_j^T \big] + c(\Omega), \\
\mathrm{e}^{\Upsilon} = \mathrm{e}^{\Upsilon_0} & \left[ \sqrt{\det\, D} \prod_{i=1}^{N} \frac{4\mu_i \nu_i}{\rho\sqrt{(1-\mu_i^2)(1-\nu_i^2)}} \right]^{8c} c(\Upsilon),
\end{aligned} \tag{204}$$

в которых положено

$$
\begin{gathered}
D_{ij} = D_{N+j\,N+i} = \frac{m_i^T n_j}{\mu_i - \nu_j}, \\
D_{iN+j} = \frac{m_i^T \mathcal{M}_0 m_j}{\mu_i \mu_j - 1}, \quad D_{N+ij} = \frac{n_i^T \mathcal{M}_0^{-1} n_j}{1 - \nu_i \nu_j}.
\end{gathered} \tag{205}
$$

Таким образом, в рассматриваемом «уточненном» случае $\mathcal{M}^T = \mathcal{M}$ при $\mathcal{M}_0^T = \mathcal{M}_0$, т. е. солитонное преобразование сохраняет свойство симметрии матрицы нулевой кривизны. Нетрудно проверить, что обеспечивающие это сохранение соотношения (203) оказываются реализованными при наложении следующих условий на постоянные параметры солитонного преобразования:

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_{N+i} = -\sigma''_i, \qquad t'_{N+i} = t''_i, \qquad m_{0N+i} = c'_i n_{0i}, \\
&\sigma''_{N+j} = -\sigma'_j, \qquad t''_{N+j} = t'_j, \qquad n_{0N+j} = c''_j m_{0j},
\end{aligned} \tag{206}
$$

где $c'_i = \Psi_0(\nu_i^{-1})\mathcal{M}_0^{-1}\Psi_0^T(\nu_i)$ и $c''_j = [\Psi_0^T(\mu_j^{-1})]^{-1}\mathcal{M}_0\Psi_0^{-1}(\mu_j)$ — постоянные матрицы (этот факт легко доказать при помощи дифференцирования и последующего использования линейной системы (185)). Наконец, из соотношений (204) следует, что трансформированные величины $\mathcal{M}$, $\Omega$ и $\Upsilon$ оказываются вещественными, если для любого индекса $i$ существует индекс $j$ такой, что $\bar{t}'_i = -t'_j$, $\bar{t}''_i = -t''_j$, $\bar{m}_{0i} = m_{0j}$ и $\bar{n}_{0i} = n_{0j}$, а также если вещественными являются константы интегрирования $c(\Omega)$ и $c(\Upsilon)$ (причем последняя — положительно определенной) [45].

Развитая в этом разделе процедура генерации, связанная с использованием солитонных преобразований симметрии, может быть с легкостью обобщена на случай основной для теории гетеротической струны $\sigma$-модели с симметрическим пространством потенциалов ортогонального типа. Рассмотрим эффективную систему (16) и положим в наших формулах $c = 1/8$. Тогда утверждение состоит в том, что соотношения (22), определяющие матрицу нулевой кривизны теории, сохраняются при солитонном преобразовании в случае $\mathcal{N} = 4N$ и при выполнении следующих дополнительных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&m_{N+i} = \mathcal{L}\mathcal{M}_0 m_i, \quad n_{N+i} = \mathcal{M}_0\mathcal{L} n_i, \quad \mu_{N+i} = \mu_i^{-1}, \quad \nu_{N+i} = \nu_i^{-1}, \\
&m_{2N+i} = \mathcal{L} n_i, \qquad n_{2N+i} = \mathcal{L} m_i, \qquad \mu_{2N+i} = \nu_i, \qquad \nu_{2N+i} = \mu_i, \\
&m_{3N+i} = \mathcal{M}_0^{-1} n_i, \quad n_{3N+i} = \mathcal{M}_0 m_i, \quad \mu_{3N+i} = \nu_i^{-1}, \quad \nu_{3N+i} = \mu_i^{-1},
\end{aligned} \tag{207}
$$

дополненных «диагональными» условиями $m_i^T\mathcal{L}m_i = n_i^T\mathcal{L}n_i = 0$. Все дальнейшие действия производятся совершенно аналогично выполненным ранее в упрощенном случае симметричной матрицы с тривиальным групповым условием, и мы не будем останавливаться здесь на их деталях.

## 10. ЗАРЯЖАЮЩИЕ СОЛИТОННЫЕ СИММЕТРИИ

В этом разделе будет дан ответ на вопрос о том, при каких дополнительных условиях, накладываемых на свободные параметры, солитонные преобразования симметрии допускают инфинитезимальный предел и сохраняют свойство асимптотической плоскостности решений. При этом (для простоты) изложение ведется в упрощенном случае системы, описываемой соотношениями (203)–(206).

Итак, произведем дальнейшее уточнение определенного в предыдущем разделе солитонного анзаца, положив

$$\sigma'_i = \sigma''_j = \sigma. \tag{208}$$

Параметризуем, далее, постоянные полюсные параметры $t'_i,\ t''_j$ согласно

$$t'_i = \lambda(1 - \varepsilon\sigma\mu_{0i}), \quad t''_j = \lambda(1 - \varepsilon\sigma\nu_{0j}), \tag{209}$$

и рассмотрим предел выражений (204) при $\varepsilon \to 0$. Принимая во внимание расходимость коэффициентов $D_{ij}$ и $D_{N+i\,N+j}$, а также конечность коэффициентов $D_{iN+j}$ и $D_{N+ij}$, получаем в результате для матрицы нулевой кривизны $\mathcal{M}$ инфинитезимальное преобразование (187)–(191) с параметром $\epsilon$, определяемым соотношениями

$$\epsilon = \varepsilon \sum_{i,j=1}^{N} D^{-1}_{0\ ji} m_{0i} n^T_{0j}, \quad D_{0\ ij} = \frac{m^T_{0i} n_{0j}}{\mu_{0i} - \nu_{0j}}. \tag{210}$$

Далее, положив

$$c(\Omega) = 0, \tag{211}$$

получаем трансформационную формулу

$$\Omega \approx \Omega_0 + i\rho\, H\big[\tau(\sigma,\lambda)\,\eta + \tau^{-1}(\sigma,\lambda)\,\mathcal{M}_0^{-1}\eta^T\mathcal{M}_0\big], \tag{212}$$

которая также описывает инфинитезимальное преобразование. Наконец, выбор остающейся пока неопределенной константы интегрирования $c(\Upsilon)$ в виде

$$c(\Upsilon) = \left[\frac{1}{\det\, D_0}\left(-\frac{\sigma\varepsilon}{2\lambda}\right)^N\right]^{8c} \tag{213}$$

позволяет устранить из $\mathrm{e}^{\Upsilon}$ расходящийся член и добиться выполнения ожидаемого асимптотического равенства $\Upsilon \approx \Upsilon_0$. Таким образом, рассматриваемый предельный переход определяет действие преобразования (191) с инфинитезимальным параметром $\epsilon$, реализованным в рамках рассматриваемого солитонного анзаца в соответствии с выражениями (210).

Перейдем теперь в сферическую систему координат (положив $\rho = R\sin\theta$ и $z = R\cos\theta$) и рассмотрим асимптотику полученного солитонного преобразования симметрии при $R \to \infty$ в случае, когда затравочное решение (фон) является асимптотически-плоским. Относительно используемого фона будем предполагать, что на указанной асимптотике имеют место приближенные равенства

$$\mathcal{M}_0 \approx \mathcal{M}_v + \frac{\mathcal{Q}_0}{R}, \quad \Omega_0 \approx \mathcal{M}_v^{-1}\mathcal{Q}_0 \cos\theta, \quad \Upsilon_0 \approx 1, \tag{214}$$

причем тривиальное значение кулоновского заряда $\mathcal{Q}_0$ также считается допустимым. Тогда и $\Psi_{0\,\infty} = \mathcal{M}_v$. Основное утверждение состоит в том, что асимптотики величин $\mathcal{M}$, $\Omega$ и $\Upsilon$ также имеют «правильную форму», если выполняются введенные ранее в совершенно ином контексте соотношения (208), а константы интегрирования $c(\Omega)$ и $c(\Upsilon)$ подобраны соответствующим образом.

Действительно, производя необходимые вычисления и используя факт расходимости коэффициентов $D_{ij}$ и $D_{N+i\,N+j}$ и конечности коэффициентов $D_{iN+j}$ и $D_{N+ij}$ при $R \to \infty$, приходим к асимптотическим соотношениям вида (214) для трансформированных потенциалов. При этом для трансформированного кулоновского заряда $\mathcal{Q}$ получается следующий результат:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + i\sigma \sum_{i,j=1}^{N} \tilde{D}_{0ji}^{-1}\left(m_{0i}n_{0j}^T\mathcal{M}_v + \mathcal{M}_v n_{0j}m_{0i}^T\right), \tag{215}$$

где

$$\tilde{D}_{0ij} = \frac{m_{0i}^T n_{0j}}{(t_i')^{-1} - (t_j'')^{-1}}, \tag{216}$$

в то время как упомянутый «правильный выбор» констант интегрирования сводится к выражениям

$$\begin{aligned} c(\Omega) &= i\mathcal{M}_v^{-1}\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{D}_{0ji}^{-1}(m_{0i}n_{0j}^T\mathcal{M}_v - \mathcal{M}_v n_{0j}m_{0i}^T), \\ c(\Upsilon) &= \left[(-2)^N \det \tilde{D}_0\right]^{-8c}. \end{aligned} \tag{217}$$

Подставим теперь формулы (209) в соотношения (215)–(217) и рассмотрим их предел при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что мы рассматриваем инфинитезимальный предел построенного солитонного оператора симметрии в окрестности пространственной бесконечности. Принимая во внимание очевидное соотношение

$$\tilde{D}_0 \approx \frac{\sigma\lambda}{\varepsilon}\, D_0, \tag{218}$$

немедленно заключаем, что соотношения (217) переходят в точности в соотношения (211) и (213). Таким образом, выбранные нами фиксации констант интегрирования $c(\Omega)$ и $c(\Upsilon)$ в двух рассмотренных предельных режимах (при $\varepsilon \to 0$ и при $R \to \infty$) являются совместными. Отметим, что для инфинитезимального предела (при $\varepsilon \to 0$) трансформации кулоновского заряда $\mathcal{Q}$ класса асимптотически-плоских решений получается следующее выражение:

$$\mathcal{Q} \approx \mathcal{Q}_0 + \frac{i\varepsilon}{\lambda} \sum_{i,j=1}^{N} D_{0ji}^{-1}(m_{0i} n_{0j}^T \mathcal{M}_v + \mathcal{M}_v n_{0j} m_{0i}^T). \tag{219}$$

В результате получаем общую процедуру генерации асимптотически-плоских солитонных решений на произвольном асимптотически-плоском фоне, допускающую инфинитезимальный предел в виде преобразований, порождающих алгебру группы Героча.

Развитый $2N$-солитонный формализм может быть немедленно применен в задаче о генерации асимптотически-плоских решений для усеченной теории гетеротической струны. Соответствующая $\sigma$-модель, описываемая симметричным гравитационным и тривиальным электромагнитным матричными потенциалами Эрнста, определяется параметром $c = 1/4$ и играющим роль матрицы нулевой кривизны потенциалом $\mathcal{G}$ (см. разд. 2). Рассматривая солитонное решение на плоском фоне ($\Psi_0 = \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_v$), параметризуем постоянные столбцы — параметры солитонного решения — следующим образом:

$$m_{0i} = \begin{pmatrix} r_i' \\ s_i' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_v\, n_{0j} = \begin{pmatrix} r_j'' \\ s_j'' \end{pmatrix}, \tag{220}$$

где $r_i'$ и $r_j''$ — числа, а $s_i'$ и $s_j''$ — столбцы высотой $d$. Производя соответствующие выкладки, для величин, определяющих многомерный метрический элемент, получаем

$$\begin{aligned} G = G_v - \sum_{i,j=1}^{N} \Big[ & D_{ji}^{-1} \mu_i^{-1} \big( s_i' s_j''^T + s_j'' s_i'^T \big) + \\ & + D_{N+ji}^{-1} \mu_i^{-1} \mu_j^{-1} s_i' s_j'^T + D_{jN+i}^{-1} s_i'' s_j''^T \Big], \\ \mathrm{e}^{2\phi} = 1 - \sum_{i,j=1}^{N} & \big[ 2D_{ji}^{-1} \nu_j^{-1} r_i' r_j'' + D_{N+ji}^{-1} r_i' r_j' + D_{jN+i}^{-1} \nu_i^{-1} \nu_j^{-1} r_i'' r_j'' \big], \\ \mathrm{e}^{\Upsilon} = \frac{\det D}{(\det D_0)^2} & \prod_{i=1}^{N} \frac{4\, \mu_i^2\, \nu_i^2}{\rho^2 (1-\mu_i^2)(1-\nu_i^2)}, \end{aligned} \tag{221}$$

в то время как для дилатона и нетривиальных компонент поля Калба–Рамона находим, что

$$
\begin{gathered}
\mathrm{e}^{\Phi} = \mathrm{e}^{2\phi} \prod_{i=1}^{N} \frac{\nu_i}{\mu_i}, \\
B_{m\varphi} = i\Bigg[ G_v \sum_{i,j=1}^{N} \Big( \rho \Big[ D_{ji}^{-1} \big( r_j'' s_i' + \mu_i^{-1} \mu_j^{-1} r_i' s_j'' \big) + D_{N+j\ i}^{-1} \mu_j^{-1} r_i' s_j' \Big] - \\
- D_{j\ N+i}^{-1} \nu_i^{-1} r_j'' s_i'' - D_{0\ ji}^{-1} \big( r_j'' s_i' - r_i' s_j'' \big) \Big) \Bigg]_m ,
\end{gathered} \tag{222}
$$

где

$$
\begin{aligned}
D_{ij} = D_{N+jN+i} &= \frac{s_i'^T G_v s_j'' - r_i' r_j''}{\mu_i - \nu_j}, \quad & D_{iN+j} &= \frac{s_i'^T G_v s_j' - r_i' r_j'}{\mu_i \mu_j - 1}, \\
D_{n+ij} &= \frac{s_i''^T G_v s_j'' - r_i'' r_j''}{1 - \nu_i \nu_j}, & D_{0ij} &= \frac{s_i'^T G_v s_j'' - r_i' r_j''}{(t_i')^{-1} - (t_j'')^{-1}}.
\end{aligned} \tag{223}
$$

Соотношения (221)–(223) полностью определяют в рассматриваемом усечении теории гетеротической струны класс асимптотически-плоских и обладающих инфинитезимальным пределом $2N$-солитонных решений на плоском фоне.

Рассмотрим теперь простейший случай построенного решения с $N = 1$ и положим в нем $r_1' = r_+$, $r_1'' = r_-$, $s_1' = s_+$ и $s_1'' = s_-$ для вещественных параметров, а также $-i(t_1')^{-1} = z_0 - R_0$, $-i(t_1'')^{-1} = z_0 + R_0$ для мнимых параметров, считая при этом, что $z_0$ и $R_0$ — вещественные константы. Соответствующее двухсолитонное решение принимает наиболее простой вид в координатах $R$ и $\theta$, связанных с исходными цилиндрическими координатами соотношениями

$$
\rho = \sqrt{R^2 - R_0^2}\, \sin\theta, \quad z = z_0 + R\cos\theta. \tag{224}
$$

Производя необходимые выкладки, для нетривиальных компонент многомерной метрики и физических полей теории получаем

$$
\begin{gathered}
G = G_v + \frac{2\sigma c_{+-}^{-1} R_0}{H(R - \sigma R_0)} \Bigg[ s_+ s_-^T + s_- s_+^T + \sigma c_{+-}^{-1} R_0 \Bigg( c_{--} \frac{1 - \sigma\cos\theta}{R + R_0\cos\theta} s_+ s_+^T + \\
+ \ c_{++} \frac{1 + \sigma\cos\theta}{R - R_0\cos\theta} s_- s_-^T \Bigg) \Bigg], \\
\mathrm{e}^{2\phi} = 1 + \frac{2\sigma c_{+-}^{-1} R_0}{H(R + \sigma R_0)} \Bigg[ 2 r_+ r_- - \sigma c_{+-}^{-1} R_0 \Bigg( c_{++} \frac{1 - \sigma\cos\theta}{R - R_0\cos\theta} r_-^2 \ + \\
+ \ c_{--} \frac{1 + \sigma\cos\theta}{R + R_0\cos\theta} r_+^2 \Bigg) \Bigg],
\end{gathered} \tag{225}
$$

$$e^{\Phi} = e^{2\phi}\,\frac{R+\sigma R_0}{R-\sigma R_0},$$

$$\tag{226} B_{m\varphi} = 2c_{+-}^{-1}R_0\Bigg\{\mathcal{M}_v\Bigg(r_+s_- - r_-s_+ + \frac{\sigma}{H}\Bigg[(\cos\theta+\sigma)r_-s_+ + (\cos\theta-\sigma)\times$$

$$\times\,\frac{R+\sigma R_0}{R-\sigma R_0}r_+s_- + c_{+-}^{-1}R_0\left(\frac{c_{++}r_-s_-}{R-R_0\cos\theta} - \frac{c_{--}r_+s_+}{R+R_0\cos\theta}\right)\sin^2\theta\Bigg]\Bigg)\Bigg\}_m,$$

где

$$H = 1 - \frac{c_{+-}^{-2}c_{++}c_{--}R_0^2\sin^2\,\theta}{R^2-R_0^2\cos^2\,\theta} \tag{227}$$

и $c_{\pm\pm} = s_\pm^T G_v s_\pm - r_\pm^2$, $c_{+-} = s_+^T G_v s_- - r_+r_-$. При этом трехмерный линейный элемент построенного решения имеет следующий вид:

$$ds_3^2 = H[dR^2 + (R^2-R_0^2)d\theta^2] + (R^2-R_0^2)\,\sin^2\,\theta\,d\varphi^2. \tag{228}$$

Решение (225)–(228) обладает явной асимптотической плоскостностью (предел при $R\to\infty$), а также очевидным образом переходит в инфинитезимальное возмущение плоского фона при $R_0\to 0$, как это и должно быть в силу полученных в настоящем разделе общих результатов.

Отметим, что с формальной точки зрения построенное решение ближе всего к широко известному в теории Эйнштейна–Максвелла решению Боннора. Оно описывает многомерный невращающийся (с тривиальным значением углового момента) источник, обладающий массой и дилатонным зарядом, равными

$$M_{\rm gr} = 2\sigma R_0 C_{+-}^{-1}s_+^1 s_-^1, \qquad Q_d = 2\sigma R_0(1+2C_{+-}^{-1}r_+r_-). \tag{229}$$

При этом $M_{\rm gr}$ и $Q_d$ определяются при помощи асимптотических разложений $G_{11}\approx -1+2M_{\rm gr}/R$ и $\Phi\approx Q_d/R$, а под параметрами $s_\pm^1$ понимаются верхние элементы столбцов $s_\pm$. Далее, калб-рамоновское поле рассматриваемого источника обладает, вообще говоря, дираковской струной. Эта струна исчезает, как нетрудно проверить, при $r_-s_+ = -r_+s_-$.

Обобщение полученных в этом разделе результатов на случай неусеченной теории основывается на использовании соотношений (207) и приводит в конце концов к построению общего заряжающего преобразования солитонного типа. При этом выбор знаков (208) оказывается снова «правильным», а построенное в соответствии с ним солитонное преобразование обладает, как и в разобранном упрощенном случае, порождающим алгебру группы Героча инфинитезимальным пределом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведен обзор результатов, полученных при изучении низкоэнергетического бозонного сектора теории гетеротической струны методами теории симметрий. Рассмотрен случай тороидальной компактификации на три и два измерения, когда данная динамическая система описывается гравитирующей $\sigma$-моделью с симметрическим пространством потенциалов. Почти все полученные результаты оказались так или иначе связанными с возможностью представления этой струнно-гравитационной системы в форме некоторого матричного обобщения стационарной теории Эйнштейна–Максвелла. Возникавшие при этом естественные аналогии выступали в качестве своего рода «руководства к действию» как при развитии общего формализма теории, так и при решении ряда конкретных задач.

Прежде всего, было установлено представление результирующей трехмерной $\sigma$-модели в терминах матричных потенциалов Эрнста. С его помощью построена и классифицирована группа трехмерных скрытых симметрий теории. В частности, в явном виде было получено обобщение нелинейного сектора симметрий Элерса–Харрисона на случай рассматриваемой струнно-гравитационной системы. Была построена в явном виде и идентифицирована группа трехмерных заряжающих симметрий, являющаяся основой любой генерационной процедуры в классе трехмерных асимптотически-плоских полей. Также удалось установить матричное представление теории, в рамках которого данная группа имеет линейную и однородную реализацию. Это представление было использовано для разработки нового формализма, позволяющего получать результаты в явно инвариантном по отношению к действию группы трехмерных заряжающих симметрий виде.

В случае двумерной гравитирующей $\sigma$-модели, возникающей при тороидальной компактификации рассматриваемой теории, было построено общее заряжающее преобразование симметрии солитонного типа. При этом использовался метод обратной задачи рассеяния Белинского и Захарова, дополненный новой реализацией некоторых алгебраических соотношений. Было показано, что полученное заряжающее солитонное преобразование обладает инфинитезимальным пределом, связанным с алгеброй группы Героча данной теории. Разработана техника генерации двумерных асимптотически-плоских решений, при помощи которой построен класс асимптотически-плоских солитонных решений на плоском фоне.

Среди построенных конкретных семейств решений следует выделить инвариантный класс экстремальных решений ИВП, а среди генерационных процедур — инвариантную генерацию с базой, эквивалентной пространству стационарных решений теории Эйнштейна–Максвелла. Отметим также, что в качестве естественных баз генерации могут быть взяты струнно-гравитационные $\sigma$-модели рассматриваемого типа со значениями параметров $d$ и $n$, равными

2, 0; 1, 1 и 1, 2. Дело в том, что указанные $\sigma$-модели допускают альтернативные, по отношению к ортогональному, представления нулевой кривизны — унимодулярное [47], симплектическое [48–52] и унитарное [53, 54]. Это обстоятельство открывает дополнительные возможности для исследования пространств их решений [55, 56] (в частности, в рамках метода обратной задачи теории рассеяния [45]).

**Благодарности.** Автор благодарен А. Эррера-Агиляр, Д. В. Гальцову и М. В. Юровой за участие в некоторых совместных работах, использованных при написании настоящего обзора, а также В. Н. Первушину, Ю. П. Рыбакову, С. Д. Одинцову, Б. С. Ишханову, В. Н. Мельникову и В. И. Денисову — за полезные обсуждения рассмотренных в обзоре вопросов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1–2.
2. *Barbashov B. M., Nesterenko V. V.* Introduction to the relativistic string theory. Singapore: World Scientific, 1990.
3. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* // УФН. 1986. Т. 150. С. 489–524.
4. *Kiritsis E.* Introduction to superstring theory. Leuven: Leuven Univ. Press, 1998.
5. *Nojiri S., Odintsov S. D.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 2001. V. 16. P. 1015–1108.
6. *Frolov V. P., Novikov I. D.* Black hole physics: basic concepts and new developments. Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.
7. *Maldacena J. M.* Black holes in string theory. Princeton U. Ph. D. Thesis. 1996.
8. *David J. R., Mandal G., Wadia S. R.* // Phys. Rep. 2002. V. 369. P. 549–686.
9. *Филиппов А. Т.* // ЭЧАЯ. 2001. Т. 32, вып. 7. С. 78–83.
10. *Mohaupt T.* // Class. Quant. Grav. 2000. V. 17. P. 3429–3482.
11. *Linde A. D.* Elementary particles and inflationary Universe: on present formation of theories. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl., 1993.
12. *Kallosh R. et al.* // Class. Quant. Grav. 2000. V. 17. P. 4269–4338.
13. *Gasperini M., Veneziano G.* // Phys. Rep. 2003. V. 373. P. 1–212.
14. *Quevedo F.* // Class. Quant. Grav. 2002. V. 19. P. 5721–5779.
15. *Nojiri S., Odintsov S. D., Ogushi S.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 023521.
16. *Barbashov B. M., Nesterenko V. V.* // Fortsch. Phys. 1983. V. 31. P. 535–567.
17. *Breitenlohner P., Maison D.* // Ann. Poincare Phys. Theor. 1987. V. 46. P. 215.
18. *Breitenlohner P., Maison D., Gibbons G. W.* // Commun. Math. Phys. 1988. V. 120. P. 295.
19. *Breitenlohner P., Maison D.* // Commun. Math. Phys. 2000. V. 209. P. 785–810.
20. *Гогилидзе С. А., Первушин В. Н., Хведелидзе А. М.* // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 1. С. 160–209.
21. *Zakharov V. E.* What is integrability? Berlin: Springer, 1991.
22. *Ernst F. J.* // Phys. Rev. 1968. V. 167, No. 5. P. 1175–1179.
23. *Mazur P. O.* // Acta Phys. Polon. B. 1983. V. 14. P. 219–234.

24. *Алексеев Г. А.* // ТМФ. 2001. Т. 129. С. 1466–1483.
25. *Alekseev G. A., Griffiths J. B.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5247–5250.
26. *Hauser I., Ernst F. J.* // Gen. Rel. Grav. 2001. V. 33. P. 195–293.
27. *Maharana J., Schwarz J. H.* // Nucl. Phys. B. 1993. V. 390. P. 3–32.
28. *Sen A.* // Nucl. Phys. B. 1995. V. 434. P. 179–209.
29. *Youm D.* // Phys. Rep. 1999. V. 316. P. 1–232.
30. *Herrera-Aguilar A., Kechkin O. V.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1998. V. 13. P. 393–402.
31. *Herrera-Aguilar A., Kechkin O. V.* // Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 124006.
32. *Kechkin O. V.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 066006.
33. *Bakas I., Bourdeau M., Cardoso G. L.* // Nucl. Phys. B. 1998. V. 510. P. 103–138.
34. *Israel W., Wilson G. A.* // J. Math. Phys. 1972. V. 13. P. 865.
35. *Perjes Z.* // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. P. 1668.
36. *Bergshoeff E., Kallosh R., Ortin T.* // Nucl. Phys. B. 1996. V. 478. P. 156–180.
37. *Behrndt K., Lust D., Sabra W. A.* // Nucl. Phys. B. 1998. V. 510. P. 264–288.
38. *Herrera-Aguilar A., Kechkin O. V.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 2002. V. 17. P. 2485–2500.
39. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 1953–1971.
40. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* // Там же. Т. 77. С. 3–19.
41. *Schwarz J. H.* // Nucl. Phys. B. 1995. V. 454. P. 427–448.
42. *Алексеев Г. А.* // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 301–303.
43. *Eris A., Karasu A., Gurses M.* // J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 1489–1495.
44. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.* // ТМФ. 1979. Т. 40. С. 15–27.
45. *Kechkin O. V.* // Class. Quant. Grav. 2003. V. 20. P. 2157–2167.
46. *Kramer D. et al.* Exact Solutions of the Einstein field equations. Berlin: Deutch. Verlag der Wissenschaften, 1980.
47. *Kechkin O. V., Yurova M. V.* // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 30. P. 219–226.
48. *Kechkin O. V.* // Gen. Rel. Grav. 1999. V. 31. P. 1075–1086.
49. *Kechkin O. V., Yurova M. V.* // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 5446–5457.
50. *Kechkin O. V., Yurova M. V.* // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 6132–6135.
51. *Galtsov D. V., Kechkin O. V.* // Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 7394–7399.
52. *Galtsov D. V., Kechkin O. V.* // Phys. Lett. B. 1995. V. 361. P. 52–58.
53. *Kechkin O. V.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 522. P. 166–176.
54. *Kechkin O. V.* // Ibid. P. 323–330.
55. *Clement G., Galtsov D. V.* // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 6136–6152.
56. *Herrera-Aguilar A., Kechkin O. V.* // Gen. Rel. Grav. 2002. V. 34. P. 1331–1344.