

УДК 530.12

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

В. И. Кувшинов, А. В. Кузьмин

Институт физики им. Б. И. Степанова НАНБ, Минск, Белоруссия

ВВЕДЕНИЕ	184
КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ	187
ГОЛОНОМНЫЕ КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ	195
ИНСТАНТОННОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ПРИСУТСТВИИ КЛАССИЧЕСКОГО ХАОСА	201
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС В СИСТЕМАХ ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА И ХИГГСА	227
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	238
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	239

УДК 530.12

КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

В. И. Кувшинов, А. В. Кузьмин

Институт физики им. Б. И. Степанова НАНБ, Минск, Белоруссия

Основной целью настоящей работы является исследование проявлений и свойств детерминированного хаоса в квантово-механических системах, а также изучение некоторых вопросов устойчивости последних посредством применения математических методов квантовой хромодинамики. Наряду с этим анализируются способы обобщения понятия хаоса на случай квантованных полей. Приводится краткий обзор теории детерминированного хаоса в классических гамильтоновых системах. Предлагается оригинальный критерий хаотичности квантово-полевых систем, сформулированный в рамках формализма функциональных интегралов. Показано его соответствие с классическими критериями детерминированного хаоса в рамках квазиклассического приближения нерелятивистской квантовой механики. На основании математической аналогии между петлей Вилсона квантовой хромодинамики и определением фиделити — величины, характеризующей устойчивость квантовых систем, изучена устойчивость вычислений на голономном квантовом компьютере общего вида по отношению к неконтролируемым ошибкам в задании классических управляющих параметров. В рамках инстантонного подхода аналитически рассчитаны некоторые характеристики процесса динамического туннелирования в одномерной модельной квантово-механической системе, на которую действует периодическое по времени возмущение. Показано, что полученные результаты согласуются с данными независимого численного моделирования. В связи с вопросом о роли и месте детерминированного хаоса в физике элементарных частиц кратко анализируются основные работы, посвященные изучению хаотической динамики классических калибровочных полей. Обсуждается возникновение перехода от упорядоченного движения к хаотическому при взаимодействии полей Янга–Миллса с классическим вакуумным полем Хиггса. Изучается влияние квантовых флуктуаций на критическую плотность энергии, соответствующую такому переходу, в случае, когда поле Хиггса является невакуумным и рассматривается как динамическая степень свободы.

The main aim of this work is to investigate manifestations and properties of the deterministic chaos phenomenon in quantum mechanical systems as well as to study their stability using the mathematical apparatus of quantum chromodynamics. Approaches to generalize the notion of chaos in the case of quantum fields are also analyzed. A brief review of deterministic chaos theory for classical Hamiltonian systems is made. We propose original chaos criterion for quantum field systems which is formulated in the framework of path integral formalism. Its correspondence with classical chaos criteria is demonstrated in semiclassical approximation of nonrelativistic quantum mechanics. Exploiting mathematical analogy between Wilson loop introduced in quantum chromodynamics and the definition of fidelity, a quantity defining the stability of quantum system — the stability of holonomic quantum computations — is studied in the generic case with respect to uncontrollable errors in assignment of the classical control parameters. In the framework of the instanton approach some dynamical tunneling process properties are analytically calculated for one-dimensional model quantum mechanical system affected by perturbation periodic in time. It is shown that the results obtained are in agreement with the results of the independent numerical simulations. In connection with the question about the role of deterministic chaos in elementary particle physics, the main works

dedicated to the investigation of the classical gauge fields chaotic dynamics are briefly discussed. The transition from the regular to chaotic motion at the interaction between Yang–Mills fields and classical vacuum Higgs field is also considered. The influence of quantum fluctuations on the critical density of energy corresponding to such a transition is studied in the case of nonvacuum Higgs field considered as a dynamical degree of freedom.

ВВЕДЕНИЕ

Явление детерминированного хаоса играет одну из ключевых ролей при изучении свойств нелинейных систем различной физической природы [9, 21, 25, 28]. В частности, хаотическое движение является наиболее распространенным режимом поведения гамильтоновых систем в классической механике, а случай интегрируемых систем является исключительным [11, 19]. Изначально под хаосом понималась способность динамической системы двигаться случайным образом в отсутствие внешних случайных сил и воздействий. Впоследствии этим понятием стали обозначать более широкий круг явлений, включающий в себя проявления классического хаоса в свойствах квантовых систем (см., например, [10, 34, 51, 97]).

Первоначальным толчком к изучению механизма возникновения случайного движения в полностью детерминированных системах послужили работы Крылова [13], посвященные обоснованию статистической механики. Его анализ показал, что локальная неустойчивость системы приводит к разрушению первых интегралов движения, быстрому убыванию корреляций и, как следствие, к движению с перемешиванием и хаосу. Следующим этапом в изучении хаоса явилось создание теории КАМ (Колмогоров, Арнольд и Мозер), в рамках которой была сформулирована и доказана основополагающая теорема о сохранении большинства инвариантных торов интегрируемой гамильтоновой системы при добавлении в ее гамильтониан неинтегрируемого возмущения (см. [11, 19]). Наряду с этим широко применяются численные методы изучения классического хаоса, основанные на сечении Пуанкаре [21]. Эти методы позволяют наглядно представить размеры, структуру и взаимное расположение областей регулярного и хаотического движения в фазовом пространстве произвольной динамической (в том числе гамильтоновой) системы. Наряду с этим развито множество аналитических подходов, дающих достаточно полное объяснение причин возникновения детерминированного хаоса и позволяющих осуществлять приближенные расчеты без помощи компьютера (см. [11, гл. 5]).

Существует несколько основных подходов к изучению хаоса в квантовой механике, причем основные успехи достигнуты в рамках квазиклассического приближения. В современной литературе под квантовым хаосом (quantum chaos) часто понимается изучение статистических свойств распределения расстояний между энергетическими уровнями квантово-механических

гамильтоновых систем, демонстрирующих полностью хаотическое или смешанное классическое поведение [7, 10, 33, 34, 51]. Существенный прогресс в этой области связан с открытием универсальных классов спектральных флуктуаций систем с хаотической или регулярной динамикой (см. [97, 98]). Такое понимание круга вопросов, связанных с хаосом в квантовых системах, является довольно узким и не охватывает всего спектра имеющихся результатов и проводимых исследований. В частности, за рамками рассмотрения оказываются работы, связанные с альтернативными способами изучения хаоса в квантовых системах [10, 30, 31, 92], а также с попытками введения понятия хаоса, согласующегося с принятым в классической механике, для квантовых систем, не имеющих классических аналогов или рассматриваемых за рамками квазиклассического приближения [4, 35, 44].

В настоящее время большой интерес представляет исследование надежности различных схем реализации квантовых вычислений. В данной работе будет приведено исследование устойчивости вычислений на голономном квантовом компьютере общего вида. Использовать голономии для осуществления квантовых вычислений первоначально было предложено в работе [113], где также была рассмотрена реализация голономных квантовых вычислений на примере простой оптической модели. Дальнейшее развитие этот подход получил в работе [91]. После этого была предложена схема построения оптического голономного квантового компьютера, основанная на использовании вырожденных состояний лазерных пучков в нелинейной среде Керра [89]. Другая возможная реализация голономных квантовых вычислений основана на использовании захваченных ионов [88].

Для характеристики надежности результатов, получаемых при проведении квантовых вычислений, используется величина, называемая фиделити (fidelity), которая первоначально была введена в работе [93]. Чем ближе ее значение к единице, тем более устойчивы квантовые вычисления по отношению к малым возмущениям эволюционного оператора [94]. С физической точки зрения фиделити представляет собой квантово-механическую амплитуду следующего события, состоящего из двух этапов. Первый этап заключается в осуществлении квантовых вычислений при отсутствии возмущения. Полученное конечное состояние является начальным для второго этапа, в течение которого проводятся обращенные назад по времени исходные квантовые вычисления в присутствии возмущения. Полученная амплитуда является мерой влияния возмущения на результат вычислений.

На частном примере резонаторной модели (cavity model) голономного квантового компьютера было показано, что такая реализация логических операций (gates) приводит к значению фиделити, близкому к единице [90]. Представляет интерес проведение исследования устойчивости вычислений на голономном квантовом компьютере в общем случае.

Активно исследуются проявления структур классического фазового пространства, таких как области хаотического движения, КАМ-торы и др., в квантовых процессах и свойствах квантово-механических систем [10, 34, 49, 51]. Одним из таких проявлений является влияние классического детерминированного хаоса на свойства динамического туннелирования [41, 45, 82, 108]. В частности, было показано, что под действием возмущения, приводящего к возникновению областей хаотического движения в классическом фазовом пространстве системы, скорость квантово-механического туннелирования между КАМ-торами может быть увеличена в 10^4 раз по сравнению со скоростью туннелирования между соответствующими областями фазового пространства невозмущенной интегрируемой системы [82]. Исследования в этом направлении, в основном, проводятся численными методами, основанными на теории Флоке (см. [102]), причем рассмотрение ограничивают системами с одной степенью свободы, на которые действует периодическое по времени возмущение [42, 81, 107, 108]. Наряду с этим разрабатываются аналитические методы изучения влияния классического хаоса на свойства квантово-механического туннелирования, основанные на формализме интегралов по путям [47, 48, 50, 103, 104] и инстантонной технике [68, 69, 87, 96]. Активно предлагаются и проводятся эксперименты по наблюдению и использованию указанного эффекта на практике [40, 60, 100, 105, 109, 112].

Еще одним направлением развития области применения методов теории хаоса являются как классические [29, 32, 52, 55–57, 59, 61, 63], так и квантовые [36, 37, 65, 66, 83, 95] калибровочные теории физики элементарных частиц. В частности, изучение свойств детерминированного хаоса в квантовой хромодинамике представляет интерес в связи с не решенными в настоящий момент проблемами адронизации и конфайнмента кварков (см. [17, 24, 65, 66, 85]). В рамках неабелевых калибровочных теорий физики элементарных частиц активно исследовалась устойчивость топологических монополюсных [55, 56] и сфалеронных [57] решений по отношению к их малому возмущению. С точки зрения детерминированного хаоса рассматривалось поведение модельных пространственно-однородных систем как абелевых, так и неабелевых классических калибровочных полей, взаимодействующих с полем Хиггса [3, 59, 61, 63, 74, 99]. Большое внимание уделяется изучению хаотического поведения калибровочных полей на решетке как в классическом, так и в квантовом случае [38, 39, 86, 95]. В указанных выше работах поднимался, в частности, вопрос о влиянии полей Хиггса на динамику классических калибровочных полей [55, 56, 59]. Был сделан вывод о том, что взаимодействие с классическим полем Хиггса приводит к регуляризации хаотического поведения полей Янга–Миллса и возникновению перехода от порядка к хаосу с ростом плотности энергии полевой системы [3, 55, 63, 99]. В случае безмассовой скалярной электродинамики на примере пространственно-однородных полей было показано, что квантовые поправки увеличивают энергетический порог, который

необходимо преодолеть для появления областей хаотического движения в фазовом пространстве системы, и, таким образом, приводят к регуляризации ее поведения при малых плотностях энергии [84]. Представляет интерес изучение влияния квантовых поправок на динамику аналогичных систем классических калибровочных и скалярных полей в случае неабелевых калибровочных теорий, что частично было сделано в работах [14, 62, 64, 99].

Естественно, данный обзор не претендует на полноту. Среди многих проблем, которые здесь не обсуждаются, упомянем только результаты, которые, как полагаем, демонстрируют глубокую связь между неустойчивостью, квантовым сжатием и перепутыванием квантовых состояний и указывают на возможную роль этих механизмов в спаривании кварков и антикварков, взаимодействующих со стохастическим вакуумом (резервуаром), образовании струн и явлении конфайнмента [15, 16, 78, 79].

1. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

1.1. Краткий обзор проблемы. Изначально внимание к явлению детерминированного хаоса было связано с проблемами классической механики и статистической физики. Попытки обоснования статистической механики инициировали его активное изучение [13]. Одним из основных результатов в этом направлении стало создание теории КАМ, касающейся общих вопросов структуры классического фазового пространства гамильтоновых систем (см. [11, гл. 3–5]). Было показано, что причиной возникновения детерминированного хаоса является локальная неустойчивость динамической системы, которая, в случае финитного движения, приводит к перемешиванию траекторий в фазовом пространстве и, как следствие, к ее нерегулярному поведению [10, 11].

Позднее значительный прогресс был достигнут в понимании явления хаоса в квазиклассическом приближении квантовой механики [10, 30, 34, 51]. В основном он связан с открытием универсальных классов спектральных флуктуаций квантовых систем, классические аналоги которых демонстрируют соответственно хаотическую, смешанную или регулярную динамику [7, 33, 97, 98].

Исследования устойчивости и регулярности динамики классических полевых систем наталкиваются на трудности, связанные с наличием у них бесконечного числа степеней свободы. По этой причине авторы практически всегда ограничиваются рассмотрением редуцированных полевых конфигураций с небольшим числом степеней свободы или колебательных мод полей (см., например, [3, 55–57, 64]).

Существуют работы, посвященные изучению хаоса в квантовой теории поля [36, 37, 65, 66, 83, 95]. Однако общепризнанное понимание такого рода явлений отсутствует, что ограничивает использование методов теории хаоса в области физики элементарных частиц. Ниже будет сформулирован критерий хаоса, применимый как для квантово-механических, так и для квантово-полевых систем. В следующем разделе будет проведена предварительная работа, связанная с обобщением классического критерия То́ды локальной неустойчивости на случай произвольного конечного числа степеней свободы.

1.2. Обобщенный критерий То́ды локальной неустойчивости гамильтоновых систем. Для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы и квадратичным по вектору импульса гамильтонианом существует способ анализа хаотической динамики, в частности, вычисления критической энергии перехода от упорядоченного движения к хаотическому, основанный на критерии локальной неустойчивости То́ды [99, 106]. Упомянутая критическая энергия соответствует моменту возникновения областей хаотического движения в фазовом пространстве системы. Указанный метод расчета применялся для изучения динамики пространственно-однородной системы классических калибровочных полей, взаимодействующих с ненулевым классическим вакуумным полем Хиггса [99]. Представляет интерес обобщить критерий То́ды локальной неустойчивости гамильтоновых систем на случай произвольного конечного числа степеней свободы, что было сделано в работе [65].

Рассмотрим классическую гамильтонову систему, обладающую произвольным конечным числом степеней свободы и описываемую гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{q}), \quad (1)$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ — векторы, образованные соответствующими обобщенными координатами и сопряженными им импульсами; $N > 1$ обозначает число степеней свободы системы. Поведение классической динамической системы локально неустойчиво, если расстояние между двумя близлежащими траекториями растет экспоненциально со временем в некоторой области фазового пространства.

Рассмотрим малую область Ω фазового пространства системы (1), расположенную в окрестности точки $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$, конкретный размер этой области определяется свойствами системы и будет оценен ниже. Пусть через Ω проходят две классические траектории: $(\mathbf{q}^{(1)}(t), \mathbf{p}^{(1)}(t))$ и $(\mathbf{q}^{(2)}(t), \mathbf{p}^{(2)}(t))$. Поведение отклонений $\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{(1)}(t) - \mathbf{q}^{(2)}(t)$ и $\delta\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^{(1)}(t) - \mathbf{p}^{(2)}(t)$ в Ω определяется линеаризованными уравнениями Гамильтона

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta\mathbf{p} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta\mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad G \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Sigma & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь I обозначает единичную матрицу $N \times N$, G — матрица устойчивости. Матрица Σ задается выражением

$$\Sigma \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}_0(t)} \right). \quad (3)$$

Матрицы Σ и G посредством зависимости от $\mathbf{q}_0(t)$ являются функциями времени. Выделим момент времени t_0 , соответствующий нахождению системы в точке \mathbf{q}_0 конфигурационного пространства. Разложим матричные элементы $G_{ij}(t)$ матрицы $G(t)$, входящей в уравнение (2), в ряд Тейлора:

$$G_{ij}(t) = G_{ij}(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} G_{ij}^{(k)} \Delta t^k, \quad \Delta t = t - t_0. \quad (4)$$

Здесь $G_{ij}^{(k)}$ обозначает k -ю производную матричного элемента $G_{ij}(t)$, вычисленную в момент времени t_0 . Далее, под $G_{ij}^{(0)}$ будем понимать $G_{ij}(t_0)$. Для того чтобы в общем случае приближенно проинтегрировать уравнения (2), требуется избавиться от неизвестной зависимости матрицы устойчивости от времени, т. е. отбросить в разложении (4) все слагаемые, кроме первого. Это возможно при условии

$$\Delta t \ll \frac{(k+1)G_{ij}^{(k)}}{G_{ij}^{(k')}}, \quad \forall k = \overline{0, \infty} : G_{ij}^k \neq 0; \quad \forall i, j. \quad (5)$$

Здесь k' обозначает порядок первой ненулевой производной, следующей за ненулевой производной порядка k . Таким образом, в течение конечного времени Δt , определяемого выражением (5), матрицу устойчивости G и ее собственные значения можно считать постоянными. Соответственно область Ω определяется как область фазового пространства, состоящая из точек, которые система может достигнуть в течение времени Δt , при условии, что в начальный момент времени она находилась в точке \mathbf{q}_0 .

Решение уравнений (2) в области Ω имеет вид

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{q}(t) \\ \delta \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2N} C_i \exp \{ \lambda_i t \} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{q}(0) \\ \delta \mathbf{p}(0) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{q}_0)$ обозначают собственные значения матрицы устойчивости G , а $\{C_i\}$ — полный набор проекторов на линейно независимые собственные векторы матрицы G . Случай вырожденных собственных значений не рассматривается, так как он является исключительным, а соответствующие

траектории образуют множество меры нуль. Из (6) можно сделать следующее заключение.

а) Если существует i такое, что $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, то расстояние между близлежащими траекториями растет экспоненциально со временем и движение локально неустойчиво. В соответствии с теоремой Лиувилля сжатие фазового потока в одном направлении ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0$) сопровождается его расширением в другом направлении (направлениях), с тем чтобы фазовый объем оставался постоянным. Таким образом, локальная неустойчивость движения имеет место при существовании $\operatorname{Re} \lambda_k \neq 0$.

б) Если для любого $i = \overline{1, 2N}$ $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, то движение устойчиво и регулярно.

Заметим, что $G^2 = \operatorname{diag} -\Sigma, -\Sigma$. Отсюда следует, что если $-\xi_j, j = \overline{1, N}$, являются собственными значениями матрицы $-\Sigma$, то

$$-\xi_j = \lambda_j^2, \quad \lambda_j^2 = \lambda_{j+N}^2, \quad j = \overline{1, N}, \quad (7)$$

а также

$$\xi_j = -\lambda_j^2 = (\operatorname{Im} \lambda_j)^2 - (\operatorname{Re} \lambda_j)^2 - 2i \operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Re} \lambda_j. \quad (8)$$

Поскольку матрица Σ действительна и симметрична, то ее собственные значения $\{\xi_j\}$ действительны. Следовательно, (8) приводит к следующему ограничению:

$$\operatorname{Im} \lambda_j \operatorname{Re} \lambda_j = 0, \quad \forall j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Таким образом, любое собственное значение матрицы устойчивости G является действительным либо чисто мнимым, либо равным нулю числом. Обобщенный критерий Тоды для классических гамильтоновых систем с конечным числом степеней свободы может быть сформулирован в следующем виде:

а) если $\xi_j \geq 0, \forall j = \overline{1, N}$, то поведение системы устойчиво в окрестности точки \mathbf{q}_0 ;

б) если $\exists j = \overline{1, N} : \xi_j < 0$, то поведение системы локально неустойчиво в окрестности точки \mathbf{q}_0 .

В случае, когда одно из этих условий выполняется в некоторой области конфигурационного пространства, движение является соответственно устойчивым или хаотическим в этой области.

Полученные результаты в случае систем с двумя степенями свободы совпадают с критерием Тоды, использованным в работах [14, 61, 62, 99]. Действительно, собственные значения матрицы Σ (см. (3)) в этом случае имеют вид

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}(B \pm \sqrt{B^2 - 4C}), \quad (10)$$

где

$$B = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}, \quad (11)$$

$$C = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2. \quad (12)$$

В указанных выше работах параметр B всегда был больше нуля. При этом если $C > 0$, то оба собственных значения матрицы Σ также больше нуля. Как следует из (8), собственные значения матрицы устойчивости (2) являются чисто мнимыми числами, а движение системы — устойчивым. Наоборот, при $C < 0$ одна из величин ξ_j , $j = 1, 2$, становится меньше нуля, соответственно возникает пара действительных собственных значений матрицы устойчивости, что приводит к локально неустойчивому поведению системы и детерминированному хаосу.

1.3. Критерий хаоса в квантовых системах. Приведем качественные аргументы, которые позволят сформулировать критерий хаоса для квантово-механических и квантово-полевых систем, применимый за рамками квазиклассического приближения. Из статистической механики и эргодической теории известно, что хаос в классических системах является следствием явления перемешивания, см. [11, с. 103]. Последнее означает экспоненциальное (или более быстрое) убывание корреляционной функции со временем. В случае, если корреляционная функция осциллирует или медленно убывает, то движение регулярно. Распространим критерий подобного типа на квантово-полевые системы. Все сказанное ниже остается справедливым и для нерелятивистских квантово-механических систем, что обусловлено схожестью математического аппарата в рамках формализма интегралов по траекториям.

В случае квантово-полевых систем аналогом классической корреляционной функции является двухточечная связная функция Грина (см. [75]):

$$G_{ik}(x, y) = - \left. \frac{\delta^2 W[\mathbf{J}]}{\delta J_i(x) \delta J_k(y)} \right|_{\mathbf{J}=0}. \quad (13)$$

Здесь $W[\mathbf{J}]$ обозначает производящий функционал связных функций Грина; \mathbf{J} — источники полей; x, y — 4-векторы пространственно-временных координат.

Исходя из этого сформулируем критерий хаоса для квантованных полей (и квантовой механики) в следующем виде:

- если двухточечная связная функция Грина (13) экспоненциально (или быстрее) стремится к нулю при $|x - y| \rightarrow \infty$ (4-вектор $x - y$ лежит внутри светового конуса ($x^0 - y^0 > 0$)), тогда квантово-полевая система хаотична;
- если же указанная функция осциллирует или медленно убывает в этом пределе, то динамика квантовых полей регулярна.

Проверим соответствие между предложенным квантовым критерием хаоса и классическим критерием Тоды локальной неустойчивости (см. п. 1.2) в рамках квазиклассического приближения квантовой механики. Для этого вычислим двухточечную функцию Грина в указанном приближении. Производящий функционал в этом случае задается выражением

$$Z[\mathbf{J}] = \int D\mathbf{q} \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - V(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T \mathbf{q} \right] \right\}, \quad (14)$$

где верхний индекс T обозначает операцию транспонирования. Рассмотрим некоторое решение классических уравнений движения $\mathbf{q}_0(t)$ и введем новую векторную переменную $\delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0(t)$, описывающую отклонение от классической траектории, тогда в квазиклассическом приближении получим

$$Z[\mathbf{J}] = \exp \{ i S_0[\mathbf{J}] \} \times \\ \times \int D\delta\mathbf{q} \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} \delta\dot{\mathbf{q}}^2 - \frac{1}{2} \delta\mathbf{q}^T \Sigma \delta\mathbf{q} + \mathbf{J}^T \delta\mathbf{q} \right] \right\}. \quad (15)$$

Здесь классическое действие имеет вид

$$S_0[\mathbf{J}] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_0^2 - V(\mathbf{q}_0(t)) + \mathbf{J}^T \mathbf{q}_0 \right], \quad (16)$$

а матрица Σ , определяемая выражением (3), является действительной и симметричной. Таким образом, существует ортогональное преобразование, задаваемое матрицей O , которое приводит матрицу Σ к диагональному виду. Примем, что характерное время, необходимое для проявления квантовых свойств системы, в рамках квазиклассического приближения τ_q много меньше временного масштаба, характерного для классической динамики системы τ_{cl} , т. е. $\tau_q \ll \tau_{cl}$. В качестве такого временного масштаба может служить интервал времени, определяемый выражением (5). Таким образом, при условии $\tau_q \ll \Delta t$ собственные значения $\xi_i = \xi_i(\mathbf{q}_0(t))$, $i = \overline{1, N}$, являются постоянными и не зависят от времени. Указанное приближение эквивалентно рассмотрению случая динамической локализации квантовых состояний [98]. В результате следующего ортогонального преобразования: $\delta\mathbf{q} = O\mathbf{x}$, $\mathbf{J}^T = \boldsymbol{\eta}^T O^T$, $O^T \Sigma O = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_N)$; $O^T O = O O^T = I$, получим

$$Z[\boldsymbol{\eta}] = L \exp \{ i S_0[\boldsymbol{\eta}] \} \times \\ \times \int D\mathbf{x} \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_N) \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{x} \right) \right\}, \quad (17)$$

где L обозначает якобиан ортогонального преобразования. В результате аналитического продолжения выражения (17) на мнимые времена и вычисления гауссовского функционального интеграла евклидов производящий функционал примет вид

$$Z_E[\boldsymbol{\eta}] = N \exp(-S_0^E[\boldsymbol{\eta}]) \times \\ \times \prod_{i=1}^N \exp \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 d\tau_2 \eta_i(\tau_1) \left[\delta(\tau_1 - \tau_2) \left(-\frac{d^2}{d\tau_2^2} + \xi_i \right) \right]^{-1} \eta_i(\tau_2). \quad (18)$$

В этом и последующих выражениях суммирование по индексу i отсутствует, если не оговорено противное; N обозначает нормировочный множитель. Классическое евклидово действие $S_0^E[\boldsymbol{\eta}]$ является линейным функционалом источников $\boldsymbol{\eta}$. Обратный оператор

$$\Delta_i(\tau_1, \tau_2) = \left[\delta(\tau_1 - \tau_2) \left(-\frac{d^2}{d\tau_2^2} + \xi_i \right) \right]^{-1} \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + \xi_i \right) \Delta(\tau_1, \tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (20)$$

Его решение — евклидова двухточечная связная функция Грина — имеет вид

$$\Delta_i(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)}}{\omega^2 + \xi_i}. \quad (21)$$

Ее аналитическое продолжение на действительное (физическое) время задается выражением

$$G_i(t_1, t_2) = \frac{i}{2\pi} \int d\bar{\omega} \frac{e^{i\bar{\omega}(t_1 - t_2)}}{\bar{\omega}^2 + \lambda_i^2}, \quad (22)$$

где $\tau \rightarrow it$, $\omega \rightarrow -i\bar{\omega}$. Функция Грина определена с точностью до решения соответствующего однородного уравнения. Используем эту свободу, с тем чтобы сделать двухточечную функцию Грина конечной в пределе $(t_1 - t_2) \rightarrow +\infty$ для действительных λ_i , а также для того, чтобы получить единую формулу для любых λ_i , как действительных, так и мнимых. В результате двухточечная связная функция Грина (22) может быть представлена в виде

$$G_i(t_1, t_2) = \frac{i}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\lambda_i(t_1 - t_2)}}{\lambda_i} \right), \quad t_1 > t_2. \quad (23)$$

Из этого выражения следует:

- Если классическое движение локально неустойчиво (хаотично), то, в соответствии с обобщенным критерием Тоды (п. 1.2), существует действительное собственное значение λ_i . Следовательно, функция Грина (23) при некотором i экспоненциально стремится к нулю в пределе $(t_1 - t_2) \rightarrow +\infty$. Обратное утверждение также верно. Если функция Грина (23) в пределе $(t_1 - t_2) \rightarrow +\infty$ экспоненциально стремится к нулю при некотором значении i , то существует действительное собственное значение матрицы устойчивости i , таким образом, классическое движение локально неустойчиво.

- Если все собственные значения матрицы устойчивости G мнимые, что соответствует классически устойчивому движению, то в пределе $(t_1 - t_2) \rightarrow +\infty$ функция Грина (23) осциллирует по закону синуса. Обратное утверждение также верно. Если (для любого i) функции Грина осциллируют в пределе $(t_1 - t_2) \rightarrow +\infty$, то собственные значения $\{\lambda_i\}$ являются мнимыми при любом i , а классическое движение устойчиво и регулярно.

Таким образом, предложенный критерий квантового хаоса совпадает с обобщенным критерием Тоды в квазиклассическом пределе, как это и требуется принципом соответствия. Из формулы (23) следует, что характерный для квантовой динамики временной масштаб может быть оценен как $\tau_q \sim \max\{1/|\lambda_i|\}$. Таким образом, условие $\tau_q \ll \Delta t$ во всяком случае выполняется при достаточно сильной локальной неустойчивости, присущей системе.

1.4. Хаос и спонтанное нарушение симметрии. Одним из возможных применений предложенного критерия хаоса в теории поля является исследование устойчивости классических решений по отношению к малым возмущениям начальных условий. Для изучения устойчивости некоторого классического решения полевых уравнений требуется вычислить, например, используя однопетлевое приближение, двухточечную функцию Грина в окрестности рассматриваемого решения.

С целью демонстрации рассмотрим действительное скалярное поле, описываемое лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \quad (24)$$

где $\lambda > 0$ есть константа самодействия скалярного поля, m^2 обозначает параметр, который может быть как больше, так и меньше нуля. В обоих случаях $\varphi = 0$ является решением полевых уравнений. Асимптотика двухточечной функции Грина, вычисленной в окрестности классического решения $\varphi = 0$ в случае свободного поля ($\lambda = 0$) задается выражением

$$G_0(x, y) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \rho^{-1/2} e^{im\sqrt{\rho}}. \quad (25)$$

Здесь $\rho = (x-y)^2$, а также принято, что 4-вектор $x-y$ лежит внутри светового конуса $(x^0 - y^0) > 0$, другими словами, $\rho > 0$. На основании представления Лемана для скалярного поля (см. [1, с. 105]) асимптотика полной функции Грина при учете самодействия ($\lambda \neq 0$) записывается в виде

$$G(x, y) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^{\infty} dm^2 f(m^2) \rho^{-1/2} e^{im\sqrt{\rho}}, \quad (26)$$

где f — некоторая действительная функция, которая не равна нулю только для тех значений своего аргумента, которые соответствуют квадрату полной массы некоторого физического состояния, удовлетворяющего ряду дополнительных условий (см. [1, с. 108–109]). Изучим устойчивость рассматриваемого решения по отношению к малым возмущениям начальных условий. Из выражения (26) следует, что возможны два различных случая:

- Функция Грина осциллирует и медленно (не экспоненциально) стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. Из предложенного квантового критерия хаоса следует, что рассматриваемое решение является устойчивым. Действительно, из формулы (26) видно, что параметр m действителен в этом случае, а $\varphi = 0$ является устойчивым вакуумным состоянием.

- Функция Грина экспоненциально стремится к нулю в пределе $\rho \rightarrow \infty$. Из предложенного критерия квантового хаоса следует, что $\varphi = 0$ является неустойчивым решением. Это соответствует действительности, так как из выражения (26) видно, что параметр m должен быть мнимым. Известно, что в этом случае состояние $\varphi = 0$ становится неустойчивым, возникают два новых устойчивых вакуумных состояния и имеет место явление спонтанного нарушения симметрии [53].

Здесь было продемонстрировано, что предложенный квантовый критерий хаоса согласуется с обобщенным критерием Тоды в квазиклассическом приближении квантовой механики, в случае сильной локальной неустойчивости системы. На примере скалярного поля была изучена устойчивость вакуумного состояния и показано, что спонтанное нарушение симметрии и вырождение вакуумного состояния могут рассматриваться как квантовые проявления хаоса.

2. ГОЛОНОМНЫЕ КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

2.1. Обзор подхода. Все существующие в настоящий момент вычислительные системы являются по своей природе классическими, т. е. оперируют гигантскими массивами побитно представленной информации. При этом каждый бит может принимать всего два значения: логический нуль и логическая единица. Наряду с этим в каждый момент времени можно точно указать,

в каком из этих состояний он находится. Общие законы функционирования подобных вычислительных систем были в достаточной степени изучены еще в 30-х гг. прошлого столетия (так называемая машина Тьюринга). В 80-х гг. того же столетия Ричардом Фейнманом была высказана идея о возможности построения вычислительных машин, работающих по квантовым законам. В этом случае в процессе вычислений множество допустимых состояний бита не ограничено двумя состояниями логического нуля и единицы, а изоморфно множеству нормированных векторов двумерного гильбертова пространства. Другими словами, бит может находиться в суперпозиционном состоянии логического нуля и единицы. Логическое устройство, обладающее подобным свойством, получило название квантового бита. Логические операции над ним уже не ограничиваются классическими операциями, такими как сложение и умножение (AND и OR), а представляют собой всевозможные унитарные операции. Начало бурного развития исследований в этом направлении положили работы Шора, в которых было показано, что квантовая схема вычислений, применительно к определенному, достаточно важному кругу задач, гораздо эффективнее классической схемы. В частности, им были разработаны алгоритмы быстрого фурье-преобразования и факторизации, которые гораздо эффективнее соответствующих классических алгоритмов и наряду с этим применяются при решении большого числа практически важных задач. В этой связи, а также по ряду других причин (разработка систем передачи абсолютно конфиденциальной информации и многое другое), возникла проблема практической реализации квантовых компьютеров. Было предложено (и по сей день предлагается) множество способов реализации массивов квантовых битов, а также осуществления квантовых логических операций над ними. В данной работе мы остановимся лишь на одной из подобных схем, которая обладает определенной степенью общности, т. е. допускает реализацию в рамках различных физических систем и в то же время имеет непосредственное отношение к физике элементарных частиц, ввиду практически полной идентичности используемого математического аппарата. Речь идет о голономных квантовых вычислениях.

В голономном квантовом компьютере для реализации унитарных преобразований используется нетривиальное преобразование векторов состояния, принадлежащих некоторому вырожденному подпространству параметрического семейства гамильтонианов, имеющее место при циклическом изменении параметров системы. Предположим, что системные параметры изменяются адиабатически. Голономные квантовые вычисления за рамками адиабатического приближения здесь не рассматриваются. Обозначим параметры системы через $\lambda = \{\lambda_\mu\}$. Пусть при $\lambda = 0$ система описывается гамильтонианом H_0 . Среди его собственных значений выберем некоторый энергетический уровень E , характеризующийся кратностью вырождения N . За счет выбора начала отсчета энергии всегда можно положить $E = 0$. Под-

пространство собственных векторов, соответствующих собственному значению E , обозначим C^N . Собственные векторы гамильтониана H_0 , образующие базис в подпространстве C^N , обозначим $|\psi_\alpha(0)\rangle$, $\alpha = \overline{1, N}$. При адиабатическом изменении параметров системы имеет место унитарная эволюция $H(\lambda) = U(\lambda)H_0U(\lambda)^+$, описываемая зависящим от времени уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(\lambda(t)) = H(\lambda(t))U(\lambda(t)). \quad (27)$$

Соответственно собственные функции гамильтониана, образующие базис при $\lambda = 0$, также изменяются при изменении параметров, согласно закону $|\psi_\alpha(\lambda)\rangle = U(\lambda)|\psi_\alpha(0)\rangle$. Далее будем предполагать, что в процессе адиабатической эволюции пересечения рассматриваемого уровня с другими уровнями энергии не происходит. Как было отмечено выше, мы рассматриваем циклическое изменение параметров λ , т.е. предполагаем, что по истечении некоторого времени T , достаточно большого для того, чтобы временную эволюцию системы можно было описывать в рамках адиабатического приближения, параметры λ , так же, как и гамильтониан системы, возвращаются к своим первоначальным значениям $\lambda(0) = \lambda(T)$, $H_0 \equiv H(0) = H(T)$. Однако последнее утверждение несправедливо для введенных выше базисных векторов ($|\psi_\alpha(0)\rangle \neq |\psi_\alpha(T)\rangle$). Последние изменяются под действием некоторого унитарного оператора, реализующего элементарные квантовые операции, конкретный вид которого мы сейчас и получим, следуя работе [110].

Для каждого момента времени в подпространстве C^N выберем произвольный базис $|\varphi_\alpha(\lambda)\rangle \equiv |\varphi_\alpha(\lambda(t))\rangle$, $\alpha = \overline{1, N}$. Предполагается гладкая зависимость новых базисных векторов от параметров системы. Также предположим, что при $\lambda = 0$ векторы нового и старого базисов совпадают $|\psi_\alpha(0)\rangle = |\varphi_\alpha(0)\rangle$. В ходе унитарной эволюции норма собственных векторов гамильтониана системы не изменяется, что приводит к условию

$$\left\langle \psi_\beta(\lambda) \left| \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} \right| \psi_\alpha(\lambda) \right\rangle = 0. \quad (28)$$

Здесь индекс μ выделяет один параметр из набора, задаваемого вектором λ . В произвольный момент адиабатической эволюции системы мы можем разложить изменяющееся собственное состояние системы $|\psi_\alpha(\lambda)\rangle$ по векторам базиса $\{|\varphi_\beta(\lambda)\rangle\}$:

$$|\psi_\alpha(\lambda)\rangle = U_{\alpha\beta}|\varphi_\beta(\lambda)\rangle. \quad (29)$$

Подставляя это выражение в (28), получим следующее уравнение для унитарного оператора U :

$$\langle \varphi_\gamma(\lambda) | \varphi_\delta(\lambda) \rangle U_{\gamma\beta}^+ \frac{\partial U_{\alpha\delta}}{\partial \lambda_\mu} + U_{\gamma\beta}^+ U_{\alpha\delta} \left\langle \varphi_\gamma(\lambda) \left| \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} \right| \varphi_\delta(\lambda) \right\rangle = 0. \quad (30)$$

Отметим, что в силу равенства $|\psi_\alpha(0)\rangle = |\varphi_\alpha(0)\rangle$, $\forall \alpha = \overline{1, N}$, оператор U является эволюционным оператором, описывающим адиабатическое изменение состояния системы с течением времени при указанном выше начальном условии. Вводя обозначения для матрицы адиабатической связности

$$(A_\mu)_{\delta\gamma} = \left\langle \varphi_\gamma \left| \frac{\partial}{\partial \lambda_\mu} \right| \varphi_\delta \right\rangle \quad (31)$$

и матрицы $R_{\delta\gamma} = \langle \varphi_\gamma | \varphi_\delta \rangle$, получим следующее выражение для оператора U :

$$U = \hat{P} \exp \left(- \oint_C A_\mu R^{-1} d\lambda_\mu \right) = \hat{P} \exp \left(- \oint_C A_\mu d\lambda_\mu \right), \quad (32)$$

где \hat{P} обозначает оператор упорядочения по пути; C — замкнутый контур в пространстве параметров системы, по которому происходит адиабатическая эволюция последней. Выражение после второго знака равенства соответствует случаю ортонормированного базиса $\{|\varphi_\alpha(\lambda)\rangle\}$.

Из выражения (32) следует, что в общем случае нетривиальной топологии (наличия кривизны) пространства параметров, в результате адиабатического изменения параметров системы, состояние последней изменяется под действием унитарного оператора, определяемого формой замкнутого контура и свойствами системы. Унитарный оператор можно выбрать таким образом, чтобы реализовать квантовые вычисления в подпространстве C^N . Описанная общая схема квантовых вычислений лежит в основе построения голономного квантового компьютера, практические способы реализации которого в системах различной физической природы кратко обсуждаются ниже. Интерес к голономным квантовым вычислениям, с точки зрения специалистов в области физики элементарных частиц, вызван, в первую очередь, схожестью используемого математического аппарата с аппаратом калибровочных теорий, в частности квантовой хромодинамики. Последняя особенность будет использована в п. 2.2 при анализе устойчивости голономных квантовых вычислений по отношению к ошибкам в задании управляющих параметров.

2.2. Устойчивость вычислений на голономном квантовом компьютере.

В данном разделе исследуется устойчивость голономных квантовых вычислений по отношению к ошибкам в задании управляющих параметров. Выводится общее выражение для фиделити квантовых вычислений в случае произвольной реализации голономного квантового компьютера. Это достигается за счет использования неабелевой теоремы Стокса, доказанной при изучении проблемы конфайнмента кварков и глюонов в КХД [23]. Будет получена простая формула для скорости убывания фиделити с ростом ошибок в задании управляющих параметров.

Отметим, что выражение для фиделити в случае голономных квантовых вычислений имеет тот же математический вид, что и петля Вилсона, определенная в теории сильных взаимодействий элементарных частиц (КХД) [24].

Причем «закон площади» для петли Вилсона, означающий конфайнмент кварков и глюонов, примененный к фиделити, демонстрирует неустойчивость квантовой системы. Это соответствует связи между квантовым хаосом и конфайнментом в смысле работы [65]. Последующее изложение следует работе [71].

В общем случае фиделити голономного квантового компьютера имеет вид

$$f = \text{tr} \left(\rho \Gamma_{\gamma'}^{-1} \Gamma_{\gamma_0} \right) = \text{tr} \left(\rho \hat{P} \exp \left\{ i \int_{\delta\gamma} A_\mu d\lambda_\mu \right\} \right), \quad (33)$$

где γ_0 обозначает адиабатическую петлю в пространстве параметров, реализующую желаемую элементарную квантовую операцию; γ' — это петля, которая реализуется в действительности и отличается от γ_0 из-за неизбежных ошибок в задании управляющих параметров; ρ есть матрица плотности квантового состояния, устойчивость которого изучается. Петля $\delta\gamma$ определяется выражением $\delta\gamma = \gamma'^{-1} \cdot \gamma_0$. Операция (\cdot) означает, что для получения контура $\delta\gamma$ сначала следует пройти по петле γ_0 в положительном направлении, а затем по петле γ' в противоположном (отрицательном) направлении. Определение и свойства этой операции могут быть найдены в работе [113]. Предполагается, что контур $\delta\gamma$ замкнут.

Применяя неабелеву теорему Стокса, можно получить следующее выражение для фиделити (33):

$$f = \text{tr} \rho \hat{P} \exp \left(i \int_{\delta S} \left[\hat{P} e^{i \int_{z_0}^{x_0} A_\mu d\lambda_\mu} \right] F_{\chi\varrho} \left[\hat{P} e^{i \int_{x_0}^z A_\nu d\lambda_\nu} \right] d\sigma_{\chi\varrho}(z) \right). \quad (34)$$

Здесь $F_{\chi\varrho} = \partial_\chi A_\varrho - \partial_\varrho A_\chi - i[A_\chi, A_\varrho]$ — есть тензор кривизны пространства управляющих параметров; $\partial_\chi \equiv \partial/\partial\lambda_\chi$, $[,]$ — обозначает коммутатор, δS — поверхность, натянутую на петлю $\delta\gamma$; $d\sigma_{\chi\varrho}$ есть проекция бесконечно малого элемента δS на координатную плоскость $\chi\varrho$ пространства управляющих параметров. В формуле (34) и в последующих выражениях суммирование по индексам тензора кривизны $F_{\chi\varrho}$ производится в соответствии с условием $\chi > \varrho$. Текущая точка z лежит на петле $\delta\gamma$, а точка x_0 является произвольной. В работе [23] было показано, что результат применения неабелевой теоремы Стокса не зависит от формы поверхности δS и выбора точки x_0 в случае отсутствия в пространстве управляющих параметров системы нетривиальных топологических конфигураций, что и предполагается.

Общее выражение (34) не является достаточно удобным для использования в практических целях. Для его упрощения рассмотрим предел малых ошибок, который заключается в том, что ошибки $\delta\lambda_\mu$ удовлетворяют инва-

риантным относительно глобальных калибровочных преобразований неравенствам

$$|\delta\lambda_\mu| < \|A_\mu\|^{-1}, \quad |\delta\lambda_\chi\delta\lambda_\rho| < \|F_{\chi\rho}\|^{-1} \quad (\chi > \rho), \quad (35)$$

где связность и тензор кривизны вычисляются в некоторой точке λ_0 , определяющей положение малого контура $\delta\gamma$. Норма операторов определяется выражением [8, с. 20]:

$$\|B\| = \sup \{ \sqrt{\langle \psi | B^+ B | \psi \rangle} : |\psi\rangle \in C^N, \langle \psi | \psi \rangle = 1 \}, \quad (36)$$

где B обозначает как матричные компоненты связности A_μ , так и матричные компоненты тензора кривизны $F_{\chi\rho}$ ($\chi > \rho$). Несколько первых членов в разложении в ряд Тейлора для фиделити (34) в окрестности точки $\lambda_0 \in M$ имеют вид

$$\begin{aligned} f = 1 + i \operatorname{tr} \rho F_{\chi\varrho} \delta\lambda_\chi \delta\lambda_\varrho - \operatorname{tr} \rho [A_\mu, F_{\chi\varrho}]_- \delta\lambda_\mu \delta\lambda_\chi \delta\lambda_\varrho + \\ + \left(i \operatorname{tr} \rho A_\mu F_{\chi\varrho} A_\nu - \frac{i}{2} \operatorname{tr} \rho [F_{\chi\varrho}, A_\mu A_\nu]_+ - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \rho F_{\chi\varrho} F_{\mu\nu} \right) \times \\ \times \delta\lambda_\chi \delta\lambda_\varrho \delta\lambda_\mu \delta\lambda_\nu + O(\delta\lambda^5). \end{aligned} \quad (37)$$

где $[\cdot]_+$ обозначает антикоммутатор. В рамках сделанных приближений в выражении (37) члены, имеющие более высокий порядок по величине ошибок, дают менее существенный вклад в величину фиделити, по сравнению со слагаемыми, имеющими меньший порядок по $\delta\lambda$. Видно, что ряд Тейлора для фиделити не обладает линейным по $\delta\lambda$ слагаемым. Отсутствие членов первого порядка по величине ошибок в задании управляющих параметров было отмечено применительно к частной реализации голономного квантового компьютера на захваченных ионах в работе [88]. Выше было показано, что данное свойство не зависит от способа реализации голономных квантовых вычислений. Причина этого заключается в том, что разность двух векторов, получившихся в результате параллельного переноса некоторого вектора по двум различным бесконечно малым путям из одной точки в другую, пропорциональна площади, охваченной путями, и не зависит от их длин.

Как было сказано выше, равенство фиделити единице означает, что квантовые вычисления устойчивы, а именно: результат вычислений не изменяется после возмущения унитарного оператора, реализующего элементарную квантовую операцию. Из выражения (37) следует, что при малых ошибках фиделити слабо отклоняется от единицы. При отсутствии ошибок фиделити равно единице, как это и должно быть. Скорость отклонения фиделити от единицы, полученная из второго слагаемого в выражении (37), определяется тензором кривизны:

$$\left| \frac{\delta f}{\delta S_{\mu\nu}} \right| = |\operatorname{tr} \rho F_{\mu\nu}|, \quad (38)$$

где $\delta S_{\mu\nu} = \delta\lambda_\mu\delta\lambda_\nu$ обозначает «площадь ошибки» в плоскости $\mu\nu$. Меньшие значения тензора кривизны приводят к меньшим отклонениям фиделити от единицы и к большей устойчивости квантовых вычислений. Этот вывод согласуется с результатами работы [88], в которой на примере частной реализации голономного квантового компьютера было показано, что элементарные квантовые операции над одним квантовым битом устойчивы по отношению к ошибкам в задании управляющих параметров при больших значениях параметра сжатия (экспоненциально малых значениях компонент тензора кривизны). С физической точки зрения это можно объяснить следующим образом. Тензор кривизны, наряду с охватываемой площадью, определяет разность двух векторов, полученных в результате параллельного переноса некоторого вектора по двум различным бесконечно малым путям из одной точки в другую. Меньшая кривизна означает меньшую разность между векторами состояния, полученными в результате параллельного переноса вдоль петель γ_0 и γ' , что означает большую устойчивость вычислений.

3. ИНСТАНТОННОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ПРИСУТСТВИИ КЛАССИЧЕСКОГО ХАОСА

В п. 3.1. приводится краткий обзор основных подходов к проблеме влияния классического хаотического движения на свойства квантово-механического туннелирования. На примере одномерной модельной системы с периодическим потенциалом, на которую действует внешнее периодическое по времени возмущение, доказывалось существование хаотических инстантонных решений. Далее указанные решения применяются для оценки средней плотности разреженного инстантонного газа и расчета спектра основной квазиэнергетической зоны модели. С этой целью, в рамках формализма интегралов по траекториям, разработан метод учета вкладов хаотических инстантонных решений в амплитуду динамического туннелирования. Затем сравниваются аналитические результаты, полученные в рамках инстантонного подхода, с результатами численного моделирования, основанного на независимых методах анализа динамического туннелирования.

3.1. Влияние классического хаоса на квантово-механическое туннелирование. В предыдущих разделах указывалось, что в квазиклассическом пределе квантовой механики существует определенная связь между классическим поведением системы и ее квантовыми свойствами. Такая связь, в частности, проявляется в универсальности спектральных флуктуаций квантовых систем, классические аналоги которых принадлежат к одному из классов гамильтоновых систем (системы с регулярной, хаотической или смешанной динамикой). Оказалось, что эта связь является еще более глубокой, а именно: структура классического фазового пространства гамильтоновых систем может влиять

на такие чисто квантовые процессы, как туннелирование [82]. В этой работе, в частности, было численно продемонстрировано, что при наличии в классическом фазовом пространстве системы развитой области хаотического движения туннелирование между классически не связанными областями фазового пространства может протекать на несколько порядков быстрее, чем без посредничества хаотических состояний. Подобное явление получило название *ускоренное хаосом туннелирование* (chaos assisted tunnelling). Позднее под ним стали понимать более широкий класс явлений (хаос может не только ускорять, но и замедлять процесс туннелирования [42]).

Типичная постановка задачи для изучения влияния классического хаоса на свойства квантового туннелирования заключается в рассмотрении туннелирования между КАМ-торами, погруженными в хаотическое море (развитую область хаотического движения).

Влияние структуры классического фазового пространства на туннелирование может наблюдаться экспериментально в самых разных физических системах. Мы рассмотрим два реальных эксперимента: первый связан с ионизацией атома водорода под действием микроволнового излучения [88], а второй касается поведения охлажденных до сверхнизких температур атомов в наведенном оптическом потенциале [40]. В обоих экспериментах наблюдается отличительная черта ускоренного хаосом туннелирования, а именно сильная зависимость скорости (вероятности) туннелирования от внешних параметров (см. ниже), которая проявляется в больших (несколько порядков) (детерминированных) флуктуациях наблюдаемых величин.

Роль области хаоса заключается в том, что системе легче сначала протуннелировать из КАМ-тора в хаотическое море, затем одним из *классически разрешенных* путей пройти до симметричного тора и протуннелировать на него, чем непосредственно туннелировать с одного тора на его симметричный партнер. Наблюдаемые большие флуктуации в рамках такой картины объясняются большим числом интерферирующих между собой путей, по которым система диффундирует от одного тора к другому [40].

Влияние классического хаоса на процесс квантово-механического туннелирования может проявляться не только при туннелировании системы из одной области регулярного движения в другую, но и при туннелировании с КАМ-тора на бесконечность. Экспериментально наблюдаемым процессом такого типа является ионизация атома водорода под действием микроволнового излучения (при определенных параметрах задачи) [88]. Для наблюдения влияния хаоса на процесс ионизации необходимо воздействовать излучением с частотой, равной классической частоте обращения электрона в атоме водорода. В этом случае возникает нелинейный резонанс между этими частотами, сопровождающийся образованием устойчивой неподвижной точки во вращающейся вместе с (рассматриваемым классически) электроном системе координат. В квантовом случае волновой пакет электрона, локализованный в

окрестности этой точки, не расплывается на временах, много больших классического периода обращения электрона вокруг ядра. Соответствующее состояние с определенной энергией хорошо подходит для изучения влияния хаоса на процесс ионизации, который в этом случае протекает следующим образом. Нерасплывающийся волновой пакет не локализован строго на островке устойчивости вокруг неподвижной точки и имеет экспоненциально спадающий «хвост», проникающий в область классического хаотического движения. За счет этого электрон может протуннелировать в одно из множества хаотических состояний и затем классически разрешенным путем уйти на бесконечность, что приводит к ионизации атома. Этому процессу присущи все основные свойства ускоренного хаосом туннелирования: сильные, величиной в несколько порядков, детерминированные флуктуации ширины распада и сдвига энергетического уровня локализованного состояния при малом изменении параметров задачи. Достаточно точное теоретическое описание этих флуктуаций достигается в рамках модели, основанной на теории случайных матриц [88].

Другим экспериментально наблюдаемым примером влияния структуры классического фазового пространства на процесс туннелирования является поведение сильно охлажденных атомов, захваченных оптическим потенциалом [40]. Как указывалось выше, для усиленного хаосом туннелирования характерны сильные флуктуации наблюдаемых величин при малом изменении параметров системы. Поэтому для экспериментального наблюдения влияния детерминированного хаоса на процесс туннелирования необходима высокая точность измерений, а также высокий уровень контроля всех параметров системы. Именно этими свойствами обладает описываемая ниже экспериментальная ситуация.

Оптический потенциал возникает из-за сдвига энергетических уровней атома при взаимодействии с монохроматической световой волной. Причиной сдвига является поляризационная энергия атома в электромагнитном поле.

В работе [40] рассматривается система не взаимодействующих между собой, охлажденных до сверхнизких температур атомов рубидия, помещенных в электромагнитное поле двух стоячих монохроматических волн, генерируемых двумя лазерами. Частоты стоячих волн немного различны. Если их интенсивности равны друг другу, то у системы есть только один управляющий параметр γ , связанный с разностью частот стоячих волн. Структура классического фазового пространства системы сильно зависит от значения параметра γ . В частности, при $\gamma = 0$ классическое поведение системы полностью регулярно, а фазовое пространство представляет собой совокупность инвариантных торов. С ростом параметра γ в фазовом пространстве образуется и растет стохастический слой. Внутри слоя находятся три основных островка устойчивости, причем два из них связаны преобразованием симметрии обращения времени. Квантовые состояния, расположенные на этих

островах устойчивости, образуют дублет и, следовательно, подходят для изучения влияния классического хаоса на скорость туннелирования между ними.

В описанной системе наблюдаются все отличительные особенности ускоренного хаосом туннелирования, в частности, большие изменения скорости туннелирования при малых вариациях управляющего параметра γ . Более подробное обсуждение результатов и их теоретическое обоснование можно найти в [40].

Для теоретического описания влияния хаоса на процесс туннелирования можно использовать два дополняющих друг друга подхода. Первый, который и будет рассмотрен здесь, использует язык уровней энергии и волновых функций квантовой системы. Второй способ описания, на наш взгляд, является более наглядным и базируется на описании квантовой системы и процессов, протекающих в ней, в рамках формализма функционального интегрирования (в мнимом времени). Этот подход на данный момент является менее разработанным, некоторые результаты будут представлены в п. 3.2.

Вначале рассмотрим обычный (без влияния хаоса) процесс туннелирования на примере простейшей двухуровневой системы с изначально вырожденными состояниями ψ_1 и ψ_2 . В базисе этих состояний гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & \Delta \\ \Delta & E \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Здесь Δ описывает взаимодействие между уровнями. В случае невзаимодействующих уровней ($\Delta = 0$) энергия каждого из них равна E (вырождение). После включения взаимодействия ($\Delta \neq 0$), что соответствует возможности системы туннелировать из одного вырожденного состояния в другое, векторы ψ_1 и ψ_2 не являются стационарными состояниями гамильтониана (39). Найдем новые энергетические уровни и новые собственные состояния гамильтониана (39). Для последующего удобства изложения мы отойдем от стандартной процедуры и будем решать не стационарное, а зависящее от времени уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (40)$$

Представим это уравнение в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в базисе векторов ψ_1 и ψ_2 ($\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$):

$$\begin{cases} i\hbar \frac{dc_1}{dt} = Ec_1 + \Delta c_2, \\ i\hbar \frac{dc_2}{dt} = Ec_2 + \Delta c_1. \end{cases} \quad (41)$$

Общее решение имеет вид

$$c_{1,2} = c'_{1,2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\lambda_1 t\right) + c''_{1,2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\lambda_2 t\right), \quad (42)$$

где $\lambda_{1,2}$ — собственные значения гамильтониана (39) (искомые новые энергетические уровни), которые находятся из векового уравнения

$$\begin{vmatrix} E - \lambda & \Delta \\ \Delta & E - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (43)$$

отсюда $\lambda_{1,2} = E \pm \Delta$. Таким образом, за счет туннелирования снимается вырождение и вместо одного вырожденного уровня мы получаем дублет невырожденных уровней. Чем больше Δ (сильнее связь при туннелировании), тем больше расстояние между уровнями в дублете.

Выясним, каким образом ведет себя система, если в начальный момент времени $t = 0$ она находилась в состоянии ψ_1 . Для этого сложим и вычтем уравнения (41), а затем каждое из полученных уравнений проинтегрируем по времени:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = (c_1^0 + c_2^0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E + \Delta)t\right), \\ c_1 - c_2 = (c_1^0 - c_2^0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E - \Delta)t\right). \end{cases} \quad (44)$$

С учетом начального условия ($c_1^0 = 1$, $c_2^0 = 0$) для вероятности найти частицу в состоянии ψ_1 или в состоянии ψ_2 соответственно получим

$$|c_1|^2 = \cos^2 \frac{\Delta}{\hbar} t, \quad (45)$$

$$|c_2|^2 = \sin^2 \frac{\Delta}{\hbar} t. \quad (46)$$

Новые стационарные состояния выражаются через старые:

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2). \quad (47)$$

Таким образом, за счет туннелирования возникают новые стационарные состояния, являющиеся симметричной и антисимметричной суперпозициями старых, уровни энергии сдвигаются в разные стороны, каждый на Δ , симметрично относительно положения при $\Delta = 0$. Система туннелирует между состояниями ψ_1 и ψ_2 с периодом $\pi\hbar/\Delta$.

Рассмотрим ту же двухуровневую систему без начального вырождения. Гамильтониан (39) видоизменяется следующим образом:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & \Delta \\ \Delta & E_c \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Соответствующие энергетические уровни

$$\lambda_{1,2} = \frac{E + E_c}{2} \pm \frac{\sqrt{(E - E_c)^2 + 4\Delta^2}}{2}. \quad (49)$$

Существенно отличается процесс туннелирования между состояниями ψ_1 и ψ_2 . Вместо (45), (46) имеем

$$|c_1|^2 = 1 - 4|p|^2 \sin^2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\hbar} t, \quad (50)$$

$$|c_2|^2 = 4|p|^2 \sin^2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\hbar} t, \quad (51)$$

где $p = \Delta/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Поскольку при малой связи между состояниями ψ_1 и ψ_2 ($|\Delta| \ll |E_c - E|$) можно положить $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(E - E_c)^2 + 4\Delta^2} \approx |E - E_c|$, следовательно, между состояниями ψ_1 и ψ_2 , в отличие от вырожденного случая, будут лишь малые осцилляции вероятности с амплитудой

$$b = 2|p| \approx \frac{2\Delta}{|E - E_c|} \quad (52)$$

и периодом

$$t_0 = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_1 - \lambda_2} \approx \frac{2\pi\hbar}{|E - E_c|}. \quad (53)$$

Стандартное требование для туннельного процесса — наличие двух квазивырожденных уровней (дублета). Этот случай был рассмотрен в предыдущем случае. Отличительной чертой усиленного хаосом туннелирования в системах со смешанной динамикой является сильное влияние области хаоса, проявляющееся в сильной чувствительности наблюдаемых величин к малым изменениям параметров системы. Поэтому в процессе туннелирования между КАМ-торами через область хаоса активное участие, наряду с дублетом регулярных уровней, принимают хаотические уровни. Простейшей моделью, описывающей туннелирование в этом случае, является трехуровневая модель.

Рассмотрим два регулярных состояния Ψ_1 и Ψ_2 , опирающихся на какой-нибудь квантованный КАМ-тор и его симметричный партнер, связанные некоторым дискретным преобразованием симметрии, например, преобразованием четности. За счет непосредственного туннелирования между регулярными островами состояния Ψ_1 и Ψ_2 не являются собственными состояниями

оператора Гамильтона, стационарными состояниями являются их симметричная и антисимметричная линейные комбинации Ψ^+ и Ψ^- . Если вблизи этого дублета нет хаотических уровней при данном значении параметров, то туннелирование описывается двухуровневой моделью. При изменении параметров, ввиду статистической независимости регулярной и хаотической подпоследовательностей уровней, может найтись хаотическое состояние ϕ^+ (для определенности мы указали четность состояния) с энергией, близкой к энергии дублета. В результате процесс туннелирования в базисе (Ψ^+, Ψ^-, ϕ^+) описывается трехуровневым модельным гамильтонианом, впервые использованным для моделирования ускоренного хаосом туннелирования в работе [34]:

$$\hat{H} \begin{pmatrix} \Psi^- \\ \Psi^+ \\ \phi^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & v \\ 0 & v & E_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^- \\ \Psi^+ \\ \phi^+ \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Здесь принято, что энергии состояний дублета в отсутствие хаотического уровня не различаются (непосредственное туннелирование между регулярными островами сильно подавлено). Единственное взаимодействие между уровнями возникает благодаря недиагональному элементу v . Состояния $\Psi_1 = (\Psi^+ + \Psi^-)/\sqrt{2}$ и $\Psi_2 = (\Psi^+ - \Psi^-)/\sqrt{2}$ описывают волновые пакеты, локализованные на одном из рассматриваемых торов. Рассмотрим временную эволюцию состояния Ψ_1 под действием эволюционного оператора

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right). \quad (55)$$

Антисимметричная компонента Ψ^- меняет лишь фазу как $\exp(-iEt/\hbar)$, а эволюция симметричной регулярной компоненты Ψ^+ следует двухуровневой схеме в отсутствие начального вырождения.

Во многих системах выполняется условие $|v| \ll |E_c - E|$. В этом случае будут наблюдаться слабые осцилляции вероятности, соответствующие переходам из Ψ^+ в ϕ_c и обратно, с амплитудой

$$b \simeq 2 \left| \frac{v}{E_c - E} \right| \quad (56)$$

и периодом $t_0 \simeq 2\pi\hbar/|E_c - E|$. По окончании каждого периода действие $\hat{U}(t_0)$ на Ψ^+ сводится к набору фазы

$$\exp\left(-i\frac{(E - \gamma)t_0}{\hbar}\right), \quad \gamma \simeq \frac{v^2}{E_c - E}, \quad (57)$$

что приводит к возникновению разности фаз между Ψ^+ и Ψ^- . По истечении n периодов получим

$$\hat{U}(nt_0)\Psi_1 = e^{-iEnt_0/\hbar} \left(\Psi^- + e^{i\gamma nt_0/\hbar} \Psi^+ \right). \quad (58)$$

Поскольку относительная разность фаз между Ψ^+ и Ψ^- возрастает со временем, начальное состояние резонансно туннелирует туда-обратно между Ψ_1 и Ψ_2 , без того чтобы полностью появиться в хаотической области (состояние ϕ^+). Качественная картина выглядит следующим образом. В течение каждого временного шага t_0 небольшая часть волнового пакета, локализованного на одном из торов, отрывается и появляется в хаотической области. По окончании периода t_0 эта часть туннелирует на симметричный партнер исходного тора. Время полного туннелирования с одного КАМ-тора на другой (из состояния Ψ_1 в состояние Ψ_2) составляет $2t_0/b^2$, что определяется простой комбинацией квадрата амплитуды и периода осцилляций.

В более общем случае нельзя сказать, что основную роль играет только один хаотический уровень, в туннелировании участвует много хаотических состояний. В этом случае детальное описание процесса туннелирования получить достаточно сложно. Однако статистические свойства хаотических уровней могут содержать важную информацию. В соответствии с этим в работе [34] была предложена статистическая модель для описания свойств ускоренного хаосом туннелирования. Основная идея заключается в том, что каждое регулярное состояние независимо, случайно и слабо связано с независимыми ансамблями матриц, моделирующими хаотические состояния той же симметрии. Простейший модельный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} \begin{pmatrix} \Psi^- \\ \varepsilon^- \\ \Psi^+ \\ \varepsilon^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \{v\} & 0 & 0 \\ \{v\} & \text{GOE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \{v'\} \\ 0 & 0 & \{v'\} & \text{GOE}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^- \\ \varepsilon^- \\ \Psi^+ \\ \varepsilon^+ \end{pmatrix}, \quad (59)$$

где ε^- и ε^+ представляют квантовые гильбертовы подпространства хаотических состояний с такой же симметрией, как у Ψ^- и Ψ^+ соответственно; GOE обозначает гауссовский ортогональный ансамбль случайных матриц; $\{v\}$ и $\{v'\}$ — случайные матрицы, состоящие из независимых матричных элементов, подчиняющихся нормальному распределению с нулевым средним и одинаковыми дисперсиями, равными v^2 .

3.2. Хаотические инстантонные решения. Структура классического фазового пространства гамильтоновых систем существенным образом влияет на их квантовые свойства в квазиклассическом приближении квантовой механики [10, 33, 34, 51]. В частности, принцип однородной квазиклассической конденсации утверждает, что в квазиклассическом пределе функция Вигнера собственного состояния системы однородным образом конденсируется на соответствующем данному состоянию классическом образовании в фазовом пространстве (см. [97, 98]). Такими образованиями являются неразрушенные КАМ-торы, кантор-торы или области хаотического движения. Указанный принцип означает, что вероятность обнаружить систему, находящуюся

в каком-либо собственном состоянии за пределами соответствующего данному состоянию классического объекта в фазовом пространстве стремится к нулю в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Это позволяет рассматривать процесс туннелирования между классическими структурами в квазиклассическом приближении. Туннелирование между переходящими друг в друга при преобразовании симметрии системы КАМ-торами через разделяющую их область хаотического движения носит название динамического туннелирования [46]. На примере одномерной гамильтоновой системы с двукратным потенциалом, на которую действует внешнее периодическое по времени возмущение, посредством численных расчетов было показано, что вероятность динамического туннелирования существенно зависит от параметров системы, определяющих структуру ее классического фазового пространства, в частности, от размера области хаотического движения [82]. Вероятность туннелирования, в указанном примере, при небольшом варьировании параметров изменялась в 10 000 раз. Подобное явление было обнаружено и в других системах такого типа, оно получило название сопровождаемого хаосом туннелирования (chaos assisted tunneling) [42, 81, 107, 108]. В указанных работах изучение свойств туннелирования проводилось численно, на основании теории Флоке [102]. Позднее были предприняты попытки объяснения явления сопровождаемого хаосом туннелирования в рамках формализма интегралов по путям в случае систем бильярдного типа [47, 48], а также посредством рассмотрения комплексифицированного фазового пространства для гамильтоновых систем с неквадратичной зависимостью гамильтониана от обобщенного импульса [103, 104]. В этом разделе будет изложен оригинальный подход к проблеме влияния классического хаоса на свойства динамического туннелирования, основанный на применении инстантонной техники, соответствующие результаты опубликованы в работах [68, 69, 77, 80]. Изложение альтернативных подходов можно найти в работах [87, 96].

Применение инстантонных методов для изучения влияния классического детерминированного хаоса на свойства динамического туннелирования будет рассмотрено на примере одномерной квантово-механической системы с периодическим потенциалом, на которую действует внешнее периодическое по времени возмущение. Гамильтониан системы имеет вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\tilde{p}^2 + \omega_0^2 \cos x - \epsilon x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tilde{T}), \quad (60)$$

где \tilde{T} обозначает временной период возмущения. Подобные системы с периодическим в пространстве потенциалом рассматривались в физике твердого тела [12] и инстантонной физике [22]. Возмущение, использованное в гамильтониане (60), широко применяется при изучении классического и квантового хаоса в гамильтоновых системах [11, с.118], [30].

В рамках инстантонного подхода амплитуда процесса квантово-механического туннелирования складывается из вкладов точных и приближенных классических решений уравнений движения, рассматриваемых в мнимом времени. В данном случае соответствующие уравнения Гамильтона задаются евклидовым гамильтонианом $H = H_0 + V$, где

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos x, \quad (61)$$

$$V = \epsilon x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - nT). \quad (62)$$

Здесь H_0 обозначает невозмущенный гамильтониан системы в мнимом времени, а V является евклидовым возмущением. В приведенных выше формулах переменные без тильды обозначают соответствующие величины в мнимом времени.

Приведем краткий обзор инстантонного подхода к проблеме квантово-механического туннелирования в невозмущенной системе (61). Изложение вопроса основывается на книге [22]. Классические решения с минимальной энергией представляют собой бесконечное счетное множество эллиптических особых точек, в которых система обладает нулевым импульсом, а значения координаты есть целые кратные π :

$$x_n^{\text{vac}}(t) = \pi n, \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (63)$$

Амплитуда туннелирования из потенциальной ямы под номером n в потенциальную яму m может быть задана евклидовым интегралом по путям

$$A_{mn} = \int_{x_n^{\text{vac}}}^{x_m^{\text{vac}}} [Dx] e^{-S[x]}, \quad (64)$$

где $S[x]$ обозначает евклидово действие системы. Основной вклад в амплитуду туннелирования (64) дают классические решения евклидовых уравнений Гамильтона, которые вытекают из требования минимальности евклидова действия. В невозмущенном случае, описываемом гамильтонианом (61), точные решения евклидовых уравнений движения, описывающие туннелирование между соседними потенциальными ямами, носят название одноинстантонных решений. Они имеют вид [22]:

$$x_{\text{inst}}(\tau, \tau_0) = \pm \left(\arctg \left[e^{\omega_0(\tau - \tau_0)} \right] - \pi \right), \quad (65)$$

$$S[x_{\text{inst}}(\tau, \tau_0)] \equiv S^{\text{inst}} = 8\omega_0,$$

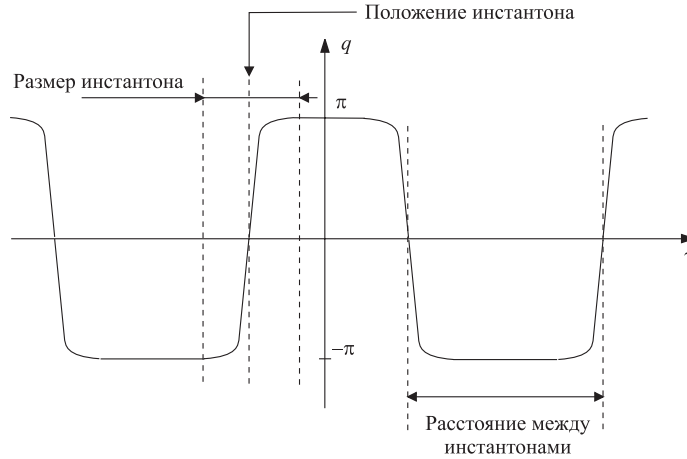


Рис. 1. Пример возможной мультиинстантонной конфигурации, состоящей из чередующихся инстантонных и антиинстантонных переходов

где свободный параметр τ_0 задает положение инстантона, знаки «+» и «-» соответствуют инстантонам и антиинстантонам. Для описания туннелирования между отстоящими потенциальными ямами требуется учитывать вклад мультиинстантонных конфигураций, составленных из наборов инстантонов и антиинстантонов (см. рис. 1):

$$x^{(n)}(\tau) = \sum_{i=1}^n x_{\text{inst}}(\tau, \tau_i), \quad S[x^{(n)}(\tau)] = nS^{\text{inst}}. \quad (66)$$

Указанные функции не являются точными решениями уравнений движения, однако их вклад является определяющим при рассмотрении процесса туннелирования между несоседними потенциальными ямами. Предполагается, что временные интервалы между положениями входящих в выражение (66) одноинстантонных конфигураций сильно превышают размеры инстантонов и антиинстантонов (приближение разреженного инстантонного газа) [22].

Амплитуда наблюдения q одноинстантонных переходов в течение интервала времени Γ в гауссовском приближении задается выражением

$$A_q(\Gamma) = N \frac{1}{q!} e^{-qS^{\text{inst}}} \left(\Gamma \sqrt{S^{\text{inst}}} \right)^q, \quad (67)$$

где Γ обозначает время туннельного перехода; множитель N обеспечивает необходимую нормировку; амплитуда $A_0(\Gamma)$ соответствует случаю отсутствия инстантонных переходов.

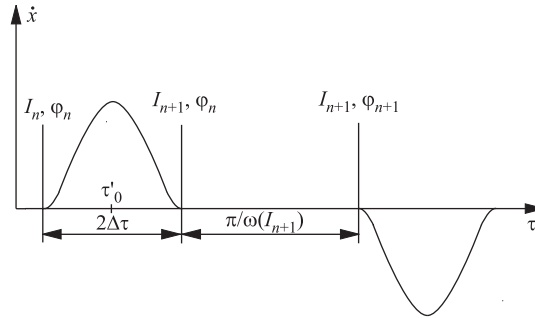


Рис. 2. Схематическое изображение зависимости евклидовой скорости от мнимого времени в окрестности сепаратрисы системы (61). Длительность импульса скорости $\Delta\tau$ много меньше промежутка между импульсами: $\Delta\tau \ll \pi/\omega$. Переменная τ'_0 обозначает новое начало отсчета мнимого времени, используемое в уравнениях (70), (71)

Изучим свойства инстантонных решений в случае возмущенной системы (60) при $\epsilon \neq 0$. Для этого разложим периодическое возмущение (62) в ряд Фурье:

$$V = \frac{\epsilon}{T} x \left(2 \sum_{m=1}^{+\infty} \cos(m\nu\tau) + 1 \right), \quad (68)$$

где $\nu \equiv 2\pi/T$. Из общей теории детерминированного хаоса в классических гамильтоновых системах известно, что любое периодическое по времени возмущение, в том числе возмущение (62), (68), разрушит сепаратрису невозмущенной системы (61), а на ее месте возникнет стохастический слой [11, с. 129]. Оценим ширину стохастического слоя по энергии. Точные уравнения движения для переменной действия имеют вид

$$\dot{I} = \frac{dI}{dH_0} \dot{H}_0 = -\frac{\epsilon}{\omega T} \dot{x} \left(2 \sum_{m=1}^{+\infty} \cos(m\nu\tau) + 1 \right), \quad (69)$$

где I обозначает переменную действия, а $\omega \equiv dH_0/dI$ есть нелинейная частота системы. Рассмотрим динамику системы в окрестности сепаратрисы. При энергиях, близких к максимуму невозмущенного потенциала, зависимость скорости (в евклидовом пространстве) от мнимого времени имеет вид ряда удаленных друг от друга солитоноподобных импульсов (см. рис. 2). Каждый из таких импульсов скорости соответствует быстрому движению между соседними максимумами потенциала. Большие временные интервалы между импульсами равны времени, которое необходимо для преодоления потенциального барьера при энергиях, лишь немного превышающих его величину.

Из уравнения (69) следует, что переменная действия изменяет свое значение только во время импульса скорости. Таким образом, динамика носит ярко выраженный дискретный характер, а ее описание следует строить на основе дискретизированных уравнений движения. С этой целью вместо угловой переменной введем фазу внешней силы φ , определяемую выражением $\dot{\varphi} = \nu$.

Дискретные уравнения движения для переменной действия и фазы внешней силы имеют вид

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{\epsilon}{\omega(I_n)T} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\tau' \dot{x}(\tau') \left(2 \sum_{m=1}^{+\infty} \cos(m\varphi_n + m\nu\tau') + 1 \right), \quad (70)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\pi\nu}{\omega(I_{n+1})}. \quad (71)$$

Здесь (I_n, φ_n) и (I_{n+1}, φ_{n+1}) — значения переменной действия и фазы внешней силы перед двумя последовательными импульсами скорости соответственно. За новое начало отсчета мнимого времени принят центр n -го импульса скорости τ'_0 (см. рис. 2). Для упрощения записи формул введем следующее обозначение:

$$C(\varphi_n) = -\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\tau' \dot{x}(\tau') \left(2 \sum_{m=1}^{+\infty} \cos(m\varphi_n + m\nu\tau') + 1 \right). \quad (72)$$

После подстановки уравнения (70) в (71) и разложения зависящих от малого параметра ϵ функций в ряды Маклорена с точностью до линейных по ϵ членов получим следующее отображение, описывающее поведение инстантонных решений возмущенной системы (60):

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\pi\nu}{\omega(I_n)} \left(1 - \frac{\epsilon\omega'(I_n)}{\omega^2(I_n)T} C(\varphi_n) \right), \quad (73)$$

где $\omega'(I_n)$ есть производная по переменной действия от нелинейной частоты невозмущенной системы, для которой вблизи сепаратрисы справедлива оценка [11, с. 131]:

$$|\omega'(I_n)| \simeq \frac{\omega^3(I_n)}{\pi\omega_0} \frac{1}{|H - H_c|}. \quad (74)$$

Здесь $H_c \equiv \omega_0^2$ — это энергия невозмущенной системы на сепаратрисе; H — энергия, соответствующая значению переменной действия I_n .

Для получения явного вида отображения (73) вычислим величину (72), предполагая $\nu > \omega_0$, т. е. считая, что частота возмущающей силы превышает частоты собственных колебаний невозмущенной системы (61). При этом для

упрощения анализа динамики отображения и приведения его к виду, близкому к хорошо изученному стандартному отображению [31], в ряду, который получится при вычислении $C(\varphi_n)$, ограничимся членом, пропорциональным наименьшей степени $\exp(-\nu\pi/2\omega_0)$.

Зависимость скорости от времени на сепаратрисе невозмущенной системы имеет вид [11, с. 17]:

$$\dot{x} = \pm \frac{2\omega_0}{\cosh \omega_0 \tau'}, \quad (75)$$

где разные знаки соответствуют движению системы в противоположных направлениях. Подставляя это выражение в (72) и вычисля табличные интегралы (см. [6, с. 517]), получим

$$C(\varphi_n) = \mp 4\pi \sum_{m=1}^{+\infty} \operatorname{sech} \frac{m\nu\pi}{2\omega_0} \cos m\varphi_n \mp 4\pi. \quad (76)$$

Воспользуемся следующим разложением гиперболического секанса по степеням экспоненты его аргумента [6, с.37]:

$$\operatorname{sech} x = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)x} \quad (x > 0). \quad (77)$$

Ограничиваясь вкладом слагаемых, пропорциональных наименьшей степени $\exp(-\pi\nu/2\omega_0)$, приходим к следующему выражению для $C(\varphi_n)$:

$$C(\varphi_n) = \mp 8\pi \exp\left(-\frac{\pi\nu}{2\omega_0}\right) \cos \varphi_n \mp 4\pi. \quad (78)$$

Таким образом, отображение (73) примет вид

$$\psi_{n+1} = \psi_n + B_n \pm K_0 \sin \psi_n, \quad (79)$$

где

$$B_n = \frac{\pi\nu}{\omega(I_n)} \pm \frac{2\epsilon\nu^2}{\omega_0} \frac{1}{|H - H_c|}, \quad (80)$$

$$K_0 = \frac{4\epsilon\nu^2}{\omega_0 |H - H_c|} \exp\left(-\frac{\pi\nu}{2\omega_0}\right). \quad (81)$$

Для того чтобы подчеркнуть связь со стандартным отображением, в формуле (79) произведен сдвиг фазовой переменной $\psi_n = \varphi_n - \pi/2$. Без учета слагаемых B_n отображение (79) примет вид стандартного отображения [11, 31]. Покажем, что добавление произвольных слагаемых B_n не влияет на его

основные свойства, такие как параметр локальной неустойчивости и поведение коррелятора на больших временах.

Вычислим параметр локальной неустойчивости K для отображения (79). Он определяется выражением [11, с. 125]:

$$\left| \frac{\delta\psi_{n+1}}{\delta\psi_n} - 1 \right| = K |\cos \psi_n|. \quad (82)$$

При $K > 1$ движение локально неустойчиво, если же $K < 1$, то поведение системы устойчиво. Видно, что в случае отображения (79), как и в случае стандартного отображения, параметр локальной неустойчивости K совпадает с коэффициентом K_0 и задается выражением (81). Из условия $K = 1$ следует, что полуширина стохастического слоя по энергии равна

$$\frac{1}{2} \Delta H = |H_c - H_b| = \frac{4\epsilon\nu^2}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\pi\nu}{2\omega_0}\right). \quad (83)$$

Здесь H_b обозначает оценочную величину энергии, соответствующей границе стохастического слоя.

Вычислим коррелятор отображения (79), определяемый выражением [11, с. 125]:

$$R(r, \tau_n | s, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_0 \exp i(r\psi_n - s\psi_0), \quad (84)$$

где τ_n обозначает момент времени, соответствующий n -й итерации отображения. Подставляя (79) в (84) и используя разложение экспоненты синусоидальной функции в ряд по функциям Бесселя, получим

$$R(r, \tau_n | s, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} J_m(rK_0) e^{irB_n} R(r+m, \tau_{n-1} | s, \tau_0). \quad (85)$$

Продолжим итерационный процесс, используя следующую асимптотику функций Бесселя:

$$J_m(rK_0) \sim \frac{1}{(rK_0)^{1/2}}, \quad K_0 \gg 1. \quad (86)$$

Таким образом, для инстантонных решений, расположенных достаточно близко к сепаратрисе невозмущенной системы (61), получим

$$R(r, \tau_n | s, \tau_0) \sim \exp\left(-\frac{n}{2} \ln(rK_0)\right) \delta_{rs}, \quad (87)$$

где использовано свойство $R(r, \tau_0 | s, \tau_0) = \delta_{rs}$. Полученный коррелятор совпадает с коррелятором стандартного отображения. Из выражения (87) следует, что коррелятор инстантонных решений внутри стохастического слоя ($K_0 > 1$) экспоненциально спадает, таким образом, указанные решения обладают свойством перемешивания и являются хаотическими.

3.3. Сжатие разреженного инстантонного газа. На примере системы (61) приведем сводку формул, описывающих свойства невозмущенного инстантонного газа. Из выражения (67) следует, что среднее число инстантонных переходов за время Γ

$$\langle q \rangle = e^{-S^{\text{inst}}} \Gamma \sqrt{S^{\text{inst}}}. \quad (88)$$

При пренебрежении размерами инстантонов по сравнению с расстояниями между ними (приближение разреженного инстантонного газа) среднее расстояние между инстантонами η_0 и средняя плотность невозмущенного инстантонного газа задаются выражениями

$$\eta_0 = \frac{\Gamma}{\langle q \rangle} = \frac{e^{S^{\text{inst}}}}{\sqrt{S^{\text{inst}}}}, \quad (89)$$

$$\rho_0 = \eta_0^{-1} = e^{-S^{\text{inst}}} \sqrt{S^{\text{inst}}} = 2\sqrt{2\omega_0} e^{-8\omega_0}. \quad (90)$$

Следует отметить, что результаты (89), (90) получены при учете вкладов как точных (одноинстантонных) решений евклидовых уравнений движения, так и мультиинстантонных конфигураций.

Рассмотрим влияние малого возмущения (62) на свойства разреженного инстантонного газа. Оценим среднее расстояние между инстантонами и среднюю плотность возмущенного инстантонного газа.

Среднее расстояние между инстантонами в этом случае может быть оценено следующим образом:

$$\eta \approx \frac{\pi}{\omega_{\text{av}}}, \quad \omega_{\text{av}} \equiv \omega([H_b + H_c]/2), \quad (91)$$

где использованы обозначения п. 3.2. Частота нелинейных колебаний невозмущенной системы (61) вблизи ее сепаратрисы задается следующим приближенным выражением [11, с. 18–19]:

$$\omega(H) \equiv \frac{dH_0}{dI} \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{H_s + H}}{\ln \frac{16(H_s + H)}{H - H_s}}, \quad |H - H_s| \ll H_s. \quad (92)$$

Таким образом, характерный интервал между инстантонными переходами равен

$$\eta \approx \frac{\pi\nu}{2\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{8\omega_0^3}{\epsilon\nu^2}. \quad (93)$$

Соответственно средняя плотность возмущенного инстантонного газа

$$\rho = \frac{1}{\eta} = \left(\frac{\pi\nu}{2\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{8\omega_0^3}{\epsilon\nu^2} \right)^{-1}. \quad (94)$$

Отметим, что результат (94) получен только при учете точных решений евклидовых уравнений движения. Вклад приближенных инстантонных решений приведет лишь к увеличению плотности возмущенного инстантонного газа. Сравнение плотностей инстантонного газа при наличии и отсутствии возмущения дает следующий результат:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0 \sqrt{\omega_0}}{\pi\nu + 2\omega_0 \ln \frac{8\omega_0^3}{\epsilon\nu^2}} \exp(8\omega_0). \quad (95)$$

Экспоненциальный множитель приводит к тому, что отношение (95) велико при больших ω_0 (это равносильно случаю высоких потенциальных барьеров), а также при малых, но ненулевых значениях ϵ . Таким образом, при указанных выше условиях возмущение (62) приводит к резкому увеличению плотности инстантонного газа.

При вычислении плотности ρ использовались только точные классические решения евклидовых уравнений движения, в то время как для получения ненулевого значения плотности ρ_0 требовалось принять во внимание вклады приближенных мультиинстантонных конфигураций. Таким образом, из-за различий в использованных приближениях в выражении (95) не может быть непосредственно осуществлен предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$. Однако соответствие между результатами, полученными в возмущенном и невозмущенном случаях, можно продемонстрировать исходя из формулы (94): при $\epsilon = 0$ как плотность возмущенного инстантонного газа ρ , так и плотность в невозмущенном случае ρ_0 равны нулю при учете вкладов только точных решений евклидовых уравнений движения в обоих случаях.

Плотность инстантонного газа связана с наблюдаемыми величинами, в частности, вероятность квантово-механического туннелирования пропорциональна ρ^2 , а ширина основной зоны в спектре системы линейно зависит от ρ .

Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом (60). В силу периодической зависимости возмущения (62) от времени энергия не является точным интегралом движения, ее роль выполняет величина, называемая квазиэнергией [102]. В рамках инстантонного подхода оценим вклад хаотических инстантонных решений (см. п. 3.2) в амплитуду квантово-механического туннелирования, затем, используя полученные результаты, оценим ширину основной квазиэнергетической зоны в спектре системы.

Для определенности рассмотрим туннелирование между соседними потенциальными ямами системы (60), с координатами центров $x = -\pi$ и $x = \pi$. В евклидовом времени этот процесс описывается хаотическими инстантонными решениями $x_{\text{chaos}}(\tau)$, соответствующее евклидово действие задается

выражением

$$S^{\text{chaos}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{x}_{\text{chaos}}^2 + \omega_0^2 \cos x_{\text{chaos}} - \epsilon x_{\text{chaos}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - nT) \right). \quad (96)$$

Стохастический слой, внутри которого располагаются хаотические инстантонные решения, имеет ширину порядка ϵ (см. (83)). Следовательно, произвольное хаотическое инстантонное решение можно представить в виде $x_{\text{chaos}} = x_{\text{inst}} + \epsilon \Delta x_{\text{chaos}}$, где x_{inst} есть невозмущенное инстантонное решение (65), а Δx_{chaos} представляет собой некоторую стохастическую добавку. Таким образом, евклидово действие произвольного хаотического инстантонного решения имеет вид

$$S^{\text{chaos}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{x}_{\text{inst}}^2 - \epsilon \ddot{x}_{\text{inst}} \Delta x_{\text{chaos}} + \right. \\ \left. + \omega_0^2 \cos(x_{\text{inst}} + \epsilon \Delta x_{\text{chaos}}) - \epsilon x_{\text{inst}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - nT) + O(\epsilon^2) \right). \quad (97)$$

В силу нечетности функции x_{inst} интеграл от суммы дельта-функций обращается в нуль. Члены, пропорциональные Δx_{chaos} , сокращаются согласно уравнениям движения невозмущенной системы. Следовательно, приходим к оценке

$$S^{\text{chaos}} = S^{\text{inst}} + O(\epsilon^2). \quad (98)$$

Предположим, что стохастический слой в окрестности сепаратрисы системы является однородным, другими словами, фазовый объем, занимаемый областями устойчивого движения вокруг эллиптических точек нелинейных резонансов произвольных порядков, является пренебрежимо малым по сравнению с фазовым объемом КАМ-торов в выбранной потенциальной яме. Для оценки вклада хаотических инстантонных решений в амплитуду туннелирования примем, что евклидово действие хаотической одноинстантонной конфигурации приближенно равно евклидову действию невозмущенного инстантона при неминимальной энергии. Указанные условия приводят к следующим ограничениям на значения параметров системы [70]:

$$\bar{\epsilon} \ll \alpha \ll 1, \quad \nu > \omega_0, \quad \alpha = \frac{I}{\omega(I)} \left| \frac{d\omega}{dI} \right|. \quad (99)$$

Здесь $\bar{\epsilon} \equiv \epsilon/\omega_0^2$ обозначает безразмерную константу связи; α является параметром, характеризующим степень нелинейности системы [11, с. 15]; I —

переменная действия, а $\omega(I)$ — нелинейная частота системы. Малость нелинейного резонанса первого порядка накладывает дополнительное ограничение, а именно: ширина первого резонанса по частоте может быть оценена следующим образом:

$$\delta\omega \sim (\epsilon\omega'_1)^{1/2}, \quad \omega'_1 \equiv \left. \frac{d\omega(I)}{dI} \right|_{I=I_1}. \quad (100)$$

Значение переменной действия I_1 определяется условием резонанса первого порядка $\omega(I_1) = \nu$. Ширина первого резонанса по действию может быть оценена как $\delta I = (\epsilon/\omega'_1)^{1/2}$. Условие малости первого резонанса имеет вид $\delta I \ll \omega_0$. Таким образом, не зависящее от конкретных свойств системы ограничение представимо в виде

$$\bar{\epsilon}^{1/2} \ll 1. \quad (101)$$

Условия (99), (101) определяют область параметров, в которой справедлив приведенный ниже метод учета вкладов хаотических инстантонных решений в амплитуду квантово-механического туннелирования.

В принятом приближении единственным проявлением действия внешнего возмущения является возникновение дополнительных решений евклидовых уравнений движения при (евклидовых) энергиях, близких к энергии невозмущенного одноинстантонного решения. Таким образом, амплитуда туннелирования в случае возмущенной системы, с точностью до нормировочного множителя, может быть оценена путем интегрирования по энергии (в пределах стохастического слоя) амплитуды туннелирования для невозмущенной системы:

$$A = \tilde{N} \int_0^{\Delta H} d\xi \int_{x(\tau) \approx -\pi}^{x(\tau) \approx \pi} Dx \exp[-S[x^{\text{inst}}(\tau, \xi)]], \quad (102)$$

где $S[x^{\text{inst}}(\tau, \xi)]$ обозначает евклидово действие невозмущенного инстантонного решения при евклидовой энергии $\omega_0^2 - \xi$; $\Delta H = 2|H_s - H_b|$ — ширина стохастического слоя; \tilde{N} — нормировочная постоянная. Инстантонное действие в этом случае вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} S[x^{\text{inst}}(\tau, \xi)] &= \int_{-a(\xi)}^{a(\xi)} \sqrt{2(\omega_0^2 \cos x - (-\omega_0^2 + \xi))} dx + (\omega_0^2 - \xi)\Gamma = \\ &= 4\sqrt{4\omega_0^2 - 2\xi} E \left(a(\xi), \sqrt{\frac{1}{1 - \xi/(2\omega_0^2)}} \right) + (\omega_0^2 - \xi)\Gamma, \end{aligned} \quad (103)$$

где $\pm a(\xi) = \pm 2 \arcsin \sqrt{1 - \frac{\xi}{2\omega_0^2}}$ — точки поворота системы; Γ — длительность процесса туннелирования; функция E обозначает эллиптический интеграл второго рода в нормальной форме Лежандра [20, с. 990]. Первое слагаемое в формуле (103) представляет собой укороченное евклидово действие (евклидово действие по Лагранжу) [5, с. 271]. Второе слагаемое в формуле (103) можно опустить, ввиду того, что зависящие от Γ множители в выражении (102) выносятся за знак функционального интегрирования и включаются в нормировочный множитель (см. [18, с. 226]).

При вычислении выражения (102), как было указано выше, не учитывается возможная внутренняя структура стохастического слоя. Данное приближение применимо, если фазовый объем первого резонанса мал по сравнению с фазовым объемом основной области регулярного движения [70]. Сделаем физический смысл выражения (102) более прозрачным, для этого разложим евклидово действие (103) в ряд Маклорена с точностью до линейного по ξ члена, что соответствует приближению узкого стохастического слоя. В результате придем к выражению

$$S[x^{\text{inst}}(\tau, \xi)] \approx 8\omega_0 - \frac{\pi\xi}{\omega_0}. \quad (104)$$

Вычисляя интегралы в формуле (102) в гауссовском приближении, получим следующее выражение для амплитуды туннелирования:

$$\begin{aligned} A &= \tilde{N} \int_0^{\Delta H} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dc_0 \sqrt{S[x^{\text{inst}}(\tau, \xi)]} \exp(-S[x^{\text{inst}}(\tau, \xi)]) \approx \\ &\approx \tilde{N} e^{-S^{\text{inst}}} \sqrt{S^{\text{inst}}} \Gamma F = \tilde{N} \sqrt{8\omega_0} \Gamma e^{-8\omega_0} \exp\left(\frac{\pi\Delta H}{\omega_0}\right), \quad (105) \end{aligned}$$

где интегрирование по c_0 дает вклад нулевых мод, а Γ обозначает временной интервал, который занимает туннельный переход (в окончательных выражениях следует положить $\Gamma \rightarrow +\infty$).

Выражение (105) может быть интерпретировано следующим образом. Множитель $F = \exp\left(\frac{\pi\Delta H}{\omega_0}\right) > 1$ есть единственное различие между формулами для возмущенной и невозмущенной амплитуд туннелирования. Качественно можно считать, что F есть эффективное число хаотических инстантонных решений внутри стохастического слоя, дающих доминирующий вклад в амплитуду туннелирования. В рамках такой интерпретации отчетливо прослеживается соответствие между возмущенным и невозмущенным случаями: при $\epsilon = 0$ (отсутствие возмущения) ширина стохастического слоя $\Delta H = 0$,

а $F = 1$, что соответствует единственному невозмущенному инстантонному решению.

Из выражения (105) непосредственно следует, что ширина основной квазиэнергетической зоны в спектре системы равна

$$\Delta E \approx \tilde{N} e^{-S^{\text{inst}}} \sqrt{S^{\text{inst}}} F, \quad F = \exp\left(\frac{\pi \Delta H}{\omega_0}\right) > 1 \quad (106)$$

и отличается от ширины зоны в невозмущенном случае множителем F . Таким образом, наблюдаемым свидетельством наличия хаотических инстантонных решений является экспоненциальное уширение основной квазиэнергетической зоны с ростом ширины стохастического слоя ΔH , пропорциональной величине возмущения ϵ (см. формулу (83)).

Подчеркнем, что экспоненциальное уширение основной квазиэнергетической зоны будет наблюдаться и при других, отличных от (62) видах периодического по времени возмущения. Причиной является универсальность механизма стохастического разрушения сепаратрисы под действием периодического возмущения. В частности, как показано в книге [11, с. 132], при замене суммы дельта-функций в формуле (62) на $\cos \nu \tau$ с той же частотой ширина стохастического слоя и коэффициент локальной неустойчивости сохраняют с точностью до численного множителя прежний вид, задаваемый выражениями (83) и (81). Следовательно, все дальнейшие рассуждения, приводящие к выводу об экспоненциальном увеличении ширины основной квазиэнергетической зоны с ростом величины возмущения, остаются в силе.

3.4. Численное моделирование свойств динамического туннелирования.

В этом пункте будет проверено соответствие выводов, сделанных выше, и результатов численного моделирования спектра и динамики волновых пакетов периодически возмущенной системы (61). Для того чтобы подчеркнуть универсальность полученных результатов по отношению к выбору конкретного вида периодического по времени возмущения, сначала численно определим зависимость ширины основной квазиэнергетической зоны от его величины в случае косинусоидальной зависимости от времени. Затем, на примере системы (61), (62), численно промоделируем изменение динамики гауссовского волнового пакета при туннельных переходах между ее потенциальными ямами.

Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом

$$H' = \frac{p^2}{2m_0} + \omega_0^2 \cos \Lambda x - \epsilon x \cos \nu t. \quad (107)$$

Эта система является непосредственным обобщением системы (61) в случае косинусоидального возмущения. В формуле (107) m_0 обозначает массу частицы, движущейся в потенциале с периодом $2\pi/\Lambda$, на которую действует

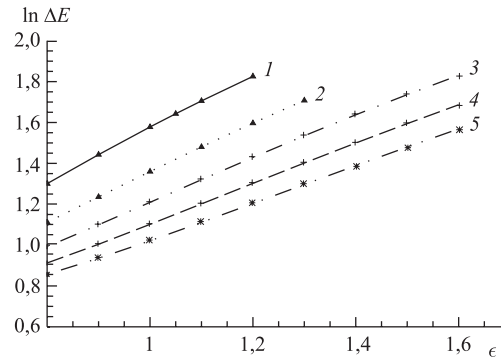
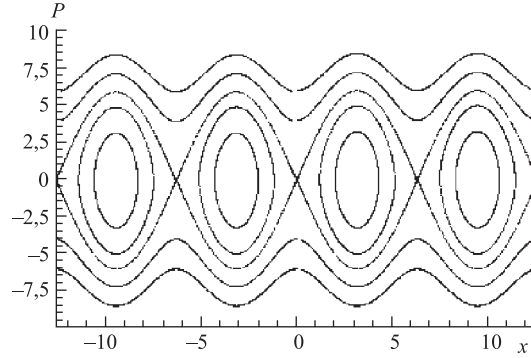


Рис. 3. Графики зависимостей натурального логарифма ширины нижней квазиэнергетической зоны (ось ординат) от величины возмущения ϵ (ось абсцисс) при различных значениях частоты возмущающей силы ν : 1 — 10; 2 — 15; 3 — 20; 4 — 25; 5 — 30

пространственно-однородная сила с частотой ν . В исходной задаче (см. п. 3.2) координата x изменялась от $-\infty$ до $+\infty$. Однако для реализации численной процедуры нам придется ограничиться рассмотрением конечного числа пространственных периодов потенциала системы и наложить периодические граничные условия, широко используемые в физике твердого тела [12]. Фактически будет рассмотрена задача о туннелировании частицы на окружности [22], вследствие чего система приобретет ряд новых свойств. В частности, спектр системы по-прежнему будет носить зонный характер, однако число физически различных квазиэнергетических уровней в каждой зоне будет равно числу пространственных периодов. Для расчета спектра основной квазиэнергетической зоны используем аппарат, развитый в работе [102]. Аналитически получим явный вид матрицы гамильтониана Флоке (см. [102]) в базисе собственных векторов оператора импульса системы. Ее спектр состоит из объединения множеств $\xi_n + m\hbar\nu$, где ξ_n — это собственные значения квазиэнергии системы, соответствующие различным физическим состояниям, а m — произвольное целое число. Спектр гамильтониана Флоке будет определен численно. После чего получим зависимость ширины основной квазиэнергетической зоны от величины возмущения ϵ при различных значениях частоты возмущающей силы ν .

На рис. 3 хорошо заметен линейный характер зависимости логарифма ширины основной квазиэнергетической зоны от величины возмущения, т. е. экспоненциальное уширение нижней зоны с ростом ϵ при всех рассмотренных значениях частоты ν . Это подтверждает результаты, полученные аналитически на основании модели хаотических инстантонных решений (см. п. 3.3, формула (106)).


 Рис. 4. Фазовый портрет невозмущенной системы (61) при $\omega_0 = 3$

На примере системы с дельтаобразным возмущением (60) численно продемонстрируем увеличение на порядок скорости динамического туннелирования по сравнению с обыкновенным квантово-механическим туннелированием в невозмущенном случае. Фазовый портрет невозмущенной системы показан на рис. 4.

Векторы нормированного базиса состояний Флоке (см. [102]), построенного на основе базиса собственных векторов оператора импульса, имеют вид

$$\psi_{n,p} = \frac{1}{\sqrt{N\lambda T}} e^{i\Lambda n x/N} e^{i\nu p t}, \quad n, p \in Z, \quad n \in [-N, N], \quad (108)$$

где N — число пространственных периодов; $\lambda = 2\pi/\Lambda$, $T = 2\pi/\nu$. Матричные элементы гамильтониана Флоке совпадают с матричными элементами эрмитова оператора $\mathcal{H} = H' - i\hbar\partial/\partial t$ [81]. В результате несложных, но достаточно громоздких расчетов находим матричные элементы гамильтониана Флоке:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(mq)(np)} = & \frac{\hbar^2 \Lambda^2 n^2}{2m_0 N^2} \delta_{mn} \delta_{pq} + \frac{1}{2} \omega_0^2 \delta_{pq} \delta_{m-n, N} + \frac{1}{2} \omega_0^2 \delta_{pq} \delta_{m-n, -N} + \\ & + \frac{i(-1)^{m-n} \epsilon N}{2\Lambda(m-n)} (\delta_{p-q, 1} + \delta_{p-q, -1}) (1 - \delta_{mn}) + \hbar\nu p \delta_{pq} \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (109)$$

В ходе процедуры вычисления спектра основной квазиэнергетической зоны системы (107) из бесконечной матрицы гамильтониана Флоке вырезалась квадратная подматрица размером 500×500 элементов и находились ее собственные значения. Размер подматрицы был выбран таким образом, чтобы его дальнейшее увеличение не приводило к изменению собственных значений в

седьмой значащей цифре. При проведении численных расчетов, связанных с нахождением квазиэнергетического спектра системы (107), были приняты следующие значения параметров: $\hbar = 1$, $m_0 = 1$, $\Lambda = 1$, $\omega_0 = 5$. Зависимости ширины основной квазиэнергетической зоны от величины возмущения ϵ при различных значениях частоты возмущающей силы ν приведены в логарифмическом масштабе на рис. 3.

Во всех последующих расчетах принято значение $\omega_0 = 3$. По тем же причинам, что и при изучении квазиэнергетического спектра системы (107), ограничимся рассмотрением четырех пространственных периодов потенциала (см. рис. 4), на границах рассматриваемой области наложим периодические граничные условия.

Рассмотрим квантовую динамику гауссовского волнового пакета с центром в эллиптической особой точке $(\pi, 0)$. Волновая функция пакета в координатном представлении имеет вид

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-\pi)^2}{4\sigma^2}\right), \quad (110)$$

где параметр σ определяет его характерную ширину. В последующих расчетах принято $\sigma^2 = 0,3$. Данный выбор значения параметра приводит к практически полной локализации волнового пакета на инвариантных КАМ-торах в окрестности эллиптической особой точки, достаточно далеко от сепаратрисы, что будет особенно важно при изучении влияния внешнего возмущения на свойства туннелирования.

В качестве базиса при численных расчетах выбраны собственные функции оператора импульса. С учетом периодических граничных условий и нормировки они имеют вид

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(i\frac{k}{N}x\right), \quad k \in Z. \quad (111)$$

Здесь N обозначает число рассматриваемых пространственных периодов потенциала; k — любое целое число. Как отмечалось выше, в рассматриваемом случае $N = 4$. Для наглядного представления о расположении волнового пакета в фазовом пространстве используем представление Хузи, определяемое выражением (см. [81]):

$$\rho(x, p) = \frac{1}{2\pi} |\langle \psi | \Phi_{px} \rangle|^2, \quad (112)$$

где

$$\Phi_{px}(x') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x'-x)^2}{4\sigma^2} + ipx'\right) \quad (113)$$

обозначает когерентное состояние с тем же значением параметра σ , что и в (110). Трехмерный график распределения Хузими начального гауссовского волнового пакета приведен на рис. 5.

Из сравнения рис. 4 и 5 можно получить представление о расположении начального волнового пакета в классическом фазовом пространстве. Однако следует отметить, что переменные x и p , представленные на последнем из них, совпадают с классической координатой и сопряженным ей импульсом только в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Видно, что отсутствуют классически разрешенные пути для перемещения волнового пакета из одной потенциальной ямы в другую. Подобный переход может иметь место только за счет квантово-механического туннелирования.

Программа, позволяющая численно моделировать процесс туннелирования в невозмущенном случае, основана на вычислении матричных элементов эволюционного оператора системы в базисе собственных векторов оператора импульса (111). При этом используется следующее аналитически полученное выражение для матричных элементов гамильтониана (61) в этом базисе:

$$H_{ks}^{(0)} = \frac{s^2}{2N^2} \delta_{sk} + \frac{\omega_0^2}{2} (\delta_{s,k-N} + \delta_{s,k+N}), \quad (114)$$

где целочисленные индексы s и k при численных расчетах принимают значения от 1 до 61.

Результаты моделирования квантовой динамики волнового пакета (110) с течением времени при отсутствии возмущения показаны на рис. 6. Состояние, первоначально локализованное в одной из потенциальных ям, в результате туннелирования занимает соседние минимумы потенциала. Соответствующие переходы в рамках классической механики невозможны. В рассмотренном случае характерное время туннелирования составляет 10000000 единиц времени. Подчеркнем отличие рассматриваемого примера от задачи, когда координата системы может принимать значения на всей действительной оси. В первом случае в процессе туннелирования волновой пакет имеет возможность возврата части пакета в исходную потенциальную яму в результате последовательных туннельных переходов в одном направлении. В отличие от этого во втором случае в исходный минимум могут возвратиться только отраженные на неоднородностях потенциала волны де Бройля, суперпозиция которых образует волновой пакет частицы.

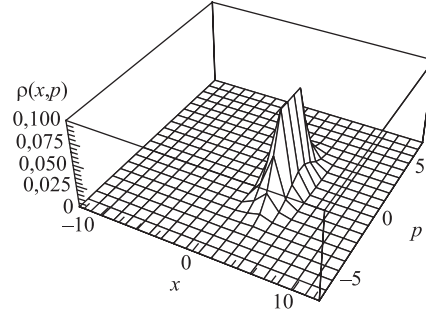


Рис. 5. Трехмерный график распределения Хузими начального волнового пакета (110)

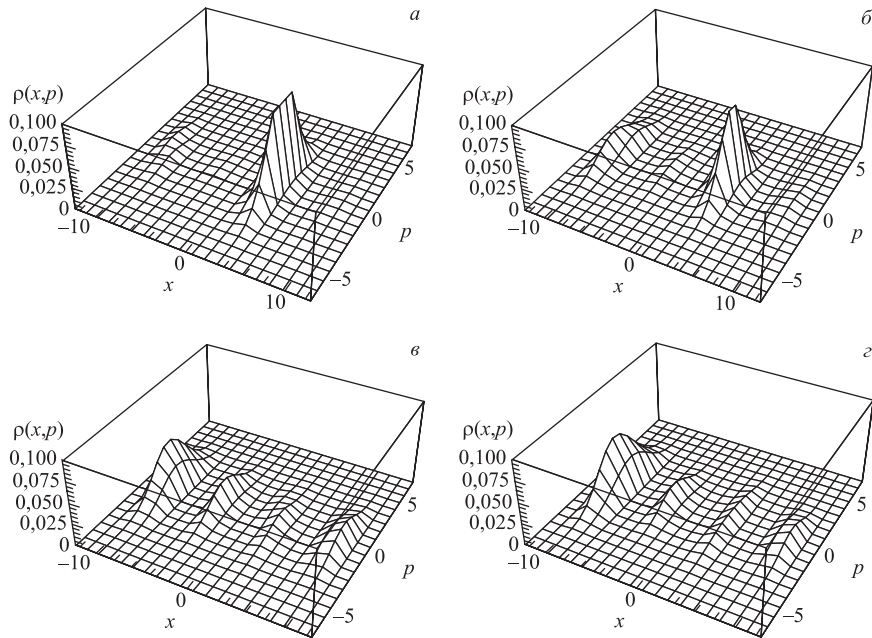


Рис. 6. Изменение распределения Хузи волнового пакета, изображенного на рис. 5, с течением времени в отсутствие внешнего возмущения. Представлены трехмерные графики распределения Хузи для моментов времени $T = 10000000$ (а), 20000000 (б), 50000000 (в), 100000000 (г); $\omega_0 = 3$

В соответствии с развитой в пп. 3.2, 3.3 теорией воздействие дельтаобразного возмущения (62) на систему (61) (рассматриваемую в действительном времени) должно приводить (по крайней мере, при некоторых значениях параметров) к увеличению вероятности и, следовательно, скорости динамического туннелирования. Покажем, что такое ускорение действительно имеет место.

Из формулы (105) следует, что фактор $F = \exp\left(\frac{\pi \Delta H}{\omega_0}\right)$ характеризует, по порядку величины, на сколько скорость невозмущенного туннелирования меньше скорости туннелирования при наличии возмущения. Моделирование проводилось при следующих значениях параметров: $\epsilon = 2$, $\bar{\epsilon} = 2/9 \simeq 0,22$, $\nu = 2\pi$, остальные параметры имели те же значения, что и при моделировании динамики невозмущенной системы (см. рис. 6). В этом случае параметр $F \simeq 13,7$, т.е. при выбранных параметрах возмущения туннелирование должно протекать в 13,7 раз быстрее, чем в невозмущенном случае. Ре-

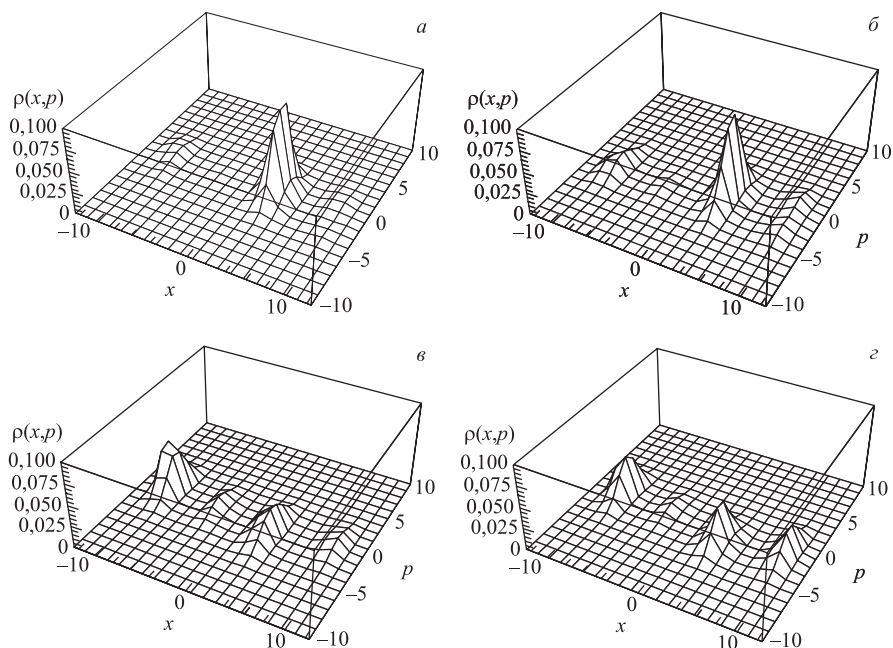


Рис. 7. Изменение распределения Хузими волнового пакета, изображенного на рис. 5, с течением времени при наличии внешнего возмущения (62) ($\epsilon = 2$, $\nu = 2\pi$, остальные значения параметров те же, что и в невозмущенном случае). Представлены трехмерные графики распределения Хузими для моментов времени $T = 10000000/F$ (а), $20000000/F$ (б), $50000000/F$ (в), $100000000/F$ (г), где $F = 13,7$

зультаты численных расчетов представлены на рис. 7, на котором приведены трехмерные графики распределения Хузими волнового пакета по истечении времени, в $F = 13,7$ раз меньшего, чем для соответствующих графиков на рис. 6.

Таким образом, из сравнения рис. 6 и 7 видно, что процесс туннелирования начального волнового пакета, изображенного на рис. 5, действительно ускоряется примерно на порядок в соответствии с аналитическими расчетами, приведенными в пп. 3.2, 3.3.

4. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС В СИСТЕМАХ ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА И ХИГТСА

В п. 4.1 приводится обзор подходов к изучению явления детерминированного хаоса в классических калибровочных теориях физики элементар-

ных частиц, в частности, основанных на использовании пространственно-однородных модельных систем классических неабелевых полей Янга–Миллса, в том числе взаимодействующих с классическим скалярным полем. Далее на основании критерия Тоды анализируется хаотическая динамика модельных полевых систем. Производится сравнение с численными результатами, полученными методом сечений Пуанкаре, а также с расчетами, основанными на теории КАМ. Затем рассматривается вопрос о влиянии квантовых поправок на хаотическое поведение пространственно-однородных полей Янга–Миллса и Хиггса.

4.1. Пространственно-однородные решения. Изучение хаотического поведения классических полей сталкивается с трудностями, связанными с непрерывностью таких систем в пространстве-времени и, следовательно, с наличием у них бесконечного числа степеней свободы. В то же время существующие численные и аналитические методы исследования детерминированного хаоса рассчитаны на анализ динамики в конечномерном фазовом пространстве [11]. Таким образом, изучение хаотического поведения классических полей возможно только в тех случаях, когда по каким-либо причинам число мод, определяющих динамику полевой системы, является конечным [2, 32, 54, 85]. При изучении хаотической динамики неабелевых калибровочных полей существует несколько способов, представляющих интерес, уменьшения числа степеней свободы до конечного значения. Исторически первой была сформулирована неабелева калибровочная теория на пространственной решетке [111]. Позднее этот подход активно использовался для изучения хаотической динамики как в классическом [38, 85, 86], так и в квантовом случае [39]. В данной работе активно используется другой метод построения модельных полевых систем, основанный на использовании пространственно-однородных решений [2, 52]. В рамках этого подхода также возможно изучение хаотической динамики классических калибровочных полей на малых расстояниях [59]. Было показано, как аналитически [63, 99, 101], так и численно [3, 72], что пространственно-однородные неабелевы поля Янга–Миллса образуют систему с полностью хаотической динамикой, в то время как взаимодействие с классическим вакуумным полем Хиггса регулирует их поведение при малых плотностях энергии. Третий способ редукции числа степеней свободы калибровочных полей и поля Хиггса связан с численным моделированием поведения малых возмущений в окрестности топологических решений [54–58]. Выводы, сделанные в рамках этого подхода, полностью согласуются с результатами, полученными при рассмотрении пространственно-однородных полевых конфигураций.

Вопрос о влиянии квантовых флуктуаций на хаотическую динамику пространственно-однородного абелева калибровочного поля, взаимодействующего со скалярным полем, которое рассматривалось как динамическая степень свободы, был поднят и рассмотрен в работе [84]. В неабелевом случае

было показано, что квантовые флуктуации могут приводить к экспоненциальному подавлению критической плотности энергии перехода от упорядоченного движения к хаотическому [64] (см. п. 4.3).

Пространственно-однородные решения полевых уравнений были, в частности, получены в рамках $SU(2)$ калибровочной теории, описываемой лагранжианом [27]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad (115)$$

где тензор калибровочных полей задается выражением

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (116)$$

Здесь A_μ^a обозначает триплет неабелевых калибровочных полей; g — константа связи, ϵ^{abc} — структурные константы группы $SU(2)$.

Тензор энергии-импульса этих полей имеет вид

$$T_{\mu\nu} = -G_{\mu\lambda}^a G_\nu^{a\lambda} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}G_{\lambda\rho}^a G^{a\lambda\rho}, \quad (117)$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор.

Как показано в работе [2], выбор системы отсчета, где вектор Пойнтинга T_{0j} обращается в нуль, а также калибровочное условие $A_0^a = 0$, $\partial_i A_i^a = 0$ приводят к достаточному требованию $\partial_i A_j^a = 0$. Это означает, что поля, зависящие только от времени в выделенной системе отсчета, являются решениями уравнений Эйлера–Лагранжа с лагранжианом (115), если они удовлетворяют следующим уравнениям [2]:

$$\ddot{A}_i^a - g^2 A_j^a A_j^b A_i^b + g^2 A_i^a A_j^b A_j^b = 0. \quad (118)$$

По форме уравнения (118) совпадают с уравнениями, описывающими поведение классической механической системы с девятью степенями свободы. Поэтому для исследования динамики пространственно-однородных калибровочных полей с точки зрения детерминированного хаоса применимы существующие методы классической механики. Анзац полей, не зависящих от пространственных координат, может использоваться в качестве приближения для изучения хаотического поведения полевых систем в произвольной системе отсчета [59]. Было показано, что при любых энергиях в фазовом пространстве системы (118) присутствуют области хаотического движения [101].

В современных теориях электрослабых и сильных взаимодействий калибровочные поля связаны со спинорными полями материи и скалярным полем Хиггса. В связи с проблемой поиска хиггсовского бозона представляет интерес изучение влияния поля Хиггса на хаотическую динамику пространственно-

однородных полей Янга–Миллса. Лагранжиан, описывающий это взаимодействие, в рамках стандартной модели имеет вид [26]:

$$\mathcal{L}_{\text{st}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} + \frac{1}{8}g^2\rho^2 \times \\ \times \left(W_1^2 + W_2^2 + \frac{Z^2}{\cos^2\theta_w} \right) + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho - \frac{1}{4!}\lambda\rho^4, \quad (119)$$

где λ обозначает константу самодействия поля Хиггса; θ_w — угол Вайнберга; A_μ соответствует электромагнитному полю; W_μ^1, W_μ^2 описывают W -бозоны, а Z_μ — нейтральный Z -бозон. Также используются следующие обозначения:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\varepsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \quad a = 1, 2, 3; \quad (120)$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^0 - \partial_\nu W_\mu^0. \quad (121)$$

В силу аддитивности членов, описывающих взаимодействие калибровочных полей и поля Хиггса, доказательство существования пространственно-однородных решений для полей Янга–Миллса в случае лагранжиана (119) совпадает с ранее рассмотренным случаем (115). Отличие заключается только в появлении дополнительных свободных членов в уравнениях (118). Конкретные примеры будут рассмотрены в п. 4.2, 4.3.

4.2. Хаотическое поведение пространственно-однородных полевых систем. Здесь исследуется хаотическая динамика простейших модельных систем классических полей. На их примере будет проведено сравнение аналитических результатов, полученных на основании критерия Тоды, с численным моделированием структуры фазового пространства по методу сечений Пуанкаре, а также с расчетами, основанными на методах теории КАМ [11].

Система (118) сложна для исследования с помощью существующих аналитических методов, в силу наличия у нее большого числа степеней свободы. Будем рассматривать модельную пространственно-однородную систему $SU(2)$ полей Янга–Миллса в классическом вакууме поля Хиггса. Для этого применим пространственно-однородный анзац к лагранжиану (119) и примем, для упрощения задачи, что векторы калибровочных полей во внутреннем пространстве постоянны по направлению и изменяются только по абсолютной величине. В этом случае модельная система обладает четырьмя степенями свободы. Для большего упрощения задачи положим $W_i^3 = 0, W_i^0 = 0, i = 1, 2, 3$, что соответствует отсутствию классического электромагнитного поля и поля Z -бозонов. Модельная система неабелевых калибровочных полей, взаимодействующих с невакуумным полем Хиггса, при учете влияния квантовых флуктуаций, рассматривается в п. 4.3. Таким образом, ненулевые компоненты калибровочных полей имеют вид (по индексу a нет суммирования)

$$W_i^a = e_i^a q_a(t'), \quad a = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3; \quad (e^a)^2 = 1, \quad e^1 e^2 = \cos \xi, \quad (122)$$

где \mathbf{e}^a , $a = 1, 2$, есть единичные постоянные векторы в трехмерном пространстве; ξ является углом между ними; t' обозначает временную координату в системе отсчета, в которой вектор Пойнтинга обращается в нуль (см. п. 4.1); $q_a(t')$, $a = 1, 2$ — обобщенные координаты модельной полевой системы. В результате несложных, но довольно громоздких преобразований при указанных условиях из лагранжиана (119) получается следующий гамильтониан, описывающий динамику модельной полевой системы:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{8}g^2v^2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}g^2q_1^2q_2^2 \sin^2 \xi, \quad (123)$$

где p_a , $a = 1, 2$, обозначают сопряженные импульсы, соответствующие обобщенным координатам q_a ; v есть классическое вакуумное значение поля Хиггса.

Применим критерий Тоды (см. п. 1.2) для изучения поведения системы (123). По формулам (11), (12) получаем следующие выражения для параметров B и C :

$$B = \frac{1}{2}g^2v^2 + g^2(q_1^2 + q_2^2) \sin^2 \xi, \quad (124)$$

$$C = \frac{1}{16}g^4v^4 + \frac{1}{4}g^4v^2(q_1^2 + q_2^2) \sin^2 \xi - 3g^4q_1^2q_2^2 \sin^4 \xi. \quad (125)$$

Из (124), (125) следует, что при малых плотностях энергии, когда параметр C больше нуля*, движение системы устойчиво. При достаточно больших плотностях энергии в конфигурационном пространстве возникают области, в которых $C < 0$, что приводит к локально неустойчивому и, следовательно, хаотическому поведению модельной системы при некоторых начальных условиях. Таким образом, с ростом плотности энергии калибровочных полей мы наблюдаем переход от порядка к хаосу, что согласуется с результатами работ [14, 61, 62, 99]. Критическая плотность энергии, соответствующая такому переходу, равна минимальному значению потенциала системы на линии, определяемой условием $C = 0$, и в случае гамильтониана (123) определяется выражением [14]:

$$E_c = \frac{3}{32} \frac{g^2v^4}{\sin^2 \xi}. \quad (126)$$

Сделанный вывод о возникновении перехода от упорядоченного движения к хаотическому в присутствии классического вакуумного поля Хиггса подтверждается численными расчетами, проведенными в работе [3].

*Как видно из выражения (124), параметр B всегда положителен.

Следуя работе [63], сравним выражение (126), полученное с помощью критерия Тоды, с результатом сначала аналитических, а затем и численных вычислений на основании теории КАМ (см. [11]).

Исходим из гамильтониана (123). Перейдем к новым переменным действие–угол:

$$q_i = \left(\frac{2I_i}{\omega} \right)^{1/2} \cos \theta_i, \quad (127)$$

$$p_i = (2I_i\omega)^{1/2} \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad (128)$$

где $\omega = gv/2$. Гамильтониан модельной системы примет вид

$$H = H_0 + \varepsilon V, \quad \varepsilon = \frac{2g^2 \sin^2 \xi}{\omega^2}, \quad (129)$$

где

$$H_0 = \omega(I_1 + I_2), \quad V = I_1 I_2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2. \quad (130)$$

Здесь гамильтониан H_0 описывает невозмущенную интегрируемую часть модельной системы, а εV представляет неинтегрируемую добавку (возмущение), параметр ε предполагается малым.

В результате разделения быстрых и медленных угловых переменных [11, гл. 3] получим следующий усредненный по времени потенциал возмущения:

$$\bar{V} \simeq \frac{1}{8} I_1 I_2 (2 + \cos 2(\theta_1 + \theta_2)). \quad (131)$$

Уравнения Гамильтона примут вид

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{4} \varepsilon \delta I (2 + \cos \psi), \\ \dot{\delta I} = -\frac{1}{2} \varepsilon I_1 I_2 \sin \psi, \end{cases} \quad (132)$$

где введены обозначения

$$\psi = 2(\theta_1 - \theta_2), \quad \delta I = I_1 - I_2. \quad (133)$$

Здесь ψ обозначает фазовую переменную, по которой происходят колебания в окрестности нелинейного резонанса, называемые фазовыми колебаниями. Отклонение от точного резонанса по действию определяется переменной δI . Как указано в книге [11, с. 77], сумма $I_1 + I_2$ является точным интегралом движения (соотношение Мэнли–Роу). Пренебрежем неинтегрируемой частью гамильтониана (123) по сравнению с интегрируемой ($\varepsilon V \ll H_0$), тогда

$$I_1 + I_2 = \text{const} \simeq \frac{E}{\omega}, \quad (134)$$

где E обозначает плотность энергии пространственно-однородной модельной полевой системы. Используя последнее выражение, можно переписать уравнения движения (132) в виде

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{2}\varepsilon\delta I, \\ \dot{\delta I} = -\frac{1}{8}\varepsilon\frac{E^2}{\omega^2}\sin\psi. \end{cases} \quad (135)$$

Уравнения (135) описывают поведение системы, определяемое резонансной фурье-компонентой потенциала возмущения V . Они совпадают по виду с уравнениями, описывающими движение нелинейного маятника [11, гл. 1, § 3]. Известно, что нерезонансные фурье-компоненты потенциала V , которыми мы пренебрегли, разрушают сепаратрису нелинейных колебаний, а на ее месте возникает стохастический слой [11, гл. 5, § 3]. Рассмотрим поведение модельной системы вблизи сепаратрисы нелинейных колебаний. Переходя от дифференциальных уравнений движения (135) к уравнениям в конечных разностях, получим следующее отображение, описывающее динамику системы:

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{2}\varepsilon\bar{\tau}\delta I_n, \quad (136)$$

где $\bar{\tau}$ — время дискретизации, а ψ_n и δI_n обозначают фазовую переменную и переменную действия после n -го временного шага. В силу малости неинтегрируемой добавки ($\varepsilon V \ll H_0$) систему можно приближенно считать консервативной, что позволяет сделать оценку:

$$\sin\psi_n = \sqrt{1 - \cos^2\psi_n} \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2H_s}}\delta I_n, \quad (137)$$

где $H_s = \varepsilon E^2/(8\omega^2)$ — гамильтониан фазовых колебаний на сепаратрисе. Таким образом, отображение (136) можно представить в виде

$$\bar{\psi}_{n+1} = \bar{\psi}_n - \frac{1}{2}\varepsilon\bar{\tau}\sqrt{\frac{2H_s}{\varepsilon}}\sin\bar{\psi}_n, \quad (138)$$

где $\bar{\psi}_n = \psi_n + \pi$ есть сдвинутая на π фазовая переменная. Локальная неустойчивость по фазе имеет место, если коэффициент L , определяемый следующим выражением, больше единицы [11, с. 125]:

$$\left| \frac{\partial\bar{\psi}_{n+1}}{\partial\bar{\psi}_n} - 1 \right| = L |\cos\bar{\psi}_n|. \quad (139)$$

Это условие приводит к выражению для критической плотности энергии, соответствующей переходу от упорядоченного движения к хаотическому в

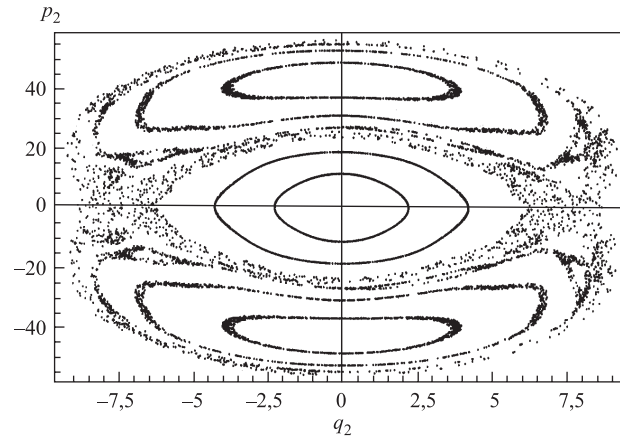


Рис. 8. Сечение Пуанкаре, сделанное плоскостью $q_1 = 0$ в фазовом пространстве модельной системы. Приняты следующие значения параметров: $v = 10$, $\xi = \pi/4$, $g = 1$. Энергия системы фиксирована и равна критической энергии перехода порядок–хаос, оцененной при помощи критерия Тоды локальной неустойчивости

модельной полевой системе:

$$E_c = \frac{1}{4\pi} \frac{g^2 v^4}{\sin^2 \xi}, \quad (140)$$

где в качестве оценки времени дискретизации принят наименьший характерный для системы временной промежуток $\bar{\tau} = \pi/2\omega$, равный четверти периода гармонических колебаний. Выражения для критической плотности энергии (126), (140), полученные посредством различных методов, демонстрируют одинаковую зависимость от параметров системы, а различие в численных множителях составляет приблизительно 15% от их величины, что обусловлено оценочным характером использованных методов. Таким образом, обобщенный критерий Тоды в случае двух степеней свободы согласуется с критериями локальной неустойчивости теории КАМ.

Проведем сравнение полученных аналитических результатов с данными численного моделирования на основе метода отображений Пуанкаре [11, с. 33]. Была создана программа, написанная на языке программирования пакета Mathematica 4.2, которая строит отображение Пуанкаре рассматриваемой модельной системы при различных плотностях энергии калибровочных полей. На основе ее результатов построено сечение Пуанкаре (см. рис. 8), соответствующее критической энергии перехода (126), аналитически вычисленной на основании критерия Тоды локальной неустойчивости. Выбран-

ные значения параметров системы приведены в подписи к рис. 8. Видно, что в фазовом пространстве присутствуют как неразрушенные КАМ-торы, соответствующие регулярному движению, так и ставшая уже заметной область хаотического движения.

4.3. Влияние квантовых поправок на хаотическую динамику полей. В данном пункте изучается хаотическое поведение пространственно-однородной модельной системы неабелевых полей Янга–Миллса, взаимодействующих со скалярным полем Хиггса, при учете квантовых флуктуаций калибровочных полей [64]. Поле Хиггса рассматривается как дополнительная динамическая степень свободы системы. Абелев случай рассмотрен в работе [84]. Исходный лагранжиан, описывающий динамику полей, задан выражением (119). Учет квантовых поправок осуществляется посредством метода эффективного потенциала [43]. Ограничимся рассмотрением квазиклассического приближения. Однопетлевой эффективный потенциал поля Хиггса, генерируемый лагранжианом (119), имеет вид (см. [26]):

$$U(\langle\rho\rangle) = \frac{1}{4!}\lambda\langle\rho\rangle^4 + \frac{3g^4\langle\rho\rangle^4}{128\pi^2} \left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{g^2\langle\rho\rangle^2}{2\mu^2} \right) + \frac{3g^4\langle\rho\rangle^4}{256\pi^2 \cos^4\theta_w} \left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{g^2\langle\rho\rangle^2}{2\mu^2 \cos^2\theta_w} \right). \quad (141)$$

Здесь μ^2 — это константа перенормировки; $\langle\rho\rangle$ — перенормированное поле Хиггса. При вычислении эффективного потенциала учитывались вклады всех диаграмм Фейнмана с одной петлей какого-нибудь (W_1 , W_2 , Z или A) калибровочного поля и внешними линиями поля Хиггса. Этот потенциал приводит к спонтанному нарушению симметрии и ненулевому значению вакуумного ожидания скалярного поля, в то время как классическое вакуумное значение поля Хиггса равно нулю.

Следуя схеме построения модельной полевой системы, описанной в пп. 4.1, 4.2, а также рассматривая поле Хиггса как динамическую переменную и накладывая на него условие пространственной однородности, при учете квантовых поправок получим следующий гамильтониан, описывающий динамику модельной конфигурации полей:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p^2) + \frac{1}{8}g^2\langle\rho\rangle^2(q_1^2 + q_2^2) + U(\langle\rho\rangle), \quad (142)$$

где p_1 и p_2 обозначают обобщенные импульсы поля Янга–Миллса; p — обобщенный импульс поля Хиггса. Переходя к полярным координатам в конфигурационном пространстве посредством замены $q_1 = r \cos \varphi$, $q_2 = r \sin \varphi$, получим, что новая переменная φ является циклической, сопряженный ей обобщенный импульс $p_\varphi = r^2\dot{\varphi}$ есть константа движения. Таким образом,

гамильтониан (142) может быть приближенно представлен в виде

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + p^2) + \frac{1}{8}g^2\langle\rho\rangle^2 r^2 + U(\langle\rho\rangle). \quad (143)$$

Здесь p_r обозначает сопряженный с обобщенной координатой r импульс. Также в выражении (143) мы пренебрегли слагаемым p_φ/r^2 , по сравнению с членами, пропорциональными r^2 . С физической точки зрения это означает использование приближения высокой интенсивности классических полей Янга–Миллса. Расчет основан на применении критерия Тоды локальной неустойчивости гамильтоновых систем (см. п. 1.2).

Вторая производная потенциала (141) имеет вид

$$U''(\langle\rho\rangle) = \frac{\lambda}{2}\langle\rho\rangle^2 + \frac{21g^4\langle\rho\rangle^2}{64\pi^2} + \frac{21g^4\langle\rho\rangle^2}{128\pi^2 \cos^4 \theta_w} + \frac{9g^4\langle\rho\rangle^2}{32\pi^2} \times \\ \times \left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{g^2\langle\rho\rangle^2}{2\mu^2} \right) + \frac{9g^4\langle\rho\rangle^2}{64\pi^2 \cos^4 \theta_w} \left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{g^2\langle\rho\rangle^2}{2\mu^2 \cos^2 \theta_w} \right). \quad (144)$$

Введем следующее обозначение для потенциала, входящего в гамильтониан (143):

$$V = \frac{1}{8}g^2\langle\rho\rangle^2 r^2 + U(\langle\rho\rangle). \quad (145)$$

Его вторые производные задаются выражениями

$$V''_{\langle\rho\rangle\langle\rho\rangle} = \frac{1}{4}g^2 r^2 + U''(\langle\rho\rangle), \quad (146)$$

$$V''_{rr} = \frac{1}{4}g^2\langle\rho\rangle^2, \quad (147)$$

$$V''_{r\langle\rho\rangle} = \frac{1}{2}g^2\langle\rho\rangle r. \quad (148)$$

Параметр C , определяемый формулой (12), в этом случае имеет вид

$$C = \frac{1}{4}g^2\langle\rho\rangle^2 U''(\langle\rho\rangle) - \frac{3}{16}g^4\langle\rho\rangle^2 r^2. \quad (149)$$

В соответствии с результатами, изложенными в п. 1.2, критическая плотность энергии E_c , соответствующая переходу порядок–хаос,

$$E_c = V_m(\langle\rho\rangle, r)|_{C=0} - U(\langle\rho_v\rangle), \quad (150)$$

где $V_m(\langle\rho\rangle, r)|_{C=0}$ — это минимальное значение потенциала (145) на линии, определяемой условием $C = 0$; $U(\langle\rho_v\rangle)$ обозначает вакуумное значение

эффе́ктивного потенциала поля Хигса:

$$U(\langle \rho_v \rangle) = \frac{3\mu^4}{32\pi^2} \exp\left(2\alpha_w - \frac{2\lambda}{g^4}\beta_w\right) \times \\ \times \left[\left(\alpha_w - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2\cos^4\theta_w}\right) - \frac{\ln \cos \theta_w}{\cos^4\theta_w} \right], \quad (151)$$

где θ_w — угол Вайнберга, а определения параметров α_w , β_w приведены ниже. Заметим, что

$$\langle \rho \rangle^2 U''(\langle \rho \rangle) = 12U(\langle \rho \rangle) + \frac{21g^4\langle \rho \rangle^4}{64\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2\cos^4\theta_w}\right). \quad (152)$$

Используя это соотношение, можно показать, что на линии, определяемой условием $C = 0$, выполняется соотношение

$$V(\langle \rho \rangle)|_{C=0} = 7U_w(\langle \rho \rangle), \quad (153)$$

где $U_w(\langle \rho \rangle)$ задается выражением (141) с учетом замены

$$\lambda \rightarrow \lambda_w = \lambda + \frac{9g^4}{16\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2\cos^4\theta_w}\right). \quad (154)$$

Таким образом, используя выражение (151), легко найти минимальное значение потенциала V на линии $C = 0$. Подставляя полученные результаты в (150), приходим к окончательному выражению для критической плотности энергии E_c :

$$E_c = \frac{3\mu^4}{32\pi^2} \exp\left(2\alpha_w - \frac{2\lambda}{g^4}\beta_w\right) \left(1 + \frac{1}{2\cos^4\theta_w}\right) (1 - 7e^{-2}), \quad (155)$$

где использованы обозначения

$$\alpha_w = \frac{2 \ln \cos \theta_w}{1 + 2 \cos^4 \theta_w}, \quad (156)$$

$$\beta_w = \frac{32\pi^2 \cos^4 \theta_w}{9(1 + 2 \cos^4 \theta_w)}. \quad (157)$$

Здесь θ_w — угол Вайнберга. Из выражения (155) видно, что E_c экспоненциально подавлена при условии

$$\frac{\lambda}{g^4} > \frac{2}{\beta_w}. \quad (158)$$

Таким образом, если отношение константы связи поля Хиггса к четвертой степени константы самодействия неабелевых калибровочных полей превышает указанное критическое значение, то переход от упорядоченного движения к хаотическому становится практически ненаблюдаемым. Наоборот, при достаточно малых значениях λ/g^4 квантовые поправки к потенциалу поля Хиггса существенно влияют на динамику модельной системы и приводят к ее регуляризации при малых плотностях энергии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы проявления и свойства детерминированного хаоса в ряде квантово-механических и теоретико-полевых моделей.

В первом разделе был обобщен на случай произвольного конечного числа степеней свободы критерий Тоды локальной неустойчивости гамильтоновых систем с квадратичным по вектору обобщенного импульса гамильтонианом [14, 65, 67]. Приведен сравнительный анализ подходов к проблеме хаоса в квантовых системах. Предложен критерий хаотичности квантовых систем [65, 67, 73, 75, 76]. Показано, что предложенный критерий согласуется с обобщенным критерием Тоды локальной неустойчивости в квазиклассическом приближении нерелятивистской квантовой механики [65, 72]. На основании аналогии между петлей Вилсона квантовой хромодинамики и определением фиделити для голономного квантового компьютера общего вида, а также посредством применения неабелевой теоремы Стокса, получено общее выражение для фиделити голономных квантовых вычислений [71]. Сформулированы условия, позволяющие увеличить их устойчивость по отношению к малым неконтролируемым ошибкам в задании управляющих параметров. Приведены приближенные формулы, описывающие степень отклонения фиделити от единицы в зависимости от величины ошибок.

Во втором разделе рассматривалось влияние классического детерминированного хаоса на свойства квантово-механического туннелирования в квазиклассическом приближении. Разработан аналитический метод расчета характеристик туннелирования, основанный на применении инстантонного подхода. Доказано существование хаотических инстантонных решений [69, 77]. На примере возмущенной периодически по времени одномерной системы с косинусоидальным потенциалом показано, что влияние классического хаоса на инстантонное туннелирование проявляется в экспоненциальном уширении основной квазиэнергетической зоны в спектре системы, а также приводит к сжатию разреженного инстантонного газа [68, 69, 80]. На основании независимого метода, базирующегося на теории Флоке, созданы программные средства и проведено компьютерное моделирование влияния классического хаоса на характеристики квантово-механического туннелирования. На примере

модельной системы подтверждены выводы об экспоненциальном уширении основной квазиэнергетической зоны и увеличении вероятности туннельного перехода в присутствии классического хаоса.

Третий раздел посвящен изучению влияния квантовых флуктуаций на хаотическую динамику полей Янга–Миллса и поля Хиггса. На примере модельных пространственно-однородных систем неабелевых калибровочных полей и поля Хиггса показано, что с ростом плотности энергии системы имеет место переход от упорядоченного движения к хаотическому. Учет квантовых поправок сохраняет качественную картину, но приводит к изменению количественных характеристик, в частности, зависимости критической плотности энергии от параметров полей [14, 61, 62, 74, 75]. Получено аналитическое выражение для критической плотности энергии перехода от упорядоченного движения к хаотическому при учете квантовых флуктуаций полей в однопетлевом приближении [64]. Показано, что она экспоненциально зависит от отношения константы самодействия поля Хиггса и четвертой степени константы самодействия неабелевых калибровочных полей.

Благодарности. Мы хотели бы поблагодарить Марко Робника (Marko Robnik) за наши многолетние полезные контакты и обсуждения проблем, связанных с классическим и квантовым хаосом. Мы признательны Дж. Касати (J. Casati), Т. Прозену (T. Prosen), С. Г. Матиняну (S. G. Matinyan) и А. Шудо (A. Shudo) за их внимание и интерес к нашей работе. Часть результатов, представленных в этом обзоре, получена в соавторстве с Р. Г. Шуляковским (R. G. Shulyakovsky). Исследование устойчивости голономных квантовых вычислений проведено при поддержке Всемирной федерации ученых (World Federation of Scientists).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартон Г. Дисперсионные методы в теории поля. М.: Атомиздат, 1968. 385 с.
2. Басеян Г. З., Матинян С. Г., Саввиди Г. К. Нелинейные плоские волны в безмассовой теории Янга–Миллса // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, вып. 10. С. 641–644.
3. Берман Г. П., Маньков Ю. И., Садреев А. Ф. Стохастическая неустойчивость классических однородных $SU(2) \otimes U(1)$ полей со спонтанно-нарушенной симметрией // ЖЭТФ. 1985. Т. 88, вып. 3. С. 705–714.
4. Бунаков В. Е. Хаос, квантовый хаос и ядерная физика // Материалы XXXII зимней шк. ПИЯФ. СПб., 1998. С. 5–33.
5. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2 т. М.: Наука, 1969. Т. 2. 332 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
7. Дайсон Ф. Статистическая теория энергетических уровней сложных систем: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 123 с.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

9. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 143 с.
10. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.
11. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
12. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 791 с.
13. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во АН СССР, 1950. 208 с.
14. *Кувшинов В. И., Кузьмин А. В.* Явление хаоса в модельных полевых системах Янга–Миллса–Хиггса // Ковариантные методы в теоретической физике: Тр. / Ин-т физики НАНБ. Минск, 2001. Вып. 5. С. 90–96.
15. *Кувшинов В. И., Шапоров В. А.* Флуктуации и корреляции мягких глюонов на непертурбативной стадии эволюции КХД-струи // ЯФ. 2002. Т. 65, № 2. С. 334–339.
16. *Кувшинов В. И., Шапоров В. А., Мармыш В. В.* Связь и эволюция сжатия и неустойчивости для систем с квадратичными гамильтонианами // ТМФ. 2004. Т. 139, № 3. С. 477–490.
17. *Кузьменко Д. С., Симонов Ю. А., Шевченко В. И.* Вакуум, конфайнмент и струны КХД в методе вакуумных корреляторов // УФН. 2004. Т. 174, № 1. С. 3–18.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. Т. 3. 752 с.
19. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528 с.
20. Математическая энциклопедия: В 5 т. / Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Сов. энцикл., 1984. Т. 5. 1248 с.
21. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе: О детерминистском подходе к турбулентности: Пер. с фр. М.: Мир, 1991. 366 с.
22. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 414 с.
23. *Симонов Ю. А.* Кластерное разложение, неабелева теорема Стокса и магнитные монополи // ЯФ. 1989. Т. 50, вып. 1. С. 213–224.
24. *Симонов Ю. А.* Конфайнмент // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 337–362.
25. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991. 234 с.
26. *Хуанг К.* Кварки, лептоны и калибровочные поля: Пер. с англ. М., 1985. Гл. 10. С. 271–293.
27. *Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф.* Калибровочные теории в физике элементарных частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 624 с.
28. *Шустер Г. Г.* Детерминированный хаос: Введение: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 240 с.
29. *Aref'eva I. Ya., Koshchev A. S., Medvedev P. B.* Chaos-order transition in matrix theory // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13, No. 31. P. 2481–2494.
30. *Berman G. P., Zaslavsky G. M.* Quantum mappings and the problem of stochasticity in quantum systems // Physica A. 1982. V. 111, No. 1–2. P. 17–44.
31. *Berman G. P., Zaslavsky G. M.* Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems. II. Kinetic description of quantum K -systems // Physica A. 1979. V. 97, No. 2. P. 367–382.
32. *Biro T. S., Matinyan S. G., Muller B.* Chaos and Gauge Field Theory. Singapore: World Scientific, 1994. 288 p.

33. *Bohigas O., Leboeuf P., Sanchez M.J.* Spectral spacing correlations for chaotic and disordered systems // *Found. Phys.* 2001. V. 31, No. 3. P. 489–517.
34. *Bohigas O., Tomsovic S., Ullmo D.* Manifestations of classical phase space structures in quantum mechanics // *Phys. Rep.* 1993. V. 223, No. 2. P. 43–133.
35. *Bunakov V.E., Ivanov I.B., Panin R.B.* The critical perturbation parameter estimate for the transition from regularity to chaos in quantum systems. quant-ph/0105082v1.
36. *Cao Z., Hwa R.C.* In search for signs of chaos in branching processes // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75, No. 7. P. 1268–1271.
37. *Cao Z., Hwa R.C.* Chaotic behavior of particle production in branching processes // *Phys. Rev. D.* 1996. V. 53, No. 11. P. 6608–6616.
38. *Casetti L., Gatto R., Pettini M.* Geometric approach to chaos in the classical dynamics of abelian lattice gauge theory // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. V. 32, No. 16. P. 3055–3067.
39. *Biro T.S. et al.* Chaos analysis in both phases of QED and QCD // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 2000. V. 86, No. 1–3. P. 403–407.
40. *Mouchet A. et al.* Chaos assisted tunneling with cold atoms. nlin.CD/0012013v1.
41. *Kohler S. et al.* Coherent and incoherent chaotic tunneling near singlet-doublet crossings // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58, No. 6. P. 7219–7230.
42. *Grossmann F. et al.* Coherent destruction of tunneling // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67, No. 4. P. 516–519.
43. *Coleman S., Weinberg E.* Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking // *Phys. Rev. D.* 1973. V. 7, No. 6. P. 1888–1910.
44. *Cametti F. et al.* Comparison between quantum and classical dynamics in the effective action formalism. quant-ph/9910065v1.
45. *Creagh S.C., Lee S.Y.* Scarring and the statistics of tunneling // *Ann. Phys.* 2002. V. 295, No. 2. P. 194–215.
46. *Davis M., Heller E.J.* Quantum dynamical tunneling in bound states // *J. Chem. Phys.* 1981. V. 75, No. 1. P. 246–254.
47. *Doron E., Frischat S.D.* Semiclassical description of tunneling in mixed systems: case of the annular billiard // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75, No. 20. P. 3661–3664.
48. *Frischat S.D., Doron E.* Dynamical tunneling in mixed systems // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57, No. 2. P. 1421–1443.
49. *Gremaud B.* \hbar corrections in semiclassical formula for smooth chaotic dynamics. nlin.CD/0107031v1.
50. *Grossmann F.* Semiclassical real-time tunneling by multiple spawning of classical trajectories // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85, No. 5. P. 903–907.
51. *Gutzwiller M.C.* *Chaos in classical and quantum mechanics.* N.Y.: Springer-Verlag, 1990. 432 p.
52. *Gogilidze S.A. et al.* Hamiltonian reduction of $SU(2)$ Dirac–Yang–Mills mechanics // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57, No. 12. P. 7488–7500.
53. *Higgs P.W.* Broken symmetries and the masses of gauge bosons // *Phys. Rev. Lett.* 1964. V. 13, No. 16. P. 508–509.
54. *Kawabe T., Ohta S.* Onset of chaos in time-dependent spherically symmetric $SU(2)$ Yang–Mills theory // *Phys. Rev. D.* 1990. V. 41, No. 6. P. 1983–1988.

55. Kawabe T., Ohta S. Order-to-chaos transition in $SU(2)$ Yang–Mills–Higgs theory // Phys. Rev. D. 1991. V. 44, No. 4. P. 1274–1279.
56. Kawabe T. Onset of chaos in $SU(2)$ Yang–Mills–Higgs theory with monopole // Phys. Lett. B. 1992. V. 274, No. 3–4. P. 399–403.
57. Kawabe T. Chaotic behaviour in sphaleron solution // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. V. 26, No. 22. P. L1131–L1137.
58. Kawabe T., Ohta S. Onset of chaos in Yang–Mills–Higgs systems // Phys. Lett. B. 1994. V. 334, No. 1–2. P. 127–131.
59. Kawabe T. Deterministic chaos in spatially homogeneous model of Abelian–Higgs theory // Phys. Lett. B. 1995. V. 343, No. 1–4. P. 254–258.
60. Keshavamurthy S. Dynamical tunneling in molecules: role of the classical resonances and chaos. nlin.CD/0210051v1.
61. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Chaos-order transitions in $SU(2)$ Yang–Mills–Higgs systems // Nonl. Phenom. Complex Syst. 1999. V. 2, No. 3. P. 100–104.
62. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Influence of quantum Higgs vacuum fluctuations on the chaos-order transition in the system of Yang–Mills fields // Nonl. Phenom. Complex Syst. 2000. V. 3, No. 3. P. 299–303.
63. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Order-to-chaos transition in $SU(2)$ spatially homogeneous model field system // Nonl. Phenom. Complex Syst. 2001. V. 4, No. 1. P. 64–66.
64. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. The influence of quantum field fluctuations on chaotic dynamics of Yang–Mills system // J. Nonl. Math. Phys. 2002. V. 9, No. 4. P. 382–388.
65. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Towards chaos criterion in quantum field theory // Phys. Lett. A. 2002. V. 296, No. 2–3. P. 82–86.
66. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Deterministic chaos in quantum field theory // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2003. No. 150. P. 126–135.
67. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Chaos criterion in quantum field theory // Nonl. Phenom. Complex Syst. 2002. V. 5, No. 2. P. 204–211.
68. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V., Shulyakovsky R. G. Chaos enforced instanton tunneling in one-dimensional model with periodic potential // Acta Phys. Pol. B. 2002. V. 33, No. 7. P. 1721–1728.
69. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V., Shulyakovsky R. G. Chaos-assisted instanton tunneling in one-dimensional perturbed periodic potential // Phys. Rev. E. 2003. V. 67, No. 1. Art. No. 015201(R)-4.
70. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Coherent tunneling and instantons in presence of classical chaos // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2003. No. 150. P. 363–366.
71. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Stability of holonomic quantum computations // Phys. Lett. A. 2003. V. 316, No. 6. P. 391–394.
72. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Chaos criterion and instanton tunneling in quantum field theory // Proc. of the 10th Intern. Workshop on Multiparticle Production «Correlations and Fluctuations in QCD», Crete, Greece, June 8–15, 2002. Singapore, 2003. P. 354–365.
73. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Heading towards chaos criterion in gauge field theories // Proc. of the Intern. School-Seminar «The actual problems of particle physics», Gomel, Belarus, Aug. 7–16, 2001. Dubna, 2001. P. 7–19.
74. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Chaotic dynamics of $SU(2)$ Yang–Mills–Higgs model system // Proc. of the Eighth Annual Seminar NPC'S'99, Minsk, May 17–20, 1999. Minsk, 2000. P. 49–54.
75. Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V. Towards chaos criterion in quantum mechanics and quantum field theory // Proc. of the Tenth Annual Seminar NPC'S'2001, Minsk, May 15–18, 2001. Minsk, 2001. P. 183–190.

76. *Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V.* Heading towards chaos criterion for quantum systems // Proc. of the Intern. Conf. «New Trends in High-Energy Physics», Yalta, Ukraine, Sept. 22–29, 2001. Kiev, 2001. P. 186–192.
77. *Kuvshinov V. I., Kuzmin A. V., Shulyakovsky R. G.* Chaos enforced instanton tunneling // Abstr. of the 12th General Conf. of the Eur. Phys. Society «Trends in Physics» (EPS-12), Budapest, Aug. 26–30, 2002. Eur. Phys. Soc., 2002. V. 26G. P. 314.
78. *Kuvshinov V. I., Shapara V. A.* Two-mode squeezed and entangled collinear gluon states // Ukr. J. Phys. 2003. V. 48, No. 11–12. P. 1255–1259.
79. *Kuvshinov V. I., Shapara V. A.* Two-mode squeezed and entangled gluon states // Acta Phys. Pol. B. 2004. V. 35, No. 1. P. 443–446.
80. *Kuzmin A. V.* Modelling of chaos enforced instanton tunneling // 5th Intern. Summer School/Conf. «Let's Face Chaos through Nonlinear Dynamics», Maribor, Slovenia, June 30 – July 14, 2002. P. 90.
81. *Latka M., Grigolini P., West B. J.* Chaos-induced avoided level crossing and tunneling // Phys. Rev. A. 1994. V. 50, No. 2. P. 1071–1081.
82. *Lin W. A., Ballentine L. E.* Quantum tunneling and chaos in a driven anharmonic oscillator // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65, No. 24. P. 2927–2930.
83. *Markum H., Pullirsch R.* Classical and quantum chaos in fundamental field theories. nlin.CD/0303057v1.
84. *Matinyan S. G., Müller B.* Quantum fluctuations and dynamical chaos // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, No. 13. P. 2515–2518.
85. *Nielsen H. B., Rugh H. H., Rugh S. E.* Chaos, scaling and existence of a continuum limit in classical non-abelian lattice gauge theory. hep-th/9611128.
86. *Nielsen H. B., Rugh H. H., Rugh S. E.* Chaos and scaling in classical non-abelian gauge fields. chao-dyn/9605013.
87. *Aoki K. I.* Non-perturbative renormalization group and quantum tunneling. hep-th/9812050v1.
88. *Pachos J.* Topological features in ion trap holonomic computation // Phys. Rev. A. 2002. V. 66, No. 4. Art. No. 042318-6.
89. *Pachos J., Chountasis S.* Optical holonomic quantum computer // Phys. Rev. A. 2000. V. 62, No. 5. Art. No. 052318-9.
90. *Pachos J., Walther H.* Quantum computation with trapped ions in an optical cavity // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89, No. 18. Art. No. 187903-4.
91. *Pachos J., Zanardi P., Rasetti M.* Non-Abelian Berry connections for quantum computation // Phys. Rev. A. 2000. V. 61, No. 1. Art. No. 010305-4.
92. *Pattanayak A. K., Schieve W. C.* Effective potentials and chaos in quantum systems // Phys. Rev. A. 1992. V. 46, No. 4. P. 1821–1828.
93. *Peres A.* Stability of quantum motion in chaotic and regular systems // Phys. Rev. A. 1984. V. 30, No. 4. P. 1610–1615.
94. *Prosen T., Žnidarič M.* Stability of quantum motion and correlation decay // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. V. 35, No. 6. P. 1455–1481.
95. *Markum H. et al.* Quantum chaos in QCD at finite temperature // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1998. V. 63, No. 1–3. P. 832–834.
96. *Jirari H. et al.* Quantum instantons and quantum chaos. quant-ph/9910116v3.
97. *Robnik M.* Aspects of quantum chaos in generic systems // Open Syst. Inform. Dyn. 1997. V. 4, No. 3. P. 211–240.

98. *Robnik M.* Topics in quantum chaos of generic systems // *Nonl. Phenom. Complex Syst.* 1998. V. 1, No. 1–4. P. 1–22.
99. *Salasnich L.* Quantum signature of the chaos-order transition in a homogeneous $SU(2)$ Yang–Mills–Higgs system. nucl-th/9707035v1.
100. *Saraga D. S., Monteiro T. S.* Quantum chaos with nonperiodic, complex orbits in the resonant tunneling diode // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81, No. 26. P. 5796–5799.
101. *Savvidy G. K.* The Yang–Mills classical mechanics as a Kolmogorov K -system // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 130, No. 5. P. 303–307.
102. *Shirley J. H.* Solution of the Schrödinger equation with a Hamiltonian periodic in time // *Phys. Rev. B.* 1965. V. 138, No. 4. P. B979–B987.
103. *Shudo A., Ikeda K. S.* Chaotic tunneling: A remarkable manifestation of complex classical dynamics in non-integrable quantum phenomena // *Physica D.* V. 115, No. 3–4. P. 234–292.
104. *Shudo A., Ikeda K. S.* Stokes phenomenon in chaotic systems: pruning trees of complex paths with principle of exponential dominance // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76, No. 22. P. 4151–4154.
105. *Steck D. A., Oskay W. H., Raizen M. G.* Fluctuations and decoherence in chaos-assisted tunneling // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88, No. 12. Art. No. 120406-4.
106. *Toda M.* Instability of trajectories of the lattice with cubic nonlinearity // *Phys. Lett. A.* 1974. V. 48, No. 5. P. 335–336.
107. *Bonci L. et al.* Tunneling rate fluctuations induced by nonlinear resonances: A quantitative treatment based on semiclassical arguments // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58, No. 5. P. 5689–5692.
108. *Utermann R., Dittrich T., Hänggi P.* Tunneling and the onset of chaos in a driven bistable system // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 49, No. 1. P. 273–280.
109. *Wang X. R., Niu Q.* General analysis of instabilities and oscillations of the sequential tunneling in superlattices // *Phys. Rev. B.* 1999. V. 59, No. 20. P. R12755–R12758.
110. *Wilczek F., Zee A.* Appearance of gauge structure in simple dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 52, No. 24. P. 2111–2114.
111. *Wilson K. G.* Confinement of quarks // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 10, No. 8. P. 2445–2459.
112. *Zakrzewski J., Delande D., Buchleitner A.* Ionization via chaos assisted tunneling // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57, No. 2. P. 1458–1474.
113. *Zanardi P., Rasetti M.* Holonomic quantum computation // *Phys. Lett. A.* 1999. V. 264, No. 2–3. P. 94–99.