

УДК 537.533.33; 621.384.60-833

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ БЕТАТРОН

*И. Н. Мешков, А. О. Сидорин, И. А. Селезнев,  
А. В. Смирнов, Е. М. Сыресин, Г. В. Трубников*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1071
ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ И ВАРИАНТЫ КОНСТРУКЦИИ МОДИФИЦИРОВАННОГО БЕТАТРОНА	1075
ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В МОДИФИЦИРОВАННОМ БЕТАТРОНЕ	1084
МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ В СЕКЦИОНИРОВАННОМ МОДИФИЦИРОВАННОМ БЕТАТРОНЕ	1100
НАКОПИТЕЛИ «ХОЛОДНЫХ» ПУЧКОВ	1110
ПЕРВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ ЛЕРТА	1127
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1131
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1132

УДК 537.533.33; 621.384.60-833

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ БЕТАТРОН

*И. Н. Мешков, А. О. Сидорин, И. А. Селезнев,  
А. В. Смирнов, Е. М. Сыресин, Г. В. Трубников*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлен обзор развития циклических ускорителей и накопителей заряженных частиц с фокусировкой продольным магнитным полем — модифицированных бетатронов. Области применения таких установок: генерация мощных электронных пучков с током до нескольких кА и энергией 20–100 МэВ, радиационная и электронная терапия, электронное охлаждение ионов циркулирующим электронным пучком, генерация антиводорода и позитрония. Рассмотрены методы расчета динамики движения частиц. Приведены результаты экспериментов по исследованию динамики пучка в накопителе типа модифицированного бетатрона LEPTA (ОИЯИ).

The review of the development of modified betatron — the circular accelerators and charge particle accumulators with focusing by longitudinal magnetic field is presented. Such accelerators may have numerous applications like, generation of powerful electron beams with current about several kA and energy 20-100 MeV, radiological and electron therapy, electron cooling of ions with circulating electron beam, generation antihydrogen and positronium. The methods of the computation particle dynamics in modified betatron are considered. The results of experimental studies of beam dynamics in modified betatron LEPTA, JINR are described.

### ВВЕДЕНИЕ

Первоначальная идея использования продольного (тороидального) магнитного поля в циклическом ускорителе связана с тем, что в обычном бетатроне предельное значение тока пучка определяется условиями при инжекции, когда из-за малой энергии эффекты собственного поля пучка максимальны, а величина фокусирующего поворотного поля еще мала. Введение дополнительной азимутальной компоненты магнитного поля позволяет осуществить эффективную фокусировку интенсивного пучка при малой энергии ускоряемых частиц. Циклический ускоритель с такой конфигурацией полей получил название «модифицированный бетатрон».

Первые эксперименты по ускорению электронов в бетатроне с дополнительным тороидальным полем были осуществлены в Великобритании сразу после Второй мировой войны. Поэтому модифицированные бетатроны являются предшественниками термоядерных (плазменных) установок — токамаков и стеллараторов, в которых также используется фокусировка продольным магнитным полем. Главное принципиальное отличие бетатронов от плазменных установок в том, что частицы в них имеют выделенное направление дви-

жения: компонента импульса, параллельная направлению магнитного поля, много больше двух других, поперечных к полю, компонент. Устойчивой работы первого бетатрона добиться тогда не удалось, так как пучок электронов после нескольких оборотов попадал на стенку камеры вблизи точки инжекции. Результаты этой работы не были опубликованы, но упоминания о ней можно найти, например, в [1].

Дальнейшее развитие ускорителей этого типа началось после работ [2, 3], в которых были даны оценки предельной интенсивности ускоренного пучка и предложены более удачные схемы инжекции. Одной из проблем модифицированного бетатрона является изменение характера устойчивости движения частиц при переходе от диапазона низких энергий, где фокусировка осуществляется, в основном, продольным полем, к высоким энергиям, где фокусировка обеспечена градиентным, спадающим по радиусу поворотным полем. Этот недостаток может быть преодолен введением дополнительного спирального мультипольного поля, аналогичного полю стелларатора. Ускорители с таким дополнительным полем были предложены в [4] и получили название «стеллатрон».

Несколько установок типа модифицированного бетатрона были созданы и экспериментально исследованы в США в середине 80-х – начале 90-х гг. прошлого века. К ним относятся: модифицированный бетатрон Университета штата Калифорния (UCI) [5], впоследствии переоборудованный в стеллатрон; «удлиненный модифицированный бетатрон» МЕВА [6]; модифицированный бетатрон Лаборатории военно-морского флота США [7], в котором также использовались дополнительные стеллараторные обмотки; разрезной модифицированный бетатрон Университета штата Нью-Мексико, в котором фокусировка пучка осуществлялась с помощью системы соленоидов с противоположным направлением поля — CATE (Casp Array Transport Experiment) [8]. Ни на одной из этих установок не были получены проектные параметры пучка; экспериментальные исследования на этих установках были прекращены в середине 1990-х гг. Основными причинами неудачи были сложность схемы инжекции пучка в продольное поле и резонансы, связанные с ларморовским вращением электронов, которые приводили к гибели пучка при высоких энергиях.

Схема накопителя заряженных частиц с фокусировкой продольным магнитным полем была предложена в Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера (Новосибирск) в 1980-х гг. Предложение появилось в связи с развитием идеи генерации антиводорода «на лету». Схема такой генерации [9] предполагает использование двух накопителей — антипротонов и позитронов, имеющих общую прямолинейную секцию, в которой оба пучка совмещены и имеют одинаковые средние скорости. При рекомбинации позитронов и антипротонов образуются атомы антиводорода. Изначально в этой схеме предполагалось использовать для позитронов обычный жесткофокусирующий

накопитель [9]. Но для постановки экспериментов на потоках атомов антиводорода оптимальная энергия атомов лежит в диапазоне десятков МэВ, что требует энергии позитронов в несколько кэВ. Обеспечение устойчивого движения частиц в обычном жесткофокусирующем накопителе является затруднительным. Для преодоления этой трудности в [10] было предложено использовать для фокусировки позитронов продольное магнитное поле. Однако авторам этой работы не удалось найти решение проблемы инжекции позитронов в продольное магнитное поле без значительного увеличения их поперечных скоростей и совмещения циркулирующего позитронного пучка с охлаждающим однопролетным электронным. Последняя трудность оказалась принципиальной, так как для эффективной антипротон-позитронной рекомбинации необходима низкая температура рекомбинирующих частиц, что в области малых энергий может быть обеспечено только электронным охлаждением. При этом электронное охлаждение позитронов также сопровождается процессом рекомбинации — электронов и позитронов, с образованием направленного потока позитрония, что дает дополнительную возможность проведения экспериментов по физике позитрония в новой постановке.

Решение было найдено авторами работ [11, 12], в которых была приведена схема инжекции и совмещения замагниченных позитронного и электронного пучков (т.е. таких, источники которых погружены в продольное магнитное поле).

Для обеспечения долговременной устойчивости движения можно использовать спиральное квадрупольное поле. Предложенная схема накопителя позволяет осуществить устойчивое движение пучка в диапазоне энергий до нескольких МэВ. Поэтому на базе этой схемы была разработана также система электронного охлаждения циркулирующим электронным пучком для области высоких, порядка нескольких ГэВ, энергий охлаждаемых ионов [13]. Любопытно, что авторы работ [11, 12] узнали о существовании модифицированных бетатронов [1–8] гораздо позднее.

При энергии охлаждаемых частиц в несколько ГэВ ожидаемые времена охлаждения составляют от нескольких минут до нескольких часов, при этом за один пролет секции охлаждения параметры охлаждающего электронного пучка не успевают существенно ухудшиться. Это позволяет многократно использовать один и тот же электронный пучок, циркулирующий в небольшом накопителе. Традиционно в системах охлаждения продольное магнитное поле используется для транспортировки электронного пучка без ухудшения его качества. Применение продольного магнитного поля в системе электронного охлаждения с циркулирующим электронным пучком позволяет использовать накопитель типа модифицированного бетатрона. При этом ускорение электронов до требуемой энергии может быть осуществлено индукционным методом в том же самом накопителе с бетатронным сердечником (индук-

тор). Схема такого накопителя для электронного охлаждения циркулирующим пучком была представлена на конференции по электронному охлаждению частиц промежуточных энергий в Новосибирске [13]. Аналогичное применение модифицированного бетатрона было предложено в Национальной лаборатории им. Э. Ферми — FNAL, США, при разработке проекта системы электронного охлаждения для накопителя антипротонов «Resusler» [14]. Однако автор этой работы также не нашел способа инъекции замагниченного электронного пучка в продольное магнитное поле, о чем он сказал в своем сообщении на совещании в Новосибирске, приняв с удовлетворением схему, предложенную в [13]. По заказу FNAL в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна) был разработан проект системы электронного охлаждения для накопителя «Resusler» на базе модифицированного бетатрона. Параллельно в FNAL было начато создание тестовой установки MARK-M. Работа, к сожалению, не была закончена, ввиду успешного завершения тестовых испытаний прототипа системы электронного охлаждения на основе высоковольтного электростатического ускорителя [15].

С целью изучения возможностей применения модифицированного бетатрона для генерации позитрония и антиводорода, а также для электронного охлаждения циркулирующим пучком в ОИЯИ был создан накопитель LEPTA (Low Energy Particle Toroidal Accumulator) [13], физический пуск которого с циркулирующим электронным пучком был осуществлен в сентябре 2004 г.

Модифицированные бетатроны представляют интерес для решения многих задач. Кроме установки ОИЯИ, на различной стадии проработки находится несколько проектов. Так, например, одним из возможных вариантов реализации электронного охлаждения на максимальной энергии синхротрона COSY (Исследовательский центр, Юлих, Германия) является использование накопителя с продольным магнитным полем для охлаждения циркулирующим пучком [16]. В Харьковском физико-техническом институте (Украина) продолжают начатые еще в 1980-е гг. теоретические исследования динамики частиц в ускорителях такого типа [17]. Предполагается использовать модифицированный бетатрон для производства интенсивных позитронных пучков [18] и для радиационной терапии [19].

В данном обзоре описываются принцип работы и варианты конструкции модифицированных бетатронов, методы расчета динамики частиц в накопителях со связанным движением в поперечных плоскостях, особенности накопителей «холодных» пучков (LEPTA) в двух режимах работы: в качестве системы электронного охлаждения с циркулирующим электронным пучком и накопителя позитронов низкой энергии для генерации интенсивных потоков позитрония. Представлены результаты первых экспериментов по изучению динамики электронов в накопителе LEPTA.

## 1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ И ВАРИАНТЫ КОНСТРУКЦИИ МОДИФИЦИРОВАННОГО БЕТАТРОНА

Главным элементом модифицированного бетатрона является соленоид, создающий продольное магнитное поле и имеющий форму тора или «рейс-трека» — прямолинейные соленоиды, соединенные отрезками тороидальных соленоидов. В таком устройстве можно формировать магнитные поля большой напряженности, что обеспечивает эффективную фокусировку пучка частиц. В первом приближении частицы движутся вдоль силовых линий поля, если кривизна силовых линий достаточно мала:

$$R_B \gg \rho_L = \frac{pc}{eB_0}, \quad p = \gamma mv, \quad (1.1)$$

здесь  $R_B$  — радиус кривизны силовых линий;  $\rho_L$  — ларморовский радиус частицы с зарядом  $e$  и импульсом  $p$  в магнитном поле  $B_0$ ;  $c$  — скорость света. Подчеркнем, что везде ниже параметр  $\rho_L$  определен как алгебраическая величина (т. е. «со знаком», зависящим от направления поля  $B_0$ ).

В однородном или слабонеоднородном магнитном поле нет выделенной (равновесной) траектории частицы, ее движение безразлично к положению силовой линии в пространстве. Поэтому любые возмущения движения — неоднородности поля, центробежная сила инерции на участках тороидального поля и т. п. — вызывают дрейф частиц в поперечном направлении. Для его устранения используют два метода — наложение неоднородного поперечного поля на тороидальных участках или спирального квадрупольного поля на одном из участков траектории. В последнем случае модифицированный бетатрон носит название *стеллатрон*, по аналогии с плазменными установками — стеллараторами, имеющими похожую фокусирующую систему.

Динамика частиц в модифицированном бетатроне рассмотрена в разд. 2, 3.

Ускоряющая система модифицированного бетатрона основана на том же принципе, что и в классическом бетатроне: вихревое электрическое поле создается переменным во времени потоком магнитного поля, пронизывающим орбиту. Конструктивно ускоряющие системы могут существенно различаться (см. описание бетатронов ниже).

Конечно, отсутствие «открытых» участков орбиты, свободных от обмоток соленоидов, заметно усложняет сооружение устройств инжекции и диагностики пучка. Первым, относительно успешно работавшим ускорителем такого типа был модифицированный бетатрон UCI (США) [5]. На рис. 1 приведена схема варианта конструкции с использованием стеллараторных обмоток. Центральный соленоид создает магнитный поток, необходимый для ускорения, пара катушек Гельмгольца — вертикальное бетатронное («поворотное») поле. Тороидальное поле образовано набором из 24 катушек, равно-

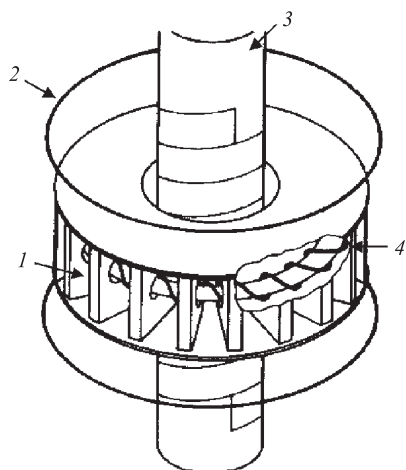


Рис. 1. Схема стеллатрона UCI [5]: 1 — обмотки тороидального поля; 2 — обмотки вертикального поля; 3 — центральный соленоид; 4 — спиральные обмотки

мерно расположенных вдоль равновесной орбиты по периметру стеклянной вакуумной камеры. Спиральная обмотка квадрупольного поля расположена внутри катушек тороидального поля — это четыре проводника, навитые на тор вакуумной камеры. Малый радиус этого тора примерно равен 8 см, проводники соединены попарно и запитаны токами встречного направления. Число полных периодов спирали равно 12.

Инжекция пучка в стеллатрон UCI осуществлялась в течение нескольких десятков оборотов пучка, что позволяло накопить ток  $\sim 100$  А. Инжектор — подогреваемая нить — располагался непосредственно в камере бетатрона в окрестности равновесной орбиты. Вихревое ускоряющее («бетатронное») электрическое поле создавалось переменным во времени потоком магнитного поля центрального соленоида. В результате экспериментов на этой установке пучок с током  $\sim 200$  А был ускорен до энергии 4 МэВ. На завершающей стадии процесса ускорения наблюдались существенные потери электронов из-за развития неустойчивости пучка на резонансах быстрой (ларморовской) моды колебаний. Проблему эффективного вывода ускоренного пучка окончательно решить не удалось.

В UCI был разработан и исследован так называемый «удлиненный» модифицированный бетатрон МЕВА (Modified Elongated Betatron), предназначенный для ускорения ленточного пучка (рис. 2) [6]. Однако ток ускоренных частиц, достигнутый на этой установке, был даже меньше, чем в стеллатроне.

В модифицированном бетатроне МВА типа стеллатрона Лаборатории военно-морского флота США [7] (рис. 3) инжекция пучка осуществлялась от внешнего ускорителя, пучок подавался в камеру бетатрона поперек силовых линий продольного магнитного поля (табл. 1). На равновесную орбиту инжектированный пучок захватывался из-за развития резистивной неустойчивости. Устойчивое ускорение пучка удалось осуществить до энергии  $\sim 16$  МэВ, после чего начинались быстрые потери частиц, которые регистрировались по всплескам рентгеновского излучения при энергиях, соответствующих целым резонансам быстрой моды колебаний.

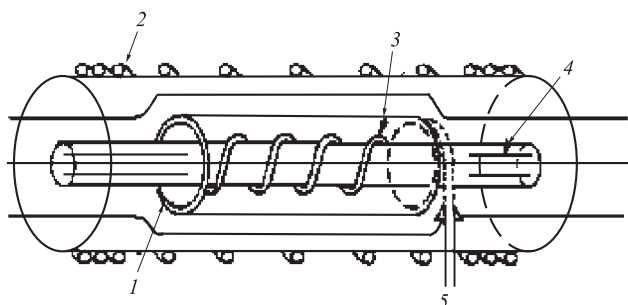
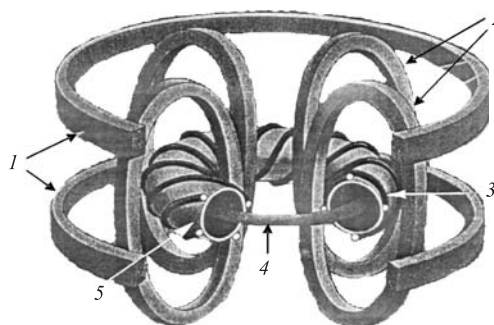


Рис. 2. Модифицированный бетатрон МЕВА: 1 — электронный пучок; 2 — катушка полоидального поля; 3 — катушка бетатронного поля; 4 — обмотка тороидального поля; 5 — инжектор

Рис. 3. Модифицированный бетатрон МВА [6]: 1 — вертикальные (бетатронные) обмотки; 2 — обмотки тороидального поля; 3 — обмотки спирального поля; 4 — электронное кольцо; 5 — вакуумная камера



Интересная схема фокусировки и инжекции частиц была предложена и экспериментально исследована на установке САТЕ (рис. 4) [8]. Это был первый модифицированный бетатрон с прямолинейными промежутками (рейстрек).

Для фокусировки циркулирующего пучка использовалась система соленоидов со встречными направлениями полей. Однооборотная инжекция электронного пучка осуществлялась с помощью электрического кикера, который располагался в прямолинейной секции накопителя внутри соленоида большого диаметра. К точке инжекции пучок подводился отдельным соленоидом, который был введен непосредственно внутрь соленоида прямолинейной секции накопителя. На этой установке была продемонстрирована эффективность предложенной схемы инжекции: на первом обороте захватывалось почти 100 % инжектируемого тока. Однако больше двух оборотов пучка в накопителе получить не удалось. Наиболее вероятное объяснение этого факта состоит в том, что поле соленоида, подводящего пучок из инжектора к накопителю, сильно возмущало движение частиц на равновесной орбите.



Таблица 1. Параметры стеллатронов UCI и МВА

Параметр	UCI	МВА
Энергия, МэВ	4	20
Вакуумная камера		
Большой радиус, см	41	100
Вакуум, Торр	$10^{-7}$	$10^{-7}-10^{-8}$
Инжектор электронов		
Энергия, кэВ	$\leq 30$	600
Длительность импульса, мкс	$\leq 5$	Нет свед.
Ток эмиссии, А	3–4	$\leq 900$
Тороидальное поле		
Напряженность, Тл	1,2	0,34–0,8
Азимутальная однородность, %	$< \pm 2$	1
Вертикальное поле		
Напряженность, кГс	$\leq 0,5$	0,34–2,13
Спиральный квадруполь		
Максимальный ток, кА	30	$\sim 1$
Длина катушки, см	2	6,28
Число периодов спирали	6	12
Градиент поля, Гс/см	Нет свед.	31

В азимутально-однородных модифицированных бетатронах UCI, МЕВА, МВА (рис. 1–3) ускорение электронного пучка осуществлялось вихревым электрическим («бетатронным») полем, возникающим при изменении во времени потока магнитного поля сквозь орбиту (см. п. 4.3). В варианте конструкции ускорителя с прямолинейными секциями возможно использование бетатронного сердечника (индуктора), помещенного вне соленоида и экранов основных магнитных полей. Ускоряющее напряжение, генерируемое индуктором, прикладывается в этом случае к зазору внутри вакуумной камеры. Такая конструкция ускоряющей системы предлагалась, например, для установки САТЕ.

Модифицированный бетатрон, созданный в ОИЯИ [20], имеет секционированную структуру и короткую спиральную обмотку квадрупольного поля, которая, в отличие от описанных стеллатронов, присутствует лишь на небольшом участке орбиты. Разработка установки осуществлялась при поддержке FNAL (США) в рамках проекта системы электронного охлаждения накопителя антипротонов «Recycler» [21]. Поэтому основные параметры этой

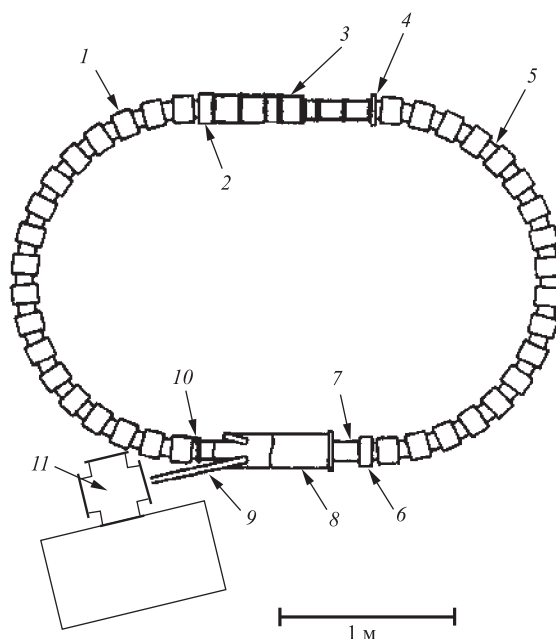


Рис. 4. Установка SATE: 1 — элемент фокусировки и поворота пучка; 2, 6 — ускоряющие зазоры; 3 — оптическая диагностика; 4, 10 — мониторы; 5 — вакуумная камера; 7 — малый соленоид; 8 — инфлектор; 9 — канал инжекции; 11 — электронная пушка и инжектор

установки (табл. 2), такие как предельные значения продольного и поперечного полей, тока циркулирующего пучка, были выбраны в соответствии с этой задачей. Модифицированный бетатрон ОИЯИ предполагается использовать в двух вариантах. Первый — индукционное ускорение электронов до энергии в несколько МэВ для системы электронного охлаждения с циркулирующим электронным пучком. Этот проект носит название МОВУ (Modified Betatron prototype). Второй вариант — накопление без ускорения циркулирующего пучка позитронов с энергией до 10 кэВ с электронным охлаждением позитронов. Этот вариант бетатрона ОИЯИ назван ЛЕРТА.

В накопителе ЛЕРТА (рис. 5) циркулирующий позитронный пучок совмещается с однопролетным электронным в секции охлаждения, и оба пучка имеют одинаковые средние скорости. При рекомбинации позитронов и электронов образуются атомы позитрония, которые покидают магнитную систему накопителя и могут быть использованы для проведения исследований. На потоках позитрония в вакууме можно реализовать ряд экспериментов в прин-

Таблица 2. Основные параметры установки МОВУ/ЛЕПТА

Параметры кольца	МОВУ	ЛЕПТА
Периметр, м	18,28	17,17
Продольное магнитное поле, Гс	1000	400
Радиус тороидов, м	1,45	
Поперечное магнитное поле в тороидах, Гс	1,75–124	
Длина спирального квадрупольного магнитного поля, м	1,6	
Число шагов спирали	2	
Градиент квадрупольного магнитного поля, Гс/см	10–20	
Радиус электронного пучка, см	1	
Давление остаточного газа, Торр	$10^{-10}$	
Параметры электронного пучка		
Энергия, кэВ	4360	10
Ток, А	0,1	0,5
Период обращения, нс	60	300
Параметры позитронного пучка		
Энергия, кэВ	—	10
Число частиц	—	$1 \cdot 10^9$
Радиус пучка, см	—	0,5
Время жизни пучка, с	—	100
Цикл ускорения		
Амплитуда индукционного напряжения, В	50	—
Частота повторений, Гц	1	—

ципиально новой постановке без возмущающего влияния среды, неизбежного при традиционных методах генерации позитрония в мишенях. Величина продольного магнитного поля может быть снижена до 400 Гс, и отсутствие ускорения позитронов упрощает требования к поворотным полям. Накопитель представляет собой кольцевую систему соленоидов, помещенных в общий магнитный экран, состоящую из двух тороидальных и двух прямых линейных секций, с размещенной внутри вакуумной камерой. В специальных ответвлениях находятся коллектор электронов и источник позитронов. Про-

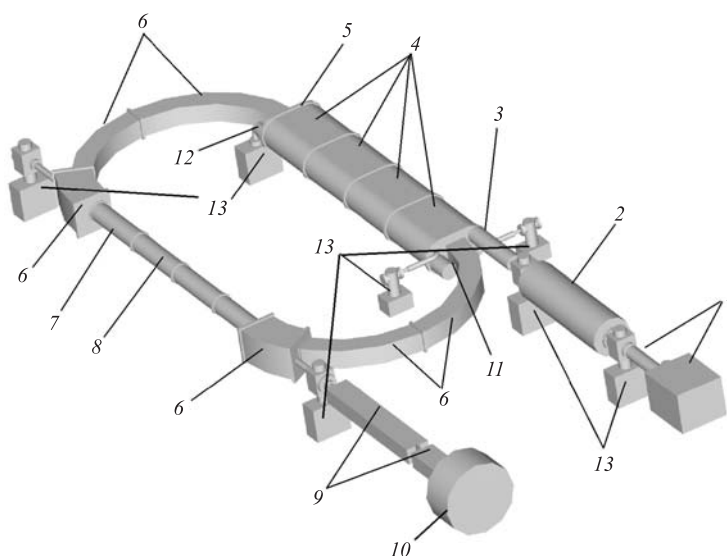


Рис. 5. Схема накопителя LEPTA: 1 — форинжектор; 2 — позитронная ловушка; 3 — секция инъекции позитронов; 4 — септумные соленоиды; 5 — кикер (расположен внутри септумного соленоида); 6 — тороидальные соленоиды; 7 — соленоид и квадрупольная катушка; 8 — секция электронного охлаждения, прямолинейный соленоид; 9 — дипольный анализирующий магнит; 10 — координатно-чувствительный детектор; 11 — электронная пушка; 12 — коллектор электронов; 13 — вакуумный насос

блема инъекции пучка в накопитель решена за счет использования септумных обмоток специальной конструкции (рис. 6) и электрического кикера. Такая схема, предложенная в [11, 12], в отличие от систем инъекции, применяемых в установках UCI, SATE, не возмущает движение пучка на равновесной орбите. Это достигается благодаря тому, что обмотки септумного (горизонтального) магнитного поля, перпендикулярного продольному полю соленоидов, выполнены в виде четырех наборов токнесущих пластин. Направления токов в пластинах выбраны так, что поперечное поле имеет полоидальную форму: оно создается между двумя верхними наборами и двумя нижними, а в среднем зазоре поле отсутствует. Здесь проходит орбита циркулирующего пучка. Позитронный пучок инжектируется в верхний зазор и смещается влево, попадая на выходе в вертикальную плоскость над орбитой циркулирующего пучка. Импульсный электростатический кикер, расположенный за септумом, опускает пучок в медианную плоскость. Инжекция однооборотная — длительность импульса напряжения на кикере равна периоду обращения частиц. Для совмещения и разведения электронного и позитронного пучков

используется центробежный дрейф электронов на тороидальных участках накопителя, что также является оригинальной чертой данного проекта. Центробежный дрейф возникает на тороидальных участках кольца. Для позитронов он компенсирован наложением вертикального поворотного поля (см. формулу (2.2)). Для электронов это поле имеет направление, противоположное необходимому для компенсации дрейфа, поэтому для них величина дрейфа удваивается. Электроны инжектируются ниже медианной плоскости, смещаются в септуме вправо к равновесной орбите позитронов и, проходя первый тор, попадают на ось позитронного пучка в прямолинейной секции охлаждения. Во втором торе, электроны претерпевают дрейф еще раз вверх и, войдя в септум выше медианной плоскости, смещаются в верхнем зазоре септума влево и попадают на его выходе в коллектор. Режим работы электронного пучка непрерывный, коллектор помещен под потенциал, превышающий потенциал катода на  $\sim 1$  кВ (схема рекуперации энергии). Электронный пучок включается одновременно с выключением кикера.

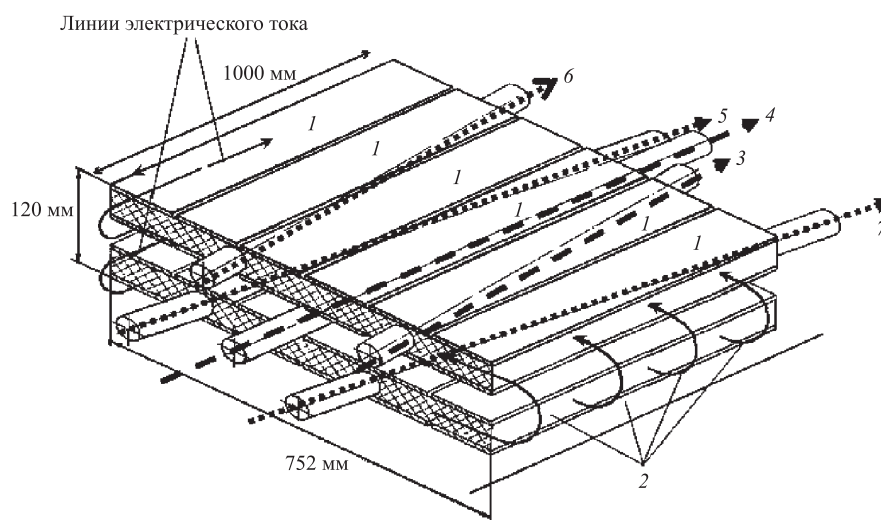


Рис. 6. Схема септума установки МОВУ/ЛЕРТА: 1 — пластины-проводники тока, формирующие септумное поле; 2 — силовые линии септумного поля; 3 — позитронный пучок из инжектора; 4 — циркулирующий позитронный пучок; 5 — электронный пучок из пушки; 6 — вывод электронного пучка в коллектор; 7 — вывод позитронного пучка

При использовании накопителя LEPTA для генерации позитрония величина продольного магнитного поля определяется из требований совмещения

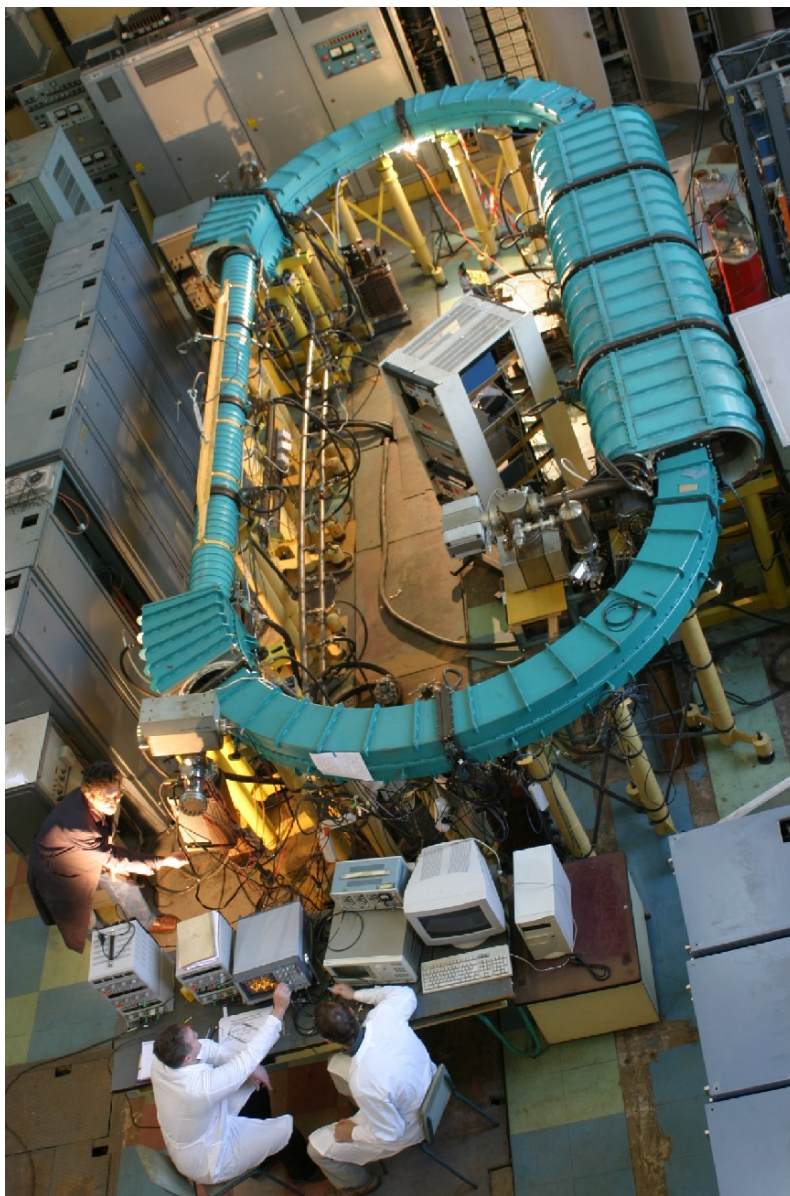


Рис. 7. Общий вид бетатрона МОБУ/ЛЕПТА

циркулирующего позитронного пучка и однопролетного электронного и составляет 400 Гс при энергии позитронов 10 кэВ. Величина поворотного поля составляет менее 2 Гс. Фокусировка с использованием градиента этого поля (см. п. 2.1) неэффективна, поэтому показатель спада выбран равным нулю. Спиральная квадрупольная обмотка с адиабатическим изменением градиента поля на входе и выходе размещается внутри соленоида секции охлаждения и имеет длину 1,6 м при шаге спирали 0,8 м. Каркас обмотки состоит из квадратных рамок размером  $12 \times 12$  см, размещенных на вакуумной камере равномерно вдоль оси квадруполья с поворотом каждой рамки относительно предыдущей на угол  $4\pi/N_{\text{frame}}$ ,  $N_{\text{frame}}$  — число рамок. Токонесущие проводники уложены по сторонам рамок, по 20 штук на каждой стороне. Таким образом, они навиты вокруг оси квадруполья, который имеет в результате форму «линзы Панофского» [22] в каждом поперечном сечении. Достоинством конструкции является постоянство градиента поля по радиусу. Градиент поля такой линзы равен

$$G = \frac{4\pi NI}{ch^2}, \quad (1.2)$$

где  $N$  — число проводников на одной стороне рамки  $2h \times 2h$ ;  $I$  — ток в проводниках.

В сентябре 2004 г. на установке LEPTA (рис. 7) был получен первый циркулирующий электронный пучок в диапазоне энергий 1–10 кэВ. В разд. 5 дано описание первых экспериментов с циркулирующим электронным пучком на установке LEPTA.

## 2. ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В МОДИФИЦИРОВАННОМ БЕТАТРОНЕ

Как уже отмечалось, модифицированные бетатроны по своей конструкции во многом аналогичны токамакам и стеллатронам. Поэтому методы анализа динамики частиц в этих установках могут применяться и для модифицированных бетатронов. Они работают, однако, в случае достаточной «замагниченности» частиц, когда их ларморовский радиус в магнитном поле бетатрона много меньше радиуса кривизны силовой линии поля (условие (1.1)). Это так называемое дрейфовое приближение, которое зачастую нарушается в модифицированных бетатронах, где продольная (вдоль вектора  $\mathbf{B}$ ) компонента импульса частицы много больше поперечных к полю. В этом случае требуется более строгое решение. В случае азимутальной симметрии фокусирующей структуры уравнения движения частиц имеют один и тот же вид вдоль всей орбиты пучка и достаточно исследовать их на наличие устойчивых решений. В случае секционированной структуры (магнитная система состоит

из тороидальных соленоидов, соединенных между собой прямолинейными соленоидами) могут быть применены методы анализа, развитые в теории ускорителей с жесткой фокусировкой. Оба подхода — плазменно-дрейфовый и ускорительный, приведены ниже.

В этом разделе рассмотрено движение частицы в модифицированном бетатроне с градиентным поворотным полем и стеллатроне при условии отсутствия пространственного заряда циркулирующего пучка (одночастичное приближение). Принцип работы стеллатрона описан в дрейфовом приближении, на примере движения частицы в прямолинейном соленоиде с дополнительным спиральным квадрупольным полем. Влияние полей пространственного заряда анализируется в п. 4.2.

**2.1. Бетатрон с градиентным поворотным полем.** Основные особенности динамики движения заряженной частицы в модифицированном бетатроне с градиентным поворотным полем можно объяснить, рассматривая движение заряженной частицы в магнитных полях тороидального соленоида и поперечного поля, спадающего по радиусу. Рассмотрим движение частицы в таком поле в торе, введя цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии тора, а радиальная координата частицы отсчитывается от центра тора (рис. 8).

Уравнения движения частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  в этой системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \gamma m \ddot{r} - \gamma m \dot{\theta}^2 r = \frac{e}{c} (r \dot{\theta} B_z - \dot{z} B_\theta), \\ \gamma m \ddot{z} = \frac{e}{c} (\dot{r} B_\theta - r \dot{\theta} B_r), \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = v/c, \end{cases} \quad (2.1)$$

$v$  — полная скорость частицы;  $c$  — скорость света. Частица, траектория которой совпадает с окружностью с радиусом  $R_0$ , а скорость равна  $v_0$ , называется *равновесной*. Заранее ясно, что условие существования такой частицы есть равенство

$$p_\theta c = -e B_z(R_0) R_0, \quad p_\theta = \gamma m R_0 \dot{\theta}, \quad \dot{r} = \dot{z} = \dot{\theta}, \quad (2.2)$$

которое ниже получим также из уравнений (2.1). Перейдем в систему координат  $(x, z, s)$ , связанную с траекторией равновесной частицы:

$$x = r - R_0, \quad ds = r d\theta, \quad (2.3)$$

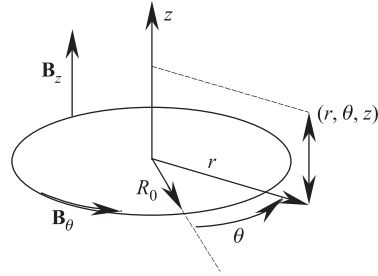


Рис. 8. Цилиндрическая система координат для описания движения частицы в тороидальном  $B_\theta$  и поворотном  $B_z$  магнитных полях,  $R_0$  — радиус поворота (большой радиус тороидального соленоида)



и введем продольную и угловую скорости частицы

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}.$$

Из условия  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$  следует зависимость азимутальной компоненты поля от радиуса:

$$B_{\theta} = B_0 \frac{R_0}{r},$$

где  $B_0$  — величина поля на орбите с радиусом  $R_0$ . Из (2.1) получим систему уравнений движения частицы в координатах  $(x, z)$ :

$$\begin{cases} x'' - \frac{1}{R_0} \frac{1}{1+x/R_0} = \frac{eB_z}{mc\gamma v} - \frac{eB_0}{mc\gamma v} \frac{z'}{1+x/R_0}, \\ z'' = -\frac{eB_r}{mc\gamma v} + \frac{eB_0}{mc\gamma v} \frac{x'}{1+x/R_0}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Производная по  $s$  здесь и ниже обозначена  $(\dots)'$ . В линейном по  $x$ ,  $x'$  и  $z'$  приближении ( $x \ll R_0$ ,  $x'$ ,  $z' \ll 1$ ) система уравнений (2.4) приводится к виду

$$\begin{cases} x'' + \frac{x}{R_0^2} + \frac{z'}{\rho_L} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\rho_L} \frac{B_z}{B_0}, \\ z'' - \frac{x'}{\rho_L} = \frac{1}{\rho_L} \frac{B_r}{B_0}, \end{cases} \quad (2.5)$$

здесь  $\rho_L$  — ларморовский радиус частицы в магнитном поле  $B_0$ :

$$\rho_L = \frac{\gamma m v c}{e B_0}. \quad (2.6)$$

Если поворотное поле  $B_z$  однородное, система уравнений (2.5) имеет частное решение:

$$x = \text{const} = x_0, \quad z' = \frac{\rho_L}{R_0} \left( -\frac{x_0}{R_0} + 1 + \frac{eB_z}{pc} \right) = \text{const}, \quad (2.7)$$

что дает величину скорости центробежно-градиентного дрейфа частицы в тороидальном магнитном поле. Величина смещения частицы по вертикали, вызванного этим дрейфом, составляет

$$\Delta z = z' \Delta s = z' R_0 \Delta \theta, \quad (2.8)$$

где  $\Delta \theta$  — азимутальное смещение частицы в тороидальном соленоиде (рис. 8). Для компенсации центробежного дрейфа и вводится поворотное поле.

Условие точной компенсации дрейфа равновесной частицы ( $x_0 = 0$ ) совпадает с (2.2). Однако однородное поворотное поле не способно компенсировать центробежный дрейф для частицы, движущейся с отклонением от орбиты с радиусом  $R_0$  и имеющей продольную скорость, отличную от равновесной (2.2). Дрейфовое движение такой неравновесной частицы в направлении оси  $z$  за конечное число оборотов уводит ее за апертуру. При этом направление дрейфа зависит от знака  $x_0$ .

Устойчивость движения частиц в окрестности равновесной траектории можно обеспечить, введя спад поворотного поля. Используя принятое определение показателя спада поля

$$n = -\frac{R_0}{B_\perp} \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad (2.9)$$

записываем его компоненты в виде

$$\begin{cases} B_r = -\frac{nB_\perp}{R_0}z, & B_z = B_\perp - \frac{nB_\perp}{R_0}x, \\ B_\perp \equiv B_z(R_0), \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $B_\perp$  — величина поля на равновесной траектории. Тогда при точной компенсации центробежного дрейфа на равновесной орбите система (2.5) приводится к виду

$$\begin{cases} x'' - \frac{z'}{\rho_L} + \frac{(1-n)}{R_0^2}x = 0, \\ z'' + \frac{x'}{\rho_L} - \frac{n}{R_0^2}z = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Характер движения частиц, описываемого этими уравнениями, может быть понят из следующей простой аналогии. Вторые члены уравнений (2.11) описывают движение частицы в продольном магнитном поле, а коэффициенты при членах, содержащих координаты, имеют тот же вид, что и при описании движения в некотором «эффективном» электрическом поле с компонентами

$$\begin{aligned} E_x^{\text{eff}} &= \frac{mv^2}{eR_0^2}nx, \\ E_z^{\text{eff}} &= \frac{mv^2}{eR_0^2}(1-n)z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В полярных координатах ( $r, \varphi$ ), отсчитываемых от равновесной траектории ( $r$ ) и медианной плоскости ( $\varphi$ ), компоненты поля могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
 E_r^{\text{eff}} &= \frac{mv^2}{eR_0^2} \frac{r}{2} [1 + (2n - 1) \cos 2\varphi], \\
 E_\phi^{\text{eff}} &= \frac{mv^2}{eR_0^2} r \frac{\sin 2\varphi}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Движение в скрещенных радиальном электрическом и продольном магнитном полях приводит, как известно, к электрическому дрейфу частиц вокруг равновесной орбиты. В итоге при такой комбинации полей пучок частиц проворачивается на некоторый угол  $\varphi$  вокруг своей оси на каждом обороте в накопителе, а некомпенсированный центробежный дрейф частицы на разных оборотах имеет разное направление, и, в среднем, движение всех частиц пучка устойчиво. Как следует из (2.13), при  $n > 0$  компонента  $E_r^{\text{eff}}$  не обращается в нуль при любых  $\varphi$ .

Условие устойчивого движения может быть получено из анализа собственных значений системы (2.11), которые определяются выражениями

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_L^2} + \frac{1}{R_0^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\rho_L^2} + \frac{1}{R_0^2} \right)^2 - \frac{(1-n)n}{R_0^4}}.$$

При малой энергии частиц или большой величине продольного поля, когда  $\rho_L \ll R_0$ , все четыре собственных числа чисто мнимые:

$$\lambda_{1,2} \approx \pm \frac{i}{\rho_L}, \quad \lambda_{3,4} \approx \pm \frac{i\rho_L \sqrt{(1-n)n}}{R_0^2}, \quad i \equiv \sqrt{-1}.
 \tag{2.14}$$

Первая пара соответствует быстрому (ларморовскому) вращению частицы вокруг силовой линии продольного поля, две других — медленному вращению пучка как целого. Из выражения для  $\lambda_{3,4}$  следует, что медленное вращение пучка будет устойчиво, если

$$0 < n < 1,
 \tag{2.15}$$

как и в ускорителях с «мягкой» фокусировкой. Но, в отличие от классических бетатронов, где частоты вертикальных и горизонтальных колебаний близки по величине, здесь частота ларморовского вращения, как правило, намного превосходит частоту медленного вращения:

$$\omega_L = \frac{\beta c}{2\pi\rho_L} \gg \omega_{\text{slow}} = \frac{\beta c}{2\pi} |\lambda_{3,4}|.$$

**2.2. Частица в стеллатроне. Дрейфовое приближение.** Поворот пучка как целого вокруг оси может быть осуществлен также с помощью дополнительного мультипольного спирального поля, как это осуществляется в стеллатронах, или за счет фокусировки отдельными соленоидами с противоположным

направлением поля. В этом случае для обеспечения устойчивого движения не требуются не только спад поворотного поля, но и само поворотное поле.

Динамика частиц в азимутально-симметричных модифицированных бетатронах и стеллатронах рассматривалась неоднократно [1]. Например, в одночастичном приближении движение частиц в таком стеллатроне исследовано в [11, 12]. Используются также фокусирующая система в форме рейстрекка — прямолинейные и тороидальные соленоиды. В них обмотку квадрупольного поля можно разместить на прямолинейных участках.

Рассмотрим особенности движения частицы в стеллатроне типа рейстрек, в одном из прямолинейных промежутков которого помещена обмотка спирального квадрупольного магнитного поля, а на тороидальных участках наложено однородное поперечное магнитное поле, удовлетворяющее условию (2.2). В дрейфовом приближении (1.1) частица в прямолинейных секциях стеллатрона движется вдоль силовой линии магнитного поля, уравнение для которой получим, воспользовавшись выражениями для компонент спирального квадрупольного поля [11, 12]:

$$\begin{aligned} B_x &= -G(x \sin \psi - z \cos \psi), \\ B_z &= G(x \cos \psi + z \sin \psi), \quad \psi = 2ks, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$G$  — градиент квадрупольного поля (см. (1.2));  $k = 2\pi/h$ ,  $h$  — шаг спирали обмотки квадрупольного поля. Уравнение силовой линии найдем из известных соотношений

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{ds}{B_0}.$$

Здесь, как и прежде,  $B_0$  — однородное магнитное поле прямолинейного соленоида. Отсюда следует система уравнений, решение которой дает уравнение силовой линии:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -\frac{G}{B_0}(x \sin \psi - z \cos \psi), \\ \frac{dz}{ds} = \frac{G}{B_0}(x \cos \psi + z \sin \psi). \end{cases} \tag{2.17}$$

Введем комплексную переменную

$$u = x + iz, \tag{2.18}$$

умножим второе уравнение (2.17) на  $i$  и сложим с первым. Получим

$$\frac{du}{ds} = igu^* e^{i\psi}, \quad g \equiv \frac{G}{B_0}. \tag{2.19}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$u(s) = A(s) e^{i\varphi(s)}. \tag{2.20}$$

Подставив это решение в (2.19) и приравняв друг другу показатели экспонент, найдем  $\varphi(s)$  и уравнение для  $A(s)$ :

$$\varphi(s) = \frac{\psi(s)}{2} = ks, \quad A' + ikA = igA^*. \quad (2.21)$$

Поскольку  $A(s)$  — комплексная, вообще говоря, функция, представим ее в виде

$$A(s) = a(s) + ib(s),$$

где  $a(s)$  и  $b(s)$  — действительные функции. Подставив  $A(s)$  в (2.21) и разделив действительную и мнимую части равенства, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a' - (k+g)b = 0, \\ b' + (k-g)a = 0, \end{cases}$$

решение которой есть линейная комбинация функций  $\sin \kappa x$  и  $\cos \kappa x$ . А это позволяет искать решение опять-таки в комплексной форме:

$$a(s) = C_{a1} e^{i\kappa_1 s} + C_{a2} e^{i\kappa_2 s}, \quad b(s) = C_{b1} e^{i\kappa_1 s} + C_{b2} e^{i\kappa_2 s},$$

что приводит к характеристическому уравнению, корни которого

$$\kappa_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 - g^2} \equiv \pm \kappa. \quad (2.22)$$

Дальнейшая, хотя и громоздкая, но вполне стандартная процедура вычислений, с учетом начальных условий

$$u(0) = x_0 + iz_0$$

приводит к уравнениям силовой линии:

$$\begin{cases} x_B(s) = x_0 \left( \cos \kappa s \cos ks + \frac{\kappa}{k+g} \sin \kappa s \sin ks \right) + \\ \quad + z_0 \left( -\cos \kappa s \sin ks + \frac{k+g}{\kappa} \sin \kappa s \cos ks \right), \\ z_B(s) = x_0 \left( \cos \kappa s \sin ks - \frac{\kappa}{k+g} \sin \kappa s \cos ks \right) + \\ \quad + z_0 \left( \cos \kappa s \cos ks + \frac{k+g}{\kappa} \sin \kappa s \sin ks \right). \end{cases} \quad (2.23)$$

В приближении слабого градиента  $k \gg g$  эти выражения принимают вид

$$\begin{cases} x_B(s) \approx x_0 \left( \cos Q_0 s + \frac{\chi}{2} \cos 2ks \right) - z_0 \left( \sin Q_0 s - \frac{\chi}{2} \sin 2ks \right), \\ z_B(s) \approx x_0 \left( \sin Q_0 s + \frac{\chi}{2} \sin 2ks \right) + z_0 \left( \cos Q_0 s - \frac{\chi}{2} \cos 2ks \right), \end{cases}$$

$$Q_0 \equiv \frac{G^2}{2kB_0^2}, \quad \chi = \frac{g}{k} = \frac{G}{kB_0}. \tag{2.24}$$

Из (2.23) видно, что координаты точки на силовой линии можно описывать в форме матричного преобразования

$$\begin{pmatrix} x_B(s) \\ z_B(s) \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} x_B(0) \\ z_B(0) \end{pmatrix}, \quad \det M_B = 1. \tag{2.25}$$

Последнее равенство означает, что точка, движущаяся по силовой линии (2.23), удовлетворяет условию оптического преобразования, т. е. сохранению фазового объема множества точек  $(x(s), z(s))$  — известная теорема Лиувилля. Отметим, что при  $G \rightarrow 0$  матрица  $M_B$  становится единичной. Детерминант матрицы приближенного преобразования (2.24) равен единице с точностью до  $(\chi^2/4)$ .

Точка на силовой линии в плоскости  $(x, z)$  описывает кривую (рис. 9, а), являющуюся результатом быстрого, с периодом  $\Delta s = \pi/k$ , и медленного вращений. Это легко усмотреть из выражений (2.24). За один проход спи-

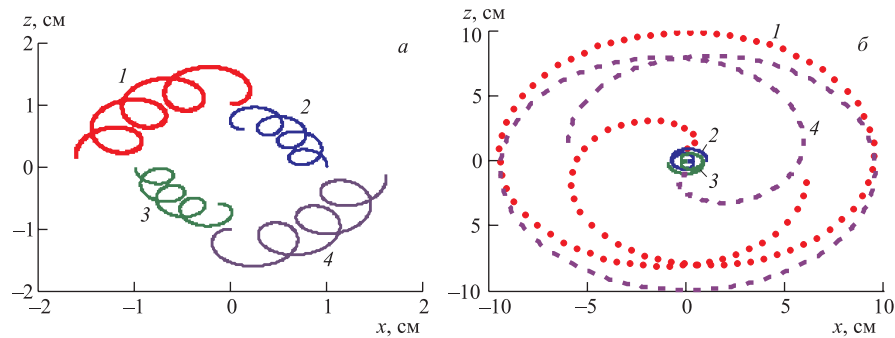


Рис. 9. Проекция на плоскость  $(x, z)$  силовой линии магнитного поля, сформированного прямым соленоидом и спиральным квадруполем:  $B_0 = 400$  Гс,  $G = 15$  Гс/см (а) и 30 Гс/см (б),  $L = 2h = 160$  см, начальные координаты силовых линий  $x_0, z_0 = 0, 1$  (1); 1, 0 (2); -1, 0 (3); 0, -1 (4). Правая спираль — вращение силовой линии против часовой стрелки. Случай б соответствует  $\kappa = 0,016$

рального квадрупольной длиной  $L$  точка совершает поворот вокруг оси  $s$  на угол

$$\Delta\varphi \approx Q_0 L. \quad (2.26)$$

При этом направление вращения не зависит от направления поля соленоида  $\mathbf{B}_0$ , а определяется направлением вращения спирали квадрупольной. При  $k > 0$  это правый винт (рис. 9, ось  $z$  направлена «на нас»!). Соответственно параметр  $Q_0$  — алгебраическая величина, знак которой совпадает со знаком  $k$ .

Из (2.22) следует критерий ограниченности смещения силовой линии от оси квадрупольной:

$$g < k, \quad \text{или} \quad G < G_{\text{cr}} = kB_0. \quad (2.27)$$

Фактически это критерий замкнутости магнитных поверхностей, на которые «навивается» силовая линия. При  $G \rightarrow G_{\text{cr}}$  силовая линия уходит от оси неограниченно далеко (рис. 9, б).

Напомним, что в дрейфовом приближении силовая линия ((2.23) и (2.24)) совпадает с траекторией частицы на этом участке.

На тороидальных участках стеллатрона, где наложено однородное поворотное магнитное поле  $B_{\perp}$ , частица испытывает дрейф вдоль направления оси тора, если значения поворотного поля или импульса частицы отличаются от равновесных (2.2) на  $\Delta B_{\perp}$ ,  $\Delta p$  соответственно, или же частица движется со смещением от равновесной орбиты. Тогда из (2.5) следует, аналогично (2.7), величина скорости дрейфа

$$z' = \frac{\rho L}{R_0} \left( \Delta_B - \Delta_p + \frac{x}{R_0} \right), \quad \Delta_B \equiv \frac{\Delta B_{\perp}}{B_0}, \quad \Delta_p = \frac{\Delta p}{p}. \quad (2.28)$$

Смещение частицы вдоль оси  $z$  при прохождении отрезка тороидального соленоида длиной  $\Delta s = R_0 \Delta\theta$  составляет  $\Delta z_d = z' \Delta s = z' R_0 \Delta\theta$ . Поэтому за один оборот в стеллатроне ( $\Delta\theta = 2\pi$ ) частица смещается на

$$\Delta z_d^{(1)} = 2\pi \rho L \left( \Delta_B - \Delta_p + \frac{x}{R_0} \right). \quad (2.29)$$

В частности, в отсутствие поворотного поля ( $\Delta_B = 1$ ,  $\Delta_p = 0$ ) дрейфовое смещение за один оборот равно

$$\Delta z_d^{(1)} (B_{\perp} = 0) = 2\pi \rho L.$$

Подчеркнем, что направление дрейфа зависит от направления поля  $\mathbf{B}_0$ . Поэтому, как отмечалось выше, ларморовский радиус здесь и при описании эффектов дрейфа является алгебраической величиной («определен со знаком»), знак которой соответствует знаку поля в системе координат  $(x, z, s)$ .

Дрейфовое движение частицы в стеллатроне можно, как следует из (2.28), (2.29), описать в виде матричных соотношений

$$\begin{pmatrix} x_d \\ z_d \\ \Delta p \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\pi\rho_L}{R_0} & 1 & -2\pi\rho_L \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ z_d \\ \Delta p \end{pmatrix}_n, \quad (2.30)$$

где  $n$  — номер оборота. Вместе с (2.25) это выражение позволяет записать матрицу преобразования координат частицы  $(x, z, \Delta p)$  на периоде обращения. Поскольку матрица преобразования для прямолинейных соленоидов, свободных от квадрупольного поля, единичная, то искомая матрица равна просто произведению матриц (2.25) и (2.30). Усреднив по быстрому вращению в квадруполе, найдем в приближении  $k \gg g$

$$M = \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ \varepsilon C + S & -\varepsilon S + C & -\varepsilon R_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$C \equiv \cos Q_0 L, \quad S \equiv \sin Q_0 L, \quad \varepsilon = 2\pi \frac{\rho_L}{R_0}.$$

Собственные значения этой матрицы:

$$\lambda_{1,2} = C - \frac{\varepsilon S}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(C - \frac{\varepsilon S}{2}\right)^2}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (2.32)$$

Их произведение, «как и положено», равно единице:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1,$$

и движение частицы в дрейфовом приближении устойчиво, если подкоренное выражение в  $\lambda_{1,2}$  положительно:

$$\left(C - \frac{\varepsilon S}{2}\right)^2 < 1,$$

или

$$-(1 - \cos Q_0 L) < \frac{\pi\rho_L}{R_0} \sin Q_0 L < 1 + \cos Q_0 L. \quad (2.33)$$

Несложный анализ показывает, что эти условия выполняются при

$$\pi\rho_L < R_0, \quad Q_0 > 0$$

и при любых направлениях поля соленоидов и вращения спирали квадруполя.



Условие устойчивости совпадает с известным условием

$$-1 < \cos \mu = \frac{1}{2} \text{Sp } M_{x,z} < 1, \quad (2.34)$$

где в данном случае  $\mu$  — набег фазы медленного вращения силовой линии на одном обороте частицы в стеллатроне;  $M_{x,z}$  — «укороченная матрица»:

$$M_{x,z} = \begin{pmatrix} C & -S \\ \varepsilon C + S & -\varepsilon S + C \end{pmatrix}.$$

Матрица (2.31) позволяет получить также значения дисперсионной функции  $D(s)$  стеллатрона в дрейфовом приближении. Повторяя стандартный прием вычисления  $D(s)$  (см., например, [22]) и учитывая периодичность структуры стеллатрона, находим

$$\begin{aligned} D_x(s^*) &= \frac{m_{13}(1 - m_{22}) + m_{12}m_{23}}{2(1 - \cos \mu)} = \frac{\varepsilon SR_0}{2(1 - C) + \varepsilon S}, \\ D_z(s^*) &= \frac{m_{23}(1 - m_{11}) + m_{13}m_{21}}{2(1 - \cos \mu)} = -\frac{\varepsilon SR_0(1 - C)}{2(1 - C) + \varepsilon S}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь  $m_{ik}$  — элементы матрицы  $M$  (2.31);  $s^*$  — координаты точек между выходом из первого тора и входом в квадруполь и между выходом из квадруполя и входом во второй тор (см. рис. 5). На этих отрезках траектории частица движется вдоль прямолинейных силовых линий и дисперсионная функция постоянна. В квадруполе обе функции осциллируют. Детали поведения дисперсионной функции дает матричный анализ, результаты которого для накопителя ЛЕРТА приведены в п. 4.4 (рис. 20).

Если  $|\sin Q_0 L| \sim |\cos Q_0 L| \sim 0,5$ , то приближенно можно принять

$$D_x(s^*) \approx \frac{\varepsilon SR_0}{2(1 - C)} = \frac{\pi \rho_L S}{(1 - C)}, \quad D_z(s^*) \approx -\frac{\varepsilon SR_0}{2} = -\pi \rho_L S. \quad (2.36)$$

Таким образом, максимальные значения дисперсионных функций составляют

$$(D_x)_{\max} \sim (D_z)_{\max} \sim \pi \rho_L.$$

Соотношения (2.36) для дисперсионных функций позволяют найти коэффициент дисперсии частоты обращения по импульсу

$$\eta = \frac{p}{\omega} \frac{d\omega}{dp}. \quad (2.37)$$

Поскольку  $\omega = 2\pi \frac{v}{C_{\text{ring}}}$ , то

$$\eta = \gamma m \left( \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)^{-1} - \frac{v}{C_{\text{ring}}} \frac{\partial C_{\text{ring}}}{\partial p} \right).$$

В стеллатроне изменение длины орбиты с импульсом  $\Delta C_{\text{ring}}$  имеет место в торах:

$$\Delta C_{\text{ring}} = 2\pi\Delta x_p = 2\pi\psi_x(s^*) \frac{\Delta p}{p}.$$

Соответственно находим

$$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{\text{tr}}^2}, \quad \gamma_{\text{tr}}^{-2} = \frac{4\pi^2 \rho_L}{C_{\text{ring}}} \frac{\sin Q_0 L}{2(1 - \cos Q_0 L) + \varepsilon \sin Q_0 L}, \quad (2.38)$$

где  $\gamma_{\text{tr}} mc^2$  — так называемая *критическая (transition) энергия*. При  $Q_0 L \ll 1$  и  $\varepsilon \ll 1$  получаем

$$\gamma_{\text{tr}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Q_0 L C_{\text{ring}}}{\rho_L}}. \quad (2.39)$$

Заметим, что для аксиально-симметричного бетатрона, в котором спиральный квадруполь занимает весь периметр, в этом соотношении следует положить  $L = C_{\text{ring}} = 2\pi R_0$ , что дает [11, 12]

$$\gamma_{\text{tr}} \approx \sqrt{\frac{R_0}{\rho_L}} Q_0.$$

Важной особенностью полученного значения  $\gamma_{\text{tr}}$  является зависимость этой величины от направления магнитного поля (знак параметра  $\rho_L$ ). При  $\rho_L < 0$  и  $Q_0 > 0$  значение  $\gamma_{\text{tr}}$  является мнимым, а параметр  $\eta$  всегда положителен.

**2.3. Частица в спиральном квадрупольном и однородном соленоидальном полях. Аналитическое решение.** В работе [11, 12] получено аналитическое решение уравнений движения частицы в аксиально-симметричном стеллатроне, где обмотка спирального квадруполя покрывает всю траекторию пучка. Аналогично можно проинтегрировать аналитически уравнения движения частицы в прямолинейном соленоиде и в присутствии спирального квадрупольного поля. Это решение представляет интерес для анализа движения частиц в стеллатроне типа рейстрек.

Получим исходные уравнения движения в декартовой системе координат  $(x, y, s)$ , положив в (2.5)  $R_0 = \infty$  и заменив  $B_r$  на  $B_x$ , азимутальную компоненту поля на  $B_\theta \equiv B_0 = \text{const}^*$ . Как и в (2.5), ограничимся линейным (параксиальным) приближением  $x \ll R_0$ ,  $x', z' \ll 1$ . Подставляя значения

---

\*Следует обратить внимание на изменение порядка осей при переходе от системы  $(r, \theta, z)$  к  $(x, z, s)$ . С этим связано различие в знаках членов уравнений (2.5) и (2.7).

$B_x, B_z$  (2.16), приходим к уравнениям

$$\begin{cases} x'' - \frac{z'}{\rho_L} = -\frac{g}{\rho_L}(x \cos \psi + z \sin \psi), \\ z'' + \frac{x'}{\rho_L} = -\frac{g}{\rho_L}(x \sin \psi - z \cos \psi). \end{cases} \quad (2.40)$$

Здесь, как и прежде,  $g = G/B_0$ ,  $\psi = 2ks$ . Дальнейшая процедура аналогична (2.18), (2.19), а уравнение, полученное в результате, отличается от (2.19) слагаемым  $u''$ :

$$u'' + \frac{i}{\rho_L}u' + \frac{g}{\rho_L}u^* e^{i\psi} = 0, \quad u = x + iz. \quad (2.41)$$

Решение этого уравнения следует, как и прежде, искать в форме (2.20). Подставив искомое решение в (2.41), находим, что  $\psi = ks$ , а уравнение для  $A(s)$  имеет вид

$$A'' + i(2k + k_L)A' - k(k + k_L)A + gk_L A^* = 0, \quad k_L \equiv \frac{1}{\rho_L}. \quad (2.42)$$

Повторяя прием, использованный выше, т. е. подставив

$$A(s) = a(s) + ib(s),$$

где  $a(s), b(s)$  — действительные функции, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} a'' - (k^2 + k_L k - gk_L)a - (2k + k_L)b' = 0, \\ b'' - (k^2 + k_L k + gk_L)b + (2k + k_L)a' = 0, \end{cases}$$

характеристическое уравнение которой имеет четыре корня

$$\kappa_{1-4} = \pm \left[ k(k + k_L) + \frac{k_L^2}{2} \pm k_L \sqrt{k(k + k_L) + \frac{k_L^2}{4} + g^2} \right]^{1/2}.$$

В приближении слабого градиента и замагниченной частицы

$$g \ll k \ll k_L$$

это выражение можно разложить (с точностью до членов порядка  $k^2$  и  $g^2$ ), что дает физически ясный результат: два корня уравнения приближенно равны (по модулю) обратному ларморовскому радиусу частицы, а два других соответствуют медленному вращению частицы «вместе» с силовой линией:

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} &= \pm k_L = \pm \rho_L^{-1}, \\ \kappa_{3,4} &= \pm \sqrt{k^2 - g^2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Таким образом, решение в форме (2.20) описывает теперь пространственное вращение силовой линии (2.23), (2.24) и быстрое ларморовское вращение частицы вокруг нее. Окончательное выражение для траектории частицы в данном приближении записывается «сразу» как сумма уравнений координат силовой линии (2.24) и уравнений координат частицы, движущейся вдоль этой силовой линии:

$$\begin{aligned} x(s) &\approx x_B(s) + \rho_L (x'_0 \sin(s/\rho_L) + z'_0 \cos(s/\rho_L)), \\ z(s) &\approx z_B(s) + \rho_L (x'_0 \cos(s/\rho_L) - z'_0 \sin(s/\rho_L)). \end{aligned}$$

Здесь  $x_B(s)$ ,  $z_B(s)$  — уравнения силовой линии (2.24);  $x'_0$ ,  $z'_0$  — начальные значения отношений поперечных компонент скорости частицы к продольной.

**2.4. Время жизни частицы в стеллатроне.** Главными «одночастичными» эффектами, определяющими длительность времени жизни частицы в стеллатроне, являются ее рассеяние на атомах остаточного газа и взаимодействие с неидеальной магнитной системой. Эффекты пространственного заряда, также влияющие на время жизни, рассмотрены в п. 4.2.

Известные процессы однократного и многократного рассеяния частиц на остаточном газе в ускорителях приобретают своеобразные особенности в модифицированном бетатроне. В продольном магнитном поле частица, рассеиваясь на угол  $\theta \ll 1$ , уходит с исходной траектории на величину

$$\Delta_\theta \leq \rho_\theta = \theta \rho_L.$$

Отсюда как раз и видно, что ларморовский радиус частицы  $\rho_L$  играет роль бета-функции жесткофокусирующего ускорителя. А тогда для оценок «вакуумного» времени жизни можно использовать «ускорительный» подход. Записывая выражение для суммы резерфордского и меллеровского сечений рассеяния для случая малых углов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4r_e^2}{\beta^4\gamma^2} Z_0 (Z_0 + 1) \frac{1}{\theta^4},$$

находим число рассеяний электрона на длине  $ds$  на угол, превышающий «апертурный» угол  $\theta_A$ . Здесь  $r_e$  — классический радиус электрона;  $Z_0$  — атомный номер рассеивающего атома. Получаем

$$dN_A = 2\pi \int_{\theta_A}^{\pi/2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta n_0 ds \approx \frac{4\pi r_e^2 Z_0 (Z_0 + 1) n_0 ds}{\beta^4 \gamma^2 \theta_A^2}, \quad (2.44)$$

$n_0$  — плотность атомов. Тогда время жизни электрона по однократному рассеянию

$$\tau_{\text{single}} = \left( -\frac{dN_A}{ds} \beta c \right)^{-1} = \frac{\beta^3 \gamma^2 \theta_A^2}{4\pi Z_0 (Z_0 + 1) r_e^2 c n_0}. \quad (2.45)$$

В качестве апертурного угла следует принять в данном случае

$$\theta_A \sim \frac{b}{\rho_L}, \quad (2.46)$$

где  $2b$  — апертура. Из (2.45), (2.46) и (1.1) следует, что

$$\tau_{\text{single}} \propto B_0^2 \beta.$$

Для модифицированного бетатрона характерно соотношение этих параметров  $\rho_L \leq b$ . Поэтому однократное упругое рассеяние электронов на атомах остаточного газа на угол  $\theta_A$  (2.46) определяет время жизни частиц только в случае слабого поля  $B_0$ . Однако такое рассеяние приводит к изменению продольной компоненты импульса электрона

$$\Delta p_\theta = p(1 - \cos \theta_A) \approx \frac{p\theta_A^2}{2},$$

что сопровождается смещением равновесной орбиты на величину

$$\Delta x_\theta \sim D_x(s^*) \Delta p_\theta, \quad \Delta z_\theta \sim D_z(s^*) \Delta p_\theta.$$

Полагая  $\Delta x_\theta \sim \Delta z_\theta \geq h$ ,  $D_x(s^*) \sim D_z(s^*) \sim 2\pi\rho_L$  (см. (2.36)), находим

$$\theta_{A\Delta p} \geq \sqrt{\frac{b}{\pi\rho_L}}. \quad (2.47)$$

Соответственно в (2.45) следует подставить минимальное из значений (2.46) и (2.47), которое при  $\rho_L \sim b$  различаются слабо.

Более сильным эффектом является диффузионный уход электронов на апертуру из-за их многократного рассеяния на остаточном газе. Для оценки времени жизни по многократному рассеянию необходимо найти среднеквадратичное приращение угла  $\theta$  на длине  $ds$ . Аналогично (2.44) находим

$$\frac{d\langle\theta^2\rangle}{ds} = 2\pi n_0 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta = 8\pi Z_0(Z_0 + 1) n_0 r_e^2 L_z, \quad (2.48)$$

где  $L_z = \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \approx \ln(183Z_0^{-1/3})$  — так называемый кулоновский логарифм для случая рассеяния заряженных частиц на атомах. Приращение угла рассеяния  $\langle\theta^2\rangle$  приводит к диффузионному смещению электрона поперек поля на одном рассеянии в среднем на величину

$$\Delta x^2 \sim \Delta z^2 \sim \rho_L^2 \langle\theta^2\rangle. \quad (2.49)$$

Из уравнения диффузии

$$\frac{d\langle\Delta x^2\rangle}{ds} \sim \frac{d\langle\Delta z^2\rangle}{ds} \sim \rho_L^2 \frac{d\langle\theta^2\rangle}{ds}$$

и (2.48) с учетом значения  $\rho_L$  находим значение времени жизни

$$\tau_{\text{multi}} = \left( \frac{1}{b^2} \frac{d\langle\Delta x^2\rangle}{ds} \beta c \right)^{-1} = \frac{\beta b^2}{8\pi Z_0 (Z_0 + 1) r_e^2 c n_0 L_z} \left( \frac{eB_0}{mc^2} \right)^2. \quad (2.50)$$

Таким образом, время жизни частицы в модифицированном бетатроне (2.45), (2.50) пропорционально квадрату апертуры  $b^2$  и поля  $B_0^2$  и зависит от энергии как  $\beta$ .

Поперечная компонента импульса электрона может возрастать при прохождении участков неоднородного магнитного поля. Так, если длина участка возмущения поля  $L_B$  сравнима с ларморовским радиусом, то при прохождении такого участка электрон «набирает угол»  $\Delta\theta_B$  и уходит с силовой линии на величину  $\Delta x_B$  [22]:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle\Delta\theta_0^2\rangle} &\sim \frac{rL_B}{\rho_L^2} e^{-L_B/\rho_L} \frac{\Delta B_{\text{max}}}{B_0}, \\ \sqrt{\langle\Delta x_B^2\rangle} &\leq \frac{rL_B}{\rho_L} e^{-L_B/\rho_L} \frac{\Delta B_{\text{max}}}{B_0}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где  $r$  — расстояние траектории от оси симметрии поля  $B_0$ ;  $\Delta B_{\text{max}}$  — максимальное отклонение значения поля от среднего  $B_0$ . Возмущение  $\Delta B(s)$  здесь предполагается плавным, например, хорошо аппроксимируется функцией

$$\Delta B(s) = \Delta B_{\text{max}} \frac{L_B^2}{s^2 + L_B^2}.$$

При многократном прохождении такого участка процесс смещения электрона приобретает диффузионный характер. Тогда, аналогично (2.45), (2.50), найдем время жизни в «возмущенном» магнитном поле, считая, что за один оборот в бетатроне частица проходит  $N_B$  возмущений поля протяженностью  $L_B^{(i)}$  с максимальным возмущением  $\Delta B_i$ :

$$\begin{aligned} \tau_B &\sim T b^2 \left[ \sum_{i=1}^{N_B} \left( \langle(\Delta x_B^{(i)})^2\rangle + \rho_L^2 \langle(\Delta\theta_B^{(i)})^2\rangle \right) \right]^{-1} \sim \\ &\sim \frac{T}{N_B} \left( \frac{b\rho_L}{rL_B} e^{L_B/\rho_L} \right)^2 \left( \frac{\Delta B_{\text{max}}}{B_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Здесь  $T$  — период обращения частицы в бетатроне. Отсюда следует, что при  $b \sim \rho_L \sim r \sim L_B/5$ ,  $\Delta B_{\max}/B_0 \sim 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $N_B = 6$  частица «живет» в бетатроне не менее  $5 \cdot 10^6$  оборотов. Из (2.52) следует, что  $\tau_B$  увеличивается с ростом поля и падает с ростом энергии частиц  $\varepsilon$ :

$$\tau \propto \frac{\varepsilon^{3/2}}{B_0^2} \exp \left\{ \sqrt{\frac{2}{\varepsilon mc^2}} B L_B \right\}. \quad (2.53)$$

Следует отметить, что оценки (2.52), (2.53) справедливы для значений  $\rho_L \leq L_B$ . При  $\rho_L > L_B$  эти оценки некорректны (время жизни увеличивается с ростом энергии) и следует пользоваться приближением короткого возмущения (см. детали в [22]).

### 3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ В СЕКЦИОНИРОВАННОМ МОДИФИЦИРОВАННОМ БЕТАТРОНЕ

В модифицированном бетатроне с азимутально-однородной структурой удастся найти аналитическое решение уравнений движения частицы [11, 12]. В секционированной структуре вид уравнений движения различен в разных оптических элементах, и исследование динамики удобно проводить с использованием матричного формализма. В присутствии продольного магнитного поля движение частиц, в отличие от обычных жесткофокусирующих ускорителей, является связанным в горизонтальной и вертикальной плоскости. Анализ устойчивости движения и расчет дисперсионных функций кольца в этом случае проводится полностью аналогично случаю несвязанного движения. Для расчета инвариантов движения частицы и структурных функций накопителя при связанном движении можно применить либо метод Эдвардса–Тенга [23], либо метод нахождения собственных векторов матрицы перехода, записанной для канонически сопряженных переменных [24–26].

**3.1. Постановка задачи.** Фокусирующая система модифицированного бетатрона может состоять из следующих элементов:

- тороидальная секция с продольным и поперечным (поворотным) магнитным полем;
- тороидальная секция с дополнительным спиральным квадрупольным полем;
- прямолинейная секция с продольным магнитным полем;
- прямолинейная секция с продольным магнитным и дополнительным спиральным квадрупольным полем;
- секция, в которой параметры магнитных полей могут меняться с продольной координатой: например, прямолинейная или тороидальная секция

с адиабатическим изменением (нарастанием и уменьшением) градиента спирального квадрупольного поля.

В общем случае для пучка круглой формы с плотностью  $n_b$ , постоянной по его сечению, уравнение движения в любом из перечисленных фокусирующих элементов может быть записано в следующем виде (см. (2.11) и (2.40)) [11, 22]:

$$\begin{aligned} x'' - \frac{z'}{\rho_L} + \left( -\frac{1}{r_d^2} + \frac{1-n}{R^2} \right) x - g(x \cos(2ks) + z \sin(2ks)) &= 0, \\ z'' + \frac{x'}{\rho_L} - \left( \frac{1}{r_d^2} + \frac{n}{R^2} \right) z - g(x \sin(2ks) - z \cos(2ks)) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $x, z, s$  — координаты частицы, отсчитываемые от (и вдоль) равновесной траектории (см. разд. 2);  $r_d = (\beta^2 \gamma^3 / 2\pi r_e n_b)^{1/2}$  — дебаевский радиус пучка;  $R$  — радиус тороидального участка;  $n$  — показатель спада поворотного поля (2.9);  $k$  и  $g$  определены в (2.16) и (2.40). Радиус поворота и градиент спирального квадрупольного поля в уравнениях (3.1) зависят, вообще говоря, от продольной координаты  $s$ , и для разных оптических элементов часть параметров может «отсутствовать»:  $g = 0, R = \infty$  и т. п.

Положение частицы в шестимерном фазовом пространстве будем описывать радиусом-вектором с координатами

$$X = \begin{pmatrix} x \\ p_x/p \\ z \\ p_z/p \\ s \\ \Delta p/p \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $p_x, p_z$  — соответствующие поперечные компоненты импульса;  $\Delta p$  — отклонение продольной компоненты импульса от равновесного значения;  $p$  — продольный импульс частицы. Поперечные координаты вектора  $X$  связаны с переменными в уравнениях (3.1) очевидным соотношением:  $p_x/p = x', p_z/p = z'$ , где  $()' = d/ds$ .

В присутствии продольного магнитного поля переменные (3.2) не являются канонически сопряженными, однако они традиционно используются для траекторного анализа свойств оптических структур. Эти переменные имеют простую физическую интерпретацию и с их применением могут быть достаточно просто исследованы условия устойчивости движения и дисперсионные свойства накопителя. Поэтому в дальнейшем большинство результатов приводится в этих переменных, а переход к канонически сопряженным перемен-



ным осуществляется только при расчете структурных функций нормальных мод колебаний.

Без учета изменения продольного импульса частицы матрица перехода оптического элемента имеет следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & 0 & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & 0 & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & 1 & m_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Коэффициенты  $m_{ij}$  могут быть получены путем аналитического решения уравнения движения частицы, или, в случае, когда уравнение движения не имеет аналитического решения, с помощью численного интегрирования методом Рунге–Кутты. Например, решение уравнения движения для прямолинейной секции со спиральным квадрупольным полем (2.40) в случае целого числа шагов спирали квадруполя на длине элемента ( $s = nh$ ,  $2ks = 2n\pi$ ,  $n$  — целое) приводит к следующему виду элементов  $m_{11}–m_{44}$  верхней левой части матрицы преобразования:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \left( C - \frac{\chi k}{k_L} c \right) & -\alpha_1 \frac{(S-s)}{k_L} & -\alpha_1 \left( S - \frac{\chi k}{k_L} s \right) & -\alpha_1 \frac{(C+c)}{k_L} \\ -\alpha_1 (Q_0 S - \chi k s) & -\alpha_1 \frac{(Q_0 C - k_L c)}{k_L} & -\alpha_1 (Q_0 C - \chi k c) & \alpha_1 \frac{(Q_0 S + k_L s)}{k_L} \\ \alpha_2 \left( S - \frac{\chi k}{k_L} s \right) & \alpha_2 \frac{(C-c)}{k_L} & \alpha_2 \left( C + \frac{\chi k}{k_L} c \right) & -\alpha_2 \frac{(S+s)}{k_L} \\ \alpha_2 (Q_0 C - \chi k c) & -\alpha_2 \frac{(Q_0 S - k_L s)}{k_L} & -\alpha_2 (Q_0 S + \chi k s) & -\alpha_2 \frac{(Q_0 C + k_L c)}{k_L} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Здесь введены обозначения:  $\alpha_1 = 1 + \frac{\chi}{2}$ ;  $\alpha_2 = 1 - \frac{\chi}{2}$ ;  $S = \sin(Q_0 L)$ ;  $C = \cos(Q_0 L)$ ;  $s = \sin(k_L L)$ ;  $c = \cos(k_L L)$ ;  $L$  — длина квадрупольной обмотки;  $\chi = G/kB_0$ .

Выражения для коэффициентов матриц перехода некоторых оптических элементов модифицированного бетатрона, полученные аналитическим путем, представлены в [27]. Матрица перехода для накопителя в целом равна, как известно, произведению матриц отдельных оптических элементов.

### 3.2. Матричный анализ устойчивости движения частиц в бетатроне.

Анализ движения частиц на устойчивость сводится к нахождению собствен-

ных чисел матрицы перехода кольца (или матрицы суперпериода при наличии периодичности). В общем случае матрица вида (3.3) имеет две пары комплексно-сопряженных собственных чисел:

$$\lambda_{1,2} = |\lambda_1| \exp(\pm i\mu_1), \quad \lambda_{3,4} = |\lambda_3| \exp(\pm i\mu_2), \quad (3.5)$$

где  $\mu_{1,2}$  — фазы собственных чисел, являющиеся действительными числами. Далее в вычислениях принято, что продольная компонента импульса частицы не зависит от поперечных координат и скоростей и не изменяется со временем. В этом случае  $\lambda_{5,6} = 1$ . Для устойчивости поперечного движения необходимо, чтобы все четыре собственных числа (3.5) были различны, а их модули равны единице. В области структурного резонанса модули двух из четырех собственных чисел матрицы перехода не равны единице:  $|\lambda_{j=1,\dots,4}| \neq 1$ . Параметрический резонанс соответствует условию  $\cos \mu_1 = \pm 1$  или  $\cos \mu_2 = \pm 1$ . Резонанс связи имеет место при  $\cos \mu_1 = \cos \mu_2$ .

При движении в стеллатроне условие устойчивости (2.33), (2.34) имеет простую физическую интерпретацию. Поперечные колебания частицы в первом приближении включают в себя две независимые составляющие [13, 27] — ларморовское вращение частицы вокруг силовой линии поля с частотой  $\omega_L$ , равной

$$\omega_L = \frac{eB_0}{\gamma mc} = Q_L \omega_0, \quad Q_L \approx \frac{C_{\text{ring}}}{2\pi\rho_L}, \quad (3.6)$$

и медленное бетатронное вращение пучка как целого вокруг равновесной орбиты с частотой

$$\omega_{\text{bet}} = Q_{\text{bet}} \omega_0, \quad Q_{\text{bet}} \approx 2\pi Q_0 L, \quad (3.7)$$

где  $\omega_0$  — частота обращения частицы в кольце периметра  $C_{\text{ring}}$ ;  $L$  — сумма длин секций со спиральным квадрупольным полем. При устойчивом движении фазы собственных чисел матрицы перехода кратны соответствующим частотам:

$$\mu_1 \approx 2\pi Q_L \pm 2\pi n, \quad \mu_2 \approx 2\pi Q_{\text{bet}} \pm 2\pi m,$$

где  $n$  и  $m$  — целые числа. Условия устойчивости в таком случае могут быть записаны в следующем виде:

$$Q_L \neq l/2, \quad Q_{\text{bet}} \neq m/2, \quad Q_L \pm Q_{\text{bet}} \neq n, \quad (3.8)$$

где  $l, m, n$  — целые числа. Фазы собственных чисел матрицы перехода однозначно определяют только дробную часть соответствующих бетатронных чисел, для расчета целой части необходимо вычисление структурных функций и их интегрирование вдоль орбиты накопителя.

**3.3. Дисперсионные функции модифицированного бетатрона.** Используя матрицу суперпериода фокусирующей структуры в форме (3.3), можно рассчитать вектор дисперсии первого порядка. Вектор дисперсии задает положение замкнутой орбиты для частицы с отклонением  $\Delta p$  от расчетного значения:

$$\mathbf{X}_{30} = \mathbf{D} \frac{\Delta p}{p}, \quad (3.9)$$

где векторы  $X$  и  $D$  имеют по четыре компоненты:

$$\mathbf{X}_{30} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ z \\ z' \end{pmatrix}_{30}, \quad \mathbf{D}_{30} = \begin{pmatrix} D_x \\ D'_x \\ D_z \\ D'_z \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, для замкнутой орбиты должно выполняться следующее очевидное условие:

$$\mathbf{X}_{30} = A \mathbf{X}_{30} + \mathbf{R} \frac{\Delta p}{p}, \quad (3.10)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} m_{16} \\ m_{26} \\ m_{36} \\ m_{46} \end{pmatrix},$$

$m_{ik}$  — элементы матрицы (3.3). В результате простых матричных преобразований из (3.10) находим

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_{x'} \\ D_z \\ D'_z \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} m_{16} \\ m_{26} \\ m_{36} \\ m_{46} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Здесь  $I$  — единичная матрица размером  $4 \times 4$ .

**3.4. Структурные функции Эдвардса–Тенга.** В методе Эдвардса–Тенга линейная матрица перехода для поперечных координат частицы, определенная в предыдущем разделе, разбивается на четыре блока размерностью  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Эта матрица после сопряжения с некоторой симплектической матрицей

$$P = \begin{pmatrix} I \cos \varphi & \bar{T} \sin \varphi \\ -T \sin \varphi & I \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

и ей обратной приводится к блочно-диагональному виду

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Здесь  $T$  — матрица размерностью  $2 \times 2$  с единичным определителем, а матрица  $\bar{T}$  — симплектично сопряженная ей. Когда поперечное движение частицы устойчиво, элементы матрицы  $T$  могут быть вычислены из матричного уравнения [23]

$$T = - \left( \frac{1}{2} (\text{Tr } A_1 - \text{Tr } A_4) + \text{sign} (|A_2 + \bar{A}_3|) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{|A_2 + \bar{A}_3| + \frac{1}{4} (\text{Tr } A_1 - \text{Tr } A_4)^2} \right)^{-1} (A_2 + \bar{A}_3), \quad (3.15)$$

$$B_1 = A_1 - A_2 T, \quad B_2 = A_4 - \bar{T} A_3.$$

Для матриц  $B_1$  и  $B_2$  структурные функции Эдвардса–Тенга вычисляются как обычные параметры Твисса. Трекинг дисперсии и структурных функций Эдвардса–Тенга осуществляется вычислением элементов  $T_{ij}$  как функций продольной координаты. Применение метода Эдвардса–Тенга позволяет рассматривать поперечное движение как проекции двух несвязанных мод движения. Инварианты движения частицы, соответствующие этим модам, вычисляются аналогично инвариантам Куранта–Снайдера. Однако использование функций, вычисленных этим методом, неудобно из-за наличия точек разрыва в решении уравнения (3.15). Другая проблема данного метода заключается в том, что инварианты движения, полученные в таком фазовом пространстве, вообще говоря, не имеют очевидной физической интерпретации. Поэтому при расчетах связанного движения в обычных жесткофокусирующих накопителях метод Эдвардса–Тенга не нашел широкого применения.

Для фокусирующей структуры стеллатрона при малой величине градиента спирального квадрупольного поля матрица  $B_1$  в (3.14) с хорошей точностью равна блоку

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{pmatrix}$$

из матрицы кольца в форме (3.3), и соответствующий инвариант движения — это величина площади поперечного сечения пучка  $S_b$ , сохранение которой следует также из известной теоремы Буша. Структурные функции Эдвардса–Тенга  $\beta$  и  $\alpha$ , соответствующие этой моде колебаний, являются безразмерными величинами, которые описывают эллиптичность поперечного сечения пучка. Например, в точках с нулевым значением  $\alpha$ -функции поперечные размеры пучка равны

$$x_b = \sqrt{S_b \beta}, \quad z_b = \sqrt{S_b / \beta}.$$

Инвариант движения, соответствующий второй моде колебаний, примерно равен квадрату поперечной скорости частицы или, с точностью до константы, температуре поперечной степени свободы. Такая физически наглядная интерпретация инвариантов движения в случае фокусировки продольным магнитным полем делает метод Эдвардса–Тенга достаточно привлекательным. Для накопителя LEPTA расчет структурных функций Эдвардса–Тенга был произведен в работе [28]. Однако при большой величине градиента спирального квадрупольного поля площадь поперечного сечения пучка и температура его в поперечном направлении перестают быть независимыми, и интерпретация результатов расчета становится проблематичной. Кроме того, в настоящее время в методе Эдвардса–Тенга отсутствует развитая теория нелинейных колебаний.

**3.5. Метод канонически сопряженных переменных.** Другой метод, используемый в расчетах, представленных в следующем разделе, — поиск собственных векторов матрицы перехода, записанной для канонически сопряженных переменных. На первом шаге алгоритма матрица перехода приводится к симплектичному виду. Условие симплектичности матрицы определяется равенством

$$M^T M_S M = M_S, \quad (3.16)$$

где индекс  $T$  обозначает транспонирование,  $M_S$  — обобщение симплектической матрицы

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это соотношение означает, что матрица  $M$  определяет преобразование для канонически сопряженных переменных. «Неканоническая» матрица  $M$  может быть преобразована в «каноническую» форму  $M^C$  с помощью некой матрицы  $M_Q$  следующим образом:

$$M^C = M_Q M M_Q^{-1}. \quad (3.17)$$

В этом случае вектор  $X$  координат частиц преобразуется к каноническому виду

$$X^C = M_Q X, \quad (3.18)$$

где индекс  $C$  означает каноническую сопряженность. Матрица  $M_Q$  может быть представлена в виде

$$M_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -q & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Коэффициент  $q$  определяется из матричного уравнения

$$2q(M^T J - J M^{-1}) = M_S M^{-1} - M^T M_S,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

В нашем случае, когда продольное магнитное поле одинаково по значению во всех точках орбиты, коэффициент  $q = 0,5\rho_L$ , где  $\rho_L$  — ларморовский радиус частицы. Физический смысл такого преобразования состоит в том, что в присутствии магнитного поля компоненты импульса частицы, канонически сопряженные ее координатам, задаются известным выражением для обобщенного импульса  $\mathbf{P}^C = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал. Преобразование (3.18) осуществляет переход к таким компонентам импульса.

После перехода к канонически сопряженным переменным находим собственные векторы  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , матрицы перехода. Собственные векторы определяются с точностью до произвольной константы, которая может быть выбрана в соответствии с условием нормировки

$$Y_j^T M_S Y_k^* = \begin{cases} -2i, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad (3.21)$$

где индекс  $*$  означает, как обычно, комплексную сопряженность. Такая нормировка в случае независимого движения в горизонтальной и вертикальной плоскостях приводит к общепринятым выражениям для структурных функций в форме параметров Твисса. Нормализованные собственные векторы можно

получить из вычисленных собственных векторов  $V_j$  с учетом условия (3.21), используя выражение

$$Y_j = -V_j \sqrt{\frac{1}{2} (V_j^T S V_j^*)}. \quad (3.22)$$

Решение уравнения движения может быть записано тогда в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (I_1 Y_{1,1} + I_1^* Y_{1,1}^*) + \frac{1}{2} (I_2 Y_{2,1} + I_2^* Y_{2,1}^*) + D_x \frac{\Delta p}{p}, \\ z &= \frac{1}{2} (I_1 Y_{1,3} + I_1^* Y_{1,3}^*) + \frac{1}{2} (I_2 Y_{2,3} + I_2^* Y_{2,3}^*) + D_y \frac{\Delta p}{p}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $I_{1,2}$  — инварианты движения, соответствующие двум собственным модам колебаний. Уравнение движения (3.23) может быть записано в матричной форме

$$X = \frac{1}{2} Q^{-1} Z I + D \frac{\Delta p}{p}, \quad (3.24)$$

где вектор инвариантов

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_1^* \\ I_2 \\ I_2^* \end{pmatrix}$$

рассчитан по формуле

$$I = \sqrt{2} Z^{-1} X^C,$$

$Z = (Y_1 Y_1^* Y_2 Y_2^*)$  — матрица размерностью  $4 \times 4$ , образованная из выбранных нормализованных собственных векторов. Структурные функции накопителя, описывающие параметры пучка подобно инвариантам Куранта–Снайдера, могут быть вычислены из матрицы  $Z$ :

$$\beta_{m,n} = Z_{2m-1,n} Z_{2m-1,n};$$

$$\gamma_{m,n} = Z_{2m,n} Z_{2m,n};$$

$$\alpha_{m,n} = Z_{2m-1,n} Z_{2m,n}.$$

Индексы  $m = 1, 2$  соответствуют поперечным координатам  $x$  и  $z$ ,  $n = 1, 2$  — двум собственным модам.

Комплексный инвариант движения может быть записан в форме  $I = |I| e^{i\varphi}$ , где  $|I|$  пропорционален величине объема четырехмерного гиперэллипсоида, представленного фазовой траекторией частиц, и  $\varphi$  — начальная фаза

колебаний частицы. Вычисление нормализованных собственных векторов и инвариантов движения позволяет получить среднеквадратичную матрицу для обеих мод:

$$\Sigma = \sum_{j=1}^2 \Sigma_j = \begin{pmatrix} \langle xx \rangle & \left\langle x \frac{p_x}{p} \right\rangle & \langle xz \rangle & \left\langle x \frac{p_z}{p} \right\rangle \\ \left\langle \frac{p_x}{p} x \right\rangle & \left\langle \frac{p_x}{p} \frac{p_x}{p} \right\rangle & \left\langle \frac{p_x}{p} z \right\rangle & \left\langle \frac{p_x}{p} \frac{p_z}{p} \right\rangle \\ \langle zx \rangle & \left\langle z \frac{p_x}{p} \right\rangle & \langle zz \rangle & \left\langle z \frac{p_z}{p} \right\rangle \\ \left\langle \frac{p_z}{p} x \right\rangle & \left\langle \frac{p_z}{p} x \right\rangle & \left\langle \frac{p_z}{p} z \right\rangle & \left\langle \frac{p_z}{p} \frac{p_z}{p} \right\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

где

$$\Sigma_j = \frac{1}{2} I_j I_j^* \left( Y_j (Y_j^*)^T + Y_j^* Y_j^T \right).$$

Угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают интеграл по фазам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответствующих мод колебаний, поделенный на  $4\pi^2$ . Каждый элемент матрицы равен среднему квадрату полуоси проекции гиперэллипсоида, описываемого частицей в соответствующей фазовой плоскости.

Представленный формализм позволяет по начальным координатам частицы определить инварианты ее движения, а с помощью матрицы (3.25) построить проекции ее фазовой траектории на поперечные фазовые плоскости в любом сечении накопителя. Кроме того, данный метод является естественным обобщением стандартной теории жесткой фокусировки на случай большого числа переменных, и в его рамках может быть использован развитый гамильтонов формализм для анализа нелинейного движения. Нелинейные эффекты могут играть значительную роль в динамике частиц в модифицированном бетатроне из-за присутствия неоднородностей («ошибок») продольного магнитного поля, а также его радиальной зависимости в тороидальных секциях кольца. Последняя нелинейность связана с самим принципом работы накопителя и не может быть сведена к минимуму, как в других оптических элементах. Так, например, нелинейные члены в разложении полей спиральной квадрупольной обмотки могут быть сделаны практически нулевыми за счет особой конструкции обмоток. Ширина и мощность нелинейных резонансов может быть оценена, например, методом усреднения, описанным в [29], с модификациями, соответствующими двумерному случаю. В данном обзоре обсуждается динамика циркулирующего пучка только в линейном приближении.



#### 4. НАКОПИТЕЛИ «ХОЛОДНЫХ» ПУЧКОВ

Установка МОВУ/ЛЕРТА проектировалась с учетом двух возможных режимов ее работы. Основное ее назначение — электронное охлаждение позитронов и генерация интенсивных потоков атомов позитрония. В этом режиме энергия циркулирующего позитронного пучка постоянна и составляет  $\sim 10$  кэВ, а его интенсивность, определяемая возможностями инжектора на базе радиоактивного источника, не превышает 50 мкА. Оценки характерного времени электронного охлаждения дают величину порядка нескольких миллисекунд, и можно предположить, что все диффузионные процессы, приводящие к ухудшению качества позитронного пучка, будут подавлены охлаждением. Проектная величина продольного магнитного поля в этом режиме работы составляет 400 Гс (табл. 2), что соответствует более чем 300 шагам ларморовской спирали позитронов на периметре накопителя. Можно ожидать, что резонансы столь высокого порядка также не будут существенно влиять на качество пучка. Наиболее серьезным требованием к накопителю в этом режиме работы является обеспечение большого времени жизни циркулирующих позитронов  $\sim 100$  с, что при низкой энергии является серьезной проблемой.

Конструкция магнитной системы была разработана таким образом, чтобы, кроме основного назначения установки, иметь возможность проверить возможность ее использования в качестве системы электронного охлаждения с циркулирующим электронным пучком. В этом случае ток электронного пучка желательно иметь на уровне 1 А; при энергии в несколько МэВ, так же, как и при энергии инжекции, необходим учет влияния на динамику собственного поля пучка. Вопрос времени жизни частиц в этом случае не столь принципиален, так как достаточно обеспечить устойчивую циркуляцию на максимальной энергии в течение нескольких секунд. Однако все процессы, способные привести к ухудшению качества пучка, должны быть тщательно изучены. Так, например, для эффективного охлаждения антипротонов в накопителе «Resusciter» требуется, чтобы угловой разброс электронов в секции охлаждения был порядка  $10^{-4}$ .

Угловой разброс циркулирующего электронного пучка определяется несколькими факторами: температурой катода и оптикой электронной пушки, возмущениями в электронном пучке во время инжекции, устойчивостью поперечного движения частиц во время ускорения, влиянием спиральной квадрупольной фокусировки. Возмущения в электронном пучке во время инжекции могут быть минимизированы при использовании так называемой резонансной оптики [22]: длина септумных и кикерных обмоток должна быть равной целому числу шагов ларморовской спирали электронов. Ухудшение параметров электронного пучка в процессе циркуляции можно предварительно оценить только на основании численного моделирования динамики в накопителе.

Ввиду специфики элементов оптической структуры модифицированного бетатрона ни одна из существующих в настоящее время компьютерных программ, ориентированных на проектирование ускорителей, не позволяет исследовать все вопросы, связанные с эволюцией параметров пучка в таких установках. Поэтому для численного моделирования динамики частиц в накопителях со связанным движением в ОИЯИ была разработана специальная программа ВЕТАТРОН [30]. Расчет линейной динамики частиц в этой программе осуществляется матричным методом, описанным в разд. 3. Программа проводит анализ устойчивости движения циркулирующего пучка в линейном приближении и строит диаграмму устойчивости, рассчитывает структурные функции накопителя, критическую энергию, позволяет оценить кулоновский сдвиг частот колебаний, осуществляет траекторный анализ и рассчитывает параметры проекций траектории частицы на поперечные фазовые плоскости. Кроме того, программа позволяет оценить ширину и мощность некоторых нелинейных резонансов методом усреднения.

В данном разделе приводятся основные результаты расчетов для обоих планируемых режимов работы накопителя МОВУ/ЛЕПТА и анализ специфических ограничений для каждого из них.

**4.1. Проект МОВУ — система электронного охлаждения с циркулирующим электронным пучком.** Основное требование, которое должно быть выполнено при проектировании системы электронного охлаждения с циркулирующим электронным пучком, — обеспечение в секции охлаждения высокого качества интенсивного электронного пучка, малого углового разброса и малого разброса по импульсу [13]. Малый разброс по импульсу может быть получен, например, при использовании индукционного ускорения [31]. Эта возможность анализируется в п. 4.3. Угловой разброс в циркулирующем пучке, в основном, определяется параметрами спиральной квадрупольной обмотки. Если ларморовский радиус электронов много меньше шага спирали квадруполья, угловой разброс в секции со спиральной квадрупольной обмоткой может быть оценен как угол  $\alpha(s)$  между силовой линией поля и продольной осью. Из (2.23) следует при  $\chi \ll 1$

$$\alpha(s) = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \leq k\chi\sqrt{x_0^2 + z_0^2} \leq \frac{G}{B_0}r_{\text{beam}}. \quad (4.1)$$

Величина  $\alpha(s)$  лежит в области между  $10^{-3}$  и  $10^{-2}$  рад для типичных значений (табл. 2) градиента квадрупольного поля  $G \sim 5\text{--}10$  Гс/см и значения поля  $B_0 \sim 1$  кГс при радиусе пучка 1 см. Это означает, что внутри секции электронного охлаждения наличие спиральной квадрупольной обмотки недопустимо. Из формулы (4.1) видно, что предпочтительно иметь возможно большую величину продольного поля, а величину градиента спирального поля — как можно меньшую. Большая величина продольного поля

также предпочтительна и с точки зрения получения максимальной величины силы трения при охлаждении ионов [13]. Кроме того, для обеспечения адиабатичности движения электронов в поворотных секциях накопителя шаг ларморовской спирали должен быть существенно меньше радиуса поворота, что, со своей стороны, требует увеличения продольного поля с увеличением энергии электронов. В накопителе МОВУ/ЛЕРТА для работы в режиме циркуляции электронного пучка с энергией в несколько МэВ предусмотрена максимальная величина продольного поля 1 кГс. Поэтому все дальнейшие расчеты в данном пункте приведены именно для этого значения поля.

Для снижения градиента спирального квадрупольного поля при фиксированной частоте медленной моды колебаний  $Q_{\text{bet}}$  необходимо, чтобы суммарная длина секций с таким полем была максимальна. Поэтому спиральную обмотку приходится с этой целью размещать в тороидальных соленоидах и, если это позволяет схема инжекции, в прямолинейной секции, противоположной секции охлаждения (рис. 5). Усиление фокусировки можно получить также введением градиента поворотного поля в торах (см. (2.14)).

При резком (по сравнению с шагом ларморовской спирали электронов) изменении градиента квадрупольного поля на входе и выходе секции охлаждения приобретенный здесь угловой разброс пучка (4.1) сохранится и в секции охлаждения. Избежать этого можно за счет адиабатически медленного изменения градиента магнитного поля при переходе однородного поля в секцию со спиральным квадрупольным полем и при выходе из него. При этом угловой разброс определяется соотношением, аналогичным (2.51):

$$\Delta\theta \sim \frac{r_{\text{beam}} \ell}{\rho_L^2} e^{-\ell/\rho_L} \frac{Gr_{\text{beam}}}{B}, \quad (4.2)$$

где  $\ell$  — длина участка спада и роста градиента поля. В приводимых ниже численных расчетах проводится сравнение вариантов структуры накопителя со скачкообразным и линейным по длине изменением градиента спирального поля.

Расчеты проводились для энергии электронов 4,3 МэВ, необходимой для охлаждения антипротонов в накопителе «Recycler». Предполагалось, что геометрия магнитной структуры накопителя ЛЕРТА в данном режиме работы остается неизменной: два прямолинейных промежутка с продольным магнитным полем (соленоиды), соединенные в рейстрек двумя тороидальными соленоидами. Большие радиусы обоих торов равны 1,45 м, обе прямолинейные секции имеют длину 4,56 м. Спиральные квадрупольные обмотки могут располагаться либо только в тороидальных секциях (рис. 10), либо занимать весь периметр накопителя, за исключением секции охлаждения (рис. 11). В первом варианте структура накопителя включает в себя два периода фокусировки, во втором варианте периодичность отсутствует. Для первого варианта проводилось сравнение двух реализаций оптической структуры с одинаковым

эффективным значением квадрупольного поля: скачкообразное изменение градиента магнитного поля при переходе из тороидальной секции в прямолинейный соленоид (рис. 10, *a*), и адиабатическое (линейное) изменение градиента поля (рис. 10, *б*). В каждой из секций, содержащих спиральную квадрупольную обмотку, число шагов спирали полагалось целым и равным 2. Показатель спада поворотного поля в тороидальных секциях выбран равным 0,5 (секция «Тороид-1/2» на рисунках).

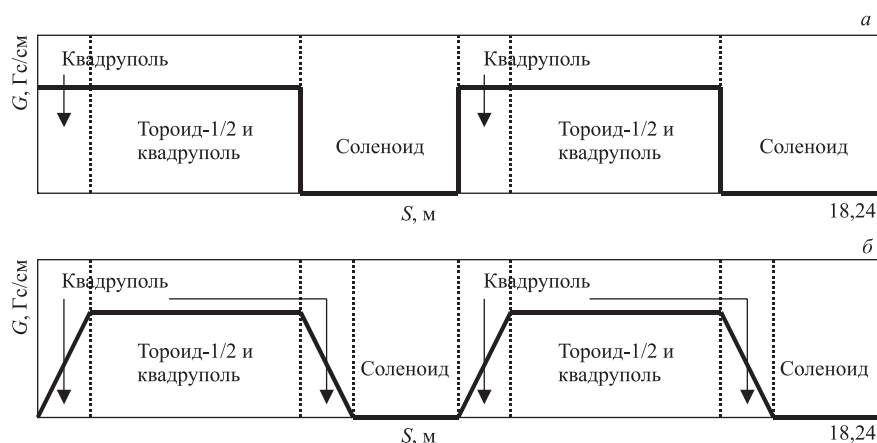


Рис. 10. Схема периодической структуры бетатрона с различной конструкцией квадрупольной обмотки: скачкообразное (*a*) и адиабатическое (*б*) изменение градиента поля



Рис. 11. Схема неперической структуры бетатрона

Устойчивость поперечного движения частиц в МОВУ/ЛЕРТА определяется главным образом двумя параметрами — их энергией и градиентом спирального квадрупольного поля. Поэтому диаграмму устойчивости движения частицы целесообразно построить в плоскости: «градиент фокусирующего поля — энергия электронов». Такая диаграмма, рассчитанная для вариантов

фокусирующей структуры, изображенных на рис. 10, а и рис. 11, представлена на рис. 12. Жирные линии на диаграммах соответствуют резонансам — случаю, когда модули собственных чисел матрицы перехода оптической структуры не равны единице. Около каждой линии резонанса указаны его тип и порядок. На рис. 12, а показано возможное положение рабочей точки — между 18 и 19 целыми резонансами быстрой моды колебаний и между нулевым и первым резонансом медленной моды.

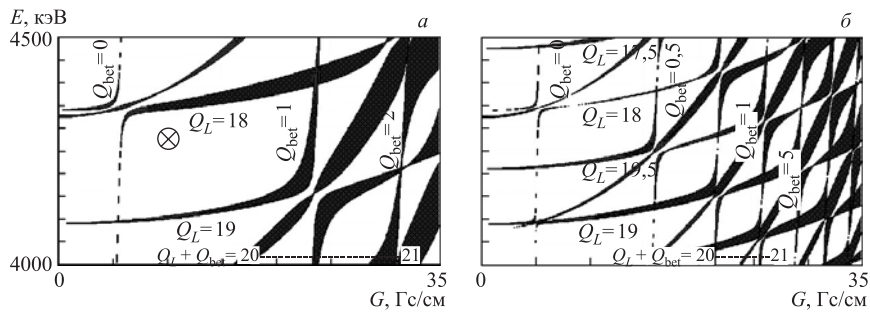


Рис. 12. Диаграмма устойчивости: а) периодическая структура; б) непериодическая структура.  $\otimes$  — рабочая точка

Значение  $\delta\lambda = |\lambda| - 1$  в области резонансов сильно зависит от параметров фокусирующей структуры и составляет примерно  $10^{-2} - 10^{-3}$ . Время жизни электронов в области резонанса  $\tau_{life} \approx T/n_s \delta\lambda$ , где  $T$  — период обращения,  $n_s$  — число суперпериодов в структуре. Выбрав рабочую точку вдали от резонансов, можно обеспечить долговременную устойчивость циркулирующего электронного пучка.

Для эффективного охлаждения ионов пучком электронов МОВУ желательно, чтобы форма поперечного сечения циркулирующего электронного пучка была близка к круглой, а дисперсия в секции охлаждения отсутствовала. Однако в структуре с продольным магнитным полем управлять дисперсионными функциями (2.35) достаточно сложно. Действительно, согласно (2.35) для этого нужно выбрать  $Q_0 L = 2\pi Q_{bet} = 2\pi n$ ,  $n$  — целое, что точно соответствует условию резонанса (3.8). Так, для обеих структур, изображенных на рис. 10, вертикальная и горизонтальная дисперсии присутствуют на всей орбите накопителя, за исключением отдельных точек (рис. 13).

Результаты расчета структурных функций накопителя МОВУ приведены на рис. 14. Альфа- и бета-функции, для большей наглядности, пересчитаны на этом рисунке в отношении полуосей поперечного сечения пучка  $a/b$ , и угол наклона большой полуоси представляющего эллипса к горизонтальной плоскости.

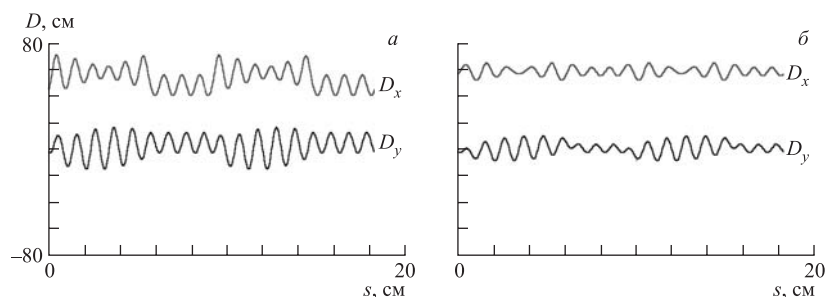


Рис. 13. Дисперсионные функции в горизонтальной ( $D_x$ ) и вертикальной ( $D_y$ ) плоскостях накопителя МОВУ. Скачкообразное (*a*) и адиабатическое (*б*) изменение градиента.  $E = 4,3$  МэВ,  $G = 10$  Гс/см, одночастичное приближение

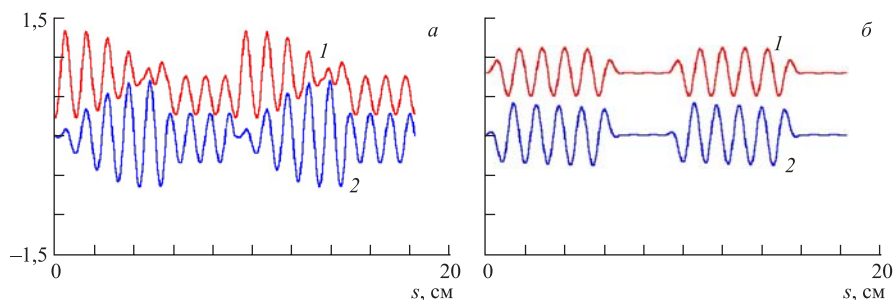


Рис. 14. Структурные функции накопителя МОВУ.  $E = 4,3$  МэВ,  $G = 10$  Гс/см, одночастичное приближение; 1 — отношение поперечных размеров пучка; 2 — угол между большой полуосью эллипса и осью  $X$

Адиабатическая структура, по сравнению со случаем скачкообразного изменения градиента поля, приводит к меньшим амplitудам колебаний дисперсионной функции (рис. 13). В прямолинейной секции, которую планируется использовать для электронного охлаждения, значение дисперсии в вертикальной плоскости близко к нулю, а в горизонтальной составляет примерно 80 см при градиенте спирального поля 10 Гс/см. В секции охлаждения электронный пучок в случае адиабатической структуры имеет постоянную по длине и практически круглую форму поперечного сечения. Зависимости дисперсионной и бета-функций от градиента фокусирующего поля (рис. 15, *a*, *б*) показывают, что для получения малого значения дисперсии в секции охлаждения значение градиента квадрупольного поля должно лежать в диапазоне от 10 до 15 Гс/см. В этом случае эллиптичность сечения пучка для адиабатической структуры не превышает 20 %.

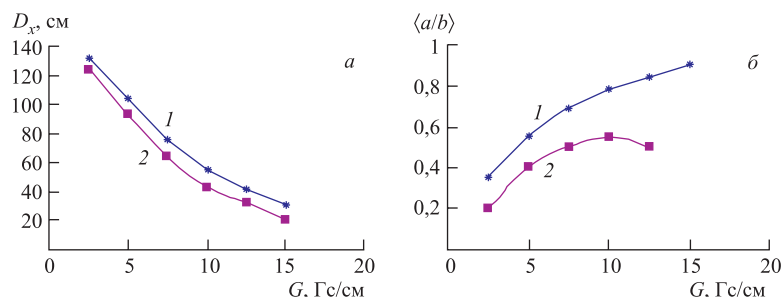


Рис. 15. Зависимости средних значений дисперсии (а) и структурных функций (б) от градиента квадрупольного поля: 1 — однородная спиральная обмотка вдоль всего периметра кольца; 2 — адиабатическое изменение величины градиента на входе и выходе секции охлаждения.  $E = 4,3$  МэВ, одночастичное приближение

Увеличение горизонтального размера пучка, связанное с дисперсией, пропорционально произведению дисперсии на разброс по импульсу, и для ожидаемых величин разброса  $\Delta p/p < 10^{-3}$  уширение пучка не превышает 0,4 мм, что много меньше радиуса пучка.

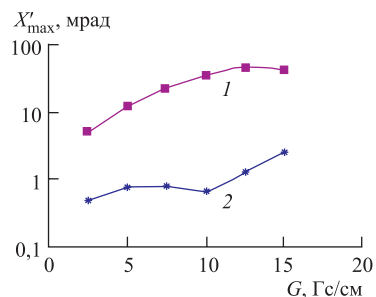


Рис. 16. Зависимость углового разброса электронов в секции охлаждения от градиента квадрупольного поля: 1 — однородная спиральная обмотка; 2 — адиабатическое изменение величины градиента на входе и выходе секции охлаждения.  $E = 4,3$  МэВ,  $B = 1$  кГс, радиус пучка 1 см

Угловой разброс электронов в секции охлаждения существенно зависит от значения градиента спирального квадрупольного поля и характера его зависимости от координаты  $s$  (рис. 16). Когда квадрупольная обмотка занимает весь периметр накопителя, частицы имеют большой угловой разброс, примерно соответствующий оценке (4.1). Аналогичная ситуация имеет место и при резком изменении градиента спирального поля. В случае адиабатического изменения градиента угловой разброс в электронном пучке в секции охлаждения составляет менее  $10^{-3}$ , что близко к требуемой величине (кривая 2 на рис. 16, соответствующая случаю линейного спада величины градиента на входе и линейного роста величины градиента на выходе секции охлаждения на длине 1,14 м (рис. 10, б)).

**4.2. Эффекты пространственного заряда.** Эффекты пространственного заряда могут приводить к ограничению тока циркулирующего пучка из-за сдвига рабочей точки в область резонанса или из-за развития пучковых неустойчивостей. Рассмотрение этих эффектов наглядно демонстрирует преимущества, которые дает введение в бетатрон дополнительного азимутального поля.

Начнем с оценки кулоновского сдвига частот (некогерентных) поперечных колебаний в азимутально-симметричном модифицированном бетатроне, который можно рассчитать аналитически. В обычном бетатроне собственное поле пучка с круговым поперечным сечением с радиусом  $a$  и числом частиц  $N_e$  приводит к изменению бетатронного числа, которое описывается известной формулой (так называемый «ласлеттовский» сдвиг)

$$\Delta Q \approx \frac{r_e}{4\pi} \frac{N_e R}{\beta^2 \gamma^3 a^2 Q}, \quad (4.3)$$

где  $r_e$  — классический радиус электрона;  $R$  — радиус круговой орбиты частиц. Предельный ток электронов  $I_{\max}$ , соответствующий максимально допустимому по условиям устойчивости сдвигу бетатронного числа  $\Delta Q_{\max}$ , может быть представлен в следующем виде:

$$I_{\max} = 2I_0 \beta^3 \gamma^3 \left(\frac{a}{R}\right)^2 Q \Delta Q_{\max}, \quad (4.4)$$

где  $I_0 = \frac{e}{mc^3}$  — характеристический ток, для электронов  $I_0 \approx 17$  кА.

В модифицированном бетатроне собственное поле пучка практически не влияет на частоту ларморовского вращения электронов, а приводит к вращению пучка как целого из-за электрического дрейфа электронов в скрещенных продольном магнитном поле и радиальном электрическом и азимутальном магнитном полях пространственного заряда пучка:

$$E_r = \frac{2I}{\beta c} \frac{r}{a^2}, \quad B_\varphi = \beta E_r.$$

Дрейфовая скорость

$$v_\varphi = c \frac{E_r - \beta B_\varphi}{B_0} = c \frac{E_r}{\gamma^2 B_0}$$

направлена по азимуту, что приводит к вращению пучка как целого с угловой скоростью

$$\dot{\varphi}_d = \frac{2I}{\beta \gamma^2 B_0 a^2}.$$

Угол проворота пучка за один оборот в бетатроне определяет изменение бетатронного числа, соответствующего медленной моде колебаний:

$$\Delta Q_{\text{slow}} \approx \frac{T_{\text{rev}} \dot{\varphi}_d}{2\pi}.$$



Аналогично (4.3), (4.4) находим предельный ток электронов в модифицированном бетатроне:

$$I_{\max} = \beta^3 \gamma^2 c \frac{a^2 B_0}{2R} \Delta Q_{\max} = I_0 \beta^3 \gamma^3 \frac{a^2}{2\rho_L R} \Delta Q_{\max}. \quad (4.5)$$

Из сравнения выражений (4.4) и (4.5) видно, что использование тороидального поля приводит к выигрышу в величине предельного тока в отношении

$$\frac{R}{4Q\rho_L} \gg 1.$$

В накопителе с секционированной структурой оценку сдвига частот можно произвести для упрощенной модели пучка. Например, в уравнениях (3.1) влияние собственного поля учтено в предположении, что пучок равномерно заряжен и имеет круглое поперечное сечение. Как показано в предыдущем разделе, такое предположение достаточно хорошо выполняется для сглаженной структуры накопителя МОВУ/ЛЕРТА и значения градиента  $G \geq 10$  Гс/см. При этом эллиптичность сечения пучка меньше 20%. С уменьшением градиента эллиптичность поперечного сечения пучка возрастает, и сдвиг частот необходимо рассчитывать как самосогласованное решение уравнения движения с учетом реального радиального распределения частиц. В случае пучка круглого сечения сдвиг частот вычисляется из собственных значений матрицы перехода кольца, записанной с учетом полей пространственного заряда. Например, диаграммы устойчивости, приведенные на рис. 12, рассчитывались с учетом собственного поля круглого пучка с радиусом 1 см и током 0,5 А. Именно влияние собственного поля приводит к тому, что резонанс, соответствующий нулевому значению частоты медленной моды колебаний, сдвигнут по оси градиента в положительную область.

Кулоновский сдвиг частот медленной и быстрой мод колебаний пучка круглого сечения возрастает линейно с током пучка (рис. 17). Необходимо

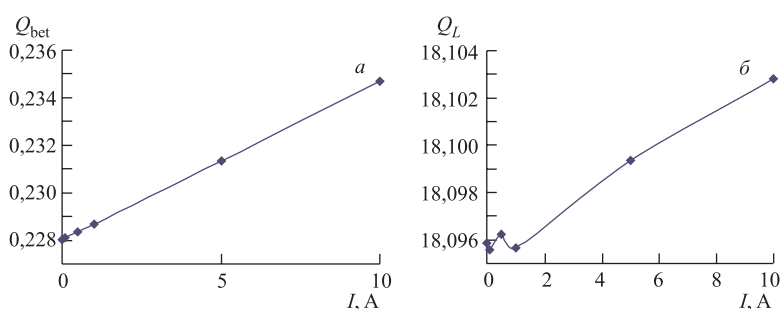


Рис. 17. Зависимость бетатронных чисел от величины тока пучка.  $E = 4,3$  МэВ,  $B_0 = 1$  кГс,  $G = 10$  Гс/см

отметить, что в рассматриваемой фокусирующей структуре сдвиг частоты медленной моды колебаний может быть скомпенсирован изменением величины продольного поля и квадрупольного градиента во время ускорения. При максимальной энергии пучка кулоновский сдвиг частоты медленной моды колебаний пренебрежимо мал вплоть до тока пучка в несколько ампер (рис. 17).

Одним из наиболее опасных видов *продольной неустойчивости* пучка является микроволновая неустойчивость. Динамика ее развития в модифицированном бетатроне, в принципе, такая же, как и в обычном накопителе. Поэтому можно использовать известный критерий продольной устойчивости интенсивного пучка с током  $I$  (критерий Кайла–Шнелля):

$$I \leq 4F_{\text{long}} \frac{mc^2 \beta^2 \gamma |\eta|}{e |Z_n/n|} \sigma_f^2, \quad (4.6)$$

где  $\sigma_f$  — разброс частиц по импульсам (полуширина на полувысоте);  $Z_n$  — продольный импеданс пучка для моды с номером  $n$ . Фактор  $F_{\text{long}}$  учитывает реальную форму диаграммы устойчивости (в стандартном критерии Кайла–Шнелля  $F_{\text{long}} = 1$ ). Когда энергия пучка ниже критической и функция распределения по импульсам имеет длинные «хвосты», значение  $F_{\text{long}}$  может значительно превышать единицу. В [28] показано, что в таком случае можно с хорошей точностью принять

$$F_{\text{long}} \cong \sigma_0^2 / 2\sigma_f^2, \quad (4.7)$$

где  $\sigma_0$  — динамическая апертура ускорителя по разбросу по импульсам. Если пересечение полуцелого резонанса невозможно, то

$$\sigma_0 \approx \frac{1}{4Q_L}. \quad (4.8)$$

При энергии электронов в несколько МэВ продольный импеданс, измеряемый в Ом, равен

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| = \frac{377}{2\beta\gamma^2} \left( 1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right) \quad (4.9)$$

и составляет порядка нескольких Ом. Здесь  $b$  и  $a$  — радиусы вакуумной камеры и электронного пучка. Для фокусирующей структуры типа стеллатрона критическая энергия для кольца может быть оценена как [11] (см. (2.39))

$$\gamma_{\text{tr}}^2 \approx \pm Q_L Q_{\text{bet}}. \quad (4.10)$$

Выбирая направления продольного магнитного спирального поля и вращения спирального квадрупольного поля так, что  $\gamma_{\text{tr}}^2 < 0$ , можно обеспечить режим с положительным знаком дисперсии частоты  $\eta$  (2.38) ( $\eta > 0$ ), когда неустойчивость отрицательной массы, как известно, отсутствует.

В соответствии с (4.6) при энергии электронов в несколько МэВ ( $\sigma_0 \approx 1\%$ ) электронный пучок с током в несколько сотен мА устойчив. При энергии инжекции такое ограничение более строгое, и необходимы специальные усилия для того, чтобы подавить микроволновую неустойчивость.

**4.3. Индукционное ускорение.** Использование индукционного (бетатронного) ускорения электронного пучка для системы электронного охлаждения представляется привлекательным, так как позволяет, как показано ниже, сохранить малый разброс частиц по импульсу при ускорении. При этом основным ограничением на величину конечной температуры интенсивного пучка является возможность развития микроволновой неустойчивости, рассмотренной выше.

В течение цикла ускорения поворотное поле в тороидальных соленоидах  $B_\perp$  должно быть согласовано по величине с импульсом электронов, чтобы обеспечить условие постоянства радиуса орбиты пучка  $R_0(t)$  в тороидальных секциях (см. (2.2)). Для этого нужно обеспечить равенство

$$R(t) = \frac{p(t)c}{eB_\perp(t)} = \text{const}, \quad (4.11)$$

когда  $p(t)$  изменяется во времени в соответствии с уравнениями

$$\frac{dp(t)}{dt} = e \langle E(t) \rangle, \quad \langle E(t) \rangle = \frac{\sum V(t)}{C_{\text{ring}}}.$$

Здесь  $p(t)$  — импульс электрона;  $\langle E(t) \rangle$  — вихревое («бетатронное») электрическое поле, усредненное по периметру кольца  $C_{\text{ring}}$ ;  $\sum V(t)$  — сумма напряжений, создаваемых индуктором и обмотками поворотного поля. Для  $R(t) = R = \text{const}$  имеем

$$\frac{\partial B_\perp}{\partial t} = -\frac{c}{eR} \frac{dp}{dt} = -\frac{c}{C_{\text{ring}}R} \sum V(t). \quad (4.12)$$

Отсюда

$$B_\perp(t) = B_{\text{inj}} - \frac{c}{C_{\text{ring}}R} \int_0^t \sum V(\tau) d\tau, \quad (4.13)$$

где  $B_{\text{inj}} = \frac{p_{\text{inj}}c}{eR}$  — значение поворотного магнитного поля при инжекции. Сумма напряжений

$$\sum V(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{1}{c} \langle \dot{B}(t) \rangle, \quad (4.14)$$

где  $\Phi(t)$  — полный поток переменного магнитного поля сквозь орбиту;  $\langle B(t) \rangle = \frac{\Phi(t)}{S_{\text{ring}}}$  — среднее значение переменного магнитного поля сквозь

орбиту площади  $S_{\text{ring}}$ . Для ускорителей с конфигурацией САТЕ (рис. 4) и МОВУ/ЛЕРТА (рис. 5) и при длине каждого из двух прямолинейных промежутков  $L$  площадь, охватываемая орбитой, равна  $S_{\text{ring}} = 2LR + \pi R^2$ . Тогда из (4.14) следует

$$B_{\perp}(t) = B_{\text{ring}} + \frac{2L + \pi R}{2(L + \pi R)} \langle B(t) \rangle \rightarrow B_{\text{inj}} + \frac{1}{2} \langle B(t) \rangle.$$

Это есть обобщение известного «условия 2:1» для бетатронов на случай стеллатрона. Положение орбиты частиц может быть выбрано таким образом, чтобы поток через нее, создаваемый обмотками поворотного поля, был нулевым. Тогда поворотное поле в соответствии с (4.14), (4.15) должно изменяться со временем как

$$B(t) = B_{\text{inj}} + \frac{\Phi_{\text{ind}}(t)}{C_{\text{ring}}R}, \quad (4.15)$$

где  $\Phi_{\text{ind}}(t)$  — поток, создаваемый индуктором. Это условие просто выполнить, запитывая обмотки поворотного поля и индуктора от общего источника тока.

Максимальная энергия ускоренных частиц определяется, как и в классическом бетатроне, «размахом» потока  $\Delta\Phi(t)$ . Действительно, из (4.12) и (4.15) следует

$$p_{\text{max}}(t) = p_{\text{inj}} + \frac{e\Delta\Phi(t)}{cC_{\text{ring}}}, \quad \Delta\Phi = \Phi(t) - \Phi_{\text{inj}}. \quad (4.16)$$

Например, в МОВУ (табл. 2) энергия электронов 4,36 МэВ достигается при  $(\Delta\Phi)_{\text{max}} \approx 0,26 \text{ Вб}$  ( $1 \text{ Тл} \times 0,26 \text{ м}^2$ ). Такая энергия набирается за время ускорения  $T_{\text{accel}} \approx 10 \text{ мс}$  при напряжении на ускоряющем зазоре  $V_{\text{accel}} \approx 25 \text{ В}$ .

Наиболее серьезной проблемой при бетатронном ускорении является обеспечение устойчивости поперечного движения частиц. Резонансов медленной моды колебаний (см. (3.8)) можно избежать во всем диапазоне изменения энергии пучка соответствующим выбором градиента спирального квадрупольного поля и энергии инжекции. Однако при постоянном значении продольного магнитного поля в процессе ускорения частицы пересекают большое количество зон целых и полуцелых резонансов быстрой моды колебаний и резонансов связи. Такие резонансы были экспериментально обнаружены, например, на установке МВА [7]. В процессе ускорения потери частиц наблюдались с помощью регистрации рентгеновского излучения электронов, попадающих на стенки вакуумной камеры. Сигнал содержал острые пики, соответствовавшие одному и тому же целому числу шагов ларморовской спирали на периметре ускорителя, независимо от градиента спирального квадрупольного поля.

Потери частиц и ухудшение качества пучка в зоне резонанса зависят от скорости ее пересечения. Резонансы высокого порядка можно обойти, если обеспечить набор энергии частиц на обороте существенно больше ширины резонанса. Однако для резонансов низкого порядка такая схема нереалистична из-за технических ограничений темпа ускорения. Ухудшения качества пучка можно избежать, изменяя продольное магнитное поле при ускорении в соответствии с условием  $Q_L = \text{const}$ . Тогда из (3.6) следует условие

$$B_0(t) = 2\pi Q_L \frac{p(t)c}{eC_{\text{ring}}}. \quad (4.17)$$

Подобный «синхронный» режим ускорения также был протестирован на МВА. В течение периода времени, когда поле тороидального соленоида возрастало согласованно с импульсом частиц, потери частиц были полностью подавлены.

Для такого режима «согласованного ускорения» предпочтительно выбирать энергию инжекции в районе нескольких сотен кэВ. Величина магнитного поля в этом случае должна возрастать в процессе ускорения от нескольких сотен до нескольких тысяч Гс. Из-за этого радиус электронного пучка уменьшается, и разброс по поперечному импульсу возрастает пропорционально корню квадратному из величины магнитного поля:

$$\frac{P_{\perp}^2}{B_0(t)} = \text{Inv}.$$

Можно минимизировать этот эффект, поместив катод электронной пушки в магнитное поле, величина которого равна максимальному значению поля  $B_0(t)$  в конце ускорения.

Разброс частиц по импульсу, приобретаемый электронами при индукционном ускорении [31], определяется разницей в длительности пребывания частиц в кольце. Если инжекция и выпуск частиц производятся за один оборот, то «первая» инжектированная частица и «последняя» проходят ускоряющий зазор при разном напряжении на нем. Соответственно импульсы различаются на величину (см. (4.16))

$$\Delta p = \frac{e}{C_{\text{cooler}}} \left[ \int_{t_{\text{inj}} + T_{\text{inj}}}^{t_{\text{extr}} + T_{\text{extr}}} V_{\text{accel}}(t) dt - \int_{t_{\text{inj}}}^{t_{\text{extr}}} V_{\text{accel}}(t) dt \right].$$

Здесь  $t_{\text{inj}}$  и  $t_{\text{extr}}$  — моменты инжекции и выпуска соответственно;  $T_{\text{inj}}$  и  $T_{\text{extr}}$  — значения периодов обращения частиц в эти моменты. Отсюда следует ограничение на разброс частиц по импульсу в ускоренном пучке:

$$\frac{\Delta p}{p_{\text{extr}}} \approx \frac{e}{p_{\text{extr}} c} \left[ \frac{V_{\text{extr}}}{\beta_{\text{extr}}} - \frac{V_{\text{inj}}}{\beta_{\text{inj}}} \right]. \quad (4.18)$$

При  $V_{inj} \approx V_{extr} \approx 26$  В,  $\varepsilon_{inj} = 10$  кэВ,  $\varepsilon_{extr} = 4,36$  МэВ

$$\frac{\Delta p}{p_{extr}} \approx 2 \cdot 10^{-5}.$$

**4.4. LEPTA — генератор позитрония.** Эффективная генерация позитрония при рекомбинации позитронов, циркулирующих в накопителе, с электронами охлаждающего однопролетного пучка (см. разд. 1) также требует возможно низкой температуры обоих пучков. Это следует из формулы, описывающей скорость электрон-позитронной рекомбинации:

$$R = \frac{dN}{dt} = \alpha_r n_e n_p V,$$

где  $\alpha_r$  — коэффициент рекомбинации,

$$\alpha_r = \frac{80\alpha r_e^2 c^2 L_c}{v};$$

$n_e, n_p$  — плотности электронного и позитронного пучков соответственно;  $\alpha = 1/137$ ;  $v = \sqrt{v_p^2 + v_e^2}$ ,  $v_{e,p} = \sqrt{T_{e,p}/m}$ ;  $T_e, T_p$  — скорости обоих пучков, температуры электронов и позитронов в системе, движущейся со средней скоростью;  $r_e, m$  — классический радиус и масса электрона соответственно;  $L_c = \ln \alpha c/v$ ;  $V = l_{rec} \pi a^2$ ,  $l_{rec}$  — длина участка рекомбинации,  $a$  — минимальный из радиусов электронного и позитронного пучков. В результате действия электронного охлаждения температуры обоих пучков становятся равными и можно ожидать, что обе они по порядку величины равны температуре катода пушки:

$$T_e \sim T_p \sim 0,1 \text{ эВ.} \quad (4.19)$$

Для параметров, приведенных в табл. 2, можно ожидать скорость рекомбинации на уровне  $10^4$  атомов позитрония в секунду (см. детали в [11, 12]).

Параметры накопителя LEPTA (табл. 2) обеспечивают устойчивое движение циркулирующего пучка, как это видно из диаграммы рис. 18, при градиенте квадрупольного спирального поля 10–15 Гс/см. При этом бетатронное число, соответствующее медленной моде колебаний, имеет значение 0,3–0,4 (рис. 19, а). Бетатронное число, соответствующее ларморовской моде колебаний, лежит в интервале между 343-м и 344-м целыми резонансами и слабо зависит от величины градиента спирального поля (рис. 19, б).

Сами резонансы ларморовской моды имеют очень высокий порядок и почти незаметны на диаграмме устойчивости (рис. 18). Изменением тока спиральной квадрупольной обмотки можно достаточно просто регулировать положение рабочей точки накопителя.

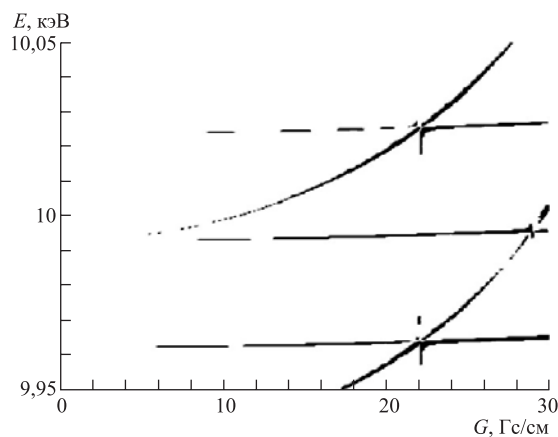
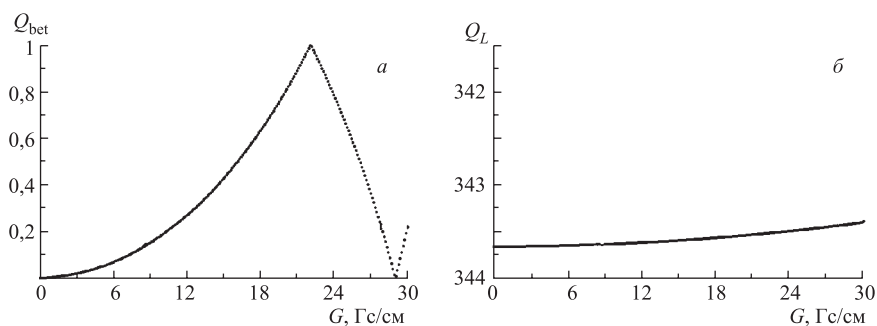
Рис. 18. Диаграмма устойчивости. Линии резонанса показаны жирно.  $B = 400$  Гс

Рис. 19. Зависимость медленного (а) и быстрого (б) бетатронных чисел от градиента спирального магнитного поля

Наиболее сложной задачей при генерации потоков позитрония является обеспечение длительного времени жизни циркулирующего пучка (п. 2.4). Специфика накопителя с фокусировкой продольным магнитным полем такова, что даже в присутствии эффективного электронного охлаждения процессы диффузии могут быть слабо подавлены, если между двумя последовательными рассеяниями на малые углы позитрон не успевает «охладиться». Конечно, верхний предел времени жизни позитрона определяется однократным рассеянием на большие углы на атомах остаточного газа (2.45). В обычных жесткофокусирующих накопителях величина «апертурного» угла  $\theta_{\max}$  составляет в лучшем случае десятки мрад, и при энергии циркулирующих частиц в диапазоне нескольких кэВ и вакууме  $\sim 10^{-10}$  Торр время жизни составляет десятки или сотни миллисекунд. Принципиальным отличием накопителя с

фокусировкой продольным магнитным полем, как уже отмечалось в п. 2.4, является тот факт, что рассеяние даже на угол  $90^\circ$  не ведет автоматически к гибели частицы. Так, для параметров накопителя LEPTA радиус ларморовского вращения позитрона, рассчитанный по полной энергии, составляет примерно 0,9 см, что меньше размера апертуры.

В отсутствие охлаждения время жизни ограничивают диффузионные процессы (2.50), (2.52).

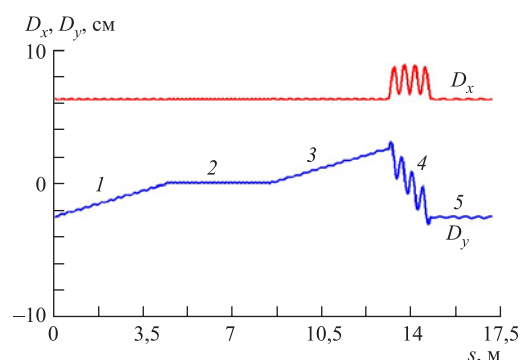


Рис. 20. Дисперсионные функции накопителя LEPTA. 1–5 — участки кольца: 1, 3 — торы; 2, 5 — свободные прямолинейные промежутки; 4 — спиральный квадруполь.  $G = 10$  Гс/см,  $B_0 = 400$  Гс

Результаты расчета дисперсионных функций накопителя LEPTA матричным методом (рис. 20) согласуются качественно с рассмотрением, проведенным в дрейфовом приближении (см. формулы (2.35)). Тем же методом (программа BETATRON) [30, 32] были рассчитаны структурные функции для обеих мод колебаний (рис. 21,  $a-z$ ). С помощью программы BETATRON рассчитываются также критическая энергия и коэффициент уплотнения орбит, который для выбранных параметров накопителя (табл. 2,  $G = 10$  Гс/см) составляет  $\gamma_{tr} = 5,68$  в хорошем согласии с матричным расчетом (2.39).

Апертура накопителя LEPTA определяется расстоянием между пластинами инжекционного кикера и равна  $b = 1,2$  см. При этом для максимального угла рассеяния  $\theta_{max}$  оценки (2.46) и (2.47) дают 1,5 и 0,7 рад соответственно, а более точное рассчитанное значение, с учетом дисперсии в точке инжекции,  $\sim 0,5$  рад. Это более чем на порядок превышает соответствующую величину у обычных накопителей. Для «азотного» вакуума, сложив обратные времена для эффектов (2.46) и (2.47), получим при давлении  $10^{-10}$  Торр время жизни  $\sim 300$  с. Примерно такую же величину дает оценка по многократному рассеянию (2.50).

Время жизни пучка, определяемое диффузией на неоднородностях магнитного поля (2.52), согласно оценкам, приведенным в п. 2.4, может соста-



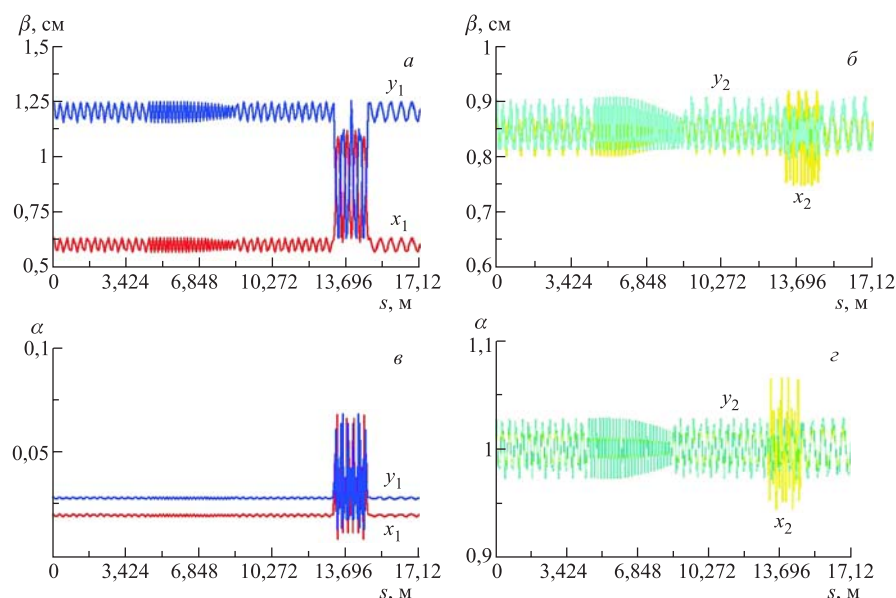


Рис. 21. Вертикальные и горизонтальные бета-функции (*a*, *б*) и альфа-функции (*в*, *г*) для двух мод колебаний: *a*, *в*) медленная (бетатронная) мода; *б*, *г*) быстрая (ларморовская) мода.  $G = 10$  Гс/см,  $B_0 = 400$  Гс

влять несколько секунд. Однако этот эффект очень чувствителен к длине возмущения: время жизни растет с  $L_B$  как квадрат экспоненты.

**4.5. Динамика циркулирующего электронного пучка.** В настоящее время свойства накопителя ЛЕРТА изучаются с использованием модельного электронного пучка [33, 34]. В отсутствие охлаждения все факторы, приводящие к росту углового разброса и радиуса циркулирующего пучка, становятся существенными.

Угловой разброс в пучке, устанавливающийся после инжекции, определяется в основном градиентом спиральной квадрупольной обмотки. На рис. 22 приведены результаты траекторного анализа динамики движения для одиночной частицы (пунктирные линии показывают изменение координат частиц на соответствующей плоскости поперечного фазового пространства при ее движении вдоль накопителя) и проекции фазовой траектории, рассчитанные по коэффициентам среднеквадратичной матрицы. Расчет проводился для квадрупольной обмотки со скачкообразным изменением градиента на входе и выходе и соответственно дает верхнюю оценку для углового разброса в циркулирующем пучке. Из рис. 22 видно, что результаты траекторного анализа

находятся в хорошем согласии с расчетами, сделанными на основе теории связанного движения, изложенной в п. 3.5. Ожидаемый угловой разброс в пучке не превышает 50 мрад.

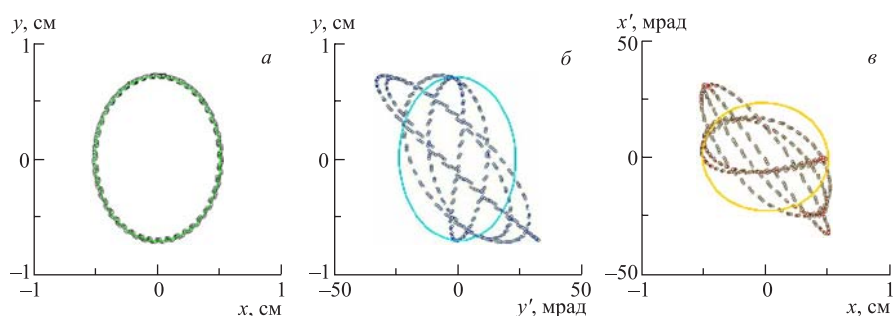


Рис. 22. Фазовые портреты образующих эллипсов пучка и динамика частицы в различных фазовых плоскостях: а) поперечное сечение в плоскости  $x, y$ ; б) плоскость  $y, y'$ ; в) плоскость  $x, x'$

Экспериментальные исследования динамики циркулирующего электронного пучка показали, что полуволновый резонанс медленной моды, соответствующий величине градиента спирального поля 22 Гс/см, приводит к гибели пучка. Влияние резонансов быстрой моды на параметры пучка обнаружить не удалось.

## 5. ПЕРВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ LEPТА

Физический пуск накопителя LEPТА с циркулирующим электронным пучком был осуществлен в сентябре 2004 г [35]. Предварительно с помощью импульсного электронного пучка были протестированы его основные элементы: спиральная квадрупольная линза и элементы инжекции — септум и кикер.

Спиральная квадрупольная линза, помещенная в продольное магнитное поле, поворачивает пучок как целое вокруг оси линзы на угол  $\Delta\varphi$  (2.26), который пропорционален квадрату отношения магнитного поля квадруполь к полю соленоида (2.24).

Квадруполь был протестирован импульсным электронным пучком с диаметром 13 мм. Для этого на пути его прохождения была установлена диафрагма с двумя отверстиями с диаметром 1,5 мм и расстоянием между ними 10 мм. Таким образом, при прохождении пучка через такую диафрагму формировались два тонких луча. Один из них выводили на ось квадруполь, а угол

поворота второго измеряли как функцию тока квадруполя. Положение пучков после прохождения квадруполя наблюдали на люминесцентном экране. Зависимость угла поворота от тока квадруполя находится в хорошем согласии с формулами (2.25) и (1.2) (рис. 23).

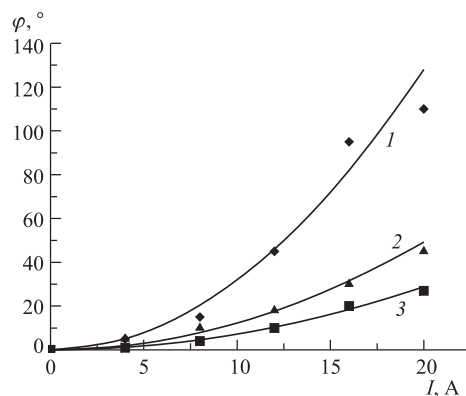


Рис. 23. Зависимость угла поворота пучка в спиральной квадрупольной линзе от тока в ее обмотке для различных значений продольного магнитного поля:  $B = 0,027$  (◆, 1);  $0,04$  (▲, 2);  $0,053$  Тл (■, 3)

Аналогично импульсным пучком тестировались элементы инжекции — кикер и септум, установленные в септумном соленоиде. Пушка была помещена в медианной плоскости на выходе кикера так, чтобы электронный пучок поступал в кикер в направлении, противоположном штатному. При тестировании на пластины кикера подавалось статическое напряжение, которое в зависимости от полярности смещало пучок вверх или вниз. На входных фланцах трех каналов вакуумной камеры септума, т. е. со стороны, противоположной кикеру, были установлены люминесцентные экраны. При изменении напряжения на пластинах кикера пучок поочередно наблюдался на всех трех экранах, включая центральный. Ток в септумных обмотках и напряжение на пластинах оптимизированы для получения наилучшего прохождения пучка. Изменение тока, питающего септумные обмотки, не влияло на положение пучка в центральном канале. Таким образом, было показано, что предложенная схема позволяет осуществить инжекцию позитронного пучка на равновесную орбиту, а также ввод однооборотного электронного пучка, без возмущения пучка, циркулирующего на равновесной орбите.

При настройке всего накопителя в качестве инжектора использовалась электронная пушка системы электронного охлаждения, установленная в ее штатном положении, в левом нижнем канале септума (рис. 6). Ток электронного пучка из пушки измерялся с помощью пояса Роговского в цепи катода.

Диагностика циркулирующего пучка осуществлялась сегментными диафрагмами и двумя пикап-станциями, представляющими собой цилиндры, соосные с осью вакуумной камеры. Цилиндры разрезаны на две одинаковые части — первый в вертикальной, а второй в горизонтальной плоскости. С помощью пикап-станции можно контролировать положение пучка по одной из координат: вертикальной на входе в прямолинейную секцию и горизонтальной на ее выходе. Сегментные диафрагмы выполнены в виде отдельных изолированных металлических пластин, размещенных на границах апертуры на выходе септумных обмоток и кикера.

После замыкания орбиты наблюдался сигнал с пикап-станций от нескольких оборотов циркулирующего пучка (рис. 24).

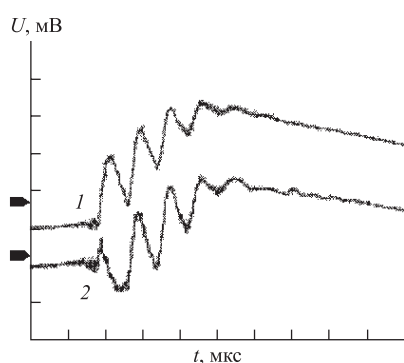


Рис. 24. Осциллограмма сигналов с пластин вертикальной пикап-станции. Цена деления по горизонтальной оси 0,5 мкс, вертикальной — 100 мВ

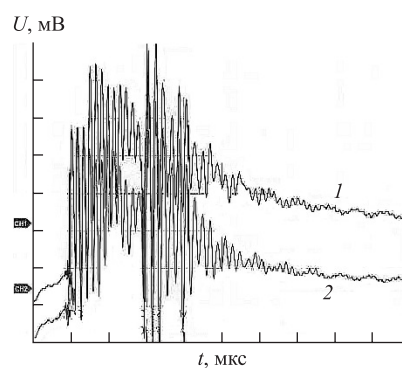


Рис. 25. Осциллограмма сигналов с пластин вертикальной пикап-станции при включенном квадруполе. Цена деления по горизонтальной оси 2,5 мкс, вертикальной — 50 мВ

Длительность заднего фронта кикера составляет около 30 нс, в результате циркулирующий пучок заполняет периметр накопителя не полностью и поэтому может некоторое время наблюдаться пикап-станцией. Сигналы с пикап-станций, соответствующие отдельным оборотам пучка, наблюдаются сразу после выключения кикера. Включение квадруполя позволяет получить устойчивое движение на равновесной орбите (рис. 25).

Ток циркулирующего пучка оценивался в соответствии с калибровкой пикапов и на нескольких первых оборотах составлял  $\sim 60$  мА при токе инжекции 120 мА. Сигналы от отдельных оборотов наблюдали в течение  $\sim 10$  мкс, пока пучок не «расплывался» и постепенно заполнял всю орбиту. Однако до момента  $\sim 200$  мкс можно, при соответствующих на-

стройках угла инжекции пучка, наблюдать сигнал меньшей амплитуды и с меньшей частотой (рис. 26). Эта медленная частота соответствует вращению

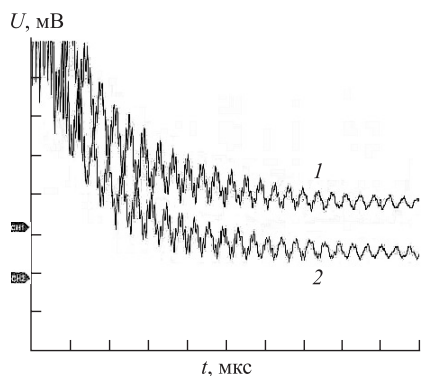


Рис. 26. Медленное вращение пучка. Цена деления по горизонтальной оси 5 мкс, по вертикальной — 5 мВ

пучка как целого относительно равновесной орбиты, и ее значение определяется градиентом поля в квадруполе (см. (3.7)). Сигналы медленной частоты с двух пластин пикап-станции имеют противоположную фазу, что и подтверждает вращение пучка как целого.

Как отмечалось выше, в первом приближении движение частиц в таком накопителе можно рассматривать как сумму двух независимых вращений — быстрого ларморовского вокруг силовой линии поля и медленного вращения пучка как целого вокруг равновесной орбиты. Угол поворота пучка как целого за один оборот фактически является медленным бетатронным числом

$Q_{bet}$ , которое равно отношению частоты медленного вращения пучка вокруг оси к частоте обращения (3.7).

Измерение зависимости  $Q_{bet}$  от тока квадруполя показало, что область устойчивой циркуляции пучка лежит в пределах изменения тока квадруполя от 35 до 60 А, что соответствует  $Q_{bet} = 0,1-0,4$  (рис. 27).

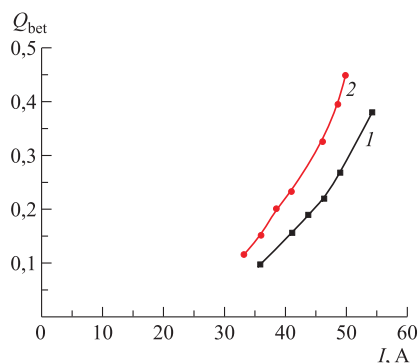


Рис. 27. Зависимость бетатронного числа  $Q_{bet}$  от тока квадруполя при энергии циркулирующего пучка 8,2 кэВ (■, 1) и 2,3 кэВ (●, 2)

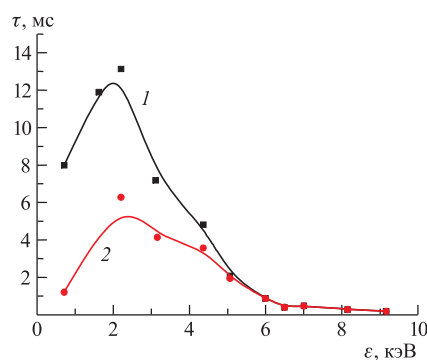


Рис. 28. Зависимость времени жизни электронов от энергии,  $B = 350$  Гс. ■, 1 —  $P = 7 \cdot 10^{-8}$  Торр; ●, 2 —  $P = 5 \cdot 10^{-7}$  Торр

Измерение времени жизни пучка производилось методом сброса пучка в заданный момент времени. Для этого на одну из пластин кикера подается импульс напряжения с амплитудой 500 В и задержкой, регулируемой по времени. Это импульсное поперечное поле смещает пучок по вертикали и приводит к его гибели. При этом с пикап-станций наблюдается сигнал, пропорциональный току пучка, циркулировавшего до «удара». Зависимость времени жизни от энергии (рис. 28) показывает, что существуют две области значений энергии:

$$0 \leq \varepsilon_I \leq 2,2 \text{ кэВ}, \quad 2,2 \text{ кэВ} < \varepsilon_{II}.$$

В области  $\varepsilon_I$  время жизни хорошо аппроксимируется зависимостью от энергии:

$$\tau = A\beta, \quad (5.20)$$

где  $A$  — численный множитель, зависящий от размера апертуры и величины магнитного поля  $B_0$ ;  $\beta c$  — скорость частиц в накопителе (см. (2.50)). Это означает, что время жизни в области  $\varepsilon_I$  определяется вакуумными условиями. В области  $\varepsilon_{II}$  наблюдается быстрый спад времени жизни с энергией, что можно объяснить нарушением адиабатичности движения частиц в неоднородном магнитном поле (см. (2.52), (2.53)), и этот механизм преобладает над рассеянием на остаточном газе. Такое неоднородное магнитное поле присутствует в области стыков элементов кольца.

На рис. 28 приведены результаты измерения времени жизни при двух значениях давления в вакуумной камере. С увеличением давления (кривая 2) время жизни уменьшается в области  $\varepsilon_I$ , а начиная с энергии  $\sim 5$  кэВ не зависит от давления. Таким образом, время жизни в области  $\varepsilon_{II}$  определяется не вакуумными условиями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модифицированный бетатрон и его разновидность — стеллатрон представляют собой жесткофокусирующий ускоритель, своеобразные физические характеристики которого позволяют накапливать и ускорять пучки заряженных частиц с интенсивностью, многократно превосходящей уровень, доступный для классических бетатронов. Введение прямолинейных промежутков дает дополнительные возможности для размещения устройств впуска-выпуска, диагностики и т. п. Предложенная недавно оригинальная схема инъекции пучков открывает дополнительные возможности для различных применений этого ускорителя. Таким образом, модифицированный бетатрон является перспективным инструментом ускорительной техники.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность П. Р. Зенкевичу, Д. Мёлю, А. Н. Скринскому и Х. И. Штайну за плодотворные дискуссии, А. Г. Кобецу, Ю. В. Коротаеву, Р. В. Пивину, С. Л. Яковенко за помощь в проведении экспериментов. Авторы признательны Дж. Джексону, Т. Катаяме и В. Олерту за интерес к работе и поддержку, Т. А. Степановой за помощь в подготовке рукописи к публикации.

Работа поддержана грантом РФФИ 02-02-16911.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chernin D., Sprangle P. // Part. Accel. 1982. V. 12. P. 85–100.
2. Rostoker N. // Part. Accel. 1973. V. 5. P. 93.
3. Sprangle P., Kapetanacos C. A. // J. Appl. Phys. 1978. V. 49. P. 1.
4. Kapetanacos C. A. et al. // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 1634.
5. Mandelbaum B. et al. // Phys. Fluids. 1988. V. 31, No. 4. P. 916–923.
6. Koert P. et al. // Proc. of PAC. 1987. P. 972–974.
7. Kapetanacos C. A. et al. // Phys. Fluids B. 1993. V. 5, No. 7. P. 2295.
8. Humphires S. Jr., Terry R. L., Frauenglass A. // J. Appl. Phys. 1991. V. 69, No. 4. P. 1822–1834.
9. Budker G. I., Skrinsky A. N. // Sov. Phys. Usp. 1978. V. 21. P. 277.
10. Artamonov A., Derbenev Ya., Saldin E. // Part. Accel. 1988. V. 23. P. 79–92.
11. Meshkov I. N., Skrinsky A. N. JINR Commun. E9-95-130. Dubna, 1995.
12. Meshkov I. N., Skrinsky A. N. // Nucl. Instr. Meth. A. 1996. V. 379. P. 41.
13. Meshkov I., Sidorin A. // Proc. of Intern. Workshop on Medium Energy Electron Cooling, Novosibirsk, 1997. P. 183.
14. Jackson J. // Ibid. P. 171.
15. Nagaitsev S. // Proc of HEACC'98, Dubna, 1998. P. 407.
16. Fan K. et al. // FZJ Annual Report. 2003. P. 509.
17. Долгополов В. В., Кириченко Ю. В. // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 27, вып. 11. С. 72–77.
18. Kapetanacos C. A. // J. Synchrotron Radiation. 1996. V. 3, No. 6. P. 268–271.
19. Tanaka H. // Proc. of FFAG Accelerator Workshop, Tsukuba, Japan, July 7–12, 2003.
20. Ivanov A. et al. // Nucl. Instr. Meth. A. 2000. V. 441, No. 1–2. P. 262.
21. Meshkov I. et al. // Proc. of HEACC'98, Dubna, 1998.
22. Мешков И. Н. Транспортировка пучков заряженных частиц. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1991.
23. Teng L. C. FNAL-229. 1971.
24. Литвиненко В. Н., Переведенцев Е. А. // Тр. VI Всесоюз. совещ. по ускорителям. Дубна, 1979. Т. 2. С. 285–288.
25. Ripken G. DESY Internal Report R1-70/4. 1970.
26. Mais H., Ripken G. Theory of Coupled Synchro-Betatron Oscillations. DESY Internal Report. DESY M-82-05. 1982.

27. *Meshkov I. N. et al.* // Proc. of the 4th Workshop on the Medium-Energy Electron Cooling. Dubna, 1998. P. 167.
28. *Mustafin E. R., Zenkevich P. R.* Preprint ИТЕР 8-99. М., 1999. P. 25.
29. *Диканский Н. С., Пестриков Д. В.* Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
30. *Meshkov I. N. et al.* // Proc. of ICAP2000. Darmstadt, 2000.
31. *Meshkov I. N. et al.* // Proc. of Intern. Workshop on Medium Energy Electron Cooling. Dubna, 1998. P. 191.
32. *Meshkov I. N. et al.* // Proc. of Beam Cooling and Related Topics. Bad Honnef, 2001.
33. *Meshkov I. N. et al.* // Positron storage ring for positronium and antihydrogen generation in flight. The LEPТА project // Nucl. Instr. Meth. B. 2004. V. 214. P. 186–190.
34. *Антропов В. К. и др.* Проект ЛЕРТА: первые эксперименты с электронным пучком // Письма в ЭЧАЯ. 2005. Т. 2, № 3(126). С. 19–24.
35. *Болтушкин Е. В. и др.* Физический пуск накопителя ЛЕРТА // Атомная энергия. 2005. Т. 98, вып. 3. С. 225–233.