ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2006. Т. 37. ВЫП. 1

УДК 530.12

ТЕТРАДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ И СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*А. Ф. Захаров**, *В. А. Зинчук*, *В. Н. Первушин*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*1) Национальные астрономические обсерватории, Китайская академия наук, Пекин;

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2006. Т. 37. ВЫП. 1

УДК 530.12

ТЕТРАДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ И СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. Ф. Захаров, В. А. Зинчук, В. Н. Первушин*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен вопросам определения систем отсчета в общей теории относительности (ОТО) в тетрадном формализме. Тетрады являются коэффициентами разложения компонент ортогонального репера по дифференциалам координатного пространства. В терминах этих инвариантных дифференциальных форм представлена гамильтонова космологическая теория возмущений, в которой нет двойного счета переменной детерминанта пространственной метрики, в отличие от стандартной теории возмущений Лифшица–Бардина. Дается явный вид лоренцевских преобразований компонент ортогонального репера от системы отсчета реликтового излучения к системе покоя наблюдателя, которая движется с постоянной скоростью относительно реликтового излучения. Обсуждаются возможные наблюдательные следствия гамильтоновой космологической теории возмущений, которые включают квантовую аномалию геометрического интеграла и сдвиг начала координат в процессе эволюции Вселенной как один из механизмов формирования крупномасштабной структуры Вселенной и анизотропии реликтового излучения.

The review is devoted to problems of defining the frames of reference in the tetrad formalism of General Relativity. The tetrads are the decomposition coefficients of components of orthogonal basis over the differentials of a coordinate space. The Hamiltonian cosmological perturbation theory is presented in the terms of these invariant differential forms, and this theory doesn't contain the double counting of variable of spatial metric determinant in contrast to the standard Lifshits cosmological perturbation theory. The Lorentz transformations of components of orthogonal basis are given. Possible observational consequences of the Hamiltonian cosmological perturbation theory are discussed including quantum anomaly of geometrical interval and a shift of the coordinate origin in the process of the Universe evolution as a source of anisotropy of CMBR.

ВВЕДЕНИЕ

Со времен Ньютона теория описывает наблюдаемые физические процессы, основываясь на уравнениях движения и начальных данных, которые необходимы для однозначного решения этих уравнений. Начальные данные измеряются совокупностью приборов, отождествляемых с определенной системой отсчета. Руководящим принципом современных физических теорий

*1) Национальные астрономические обсерватории, Китайская академия наук, Пекин;
2) Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва;
3) Астрокосмический центр Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, Москва.

является определение групп преобразований систем отсчета как всего многообразия начальных данных, оставляющих без изменения уравнения движения. Здесь можно указать группу Галилея в механике Ньютона и группу Лоренца–Пуанкаре в специальной теории относительности (СТО).

В этом контексте важно установить смысл группы общекоординатных преобразований в общей теории относительности (ОТО) [1]. Сам Эйнштейн предполагал, что группа общекоординатных преобразований есть прямое обобщение группы преобразований Пуанкаре, при которой инерциальные системы отсчета заменяются на системы координат, «движущиеся неравномерно относительно друг друга» [2].

Однако в дальнейшем такая интерпретация общекоординатных преобразований была пересмотрена в связи с открытием Г. Вейлем и В. А. Фоком нового геометрического принципа построения физической теории — принципа калибровочной симметрии, причем открытие калибровочной симметрии стимулировала сама ОТО*.

Фок обратил внимание [6] на то, что группа общекоординатных преобразований в ОТО играет совершенно другую физическую роль, чем группа Пуанкаре в СТО. Утверждая так, В. А. Фок отразил тенденцию, которая получила развитие в работах Янга, Миллса [7,8], Утиямы [9], Киббла [10] и др., подготовивших современное понимание роли калибровочных преобразований и, в частности, общекоординатных преобразований в ОТО. Согласно этому пониманию, локальная калибровочная симметрия резко отличается от симметрии систем отсчета, которая ассоциируется с набором начальных данных и сохраняющихся интегралов движения. Если обнаружение новой симметрии систем отсчета ведет к новым начальным данным, что увеличивает их число, то обнаружение локальной калибровочной симметрии ведет к новым условиям на начальные данные, что уменьшает их число**. Эти следствия, к которым приводят свойства инвариантности полевой теории при калибровочных преобразованиях координат и полевых функций, как показано в работе [14], уже содержались в докладе Д. Гильберта «Основания физики» 20 ноября 1915 г. [15, 16], сделанном им в Геттингенском математическом обществе, где впервые было представлено действие ОТО и впервые дан вывод уравнений ОТО путем вариации этого действия. В этой работе Гильберт

---

*Напомним, что начиная с 1918 г. Вейль [3], используя аналогию с ОТО, пытался найти геометрические принципы построения электродинамики. Попытки Вейля увенчались успехом [4] только после создания квантовой механики. Исходным пунктом к формулировке геометрического принципа построения электродинамики (известного сейчас как принцип локальной калибровочной симметрии) для Вейля явилось переопределение квантово-механического оператора импульса в присутствии электромагнитного поля. Такое переопределение было дано Фоком в 1926 г. [5].

**См., например, взаимоотношение калибровочных преобразований с релятивистскими преобразованиями систем отчета в КЭД в [11–13].

также впервые дал формулировку теоремы, получившей впоследствии название второй теоремы Нетер [17–19], из которой следует интерпретация общекоординатных преобразований как калибровочных со всеми вытекающими из этого условиями на начальные данные [14] и уменьшение числа независимых степеней свободы [20].

Можно сказать, что в работе Гильберта [15, 16] впервые сформулированы принципы построения современных физических теорий, согласно которым основные понятия классической физики: функционал действия, симметрия начальных данных и уравнения движения дополняются *геометрическими* понятиями *инвариантного интервала*, *калибровочной симметрии* и *уравнений связи* начальных данных соответственно. Эти принципы включают в себя определение Дираком [11] наблюдаемых величин теории, в частности начальных данных, меняющихся при преобразованиях систем отсчета, как инвариантов относительно калибровочных преобразований. Для определения инвариантных относительно диффеоморфизмов наблюдаемых*, и тем самым устранения калибровочного произвола в решениях уравнений теории, необходимо отделить калибровочные (т. е. общекоординатные) преобразования от преобразований систем отсчета.

Вопрос об отделении общекоординатных преобразований от релятивистских преобразований систем отсчета в ОТО был решен Фоком [21] введением ортогонального базиса и физических величин, преобразующихся по представлению группы Лоренца. Такими величинами являются линейные дифференциальные формы Маурера–Картана, которые описывают движение ортогональных реперов в физическом пространстве событий. Коэффициентами разложения форм Маурера–Картана по дифференциалам координатного пространства являются компоненты тетрады, определяемой как «корень» из метрического тензора. Дифференциальные формы Маурера–Картана, которые по определению являются инвариантами относительно общекоординатных преобразований, имеют смысл измеряемых геометрических величин физического пространства, а интегрируемые неинвариантные дифференциалы координатного пространства рассматриваются как вспомогательные математические величины типа электромагнитных потенциалов.

Выбору систем отсчета в ОТО посвящено огромное число работ (см., например, монографию [22] и ссылки в ней). В настоящем обзоре мы ограничимся классом систем отсчета, используемых для описания эволюции метрики и полей в форме гамильтоновой динамики [20, 23, 24]. Этот класс систем отсчета был определен Дираком [23] как расслоение 4-мерного координатного многообразия пространства-времени на семейство непересекающихся пространственноподобных гиперповерхностей [22]. Группа общекоординат-

*В дальнейшем будем называть такие величины и наблюдаемые диффео-инвариантными.

ных преобразований ОТО (или группа диффеоморфизмов), сохраняющая такое расслоение, была указана в работах Зельманова [25], который назвал ее группой кинеметрических преобразований, эта группа содержит подгруппу репараметризации координатного параметра эволюции. Это означает, что диффео-неинвариантное координатное «время» ненаблюдаемо [26–28]. Возникают проблема выбора в ОТО *физических диффео-инвариантных переменных и наблюдаемых* в *конкретной* системе отсчета, включая время, энергию и потенциалы взаимодействия. Путь решения аналогичных проблем в теории калибровочных полей был намечен еще Дираком как гамильтонова редукция (см. [11–13]), понимаемая как вычисление действия и других величин теории на поверхности связей, с целью отделения динамического содержания теории от лишних переменных и калибровочного произвола.

Именно этим проблемам гамильтоновой редукции ОТО как метода определения ее *физических диффео-инвариантных переменных и наблюдаемых* в конкретной системе отсчета и применению этих *наблюдаемых* для построения квантовой гравитации, определенной как первичное и вторичное квантование энергетической связи, и посвящен настоящий обзор. В обзоре проведено сравнение диффео-инвариантного метода описания динамики полей [26–28] с неинвариантными методами, типа островной вселенной [20], или так называемой теории глобального времени [29], в которых предполагается, что координатное время становится наблюдаемым.

Содержание обзора следующее. В разд. 1 рассмотрены понятие системы отсчета в механике и гамильтонова редукция релятивистской механики со связями на эквивалентную систему без связей. Раздел 2 посвящен гамильтоновой редукции ОТО, рассматриваемой в однородном приближении. В разд. 3 дан обзор результатов работ Дирака, Зельманова, Лихнеровича и др. по определению систем отсчета в ОТО с целью гамильтоновой редукции ОТО в терминах диффео-инвариантных наблюдаемых в конкретной системе отсчета и применению этих результатов для решения актуальных проблем современной космологии. В разд. 4 системы отсчета в ОТО рассматриваются в тетрадном формализме для построения гамильтоновой космологической теории возмущения и ее лоренцевских преобразований. В обзоре используется система единиц $c = \hbar = 1$.

1. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В МЕХАНИКЕ

1.1. Механика Ньютона. Напомним вначале исходные понятия, используя простой пример одномерной механики Ньютона, заданной функционалом действия

$$S_L = \int dt L(X(t), dX(t)/dt), \qquad L(X(t), dX(t)/dt) = \left[\frac{dX(t)}{dt}\right]^2 \frac{m}{2}, \quad (1)$$

где $X(t)$ — *переменная*, описывающая траекторию частицы; t — *координата* времени; m — масса, рассматриваемая как *фундаментальный параметр* теории.

Вариация действия (1) $\delta S_L = 0$ при фиксированных граничных условиях $\delta X(t_0) = \delta X(t_1) = 0$ дает уравнение движения

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = 0, \tag{2}$$

общее решение которого

$$X(t) = X_I + \frac{P_I}{m}(t - t_I) \tag{3}$$

зависит от начальных данных $X(t_I) = X_I, dX(t_I)/dt_I = P_I/m$, заданных в момент времени t_I. Начальные данные измеряются набором физических приборов (в данном случае — линейкой и часами, относительно фиксированных точки пространства и момента времени) и ассоциируются с *системой отсчета*. Системы отсчета, движущиеся относительно друг друга с постоянными скоростями, называются *инерциальными*, и можно написать преобразования переменных $X \to \widetilde{X} = X + X_g + v_g(t - t_I)$, которые переводят неподвижную систему отсчета, заданную в точке $X(t_I) = X_I$, в систему отсчета, движущуюся со скоростью v_g, с началом отсчета $X_g(t_I) = X_I + X_g$. Группа таких преобразований систем отсчета в механике Ньютона называется группой Галилея. Уравнения движения (2) не зависят от начальных данных и, следовательно, от системы отсчета. Независимость уравнений как законов природы от начальных данных называют *принципом относительности* [30–32].

В гамильтоновом описании действие (1) принимает вид

$$S_H = \int dt \left[P(t)\frac{dX(t)}{dt} - H\right], \tag{4}$$

где $P(t)$ — импульс; $\{P, X\}$ — *фазовое пространство*,

$$H(P) = \frac{P^2}{2m} \tag{5}$$

называется *гамильтоновой функцией*, а ее значения на траектории — *энергией*: $E = H(P_I)$. Вариация действия (4) ведет к системе уравнений первого порядка

$$P(t) = m\frac{dX(t)}{dt}, \qquad \frac{dP(t)}{dt} = 0 \tag{6}$$

вместо уравнения второго порядка (2). Согласно механике Ньютона, все наблюдатели в разных системах отсчета пользуются одним и тем же абсолютным временем t.

1.2. Специальная теория относительности как модель ОТО. *1.2.1. Релятивистская механика как следствие электродинамики.* Мы видели выше, что в ньютоновской механике понятие пространственных координат частиц $X_i,\ i = 1, 2, 3$, как *динамических переменных* четко отделяется от абсолютного времени t как *параметра эволюции* этих переменных.

Релятивистская механика основана на группе симметрии электродинамики Фарадея–Максвелла*, полученной Лоренцем и Пуанкаре, которая рассматривает время $t = X_{(0)}$ и пространственные координаты $X_{(i)}, i = 1, 2, 3$, как единое *пространство событий* или пространство-время Минковского $X_{(\alpha)}, \alpha = 0, i$, с (псевдо)скалярным произведением любых двух векторов $(A_{(\alpha)}B_{(\alpha)} = A_{(0)}B_{(0)} - A_{(i)}B_{(i)})$ [32].

Релятивистская частица в СТО описывается действием

$$S_{\rm CTO} = -m \int d\tau \sqrt{\left(\frac{dX_{(\alpha)}}{d\tau}\right)^2}. \tag{7}$$

Это действие инвариантно относительно преобразований группы Пуанкаре: $\overline{X}_{(\alpha)} = X_{(\alpha)_p} + \Lambda_{(\alpha)(\beta)}X_{(\beta)}$, которая в данном случае и есть группа преобразований систем отсчета. А подгруппа поворотов $\Lambda_{(\alpha)(\beta)}X_{(\beta)}$ носит название связной компоненты группы Лоренца. Фиксация индексов $(0), (i)$ в этом *пространстве событий* $[X_{(0)}|X_{(i)}]$ и означает выбор определенной лоренцевской системы отсчета в СТО.

Следует подчеркнуть, что в СТО возникает принципиально новая симметрия теории относительно преобразований, которые не меняют начальных данных, а именно действие (7) инвариантно относительно репараметризации координатного параметра эволюции

$$\tau \to \widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}(\tau), \tag{8}$$

что ведет к появлению связей между переменными. Группа таких преобразований (диффеоморфизмов — в более общем случае) в литературе называется *калибровочной группой*, а *наблюдаемыми* называются величины, инвариантные относительно калибровочных преобразований. В качестве такой *наблюдаемой*, инвариантной относительно репараметризации времени, можно взять выражение *геометрического интервала времени*

$$s(\tau) = \int_0^\tau d\widetilde{\tau} \sqrt{\left(\frac{dX_{(\alpha)}}{d\widetilde{\tau}}\right)^2} \tag{9}$$

---

*Впервые преобразования, оставляющие инвариантными уравнения электродинамики, были рассмотрены Фогтом в 1887 г. [33].

на мировой линии частицы в пространстве событий $X_{(\alpha)}$. Этот *интервал* измеряет наблюдатель, сопутствующий частице. *Временная переменная* пространства событий $X_{(0)}$ есть время, измеряемое внешним наблюдателем.

Задачей теории является решение уравнений для описания траектории частицы в пространстве событий в терминах *калибровочных инвариантов*.

В литературе используют два описания релятивистской частицы: 1) с помощью системы без связи, как это делали Пуанкаре и Эйнштейн в 1904–1905 гг. [34, 35]; 2) в рамках системы со связями, по аналогии с ОТО, сформулированной в 1915 г. в работах Гильберта и Эйнштейна [1, 15].

1.2.2. Динамика релятивистской частицы по Пуанкаре–Эйнштейну. Система отсчета в СТО задается единичным времениподобным вектором $l^2_{(\mu)} = l^2_{(0)} - l^2_{(i)} = 1$, который будем называть осью времени. Совокупность таких векторов дает полный набор лоренцевских систем отсчета. В каждой такой системе отсчета время в пространстве Минковского $X_{(\mu)}$ определяется как скалярное произведение вектора оси времени на координату: $X_{(0)} = l_{(\mu)}X_{(\mu)}$. А пространственные координаты заданы на трехмерной гиперповерхности $X^{\perp}_{(\mu)} = X_{(\mu)} - l_{(\mu)}(l_{(\nu)}X_{(\nu)})$, которая перпендикулярна выбранной оси времени $l_{(\nu)}$.

Без ограничения общности можно выбрать ось времени в виде $l_{(\mu)} = (1, 0, 0, 0)$, что называется системой покоя наблюдателя, а затем после решения уравнений перейти в любую другую лоренцевскую систему отсчета. Действие для СТО в версии 1905 г. можно получить, вынося в действии (7) $dX_{(0)}/d\tau$ за знак корня:

$$S_{\text{СТО:1905}} = -m\int d\tau \frac{dX_{(0)}}{d\tau}\sqrt{1-\left(\frac{dX_{(i)}}{dX_{(0)}}\right)^2} = \\ = -m\int dX_{(0)}\sqrt{1-\left(\frac{dX_{(i)}}{dX_{(0)}}\right)^2}. \quad (10)$$

Выражая импульс через скорость $V_{(i)} = dX_{(i)}/dX_{(0)}$ с помощью вариации лагранжиана $L = -m\sqrt{1-V^2_{(i)}}$

$$P_{(i)} = \partial L/\partial(V_{(i)}) = mV_{(i)}/\sqrt{1-V^2_{(k)}}, \quad (11)$$

можно получить гамильтонову функцию

$$H(P_{(i)}) = P_{(i)}V_{(i)} - L = \sqrt{m^2 + P^2_{(i)}(X_{(0)})} \quad (12)$$

и действие (10) в гамильтоновой форме

$$S_{\text{СТО:1905}} = \int dX_{(0)}\left[P_{(i)}\frac{dX_{(i)}}{dX_{(0)}} - H(P_{(i)})\right]. \quad (13)$$

Энергия определяется как значения гамильтоновой функции на траектории $E = H(P_{I(i)}) = \sqrt{m^2 + P_{I(i)}^2}$. Знаменитая формула $E = mc^2$ (здесь и ниже принимаем $c = 1$) есть следствие определения физических наблюдаемых с помощью принципа соответствия с классической механикой, устанавливаемого низкоэнергетическим разложением гамильтоновой функции по степеням динамических переменных:

$$H(P_{(i)}) = \sqrt{m^2 + P_{(i)}^2} = m + \frac{P_{(i)}^2}{2m} + \ldots \tag{14}$$

Вариация действия (13) по каноническим импульсам $P_{(i)}$ дает выражение для скоростей как функций импульсов

$$V_{(i)} = \frac{P_{(i)}}{\sqrt{m^2 + P_{(i)}^2}}, \tag{15}$$

а вариация по переменным $X_{(i)}$ дает закон сохранения импульсов: $dP_{(i)}/dX_{(0)} = 0$. Решение этих уравнений определяет траекторию частицы в пространстве событий:

$$X_{(i)}(X_{(0)}) = X_{(i)}(X_{I(0)}) + V_{(i)}[X_{(0)} - X_{I(0)}], \tag{16}$$

где $X_{I(0)}$ есть начальное значение времени в системе покоя наблюдателя.

Переход к любой другой системе отсчета совершается с помощью лоренцевских преобразований, и этот переход эквивалентен выбору другой оси времени. В каждой системе отсчета будет свое время и свои энергия и импульсы. Связь между динамическими переменными и временами в различных системах отсчета трактуют как релятивистский принцип относительности, ясная формулировка которого дана в работе Эйнштейна [35]. Согласно релятивистскому принципу относительности Эйнштейна, преобразования Лоренца систем отсчета содержат дополнительную информацию типа *релятивистских эффектов* по сравнению с решениями (16) динамических уравнений, получаемых вариацией действия (13).

И в этом пункте появление *релятивистских эффектов* как следствие кинематических преобразований Лоренца (т. е. преобразований систем отсчета) ведет к существенному отличию теории Эйнштейна от механики Ньютона, где все физические эффекты выводятся из уравнений движения с помощью вариационного принципа с учетом начальных данных, а группа Галилея преобразований систем отсчета в механике Ньютона не содержит ничего нового по сравнению с решениями динамических уравнений.

Возникает вопрос, можно ли сформулировать такую теорию релятивистской частицы, в которой все физические следствия, включая релятивистские эффекты, описывались бы вариационными уравнениями.

Покажем, что такая теория релятивистской частицы формулируется в полной аналогии с «Основаниями физики» [15] Гильберта, т. е. как *геометродинамика*, согласно которой описание физической системы основывается на функционале действия и геометрическом интервале, симметрии систем отсчета и калибровочной симметрии, уравнениях движения и уравнениях связи начальных данных.

1.2.3. Геометродинамика релятивистской частицы. Согласно Гильберту [15] геометродинамика релятивистской частицы основана на двух базисных постулатах: действии [27, 28]

$$S_{\text{СТО:1915}} \equiv \int d\tau L_{\text{СТО:1915}} = -\frac{m}{2}\int d\tau e(\tau)\left[\left(\frac{dX_{(\alpha)}}{e(\tau)d\tau}\right)^2 + 1\right] \qquad (17)$$

для *переменных* $X_{(\alpha)} = [X_{(0)}|X_{(i)}]$, образующих *пространство событий*, где движется частица, и *геометрическом интервале*

$$ds = e(\tau)d\tau \qquad (18)$$

одномерного риманова пространства на мировой линии, описываемой этой частицей в этом пространстве событий (см. рис. 1). Здесь $e(\tau)$ — единственная компонента метрики, называемая смещением координатного параметра эволюции.

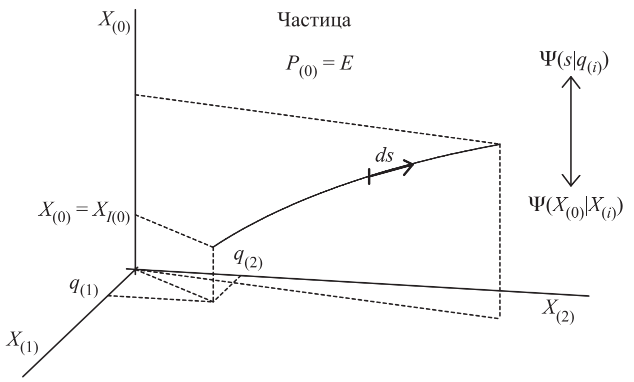

Рис. 1. Движение по мировой линии в пространстве событий релятивистской нестабильной частицы, полное описание которой дается двумя ньютоноподобными наборами наблюдаемых: динамическим и геометрическим, каждый из которых имеет свое время и свою волновую функцию Ψ. Два измеряемых времени жизни частицы (время как динамическая переменная $X_{(0)}$ и время как геометрический интервал s) связаны не преобразованиями Лоренца, а уравнением движения, полученным вариацией действия геометродинамики типа Гильберта

Вариация действия по функции $e(\tau)$ дает уравнение геометродинамики

$$[e(\tau)d\tau]^2 = dX_{(\alpha)}^2 \equiv dX_{(0)}^2 - dX_{(1)}^2 - dX_{(2)}^2 - dX_{(3)}^2. \tag{19}$$

Решая это уравнение относительно $e(\tau)$, получаем

$$e(\tau) = \pm\sqrt{\left(\frac{dX_{(\alpha)}}{d\tau}\right)^2}. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что действие геометродинамики (17) на этих решениях совпадает с исходным действием релятивистской частицы (7) с точностью до знака. Отрицательный знак $e(\tau)$ в (20) означает изменение знака массы в действии (7), что относится к описанию античастицы. Уравнение (19) называется уравнением связи.

Соответствующее действие гамильтоновой теории релятивистской частицы со связью можно получить из (17), вводя канонические импульсы $P_\alpha = \partial L_{\text{СТО:1915}}/\partial\dot{X}_{(\alpha)}$:

$$S_{\text{СТО:1915}} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-P_{(\alpha)}\frac{dX_{(\alpha)}}{d\tau} + \frac{e(\tau)}{2m}\left(P_{(\alpha)}^2 - m^2\right)\right], \tag{21}$$

где функция $e(\tau)$ смещения координатного параметра эволюции τ определяет, как было сказано выше, геометрический интервал (18)

$$ds = e(\tau)d\tau \longrightarrow s(\tau) = \int\limits_0^{\tau} d\overline{\tau}e(\overline{\tau}). \tag{22}$$

Действие (21) и интервал (18) инвариантны относительно репараметризации координатного параметра эволюции τ:

$$\tau \longrightarrow \widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}(\tau). \tag{23}$$

В этом смысле СТО можно назвать одномерной ОТО, где роль группы калибровочных (общекоординатных) преобразований играет группа репараметризации координатного параметра эволюции (23). Уравнение для вспомогательной функции смещения $\delta S_{\text{СТО}}/\delta e = 0$ дает энергетическую связь импульсов частицы $P_{(0)}, P_{(i)}$:

$$P_{(0)}^2 - P_{(i)}^2 = m^2, \tag{24}$$

называемую соотношением массовой поверхности.

Уравнения движения для переменных $P_{(\alpha)},\ X_{(\alpha)}$, полученные вариацией действия (21),

$$P_{(\alpha)} = m\frac{dX_{(\alpha)}}{ed\tau} \equiv m\frac{dX_{(\alpha)}}{ds}; \qquad \frac{dP_{(\alpha)}}{ds} = 0 \tag{25}$$

диффео-инвариантны. Решения этих уравнений в терминах геометрического интервала (22) имеют вид обобщения решения уравнений Ньютона (3) на пространство Минковского:

$$X_{(\alpha)}(s) = X_{I(\alpha)} + \frac{P_{I(\alpha)}}{m}s, \tag{26}$$

где роль параметра эволюции играет геометрический интервал времени, а $P_{I(\alpha)}, X_{I(\alpha)}$ есть начальные данные всех четырех переменных в точке $s = 0$:

$$X_{(\alpha)}(s = 0) = X_{I(\alpha)}. \tag{27}$$

Новыми фактами, по сравнению с механикой Ньютона, являются связь импульсов (24), временная компонента решения уравнения движений (26) и начальные данные $X_{I(0)}$ времени как переменной.

1.2.4. Редукция геометродинамики к теории Эйнштейна 1905 г. Действие (21) и интервал (22) мы назвали геометродинамикой частицы. Особенностью такой геометродинамики частицы является наличие в каждой системе отсчета двух диффео-инвариантных времениподобных величин: времени как геометрического интервала, измеряемого наблюдателем на мировой линии, и времени как динамической переменной, измеряемой внешним наблюдателем.

Физическая интерпретация решений уравнений геометродинамики (24) и (26) определяется выбором конкретной лоренцевской системы отсчета $P_\mu = (P_{(0)}, P_{(i)})$, называемой системой покоя наблюдателя. В этой системе покоя решение уравнения связи (24) относительно нулевой компоненты импульса

$$P_{(0)\pm} = \pm\sqrt{P_{(i)}^2 + m^2} = \pm H \tag{28}$$

является гамильтоновой функцией для пространственных динамических переменных $[P_{(i)}, X_{(i)}]$, называемых *редуцированным фазовым пространством*, согласно принципу соответствия с механикой Ньютона, а соответствующая переменная $X_{(0)}$ является временем эволюции этих пространственных переменных, измеряемым наблюдателем в его системе покоя.

В данной лоренцевской системе отсчета временная компонента решения (26)

$$X_{(0)}(s) - X_{I(0)} = \frac{P_{(0)\pm}}{m}s \tag{29}$$

расширенной системы, названной нами выше геометродинамикой, не имеет аналога в механике Ньютона, формула (29) описывает чисто релятивистский эффект отношения двух указанных выше времениподобных величин: времени как динамической переменной $X_{(0)}$ и времени как геометрического интервала s:

$$s = [X_{(0)} - X_{I(0)}]\frac{m}{P_{(0)\pm}}. \tag{30}$$

Мы будем называть это уравнение «геометрическим соотношением» двух времен релятивистской частицы: времени как переменной $[X_{(0)}]$ и времени как интервала s.

Подстановка геометрического соотношения (30) в пространственную часть решения (26)

$$X_{(i)}(s) = X_{I(i)} + \frac{P_{(i)}}{m} s \tag{31}$$

дает описание динамики релятивистской частицы в редуцированном фазовом пространстве $[P_{(i)}, X_{(i)}]$ относительно времени как переменной $[X_{(0)}]$:

$$X_{(i)} = X_{I(i)} + \frac{P_{(i)}}{P_{(0)+}}[X_{(0)} - X_{I(0)}]. \tag{32}$$

Таким образом, геометродинамика в определенной системе отсчета разделяется на динамику частицы без связей (32) и геометрию (31), которая описывает чисто релятивистские эффекты динамическими уравнениями движения только в этой системе отсчета [27, 28].

1.2.5. Что не мог знать Эйнштейн в 1905 г.? Действие (13), описывающее динамику частицы, можно получить подстановкой в действие геометродинамики (21) решения связи (28). Такая подстановка дает также действие частицы с отрицательной энергией в (28):

$$S_{\text{СТО:1915}}|_{P_{(0)}=P_{(0)-}} = \int\limits_{X_{(0)}}^{X_{I(0)}} d\overline{X}_0 \left[-P_{(i)} \frac{dX_{(i)}}{d\overline{X}_{(0)}} - \sqrt{P_{(i)}^2 + m^2} \right]. \tag{33}$$

Решение уравнений, соответствующих этому действию, имеет вид

$$X_i = X_{I(i)} + \frac{m}{P_{(0)-}}[X_{I(0)} - X_{(0)}(s)] = X_{I(i)} + \frac{m}{P_{(0)+}}[X_{(0)}(s) - X_{I(0)}]. \tag{34}$$

Решение проблемы отрицательной энергии дается в квантовой теории поля [19].

Напомним, что квантовая релятивистская механика определяется как квантование энергетической связи (24): $(P_{(0)})^2 - (P_{(i)})^2 = m^2$ с помощью замены импульсов частицы $P_{(\alpha)} = (P_{(0)}, P_{(i)})$ их операторами: $\hat{P}_{(\alpha)} = -i\partial_{(\alpha)}$. Результат такого квантования описывается уравнением Клейна–Гордона–Фока на волновую функцию

$$[(\hat{P}_{(\alpha)})^2 - m^2]\Psi[P_{(\alpha)}|X_{(\alpha)}] = 0 \tag{35}$$

как квантового аналога уравнения связи (24). Нормированное решение этого уравнения имеет вид суммы двух слагаемых:

$$\Psi[P_{(\alpha)}|X_{(\alpha)}] = \\ = (2|P_{(0)}|)^{-1/2}\left[a^{+}\Psi_{P_{(0)+}}\theta(X_{(0)} - X_{I(0)}) + a^{-}\Psi^{*}_{P_{(0)-}}\theta(X_{I(0)} - X_{(0)})\right] \quad (36)$$

с коэффициентами a^{+}, a^{-} в соответствии с двумя классическими решениями уравнения связи (24) с положительной и отрицательной энергией (28), где θ — ступенчатая функция Хэвисайда; Ψ — волновая функция.

В квантовой теории поля (которая формулируется как квантование коэффициентов a^{+}, a^{-}, т. е. как вторичное квантование релятивистской частицы [18, 19]), чтобы убрать отрицательные энергии $-|P_{(0)}|$ и тем самым обеспечить стабильность квантовой системы, коэффициент a^{+} трактуют как оператор рождения частицы с положительной энергией, а коэффициент a^{-} — как оператор уничтожения частицы также с положительной энергией*.

Такая трактовка эквивалентна постулату о существовании вакуума как состояния с наинизшей энергией в пространстве событий. Постулат о существовании вакуума означает ограничение классического движения частицы в пространстве событий, так что частица с $P_{(0)+}$ движется вперед, а частица с $P_{(0)-}$ — назад:

$$P_{(0)+} \to X_{I(0)} \leqslant X_{(0)}; \quad P_{(0)-} \to X_{I(0)} \geqslant X_{(0)}. \quad (37)$$

Возникает вопрос: какие следствия для геометрического интервала (22) s имеет причинное квантование (36) с указанным выше ограничением движения частицы (37)?

1.2.6. Квантовая аномалия геометрического интервала. Чтобы ответить на вопрос о следствии причинного квантования для геометрического интервала, сделаем преобразования Лоренца координат частицы в системе покоя к сопутствующей системе координат $[\overline{X}_{(0)}|\overline{X}_{(i)}]$, где $\overline{P}_{(i)} = 0, \overline{P}_{(0)\pm} = \pm m$.

Из (30) и (37) следует, что сопутствующее время $\overline{X}_{(0)}$ связано с геометрическим интервалом s соотношением

$$s(\overline{X}_{(0)}|\overline{X}_{I(0)}) = (\overline{X}_{(0)} - \overline{X}_{I(0)})\theta(\overline{X}_{(0)} - \overline{X}_{I(0)})\theta(\overline{P}_{(0)}) + \\ + (\overline{X}_{I(0)} - \overline{X}_{0})\theta(\overline{X}_{I(0)} - \overline{X}_{(0)})\theta(-\overline{P}_{(0)}). \quad (38)$$

*При этом в квантовой теории заодно дается и интерпретация положения $X_{I(0)}$ как точки, где частица рождается или уничтожается.

Полученное выражение для геометрического интервала s в квантовой теории поля выглядит как причинная функция Грина от сопутствующего времени:

$$\frac{d^2 s(\overline{X}_{(0)}|\overline{X}_{I(0)})}{d\overline{X}_{(0)}^2} = \delta(\overline{X}_{(0)} - \overline{X}_{I(0)}). \tag{39}$$

Отсюда видно, что следствием постулата о существовании вакуума как состояния с минимальной энергией является положительная стрела геометрического времени $s \geqslant 0$, которая ведет к существованию абсолютной точки отсчета этого времени $s = 0$. Положительная стрела означает нарушение симметрии классической теории относительно преобразования s в $-s$. Нарушение симметрии квантовой теории в сравнении с классической симметрией называется квантовой аномалией* [37].

Вторичное квантование любой релятивистской системы с постулатом существования вакуума (как физического состояния с минимальной энергией) ведет к абсолютной точке отсчета геометрического интервала времени $s = 0$ в этой системе. Вопрос о том, что было до рождения релятивистской частицы, струны или вселенной, для наблюдателя, измеряющего это время, не имеет физического смысла, так как в квантовой релятивистской вселенной время рождается вместе с ней как следствие стабильности вселенной.

1.2.7. Чем отличается инвариантная редукция от выбора калибровки? Сравним диффео-инвариантный метод описания динамики полей [27, 28] с диффео-неинвариантным методом, в котором предполагается, что координатное время x^0 становится наблюдаемым**. Предположение о наблюдаемости координатного времени x^0 в рассматриваемом случае СТО означает использование синхронной калибровки $e(x^0) = 1$, которая подставляется прямо в действие (21):

$$S_{\text{СТО}} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-P_{(\alpha)} \frac{dX_{(\alpha)}}{d\tau} + \frac{e(\tau)}{2m} \left(P_{(\alpha)}^2 - m^2 \right) \right]. \tag{40}$$

---

*Аномалия, связанная с дираковскими полями, также следует из постулата о существовании вакуума. Впервые этот факт был обнаружен П. Йорданом [36] и затем переоткрыт многими авторами (см. [37]). Постулат о существовании вакуума подтверждается целым рядом экспериментально наблюдаемых явлений, в том числе аномальными распадами псевдоскалярных связанных состояний (нейтрального пиона и парапозитрония) на два фотона.

**Именно это предположение наблюдаемости координатного времени x^0 используется в ОТО в модели островной вселенной [20], или в так называемой теории глобального времени [29].

В результате возникает теория без связи

$$S_{\text{СТО}}\big|_{[e=1]} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[P_{(i)}\frac{dX_{(i)}}{d\tau} - P_{(0)}\frac{dX_{(0)}}{d\tau} - \frac{1}{2m}\left(-P_{(0)}^2 + P_{(i)}^2 + m^2\right)\right]. \tag{41}$$

Теория (41) с точки зрения квантования описывает нестабильную систему, так как имеет переменную $X_{(0)}$ с отрицательным вкладом в энергию $E = (-P_{(0)}^2 + P_{(i)}^2 + m^2)/2m$, область определения которой задана в интервале $(-\infty < E < \infty)$. Действие частицы на трехмерной гиперповерхности, полученной наложением условия $P_{(0)} = 0$ (в ОТО аналогичное ограничение называется минимальной поверхностью [20]), совпадает, с точностью до несущественной константы, с действием Ньютона

$$S_{\text{СТО}}\big|_{[e=1,P_{(0)}=0]} = S_{\text{Newton}} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[P_{(i)}\dot{X}_{(i)} - \frac{P_{(i)}^2}{2m}\right] \tag{42}$$

и с действием Эйнштейна в СТО (13) в нерелятивистском пределе, когда время в покое $X_{(0)}$ совпадает с интервалом времени s. При ограничении $P_{(0)}^2 = P_{(i)}^2 + m^2$ теория (41) превращается в СТО, где восстанавливается калибровочная симметрия.

1.2.8. Относительность как принцип калибровочной симметрии. Пуанкаре [34] и Эйнштейном [35] было впервые указано, что в релятивистской механике, в отличие от классической физики, для полного описания движения частицы нужно два наблюдателя: один покоится, второй движется вместе с частицей. Например, каждый из эйнштейновских наблюдателей измеряет свое время жизни нестабильной частицы. Время является *относительным* к системе отсчета.

Эйнштейн описывал эту *относительность* двух времен как чисто релятивистский эффект кинематически, с помощью лоренц-преобразования переменных из неподвижной системы отсчета в движущуюся вместе с частицей.

Мы убедились, что существует такое геометродинамическое обобщение динамики Пуанкаре–Эйнштейна на калибровочную теорию со связью (21), которое позволяет описать эту *относительность* двух времен как следствие решения динамических уравнений, а не кинематических лоренцевских преобразований. Такое геометродинамическое описание дает принципиально новый смысл относительности двух времен как *отношения* динамического параметра эволюции частицы $X_{(0)}$ и ее геометрического интервала s (22).

Продемонстрируем справедливость этого вывода на примере механики мини-вселенной, когда не существует кинематического описания чисто релятивистских эффектов посредством преобразований переменных типа лоренцевских.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МИНИ-ВСЕЛЕННАЯ

2.1. Однородное приближение ОТО. В предыдущем разделе было показано, что динамическое описание релятивистских эффектов с помощью решений вариационных уравнений может быть дано в версии СТО, сформулированной по аналогии с вариационным описанием ОТО, предложенным Гильбертом в 1915 г. [15]. Согласно Гильберту, геометродинамика ОТО основана на двух базисных постулатах: действии

$$S_{\rm OTO} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{\varphi_0^2}{6}\ \ R(g) + \mathcal{L}_{\rm matter}\right], \qquad \varphi_0^2 = \frac{3}{8\pi}M_{\rm Pl}^2, \tag{43}$$

для *переменных*, образующих *полевое пространство событий*, и *геометрическом интервале* псевдориманова координатного многообразия

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{44}$$

И действие (43), и интервал (44) инвариантны относительно общекоординатных преобразований

$$x^\mu \to \widetilde{x}^\mu = \widetilde{x}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{45}$$

и являются обобщением рассмотренного выше действия и интервала для релятивистской частицы, инвариантных относительно группы репараметризации координатного времени. Если ограничиться однородным приближением интервала

$$ds^2 = a^2(x^0)\left[N_0^2(x^0)(dx^0)^2 - (dx^i)^2\right], \tag{46}$$

то действие ОТО сводится к действию гамильтоновой космологии [40–42]:

$$S_{\rm cosm-1915} = \int dx^0\left[-P_\varphi\partial_0\varphi + N_0\left(\frac{P_\varphi^2}{4V_0} - \rho_0(\varphi)V_0\right)\right], \tag{47}$$

где V_0 — объем пространства, а плотность энергии материи аппроксимируется однородной плотностью $\rho_0(\varphi)$, зависящей только от масштабного фактора

$$\varphi(x^0) = \varphi_0 a(x^0). \tag{48}$$

Такое однородное приближение сохраняет симметрию уравнений движения ОТО и конформного интервала времени

$$d\eta = N_0(x^0)dx^0, \quad \eta = \int\limits_0^{x^0} d\overline{x}^0 N_0(\overline{x}^0) \tag{49}$$

относительно группы репараметризаций координатного параметра $x^0 \to \overline{x}^0 = \overline{x}^0(x^0)$, выступающих в роли калибровочных преобразований. Как мы видели выше, группа репараметризации координатного параметра эволюции означает, что одна из переменных, в данном случае единственная переменная φ, отождествляется с временем как *переменной* в пространстве событий, а ее импульс P_φ — с соответствующей гамильтоновой функцией, значения которой на уравнениях движения становятся *энергией событий*.

2.2. Вариационный принцип Гильберта. Вариация действия (47) по функции смещения N_0: $\delta S_{\rm cosm}/\delta N_0 = 0$ ведет к уравнению энергетической связи

$$P_\varphi^2 = E^2(\varphi), \tag{50}$$

где

$$E(\varphi) = 2V_0\sqrt{\rho_0(\varphi)} \tag{51}$$

трактуется наблюдателем на Земле как измеряемая им энергия Вселенной.

Разрешение энергетической связи (50) дает два значения энергии релятивистской вселенной, положительное и отрицательное:

$$P_\varphi^\pm = \pm E(\varphi) = \pm 2V_0\sqrt{\rho_0(\varphi)}. \tag{52}$$

Вариация действия (47) по импульсу P_φ: $\delta S_{\rm cosm}/\delta P_\varphi = 0$ дает геометрическое отношение между двумя временами в форме дифференциального уравнения Фридмана

$$P_\varphi^\pm = 2V_0\frac{d\varphi}{d\eta} \equiv 2V_0\varphi' = \pm 2V_0\sqrt{\rho_0(\varphi)}. \tag{53}$$

Решение этого уравнения в виде интеграла

$$\eta(\varphi_I|\varphi) = 2V_0\int\limits_{\varphi_I}^{\varphi}\frac{d\widetilde{\varphi}}{P_\varphi^\pm(\widetilde{\varphi})} = \pm\int\limits_{\varphi_I}^{\varphi}\frac{d\widetilde{\varphi}}{\sqrt{\rho_0(\widetilde{\varphi})}} \tag{54}$$

называют в космологии законом Хаббла [38, 39].

2.3. Редукция действия. Редукция действия Гильберта (47) означает вычисление его значений на решениях (52) уравнения связи (50)

$$S_{{\rm cosm}-1915|P_\varphi=P_\varphi^\pm} = S^\pm_{{\rm cosm}-1905} = \mp 2V_0\int d\varphi\sqrt{\rho_0(\varphi)}. \tag{55}$$

Уравнения редуцированного действия (55) уже не содержат геометрический интервал. Чтобы получить все следствия исходной геометродинамики, редуцированная теория должна быть дополнена отношением геометрического интервала с временем как переменной (54). Как мы увидим в следующих разделах, это отношение (54) описывает классическую космологию, т. е. закон Хаббла, и является *дополнительным* к квантовой космологии Уилера–ДеВитта, если определить последнюю как квантование уравнения связи (50) путем замены переменных на их операторы $P_\varphi \to \hat{P}_\varphi = -id/d\varphi$, действующие на волновую функцию Уилера–ДеВитта Ψ [40]:

$$\hat{P}_\varphi^2 \Psi - E^2(\varphi)\Psi = 0. \tag{56}$$

Мы увидим ниже, что из геометродинамики Гильберта следуют сразу и классическая космология [38], и квантовая [40–42], что позволяет их объединить, решая проблемы обеих, поскольку в классической космологии не знают, как квантовать, а в квантовой — как описывать закон Хаббла.

2.4. Уравнения Фридмана и классическая космология. Рассмотрим уравнение эволюции Вселенной (53)

$$\varphi_0^2 a'^2 = \rho_0(a), \tag{57}$$

где $a = \varphi/\varphi_0$, в плоском пространстве для Вселенной, заполненной однородной материей, с зависимостью конформной плотности ρ_0 от масштаба $a(\eta)$ следующего вида:

$$\rho_0(a) = \rho_{\text{rigid}} a^{-2} + \rho_{\text{rad}} + \rho_M a + \rho_\Lambda a^4, \tag{58}$$

где ρ_{rigid}, как будет показано ниже в разд. 4 на примере конкретной полевой модели массивной электродинамики, описывает вклад предельно жесткого уравнения состояния, для которого плотность равна давлению: $\rho_{\text{rigid}} = p_{\text{rigid}}$; плотности ρ_{rad}, ρ_M и ρ_Λ описывают вклады радиации, материи и Λ-члена соответственно.

Можно найти решения уравнения (57) для каждого из этих состояний в терминах конформного времени η с начальными данными $a(\eta_0) = 1$, $a'(\eta_0) = H_0$:

$$\begin{aligned} a_{\text{rigid}}(\eta) &= \sqrt{1 - 2H_0 r}, & a_{\text{rad}}(\eta) &= 1 - H_0 r, \\ a_M(\eta) &= \left[1 - \frac{1}{2} H_0 r\right]^2, & a_\Lambda(\eta) &= \frac{1}{1 + H_0 r}, \end{aligned} \tag{59}$$

где $r = \eta_0 - \eta$. В наблюдательной космологии конформное время $d\eta$ определяется как время фотона, испущенного атомом на космическом объекте и летящего со скоростью $c = 1$ по геодезической на мировом конусе:

$$(ds)^2 = a^2(\eta)[(d\eta)^2 - (dr)^2] = 0, \tag{60}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ — *радиальная координата*. Отсюда можно найти связь между координатным расстоянием

$$r(\eta) = \int\limits_{\eta}^{\eta_0} d\widetilde{\eta} \equiv \eta_0 - \eta, \tag{61}$$

которое пролетает фотон, и конформным временем такого пролета $\eta_0 - \eta$, где η_0 — современное значение конформного времени (т. е. времени регистрации фотона земным наблюдателем), при котором принято $a(\eta_0) = 1$; η — время излучения фотона атомом на космическом объекте, находящемся на координатном расстоянии r от Земли. Отсюда следует, что η равно разности современного конформного времени η_0 и времени пролета фотона до Земли, совпадающего с координатным расстоянием. Из (61) имеем

$$\eta = \eta_0 - r. \tag{62}$$

В наблюдательной космологии [38] плотность (58) выражается в терминах современного значения критической плотности $\rho_{\rm cr} = \varphi'^2 \equiv \varphi^2(\varphi'/\varphi)^2 = \varphi_0^2 H_0^2$:

$$\rho_0(a) = \rho_{\rm cr}\Omega(a), \qquad \Omega(a) = \Omega_{\rm rigid}a^{-2} + \Omega_{\rm rad} + \Omega_M a + \Omega_\Lambda a^4 \tag{63}$$

и относительных плотностей $\Omega_{\rm rigid}$, $\Omega_{\rm rad}$, Ω_M, Ω_Λ, удовлетворяющих условию $\Omega_{\rm rigid} + \Omega_{\rm rad} + \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$.

Классическая космология описывает зависимость красного смещения спектра атомов $E(\eta)$ на космических объектах относительно спектра атомов $E(\eta_0)$ на Земле, определяемого масштабным фактором

$$\frac{E(\eta)}{E(\eta_0)} = a(\eta) = (1+z)^{-1}, \tag{64}$$

от координатного расстояния до этого объекта, которое задается конформным временем (62).

Учитывая эти соотношения, уравнение эволюции масштаба (57) на геодезической светового луча $dr/d\eta = -1$ после подстановки $a = 1/(1+z)$ и $\eta = \eta_0 - r$ можем представить в виде

$$\frac{1}{H_0}\frac{dz}{dr} = (1+z)^2\sqrt{\rho_{\rm cr}\,[\Omega_{\rm rigid}(1+z)^2 + \Omega_{\rm rad} + \Omega_M(1+z)^{-1} + \Omega_\Lambda(1+z)^{-4}]},$$

где $H_0 = \sqrt{\rho_{\rm cr}}/\varphi_0$. Решение этого уравнения (которое совпадает с решением (54))

$$H_0 r(z) = \int\limits_1^{1+z} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\rm rigid}x^6 + \Omega_{\rm rad}x^4 + \Omega_M x^3 + \Omega_\Lambda}} \tag{65}$$

определяет координатное расстояние как функцию красного смещения z, из которого следуют формулы (59) для каждого состояния. Формула (65) является основой наблюдательной космологии (см., например, [38]), ее используют для определения уравнения состояния материи во Вселенной по данным астрофизических измерений красного смещения в предположении плоского пространства. Нас интересуют следствия квантования для закона Хаббла (54) в версии наблюдательной космологии (65), которые происходят из гамильтоновой редукции действия и космологического интервала времени.

2.5. Квантовая космология как квантование связи. *2.5.1. Первичное квантование.* Первичное квантование космологического масштабного фактора φ

$$i[P_\varphi, \varphi] = 1 \tag{66}$$

предполагает, что энергетическая связь (50) трансформируется в уравнение Уилера–ДеВитта (УДВ) (56) для вселенной, движущейся в пространстве событий $[\varphi]$:

$$\partial_\varphi^2 \Psi + E^2(\varphi)\Psi = 0. \tag{67}$$

Уравнение УДВ может быть получено путем варьирования соответствующей классической теории типа поля Клейна–Гордона:

$$S_U = \frac{1}{2}\int d\varphi \left[(\partial_\varphi \Psi)^2 - E^2(\varphi)\Psi^2\right] \equiv \int d\varphi L_U. \tag{68}$$

Такой подход можно было бы назвать теорией поля для вселенных.

Отрицательная энергия в решениях (52) означает, что рассматриваемая релятивистская система не имеет минимальной энергии, и любое сколь угодно малое взаимодействие сделает эту систему нестабильной. Система может быть стабильной в квантовой теории поля, возникающей в результате вторичного квантования УДВ-поля Ψ, если дополнительно постулируется существование вакуума как состояния с наименьшей энергией. Как было показано выше на примере вторичного квантования частицы, такой вакуум возникает, если рождение вселенной с отрицательной энергией трактовать как уничтожение вселенной с положительной энергией.

2.5.2. Вторичное квантование. Вводя канонические импульсы $P_\Psi = \partial L_U/\partial(\partial_\varphi \Psi)$, можно получить гамильтонову форму действия этой теории

$$S_U = \int d\varphi \left\{P_\Psi \partial_\varphi \Psi - H_U\right\}, \tag{69}$$

где

$$H_U = \frac{1}{2}\left[P_\Psi^2 + E^2(\varphi)\Psi^2\right] \tag{70}$$

есть гамильтониан. Определение энергии $E(\varphi)$ для одной отдельной вселенной дает нам возможность представить гамильтониан H_U в стандартной форме произведения энергии $E(\varphi)$ и числа частицеподобных возбуждений поля Уилера–ДеВитта, отождествляемого с числом рожденных вселенных

$$\hat{N}_U = A^+ A^-, \tag{71}$$

$$H_U = \frac{1}{2}E(\varphi)\left[A^+A^- + A^-A^+\right] = E(\varphi)\left[N_U - \frac{1}{2}\right] \tag{72}$$

путем перехода к голоморфным переменным [43]

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2E(\varphi)}}\{A^+ + A^-\}, \qquad P_\Psi = i\sqrt{\frac{E(\varphi)}{2}}\{A^+ - A^-\}, \tag{73}$$

где A^+, A^- — операторы рождения и уничтожения вселенной соответственно. Для устранения отрицательной энергии нужно было бы постулировать, что A^- является оператором аннигиляции вселенной с положительной энергией; это предполагает существование вакуумного состояния как состояния с минимальной энергией:

$$A^-|0\rangle_{\mathrm{A}} = 0. \tag{74}$$

Однако число вселенных $N_U = A^+A^-$ не сохраняется, поскольку энергия $E(\varphi)$ зависит от φ. Именно эта зависимость энергии $E(\varphi)$ от φ ведет к дополнительному слагаемому в действии, записанном в терминах голоморфных переменных в функциональном пространстве:

$$P_\Psi \partial_\varphi \Psi = \left[\frac{i}{2}(A_q^+ \partial_\varphi A^- - A^+ \partial_\varphi A^-) - \frac{i}{2}(A^+A^+ - A^-A^-)\triangle(\varphi)\right], \tag{75}$$

где

$$\triangle(\varphi) = \frac{\partial_\varphi E(\varphi)}{2E(\varphi)}. \tag{76}$$

Последний член в выражении (75) описывает космологическое рождение вселенных из вакуума, если $\partial_\varphi E(\varphi) \neq 0$.

2.5.3. Преобразование Боголюбова и рождение Вселенной. Чтобы определить вакуум и набор сохраняющихся чисел, называемых интегралами движения, мы можем использовать (подобно случаю космологического рождения частиц [43]) преобразования Боголюбова [44] переменных (A^+, A^-):

$$A^+ = \alpha B^+ + \beta^* B^-, \quad A^- = \alpha^* B^- + \beta B^+ \quad (|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1), \tag{77}$$

чтобы соответствующие уравнения, выраженные в терминах вселенных (A^+, A^-):

$$(i\partial_\varphi + E)A^+ = iA^-\triangle(\varphi), \quad (i\partial_\varphi - E)A^- = iA^+\triangle(\varphi), \tag{78}$$

приняли диагональную форму в терминах квазивселенных B^+, B^-:

$$(i\partial_\varphi + E_B)B^+ = 0, \quad (i\partial_\varphi - E_B)B^- = 0. \tag{79}$$

Это означает, что коэффициенты преобразования Боголюбова удовлетворяют уравнениям Боголюбова

$$(i\partial_\varphi + E)\alpha = i\beta\triangle(\varphi), \quad (i\partial_\varphi - E)\beta^* = i\alpha^*\triangle(\varphi). \tag{80}$$

Если записать коэффициенты преобразования Боголюбова в виде

$$\alpha = \mathrm{e}^{i\theta(\varphi)}\mathrm{ch}\, r(\varphi), \quad \beta^* = \mathrm{e}^{i\theta(\varphi)}\mathrm{sh}\, r(\varphi), \tag{81}$$

где величины r, θ называются параметрами сдвига и вращения соответственно, то эти уравнения принимают форму

$$(i\partial_\varphi\theta - E(\varphi))\,\mathrm{sh}\, 2r = -\triangle(\varphi)\,\mathrm{ch}\, 2r \cdot \sin 2\theta, \quad \partial_\varphi r = \triangle(\varphi)\cos 2\theta, \tag{82}$$

в то время как энергия квазивселенных в уравнениях (79) определяется выражением

$$E_B(\varphi) = \frac{E(\varphi) - \partial_\varphi\theta}{\mathrm{ch}\, 2r}. \tag{83}$$

В силу уравнений (79) число квазивселенных $\mathcal{N}_B = (B^+B^-)$ сохраняется:

$$\frac{d\mathcal{N}_B}{d\varphi} \equiv \frac{d(B^+B^-)}{d\varphi} = 0. \tag{84}$$

Следовательно, мы получаем определение вакуума как состояния квазивселенных в виде

$$B^-|0\rangle_U = 0. \tag{85}$$

Число рожденных вселенных из этого боголюбовского вакуума можно найти, вычислив среднее от оператора числа вселенных (71) по боголюбовскому вакууму. Можно видеть, что это число пропорционально квадрату коэффициента Боголюбова, данного в уравнении (77):

$$N_U(\varphi) = {}_U\langle 0|A^+A^-|0\rangle_U \equiv |\beta|^2. \tag{86}$$

Эту величину можно назвать числом вселенных $N_U(\varphi)$, в то время как величину

$$R_U(\varphi) = \left(\frac{i}{2}\right) {}_U\langle 0[A^+A^+ - A^-A^-]|0\rangle_U = i(\alpha^*\beta^* - \alpha\beta) = -\mathrm{sh}\, 2r \cdot \sin 2\theta \tag{87}$$

боголюбовским конденсатом соответственно.

Уравнения Боголюбова, выраженные через величины числа вселенных $N_U(\varphi)$ и боголюбовского конденсата $R_U(\varphi)$, принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{dN_U}{d\varphi} = \triangle(\varphi)\sqrt{4N_U(N_U+1) - R_U^2}, \\ \dfrac{dR_U}{d\varphi} = -2E(\varphi)\sqrt{4N_U(N_U+1) - R_U^2} \end{cases} \tag{88}$$

с начальными данными $N_U(\varphi = \varphi_I) = R_U(\varphi = \varphi_I) = 0$.

Функцию распределения вселенных (86) N_U в модели жесткого уравнения состояния, где энергия событий принимает вид $E(\varphi) = Q/\varphi$, можно найти явно, поскольку уравнения (88) имеют точное аналитическое решение. Функция распределения имеет вид

$$N_U = \frac{1}{4Q} R_U = \frac{1}{4Q^2 - 1} \sin^2\left[\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} \ln\frac{\varphi}{\varphi_I}\right] \neq 0, \tag{89}$$

где $\varphi = \varphi_I\sqrt{1 + 2H_I\eta}$ и $\varphi_I, H_I = \varphi_I'/\varphi_I = Q/(2V_0\varphi_I^2)$ — начальные данные.

2.5.4. Квантовая аномалия конформного времени. Постулат о существовании вакуума ограничивает движение вселенной в полевом пространстве событий и подразумевает, что для положительной энергии событий $P_\varphi \geqslant 0$ вселенная движется вперед, $\varphi > \varphi_I$, а для отрицательной $P_\varphi \leqslant 0$ движется назад, $\varphi < \varphi_I$, где φ_I есть начальные данные. В квантовой теории φ_I рассматривается как точка рождения вселенной с положительной энергией $P_\varphi \geqslant 0$, или как точка аннигиляции антивселенной с положительной энергией, когда энергия событий уменьшается ($P_\varphi \leqslant 0$). Мы можем предположить, что точка сингулярности $\varphi = 0$ принадлежит антивселенной: $P_\varphi < 0$. Вселенная с положительной энергией событий не содержит космологической сингулярности $\varphi = 0$.

Решение (54) в соответствии с постулатом о существовании вакуума имеет вид

$$\eta(\varphi_I, \varphi_0) = \\ = \theta(P_\varphi)\int\limits_{\varphi_I}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho_0(\varphi)}}\theta(\varphi_0 - \varphi_I) + \theta(-P_\varphi)\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_I} \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho_0(\varphi)}}\theta(\varphi_I - \varphi_0) \geqslant 0. \tag{90}$$

Мы видим, что вакуумный постулат ведет к положительному значению конформного времени (90) как для вселенной, $P_\varphi > 0, \varphi > \varphi_I$, так и для антивселенной, $P_\varphi < 0, \varphi_I < \varphi$, т. е. ведет к стреле конформного времени (90) $\eta > 0$.

2.6. Преобразования Леви–Чивита и статус закона Хаббла. Можно ввести конформное время η в качестве новой полевой переменной, а соответствующий импульс Π — в качестве собственной энергии геометрического пространства событий, если воспользоваться каноническими преобразованиями Леви–Чивита [27, 45]: $(P_\varphi|\varphi) \to (\Pi|\eta)$ для превращения энергетической связи (50) в новый канонический импульс Π. Рассмотрим это преобразование, используя в качестве примера случай вселенной, заполненной фотонами, когда $\rho_0(\varphi) = \mathrm{const}$. В этом случае это преобразование принимает вид $P_\varphi = \pm 2\sqrt{\Pi V_0}$, $\varphi = \pm(1/2)\sqrt{\Pi/V_0}\eta$.

Действие (47) становится $S_c = \int dx^0 \left[-\Pi\partial_0\eta + N_0\left(\Pi - \rho_0 V_0\right)\right]$. Разрешение уравнения связи $\Pi - V_0\rho_0 = 0$ означает, что конформному времени соответствует ненулевая энергия $\Pi = V_0\rho_0$.

Редуцированное действие принимает вид $S = -V_0 \int\limits_0^{\eta_0} d\eta\rho_0 = -V_0\rho_0\eta_0$.

В квантовой теории, где геометрическая энергия Π заменяется оператором $\hat{\Pi} = id/d\eta$, геометрическая эволюция волновой функции определяется из квантовой версии уравнения связи $[\hat{\Pi} - V_0\rho_0]\psi_{\mathrm{geom}}(\eta) = 0$, решением которого является функция

$$\psi_{\mathrm{geom}}(\eta) = \mathrm{e}^{-iV_0\rho\,\eta}\ \theta(\eta). \tag{91}$$

Хаббловская эволюция $\varphi = \varphi(\eta)$ может быть рассмотрена как релятивистский эффект отношения между двумя дополнительными описаниями релятивистской вселенной с помощью волновых функций: полевой $\exp\left[-iP_\varphi\varphi\right]$ и геометрической (91).

2.7. Итоги квантования. Таким образом, единая геометродинамическая формулировка обеих теорий (СТО и ОТО) с одним и тем же вариационным принципом Гильберта [15] дает возможность квантования космологических моделей по аналогии с первичным и вторичным квантованием релятивистской частицы, на котором основана вся современная квантовая теория поля [18], подтверждаемая огромным экспериментальным материалом по физике высоких энергий. Впервые подобная идея квантования на уровне ОТО по аналогии с квантованием СТО была сформулирована в работах Уилера и ДеВитта [40], где они отождествили в космологии *время как переменную* с космологическим масштабным фактором и ввели в ОТО понятие *полевого пространства событий*, в котором движется *релятивистская вселенная*, по аналогии с понятием пространства событий Минковского, где движется *релятивистская частица*. Однако формулировка Уилера и ДеВитта [40] теряет *время как геометрический интервал* и, следовательно, его зависимость от масштабного фактора, которая интерпретируется в классической космологии Фридмана как закон Хаббла. В результате, как было отмечено выше, в классической космологии [38] не знают как квантовать, а в квантовой [40–42] — как описывать закон Хаббла.

В настоящем разделе, чтобы восстановить связь наблюдательной космологии (т. е. закона Хаббла) с первичным и вторичным квантованием Вселенной и вычислить функцию распределения рожденных вселенных, мы применили инвариантную *редукцию* [45] космологии Уилера–ДеВитта. Такая редукция дает нам возможность решить проблемы статуса хаббловской эволюции, рождения Вселенной из вакуума, стрелы времени, начальных данных и устранения космологической сингулярности из требования диагонализации гамильтониана и стабильности квантовой теории Вселенной, т. е. на том уровне физического описания мира, который в физике частиц называется квантовой теорией поля. В дальнейшем мы рассмотрим аналогичную инвариантную *редукцию* в ОТО для определения физических наблюдаемых, квантования гравитации и построения низкоэнергетической теории возмущений.

3. СИСТЕМА ОТСЧЕТА ОТО В МЕТРИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

3.1. Динамика и геометрия ОТО. Изложим вначале общую схему диффео-инвариантной формулировки ОТО в метрическом формализме, где ОТО задана действием Гильберта с конкретным лагранжианом материи (один из примеров будет рассмотрен ниже в разд. 4)

$$S[\varphi_0|F] = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{\varphi_0^2}{6}R(g) + \mathcal{L}_{\text{matter}}(\varphi_0|g,f)\right], \tag{92}$$

зависящим от полей $F = (g, f)$, и геометрическим интервалом

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu; \tag{93}$$

здесь константа Ньютона

$$\varphi_0^2 = \frac{3}{8\pi}M_{\text{Pl}}^2$$

определяет шкалу масс.

Действие (92) и интервал (93) инвариантны относительно общекоординатных преобразований

$$x^\mu \to \widetilde{x}^\mu = \widetilde{x}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{94}$$

Если трактовать эти преобразования как калибровочные, а соответствующие четыре уравнения на $g_{0\alpha}$ — как четыре уравнения связи, типа уравнений Гаусса в электродинамике, то координаты x^μ, как мы видели выше на примере аналогичной формулировки СТО, не могут быть рассмотрены как непосредственно измеряемые величины. Чтобы найти истинные измеряемые координаты, нужно решить уравнения связи, которые определяются в конкретной системе отсчета.

Системы отсчета в релятивистской теории ассоциируются с набором инструментов для измерения начальных данных [22], и выбор конкретной системы отсчета означает, как было отмечено выше, классификацию компонент переменных, координат и уравнений движения на пространственные и временные компоненты; число переменных в действии при этом сохраняется. В гамильтоновом подходе временные компоненты метрики становятся, как правило, множителями Лагранжа, вариация действия по таким множителям и дает упомянутые выше уравнения связи между начальными данными.

3.2. Гамильтонова формулировка Дирака. До сих пор подавляющее число гамильтоновых подходов к ОТО следует в основных чертах формулировке Дирака (см. [23,24]). Согласно этой формулировке назовем выбором системы отсчета такую классификацию координат и переменных, в терминах которых интервал (93) имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = [\sqrt{\gamma}N_d dx^0]^2 - \gamma_{ij}(dx^i + N^i dx^0)(dx^j + N^j dx^0), \quad (95)$$

где γ_{ij} — метрика трехмерного гиперпространства, вложенного в четырехмерное многообразие; N^j — вектор сдвига начала координат трехмерного гиперпространства в процессе эволюции по времени и N_d — функция смещения времени по Дираку [23] (см. более подробное обсуждение в монографии [22]). Действие (92) в этих переменных принимает форму [23, 24]

$$S[\varphi_0|F] = \int d^4x \left[\mathbf{K}(\varphi_0|g) - \mathbf{P}(\varphi_0|g) + \mathbf{S}(\varphi_0|g) + \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi_0|g, f)\right], \quad (96)$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{K}(\varphi_0|g) = N_d \dfrac{\varphi_0^2}{6}\left[\mathrm{Sp}\, D^2 - (\mathrm{Sp}\, D)^2\right] = P_\gamma^{ij} D_{ij} - N_d \dfrac{6}{\varphi_0^2}\left[\mathrm{Sp}\, P_\gamma^2 - \dfrac{1}{2}(\mathrm{Sp}\, P_\gamma)^2\right], \\ \mathbf{P}(\varphi_0|g) = N_d \dfrac{\varphi_0^2}{6}|\gamma| R^{(3)}, \\ \mathbf{S}(\varphi_0|g) = \dfrac{\varphi_0^2}{3}\left[\partial_0 D - \partial_k(N^k D)\right] - \dfrac{\varphi_0^2}{3}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\partial^i(\sqrt{\gamma}N_d)\right) \end{cases} \quad (97)$$

есть кинетический, потенциальный и поверхностный члены соответственно;

$$D_{ij} = \frac{1}{2N_d}\big(\partial_0\gamma_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i\big) = \frac{1}{2N_d}\left(\hat{\partial}_0\gamma_{ij} - \gamma_{il}\partial_j N^l - \gamma_{jl}\partial_i N^l\right) \quad (98)$$

— ковариантные скорости изменения метрики (т. е. вторые квадратичные формы);

$$P_{\gamma i}^k = \frac{\varphi_0^2}{6}\left[D_i^k - \delta_i^k \mathrm{Sp}\, D\right] \qquad \left(P_{\gamma k}^k \equiv \mathrm{Sp}\, P_\gamma = -\frac{\varphi_0^2}{3}\mathrm{Sp}\, D\right) \quad (99)$$

есть соответствующие импульсы пространственной метрики; чтобы ввести эти импульсы, мы использовали в кинетическом члене $\mathbf{K}$ (97) преобразование Лежандра типа $zD^2/2 = PD - z^{-1}P^2/2$, $R^{(3)}$ — трехмерная кривизна.

В силу симметрии ОТО (92) относительно преобразований (94), которые, как мы указывали выше, трактуют как калибровочные, теория содержит лишние чисто калибровочные степени свободы. Эти степени свободы можно убрать, используя калибровочные преобразования. Условие, уменьшающее число полей и компонент метрики с помощью преобразований групп симметрии интервала и действия, называется калибровкой. Примером являются условие поперечности $\partial_j\left(|\gamma|^{1/3}\gamma^{ij}\right) \simeq 0$ и калибровка Дирака [23]:

$$\operatorname{Sp} P_\gamma = -\frac{\varphi_0^2}{3}\operatorname{Sp} D \equiv -\frac{\varphi_0^2}{3N_d\sqrt{\gamma}}\left[\partial_0\sqrt{\gamma} - \partial_k\left(\sqrt{\gamma}N^k\right)\right] \simeq 0, \tag{100}$$

которая означает минимальную пространственную гиперповерхность.

Из формул (97) и (98) можно получить гамильтонову форму действия [23]:

$$S_h[\varphi_0|F] = \int\limits_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \left\{\int d^3x \left[\sum_F P_F\partial_0 F + \mathcal{C} - N_d\; T_0^0(\varphi_0|F)\right]\right\}, \tag{101}$$

где $\sum\limits_F P_F\partial_0 F = P_\gamma^{ij}\partial_0\gamma_{ij} + \sum\limits_f P_f\partial_0 f$;

$$\mathcal{C} = N^k T_k^0(\varphi_0|F) + C_0 D + C_i\partial_j\left(|\gamma|^{1/3}\gamma^{ij}\right) \tag{102}$$

есть сумма связей с множителями Лагранжа N^k, C_0, C_i;

$$T_0^0(\varphi_0|F) = \frac{6}{\varphi_0^2}\left[\operatorname{Sp} P_\gamma^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{Sp} P_\gamma)^2\right] + |\gamma|\frac{\varphi_0^2}{6}R^{(3)} + T^0_{0\,\mathrm{matter}} \tag{103}$$

— дираковский гамильтониан;

$$T_k^0(\varphi_0|F) = 2\nabla_j P^j_{\gamma\,k} + T^0_{k\,\mathrm{matter}} = \frac{\varphi_0^2}{3}\left[\nabla_j D_k^j - \partial_k \operatorname{Sp} D\right] + T^0_{k\,\mathrm{matter}} \tag{104}$$

— недиагональная компонента тензора энергии-импульса. Отождествление этих тензоров энергии-импульса с наблюдаемыми предполагает, что наблюдаемый параметр эволюции совпадает с неинвариантным координатным временем x^0. В этом случае, как показано в [20], теория возмущения начинается с плоской метрики $N_d = 1, \gamma_{ij} = \delta_{ij}$ и может быть воспроизведена эффективным действием

$$S[\varphi_0|F]|_{\sqrt{g^{(3)}}N_d\simeq 1} = S_{\rm Bjern} =$$
$$= \int\limits_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \left\{ \int d^3x \left[\sum_F P_F \partial_0 F + \mathcal{C} - |\gamma|^{-1/2} T_0^0(\varphi_0|F) \right] \right\}, \quad (105)$$

которое было написано впервые в начале прошлого века Бьерном (как утверждается в [29]). Это действие возникает из действия ОТО в так называемой синхронной системе отсчета

$$\sqrt{\gamma} N_d \simeq 1. \quad (106)$$

На самом деле, это условие синхронной системы отсчета должно рассматриваться, следуя Дираку [26], как одна из калибровок, которую можно подставлять только в уравнения движения как равенство в слабом смысле. Если калибровку (106) подставить в действие (101), как это было сделано выше, то получаем совершенно другую теорию (105), которая, вообще говоря, не эквивалентна исходной (101) и может совпадать с ней только в нерелятивистском пределе, что мы и видели в п. 1.2.7 на примере абсолютного времени в СТО. Как обычная теория возмущения, которая начинается с плоской метрики $N_d = 1, \gamma_{ij} = \delta_{ij}$, так и теория (105) не содержат энергетической связи и теряют возможность решения рассмотренных выше проблем начальных данных, локализации энергии, обоснования стрелы времени и устранения космологической сингулярности. Хорошо известно [20], что именно с этими проблемами столкнулась рассмотренная выше гамильтонова формулировка Дирака ОТО. Более того, условие минимальной поверхности (100) противоречит наблюдательным данным по зависимости красного смещения спектра атомов на космическом объекте от расстояния до этого объекта (т. е. закону Хаббла), если связывать эту зависимость с расширением масштаба, скорость которого пропорциональна второй квадратичной форме: $\operatorname{Sp} D \sim H_0 \neq 0$, где H_0 — параметр Хаббла.

Как показано в работах [27, 28, 46–48], чтобы решить эти проблемы, нужно воспользоваться опытом решения аналогичных проблем в релятивистской механике и космологии, рассмотренных выше. Этот опыт включает установление диффеоморфизмов (или калибровочной симметрии) системы отсчета ОТО, где дается ее гамильтонова формулировка (101), определение диффео-инвариантных параметров эволюции и диффео-инвариантную редукцию теории в определенной системе отсчета.

3.3. Калибровочная симметрия системы отсчета в ОТО. Калибровочная группа гамильтонова подхода в рассматриваемой выше системе отсчета является группой преобразований (диффеоморфизмов) параметризации метрики (95) [22, 25]:

$$x^0 \to \widetilde{x}^0 = \widetilde{x}^0(x^0), \qquad x_i \to \widetilde{x}_i = \widetilde{x}_i(x^0, x_1, x_2, x_3), \tag{107}$$

$$\widetilde{N} = N\frac{dx^0}{d\widetilde{x}^0}, \qquad \widetilde{N}^k = N^i\frac{\partial\widetilde{x}^k}{\partial x_i}\frac{dx^0}{d\widetilde{x}^0} - \frac{\partial\widetilde{x}^k}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial\widetilde{x}^0}. \tag{108}$$

Эта группа преобразований сохраняет семейство гиперповерхностей $x^0 = \mathrm{const}$ и называется кинеметрической подгруппой [22, 43] группы общих координатных преобразований (94). Группа кинеметрических преобразований содержит репараметризации *координатного времени* (107).

3.4. Класс функций динамических переменных. Существуют два физических следствия инвариантности ОТО относительно репараметризации координатного времени (107). Во-первых, такая инвариантность означает, что не имеется никаких физических инструментов, которыми можно было бы измерить это координатное время x^0. Если репараметризационную инвариантность трактовать как калибровочный принцип, то, как мы видели выше на примере СТО, гамильтониан Дирака как сумма связей не является калибровочным инвариантом, точно так же, как не является инвариантом координатный параметр эволюции x^0. В работах [27, 28, 46–48] было показано, что инвариантность относительно репараметризации координатного времени в ОТО означает, что система отсчета (95) должна быть доопределена указанием выбора двух инвариантных наблюдаемых «времен»: времени как переменной и времени как интервала. На примере СТО мы видели в предыдущем разделе, что однородная степень свободы позволяет ввести диффео-инвариантный динамический параметр эволюции ОТО, т. е. время как переменную.

Во-вторых, класс функций, на котором заданы параметры преобразований физических переменных, не должен отличаться от класса функций, на котором заданы сами физические переменные. Это значит, что физические переменные в системе отсчета (95) содержат класс однородных функций (107), зависящих только от координатного времени $f(x^0)$. В теории возмущений эти однородные степени свободы можно трактовать как нулевые фурье-гармоники, которые отделяются с помощью усреднения по пространственному объему $V_0 = \int d^3x$.

В частности, переменные логарифма детерминанта пространственной метрики $\log\gamma(x^0, x^i)$ могут быть представлены в виде суммы:

$$\log\gamma(x^0, x^i) \equiv 6\log a\,(x^0) + \overline{\log\gamma}(x^0, x^i), \tag{109}$$

где

$$6\log a = \langle\log\gamma\rangle\,(x^0) = \frac{1}{V_0}\int\limits_{V_0} d^3x\,\log\gamma(x^0, x^i) \tag{110}$$

есть среднее по пространственному обьему $V_0 = \int d^3x$ (т. е. нулевая фурье-гармоника) и $\overline{\log\gamma} = \log\gamma - \langle\log\gamma\rangle$ есть «отклонение» от нее, удовлетворяющее сильному условию

$$\int d^3x\,\overline{\log\gamma} \equiv \int d^3x\,[\log\gamma - \langle\log\gamma\rangle] \equiv 0 \tag{111}$$

по определению (110).

Аналогичная нулевая фурье-гармоника имеется и в шпуре канонических импульсов компонент метрики

$$\mathrm{Sp}\,P_\gamma = \langle\mathrm{Sp}\,P_\gamma\rangle + \overline{\mathrm{Sp}\,P_\gamma}, \tag{112}$$

где

$$P^k_{\gamma i} = \frac{\varphi_0^2}{6}\left[D^k_i - \delta^k_i\mathrm{Sp}\,D\right] \qquad \left(\mathrm{Sp}\,P_\gamma = -\frac{\varphi_0^2}{3}\mathrm{Sp}\,D\right). \tag{113}$$

Напомним, что инфракрасный сектор $\langle P_\gamma\rangle$ в калибровочных теориях носит, как правило, непертурбативный характер, в то время как «отклонения» от него $\overline{P_\gamma}$ рассматриваются по теории возмущений.

3.5. Космическая эволюция как нулевая мода решения уравнения связи. Отделение истинных динамических переменных теории от нединамических есть критический шаг в извлечении физической информации, адекватной принципам симметрии теории и вариационным уравнениям, включающим как уравнения движения, так и уравнения связи. Как мы видели выше, для достижения этой цели существуют два метода: обычный метод наложения калибровочных условий [23] типа условия Дирака минимальной поверхности (100) и явное решение вариационных уравнений связей, которое развивал Дирак на примере решения уравнений Гаусса в КЭД [11].

Явное решение вариационных уравнений связей типа условия Гаусса в электродинамике или условия $T^0_k(\varphi_0|F) = 0$ в ОТО позволяет наиболее полно учесть динамику теории в том классе функций, который задает группа калибровочных преобразований, и условие конечности плотности энергии. Например, явное решение условия Гаусса $\partial_1 E(x^0, x^1) = 0$ в двумерной электродинамике Швингера, как показано в [49], дает нетривиальное однородное решение этого уравнения $E(x^0, x^1) = E_0(x^0)$, которое определяет топологическую структуру и спектр масс этой теории и называется *нулевой модой*. Аналогичное нетривиальное однородное решение уравнения Гаусса

$$\frac{\delta S_{\mathrm{OTO}}}{\delta N^k} \equiv T^0_k = 2\nabla_i P_{\gamma}{}^i_k = 0 \tag{114}$$

существует и в ОТО, где S_{OTO} — действие метрики в ОТО (92).

Можно видеть, что нулевая фурье-компонента импульса метрики (112)

$$\left[P_{\gamma}{}^{i}_{k}\right]_{\mathrm{part}} = \frac{1}{3}\delta^i_k \langle \mathrm{Sp}\, P_\gamma\rangle \neq 0 \tag{115}$$

возникает как частное решение уравнения Гаусса

$$T^0_k = \frac{2}{3}\nabla_i \left[\delta^i_k \langle \mathrm{Sp}\, P_\gamma\rangle\right] = \frac{2}{3}\partial_k \langle \mathrm{Sp}\, P_\gamma\rangle = 0. \tag{116}$$

Существование такого однородного решения уравнения Гаусса в ОТО можно увидеть из инвариантности этого уравнения

$$T^0_k(\varphi_0|F) = T^0_k(\varphi|\widetilde{F}) = 0 \tag{117}$$

относительно масштабных преобразований метрики и всех полей с масштабом, заданным в классе однородных функций:

$${}^{(n)}F = {}^{(n)}\widetilde{F} a^n(x^0), \quad g_{\mu\nu} = \widetilde{g}_{\mu\nu} a^2(x^0), \tag{118}$$

где (n) есть конформный вес, а $\varphi(x^0) = \varphi_0 a(x^0)$ — бегущая шкала масс.

Если пренебречь всеми переменными, кроме масштабного фактора $a(x^0)$, то тензор $T^0_k(\varphi|\widetilde{F})$ тождественно равен нулю, поэтому масштабный фактор $a(x^0)$ также можно называть *нулевой модой* решения уравнения связи (117).

Именно этот фактор $a(x^0)$, как мы видели в разд. 2, однозначно связывается в космологии с космологической эволюцией и с временем как динамической переменной [46]. Чтобы избежать двойного счета переменных в стандартной космологической теории возмущений [50], необходимо наложить сильное условие [48] $\int d^3x\overline{D} \equiv 0$ (где D задано уравнением (98), а $\overline{D} = D - \langle D\rangle$ — уравнением типа (111)), которое сохраняет число переменных ОТО.

Мы увидим дальше, что учет нулевой моды условия Гаусса $T^0_k(\varphi|\widetilde{F}) = 0$ позволяет объединить три ветви ОТО: неинвариантную теорию островной вселенной [20] (где космологический масштабный фактор тождественно равен единице и нарушается симметрия теории относительно репараметризации координатного времени его глобальной синхронизацией), гамильтонову космологию [42] (где космологический масштабный фактор рассматривается как динамическая переменная) и космологическую теорию возмущений [50–52] (где переменная типа космологического масштабного фактора учитывается два раза).

3.6. Отделение нулевой моды и редукция действия. После преобразования (118) действие (92) принимает вид

$$S[\varphi_0|F] = S[\varphi|\widetilde{F}] - \int dx^0 \frac{(\partial_0\varphi)^2}{N_0}, \tag{119}$$

где $S_h[\varphi|\widetilde{F}]$ совпадает по форме с действием Дирака (101), где поля F заменены полями $\widetilde{F}$ с бегущими массами φ (120);

$$\varphi(x^0) = \varphi_0 a(x^0) \tag{120}$$

— бегущая шкала масс;

$$N_0(x^0)^{-1} = V_0^{-1} \int\limits_{V_0} d^3x N_d^{-1}(x^0, x^i) \equiv \langle N_d^{-1} \rangle \tag{121}$$

есть усреднение обратной функции сдвига N_d^{-1} по пространственному объему $V_0 = \int d^3x$. Видно, что функция сдвига N_0 определяет геометрическое время ζ:

$$d\zeta = N_0(x^0)dx^0, \quad \zeta(x^0) = \int\limits^{x^0} d\overline{x}^0 N_0(\overline{x}^0). \tag{122}$$

Гамильтоново действие (с точностью до полной производной) принимает вид

$$S_h[\varphi_0|F] = S_h[\varphi|\widetilde{F}] - \int dx^0 \left[P_\varphi \partial_0 \varphi - N_0 \frac{P_\varphi^2}{4V_0} \right], \tag{123}$$

где канонический импульс

$$P_\varphi = 2V_0\varphi' \equiv 2V_0 d\varphi/d\zeta$$

определяет энергию системы в пространстве событий $[\varphi|\widetilde{F}]$.

Энергетическая связь $\dfrac{\delta S[\varphi|\widetilde{F}]}{\delta N_d} = 0$ дает уравнение

$$\frac{N_0^2 P_\varphi^2}{N_d^2} = T_0^0(\varphi|\widetilde{F}), \tag{124}$$

где $T_0^0(\varphi|\widetilde{F})$ совпадает по форме с выражением (103) с соответствующей заменой переменных $(\varphi_0|F) \to (\varphi|\widetilde{F})$. Это уравнение имеет решение

$$N_d = N_0 \frac{\left\langle \sqrt{T_0^0(\varphi|\widetilde{F})} \right\rangle}{\sqrt{T_0^0(\varphi|\widetilde{F})}}, \tag{125}$$

$$P_{\varphi(\pm)} = \pm 2V_0\varphi' = \pm 2V_0 \left\langle \sqrt{T_0^0(\varphi|\widetilde{F})} \right\rangle = \pm E_\varphi. \tag{126}$$

Если подставить это решение в действие (123), то получим действие релятивистской вселенной:

$$S[\varphi_I|\varphi_0]|_{P_\varphi=\pm E_\varphi} = \int\limits_{\varphi_I}^{\varphi_0} d\varphi \left\{ \int d^3x \left[\sum_{\widetilde{F}} \widetilde{P}_F \partial_\varphi \widetilde{F} + \widetilde{\mathcal{C}} \pm 2\sqrt{T_0^0(\varphi|\widetilde{F})} \right] \right\}, \tag{127}$$

движущейся в полевом пространстве событий $[\varphi|\widetilde{F}]$, здесь $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\partial_0\varphi$, φ_I есть точка рождения (или уничтожения) вселенной. Уравнения теории (127) однозначно определяют все поля $\widetilde{F}(\varphi, x^i)$ как функции динамического параметра эволюции φ и начальных данных этих полей в момент рождения вселенной $\varphi(\zeta = 0) = \varphi_I$. Геометрическое время можно найти согласно уравнению (126) [27]:

$$\zeta(\varphi_0|\varphi_I) = \\ = \theta(\varphi_0 - \varphi_I) \int\limits_{\varphi_I}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\left\langle \sqrt{T_0^0(\varphi|\widetilde{F})} \right\rangle} + \theta(\varphi_I - \varphi_0) \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_I} \frac{d\varphi}{\left\langle \sqrt{T_0^0(\varphi|\widetilde{F})} \right\rangle} \geqslant 0, \tag{128}$$

где учтена квантовая аномалия геометрического интервала, которая следует, как мы видели выше на примерах СТО и космологии, из условия стабильности квантовой системы. Квантовая аномалия означает абсолютное начало геометрического времени.

3.7. Решение проблем начальных данных в ОТО. Начальные данные $\varphi_I, H_I = \varphi_I'/\varphi_I$ можно трактовать как точку рождения вселенной с положительной энергией $P_\varphi \geqslant 0$ или точку уничтожения вселенной с отрицательной энергией $P_\varphi \leqslant 0$.

Проблема начальных данных в ОТО — это проблема определения зависимости метрики и полей от координатного времени путем решения уравнений теории, инвариантных относительно репараметризации этого времени. Чтобы решить эту проблему, мы отделили инвариантный динамический параметр эволюции φ как масштабный фактор и показали, что действие содержит соответствующий этому параметру инвариантный однородный геометрический интервал $d\zeta = N_0 dx^0$. Отделение масштабного фактора $a = \varphi/\varphi_0$ ($\varphi_0^2 = M_{\rm Pl}^2 3/8\pi$) конформным преобразованием $F^{(n)} = a^n \widetilde{F}^{(n)}$, где n — есть конформный вес, открывает нам движение вселенной (рис. 2), заметающее гиперповерхность в полевом пространстве событий $[\varphi|\widetilde{F}]$.

Уравнения теории позволяют однозначно определить зависимость полей $\widetilde{F}$ от динамического параметра эволюции φ, если заданы начальные данные $\widetilde{F}_I(x^i) = \widetilde{F}(\varphi_I, x^i), P_{FI}(x^i) = P_{FI}(\varphi_I, x^i)$, где $\varphi_I, P_{\varphi I}$ интерпретируются как координаты точки рождения вселенной в фазовом пространстве или уничтожения вселенной с положительными энергиями $E = P_\varphi \geqslant 0$.

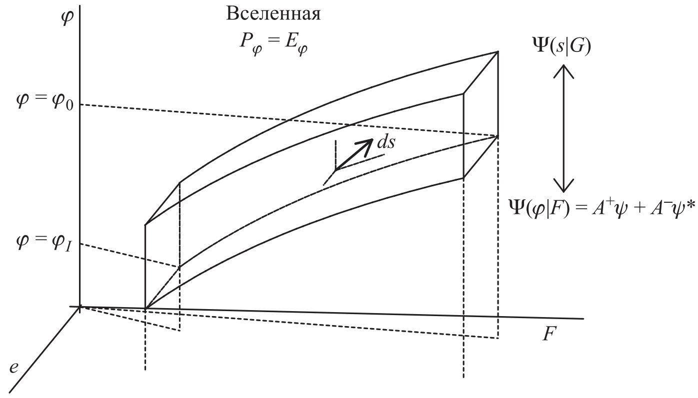

Рис. 2. Условное движение Вселенной по ее гиперповерхности в мировом полевом пространстве событий. Каждый наблюдатель во Вселенной имеет два набора измеряемых величин: полевой (масса φ и плотности числа частиц a_q, a_q^+ с набором квантовых чисел q) и геометрический (интервал времени η и начальные данные плотности боголюбовских квазичастиц b_q, b_q^+) [55]

Будем далее предполагать, что ОТО, как и СТО, имеет последовательную интерпретацию только в квантовой теории с постулатом о существовании вакуума как состояния с минимальной энергией. Условие стабильности вселенной в виде постулата о существовании вакуума как состояния с минимальной энергией ведет к квантовой аномалии и абсолютному началу глобального времени $\zeta = 0$. Задача космологии состоит в определении начальных условий рождения вселенной $\varphi(\zeta = 0) = \varphi_I, P_\varphi(\zeta = 0) = P_{\varphi I}$, вместе с которой рождается время, материя и температура как характеристика движения материи. Чтобы решить эту задачу, надо отождествить теоретические величины с наблюдаемыми в согласии с принципом соответствия с классической теорией в плоском пространстве-времени.

3.8. Динамика низких энергий и принцип соответствия. Мы видим, что возникает прямая аналогия ОТО [40] с теорией релятивистской частицы, рассмотренной в разд. 1. Такую аналогию можно распространить на определение наблюдаемых (типа времени, числа частиц и их одночастичной энергии) с помощью принципа соответствия ОТО с теорией классических полей $\widetilde{F}$ в плоском пространстве-времени, энергия которых значительно меньше, чем колоссальная энергия, соответствующая однородной космологической плотности $\rho_0(\varphi)$.

Локальная плотность энергии $T^0_{t0}(\varphi|\widetilde{F})$ (103) может быть дана как сумма однородной космологической плотности $\rho_0(\varphi)$ и локальной плотности частицеподобных возмущений в теории поля

$$T^0_{t0}(\varphi|\widetilde{F}) = \rho_0(\varphi) + \mathcal{T}^0_{t0}(\varphi|\widetilde{F}). \tag{129}$$

Используя разложение $\sqrt{T^0_{t0}}$ в редуцированном действии (127) по локальной плотности*

$$d\varphi 2\sqrt{\rho_0(\varphi) + \mathcal{T}^0_{t0}} = d\varphi\left[2\sqrt{\rho_0(\varphi)} + \frac{\mathcal{T}^0_{t0}}{\sqrt{\rho_0(\varphi)}}\right] + \ldots \tag{130}$$

и определение конформного времени $d\eta = d\varphi/\sqrt{\rho_0(\varphi)}$ (которое совпадает в этом приближении с геометрическим ζ), можно получить редуцированное действие (127) в форме суммы

$$S[\varphi_I|\varphi_0]|_{P_\varphi=\pm E_\varphi} = S^{(\pm)}_{\text{cosm}} + S^{(\pm)}_{\text{field}} + \ldots, \tag{131}$$

где первый член является космологическим действием (47)

$$S^{(\pm)}_{\text{cosm}}[\varphi_I|\varphi_0] = \mp 2V_0 \int\limits_{\varphi_I}^{\varphi_0} d\varphi\sqrt{\rho_0(\varphi)}, \tag{132}$$

рассмотренным выше в разд. 1, а второй — это обычное действие полей теории в терминах конформного времени

$$S^{(\pm)}_{\text{field}} = \int\limits_{\eta_I}^{\eta_0} d\eta \int d^3x \left[\sum_F P_F \partial_\eta F + \widetilde{\mathcal{C}} - |\overline{\gamma}|^{-1/2}\mathcal{T}^0_{t0}\right] \tag{133}$$

с бегущими массами $m(\eta) = a(\eta)m_0$, которые описывают космологическое рождение частиц из вакуума [56]. В пределе, когда эволюцией вселенной и рождением частиц можно пренебречь: $\varphi \simeq \varphi_0$, полученное действие (133) в точности совпадает с ОТО в калибровке синхронного времени (105):

$$S_{\text{Bjern}}\left[x^0_{\text{synchr}} = \eta, T^0_{t0\text{synchr}} = \mathcal{T}^0_{t0}\right] = S^{(\pm)}_{\text{field}}[\varphi(\eta) = \varphi_0]. \tag{134}$$

Из сравнения инвариантного действия (133) и действия в калибровке синхронного времени (105) мы видим, что роль мирового наблюдаемого времени играет конформное время η, точно так же, как роль абсолютного наблюдаемого времени в механике Ньютона (42) играет геометрический интервал. Таким образом, принцип соответствия отождествляет измеряемое космологическое время с конформным временем $d\eta$, а не с временем Фридмана $dt = a(\eta)d\eta$.

---

*Заметим, что в квантово-полевой теории вначале отделяется взаимодействие $\sqrt{\rho_0 + \mathcal{T}_{(2)} + \mathcal{T}_I} = \sqrt{\rho_0 + \mathcal{T}_{(2)}} + \mathcal{T}_I/\sqrt{\rho_0 + \mathcal{T}_{(2)}}$, что ведет к формфактору, устраняющему, как минимум, часть ультрафиолетовых расходимостей [27].

3.9. Относительные единицы измерения. Отождествление измеряемых величин с конформными соответствует выбору относительных единиц измерения длин. В этом случае факт однородного расширения всех пространственных интервалов $L = aL_c$ означает одновременно и расширение единиц измерения $l = al_c$ интервалов, так что сам измеряемый интервал, как отношение $L_r = aL_c/al_c = L_c/l_c$ двух расширяющихся величин, не расширяется.

В результате возникает космологическая модель эволюции Вселенной, где все измеряемые величины отождествляются с конформными: конформным временем $d\eta$ (вместо фридмановского $dt = a(\eta)d\eta$), координатным расстоянием r (вместо $R = r/(1+z)$), бегущими массами $m = m_0/(1+z)$ (вместо постоянных m_0), и конформной температурой $T_c(z) = T(z)/(1+z)$ (вместо стандартной $T(z)$). В этом случае красное смещение спектральных линий атомов космических объектов

$$\frac{E_{\text{emis}}}{E_0} = \frac{m_{\text{atom}}(\eta_0 - r)}{m_{\text{atom}}(\eta_0)} \equiv \frac{\varphi(\eta_0 - r)}{\varphi_0} = a(\eta_0 - r) = \frac{1}{1+z} \tag{135}$$

объясняется изменением масс. В конформной космологической модели конформное наблюдаемое расстояние r теряет множитель a в сравнении с фридмановским $R = ar$. В этом случае, как показано в [39], последние данные по зависимости красного смещения от расстояния до сверхновых типа Ia [53] согласуются с предельно жестким уравнением состояния

$$p = \rho(\varphi) = \frac{Q^2}{4V_0^2\varphi^2} \tag{136}$$

и зависимостью масштабного фактора как квадратного корня от конформного (т. е. наблюдаемого) времени $a(\eta) = \sqrt{1 + 2H_0(\eta - \eta_0)}$. Именно такая зависимость используется для объяснения химической эволюции материи во Вселенной [54].

Было показано, что относительные единицы дают другую картину эволюции Вселенной, чем абсолютные единицы стандартной космологии. Температурная история расширяющейся Вселенной в относительных единицах выглядит как история эволюции масс в холодной Вселенной с постоянной температурой реликтового излучения [39, 55, 56].

Имеется еще один аргумент в пользу относительных единиц: большой дефицит масс светимости $M/M_L \geqslant 10$, где M_L обозначает массу светящейся материи, во всех сверхскоплениях с массой порядка $M \geqslant 10^{15} M_\odot$, размером $R \gtrsim 5$ Мпк [57], где ньютоновская скорость становится на порядок меньше космической. В случае относительных единиц этот дефицит масс может быть объяснен [57] торможением галактик в процессе космологической эволюции их масс (135).

Эволюцию Вселенной в качестве механизма торможения космических объектов в центральном гравитационном поле, по-видимому, впервые предложили Эйнштейн и Штраусс в 1945 г. [58]. Эта идея была развита в терминах конформных переменных и координат в [57], где было показано, что космическая эволюция может вести к уменьшению энергии и быть причиной образования галактик и их кластеров благодаря захвату космических объектов центральным гравитационным полем. Действительно, из определения конформной одночастичной энергии частицы с бегущей массой $m(\eta) = a(\eta)m_0$ и ньютоновского потенциала следует определение полной энергии частицы: $E(\eta) = \dfrac{p^2}{2m_0a(\eta)} - \dfrac{\alpha m}{r}$ (где p — импульс и $\alpha = GM_\odot m = r_g m/2$ — ньютоновская константа взаимодействия). Из этого определения можно видеть, что энергия не сохраняется в отличие от энергии частицы с постоянной массой в механике Ньютона. Если масштабный фактор $a(\eta)$ увеличивается, энергия изменяется от положительных значений к отрицательным. Существует момент времени $\eta = \eta_I$, когда энергия равна нулю. Это и есть момент захвата галактик, описанный в [57]. Этот захват может ответить на один из фундаментальных вопросов современной теории формирования галактик: как система несвязанных «частиц» (галактик) с положительной энергией превращается в систему связанных «частиц» с отрицательной энергией?

С другой стороны, космическая эволюция дает нам границы области применимости механики Ньютона для описания галактик. Эти границы определяются критическим радиусом $R_{\rm cr} \simeq 10^{20}\ (M/M_\odot)^{1/3}$ см, при котором значение ньютоновской орбитальной скорости в абсолютных единицах совпадает со скоростью хаббловского расширения галактики относительно центра сверхскопления, где эта галактика находится. Было показано [57], что ньютоновская зависимость орбитальной скорости от расстояния до центра скопления для круговых траекторий $\dot R_{\rm circle} = \ddot R_{\rm circle} = 0$ $(R_{\rm circle} = a(t)r, dt = a(\eta)d\eta)$:

$$v_{\rm Newt.\ orb}(R_{\rm circle}) = \sqrt{\frac{r_g}{2R_{\rm circle}}},$$

если учесть космическую эволюцию, изменяется на зависимость

$$v_{\rm cosm.\ orb}(R_{\rm circle}) = \sqrt{\frac{r_g}{2R_{\rm circle}} + \gamma(R_{\rm circle}H)^2}, \qquad (137)$$

где $\gamma = \left[2 - \left(\dfrac{3}{2}\Omega_{\rm matter} + 3\Omega_\Lambda\right)\right]$. В версии космологии, где наблюдаемые величины отождествляются с конформными, мы имеем

$$\gamma(\Omega_{\rm stiff} = 1) = 2,$$

и поэтому дефицит видимой материи уменьшается, в то время как стандартная космологическая модель ведет к отрицательному значению

$$\gamma(\Omega_\Lambda = 0{,}7, \Omega_{\rm matter} = 0{,}3) \simeq -1/2$$

и требует еще больше темной материи. Более того, как видно из формулы (137), орбитальная скорость в стандартной модели с абсолютными единицами измерения может стать даже мнимой.

3.10. Рождение Вселенной. Таким образом, для определения начальных данных рождения Вселенной мы будем рассматривать модель эволюции Вселенной в теории с относительными единицами измерения, где роль первичной вакуумной темной энергии* в «пустой» Вселенной может выполнять кинетическая энергия минимально взаимодействующего скалярного поля, которая ведет к закону эволюции предельно жесткого уравнения состояния (136).

Это уравнение состояния (136) является наиболее сингулярным. Поэтому естественно предположить, что это же состояние было и в момент рождения Вселенной. До рождения Вселенной не было ни времени, ни частиц, ни температуры. Напомним, что температура является характеристикой системы частиц, возникшей в результате их столкновений и рассеяний. Если нет частиц, то нет и их температуры.

Квантовое рождение вселенных в общей теории относительности будем описывать в низкоэнергетическом приближении, рассмотренном в п. 3.8, когда действие ОТО разделяется на две части: (47) (или (132)), которая описывает вселенные, и (133), которая описывает частицы.

В этом приближении естественно возникает один и тот же общий метод описания космологического рождения как вселенных (47), так и частиц (133), — это вторичное квантование системы с постулатом о существовании вакуума как состояния с минимальной энергией [43].

В рассматриваемом случае предельно жесткого уравнения состояния (136) энергия имеет вид $E(\varphi) = Q/\varphi$, где параметр Q совпадает с интегралом движения $Q = 2V_0\varphi_I^2 H_I = 2V_0\varphi_0^2 H_0$, который здесь имеет смысл назвать масштабным зарядом.

Если масштабный заряд вакуума равен нулю, то одновременно рождаются две вселенные с положительным и отрицательным значениями масштабного заряда $\pm|Q|$, которые на языке стандартной модели соответствуют расширяющейся $(+)$ и сжимающейся $(-)$ вселенным:

$$\varphi_{\pm Q}^2 = \varphi_I^2 \pm \frac{Q}{2V_0}\eta. \tag{138}$$

---

*В современной литературе вакуумная темная энергия называется «квинтэссенцией» [39].

Вакуумный постулат (85) может устранить отрицательную энергию, но не отрицательный параметр Хаббла.

Функцию распределения вселенных (86) N_U в этой модели, где энергия событий принимает вид $E(\varphi) = Q/\varphi$, можно найти, поскольку уравнения (88) точно решаются. Функция распределения имеет вид

$$N_U = \frac{1}{4Q^2 - 1} \sin^2 \left[\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}} \ln \frac{\varphi}{\varphi_I} \right] \neq 0. \qquad (139)$$

Далее мы будем рассматривать главным образом решение $(+)$.

3.11. Рождение материи из вакуума. В работах [55, 56, 59] в рамках рассмотренной выше конформной космологической модели было показано, что в ранней Вселенной в момент, когда ее горизонт $H_I^{-1} = a_I^2 H_0^{-1}$ совпадает с комптоновской длиной волны векторных W-, Z-бозонов $M_I^{-1} = a_I^{-1} M_W^{-1}$, существует эффект интенсивного резонансного рождения этих бозонов из вакуума, так как векторные W-, Z-бозоны — единственные частицы в Стандартной модели (СМ), которые имеют сингулярность рождения при нулевой массе. Начальные данные рождения пары бозонов $a_I^2 = [H_0/M_W]^{2/3} = 10^{-29}$ следуют из соотношения неопределенности $\Delta E \Delta \eta = 1$ при рождении пары бозонов с энергией $2M_I$ за время жизни Вселенной $(2H_I)^{-1}$. Это соответствует значению красного смещения $z_I \simeq \sqrt{10^{29}}$. Расчеты показывают быстрое установление плотности бозонов в единицах первичного значения параметра Хаббла и доминирующий вклад релятивистских бозонов (см. рис. 3) [55, 56] и дают температуру бозонов

$$T_{\rm bos} \sim (M_I^2 H_I)^{1/3} = (M_{W0}^2 H_0)^{1/3} \sim 3 \text{ K} \qquad (140)$$

как интеграл движения космической эволюции, описывающей сверхновые [53]. После распада бозонов их температура наследуется реликтовым излучением.

Время жизни бозонов [56]

$$\tau_W = 2H_I \eta_W \simeq \left(\frac{2}{\alpha_g} \right)^{2/3} \simeq 16, \quad \tau_Z \sim 2^{2/3} \tau_W \sim 25 \qquad (141)$$

определяет современное значение барионной плотности

$$\Omega_b \sim \alpha_g = \alpha_{\rm QED} / \sin^2 \theta_W \sim 0{,}03. \qquad (142)$$

Далее, оказывается, что отношение плотности рожденной материи $\rho_v(\eta_I)$ к плотности движения первичного скалярного поля (квинтэссенции) $\rho_{\rm cr}(\eta_I) = H_I^2 \varphi_I^2$ имеет экстремально малое значение:

$$\frac{\rho_v(\eta_I)}{\rho_{\rm cr}(\eta_I)} \sim \frac{M_I^2}{\varphi_I^2} = \frac{M_W^2}{\varphi_0^2} \sim 10^{-34}. \qquad (143)$$

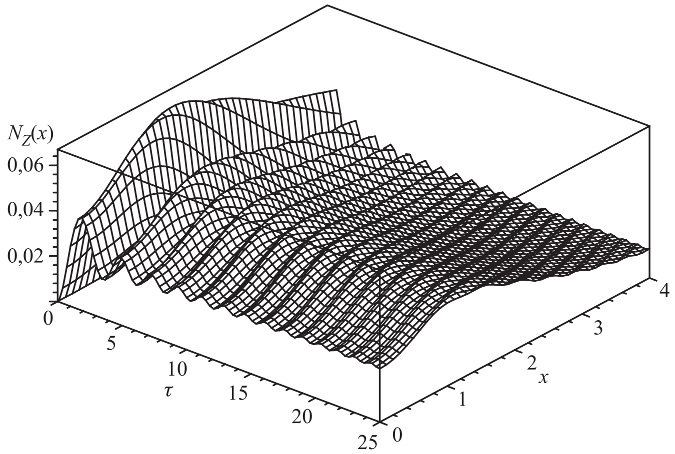

Рис. 3. Продольные ($N_Z(x)$) компоненты функции распределения числа бозонов в зависимости от безразмерного времени $\tau = 2\eta H_I$ и безразмерного импульса $x = q/M_I$, вычисленные в [55, 56, 59] для начальных данных $M_I = H_I$ ($\gamma_v = 1$)

Поперечные бозоны в течение их времени жизни формируют барионную асимметрию Вселенной как следствие «поляризации» этими бозонами вакуумного моря Дирака левых фермионов по правилам отбора СМ [60], согласно которым разность числа барионов и лептонов сохраняется, а их сумма не сохраняется. Экспериментально наблюдаемое сверхслабое взаимодействие [61], ответственное за нарушение CP-симметрии с константой $X_{CP} \sim 10^{-9}$, замораживает барионную асимметрию Вселенной с плотностью

$$\rho_b(\eta = \eta_L) \simeq 10^{-9} \cdot 10^{-34} \rho_{\rm cr}(\eta = \eta_L). \tag{144}$$

Вся последующая эволюция материи в постоянной холодной Вселенной повторяет известный сценарий горячей Вселенной [54], поскольку эта эволюция определена конформно-инвариантными отношениями масс и температуры m/T. Барионная плотность увеличивается как масса, а плотность первичной квинтэссенции уменьшается как обратный квадрат массы, поэтому современное значение барионной плотности, получаемое из (141), (143) и (144), равно

$$\Omega_b(\eta_0) = \left[\frac{\varphi_0}{\varphi_L}\right]^3 10^{-43} \sim 10^{43} \left[\frac{\eta_I}{\eta_L}\right]^{3/2} 10^{-43} \sim \left[\frac{\alpha_{\rm QED}}{\sin^2\theta_W}\right] \sim 0{,}03, \tag{145}$$

и это дает хорошее согласие с данными наблюдений.

Таким образом, существует репараметризационно-инвариантное решение проблем гамильтоновой формулировки ОТО Дирака и космологии в рамках метрического формализма.

3.12. Результаты. Репараметризационно-инвариантное описание системы отсчета в ОТО дает следующие результаты.

1. Доказывается существование нулевой моды решения вариационного уравнения связи в ОТО $T_k^0(\varphi_0|F)=0$ в классе функций, который задает группа калибровочных преобразований гамильтонова описания, и условие конечности плотности энергии.
2. Отождествление этой нулевой моды условия Гаусса $T_k^0=0$ с космологическим масштабным фактором позволяет объединить неинвариантную теорию островной вселенной [20], где космологический масштабный фактор тождественно равен единице и нарушается симметрия теории относительно репараметризации координатного времени его глобальной синхронизацией, и гамильтонову космологию [42], где космологический масштабный фактор рассматривается как динамическая переменная.
3. Отождествление космологического масштабного фактора с инвариантным параметром эволюции и канонического импульса масштабного фактора с энергией Вселенной и постулат о существовании вакуума в квантовой теории как состояния с наинизшей энергией Вселенной позволяет обосновать абсолютное начало геометрического интервала s. Постулат о существовании вакуума устраняет космологическую сингулярность во Вселенной с положительной репараметризационно-инвариантной энергией событий [28].
4. Проблема однородности космологии решается путем определения космологических уравнений усреднением точных уравнений ОТО по пространственному объему в конкретной системе отсчета [55, 56].
5. Выбор репараметризационно-инвариантного параметра эволюции φ в конкретной системе отсчета и абсолютная точка отсчета геометрического интервала $\zeta=0$ дают решение проблемы начальных данных полевых переменных $F(\varphi,x)$ в ОТО: $F_I=F(\varphi_I,x)$, где $\varphi_I{=}\varphi(\zeta)|_{\zeta=0}$.
6. Теоретическое описание рождения материи во Вселенной, ее энергетического бюджета, ряда космологических наблюдений и астрофизических данных в терминах параметров СМ элементарных частиц [55, 56] свидетельствует о существовании начального значения масштабного фактора φ_I, который соответствует значению красного смещения $z^2\sim 10^{29}$.

Однако в метрическом формализме отсутствует определение класса инерциальных систем отсчета, связанных лоренцевскими преобразованиями. Такого рода преобразования можно дать только в тетрадном формализме ОТО.

4. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В ТЕТРАДНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

4.1. Системы отсчета. Как мы видели в предыдущем разделе, существуют две выделенные системы отсчета: космическая, где рождается Вселенная вместе с материей, которая запоминается температурой реликтового излучения, и система отсчета наблюдателя с приборами, отождествляемая с системой отсчета Земли. Напомним иерархию движений, в которых принимает участие наша планета, так, как эта иерархия представляется в настоящее время [62, 63]. В галактической системе координат* $l = 90^\circ$, $b = 0^\circ$ Земля вращается вокруг Солнца со скоростью 30 км/с; Солнце движется со скоростью 220 км/с вокруг центра нашей Галактики. В свою очередь, центр нашей Галактики движется со скоростью (316 ± 11) км/с к центру Местной Группы галактик** в направлении $l = (93 \pm 2)^\circ$, $b = (-4 \pm 1)^\circ$. В итоге получаем, что скорость галактического центра относительно центра Местной Группы составляет 91 км/с в направлении $l = 163^\circ$, $b = -19^\circ$.

Центры нашей Галактики и туманности Андромеды (галактика M31) под действием гравитационного притяжения сближаются со скоростью 120 км/с. Предполагая, что наша Галактика и Андромеда дают существенный вклад в общую массу Местной Группы и масса нашей Галактики в два раза меньше, чем масса Андромеды, получаем, что наша Галактика движется к Андромеде со скоростью 80 км/с.

Измерение дипольной анизотропии реликтового излучения, осуществленное американским космическим аппаратом COBE, показали скорость Солнца относительно реликтового излучения порядка (370 ± 3) км/с в направлении $l = (266,4 \pm 0,3)^\circ$, $b = (48{,}4 \pm 0{,}5)^\circ$ [65]. Эта анизотропия обусловлена движением наблюдателя относительно «глобальной (абсолютной)» системы отсчета.

Поскольку движение Солнца относительно Местной Группы и его движение относительно абсолютной системы отсчета, связанной с реликтовым излучением, имеют практически противоположное направление, то скорость центра Местной Группы относительно реликтового излучения оказывается достаточно большой: порядка (634 ± 12) км/с в направлении $l = (269 \pm 3)^\circ$, $b = (48{,}4 \pm 0{,}5)^\circ$ [65].

*Напомним, что нулевая широта (b) в галактических координатах соответствует галактической экваториальной плоскости, а нулевая долгота (l) — направлению на галактический центр, находящийся в созвездии Стрельца. Галактическая широта измеряется от галактического экватора на север (+) и на юг (−), галактическая долгота измеряется в направлении на запад вдоль галактической плоскости от галактического центра.

**Местная Группа включает в себя нашу Галактику, Большое и Малое Магеллановы Облака, гигантскую галактику Андромеду (M31) и порядка 2–3 десятков карликовых галактик. Общий размер Местной Группы порядка 1 Мпк [63, 64].

Таким образом, центр Местной Группы движется в следующих направлениях [62]:

а) в направлении скопления Девы $l = 274°$, $b = 75°$ со скоростью 139 км/с;

б) в направлении Большого Аттрактора $l = 291°$, $b = 17°$, находящегося на расстоянии 44 Мпк, со скоростью 289 км/с;

в) в направлении, противоположном местной пустой области, $l = 228°$, $b = -10°$ со скоростью 200 км/с.

Учитывая все эти движения, можно утверждать, что Местная Группа движется со скоростью 166 км/с в направлении $l = 281°$, $b = 43°$. Поскольку ошибки определения индивидуальных скоростей составляют порядка 120 км/с [66], то Местная Группа может считаться практически в покое относительно далеких галактик.

Во всех этих случаях нужно определить явный вид преобразований физических наблюдаемых, в том числе интервала, от космических систем отсчета к системе отсчета приборов наблюдателя. Такие преобразования позволяет получить в общем виде формулировка ОТО в тетрадном формализме.

4.2. Действие, линейные формы и симметрия. Тетрады позволяют включить фермионы и другие поля материи f в теорию гравитации с действием в виде суммы действий ОТО и СМ

$$S = S_{\text{OTO}} + S_{\text{CM}}, \tag{146}$$

и отделить общековариантные преобразования от преобразований систем отсчета [67].

Будем считать, что действие Гильберта–Эйнштейна (92) задано в пространстве с интервалом

$$ds^2 = \eta^{\alpha\beta}\omega_{(\alpha)}\omega_{(\beta)} \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{147}$$

$$\eta^{ab} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1), \tag{148}$$

где

$$\omega_{(\alpha)} = e_{(\alpha)\mu}dx^\mu \tag{149}$$

— линейные формы Картана [20, 21], а коэффициенты разложения по дифференциалам координатного пространства $e_{(\alpha)\mu}$ называются тетрадами.

Формы Картана $\omega_{(\alpha)}$ инвариантны относительно общих координатных преобразований

$$x^\mu \to \widetilde{x}^\mu = \widetilde{x}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{150}$$

рассматриваемых в качестве калибровочных, и преобразуются по векторному представлению группы Лоренца, рассматриваемой как группа преобразований систем отсчета. Примером таких преобразований является переход от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно нее со скоростью V:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{(0)} = \dfrac{\omega_{(0)} - V\omega_{(1)}}{\sqrt{1-V^2}}, \\ \bar{\omega}_{(1)} = \dfrac{\omega_{(1)} - V\omega_{(0)}}{\sqrt{1-V^2}}, \\ \bar{\omega}_{(2)} = \omega_{(2)}, \\ \bar{\omega}_{(3)} = \omega_{(3)}. \end{cases} \tag{151}$$

Напомним, что преобразования систем отсчета не меняют число переменных, тогда как калибровочные преобразования ведут к связям [23], которые уменьшают число переменных.

Выбор лоренцевской системы отсчета в ОТО означает фиксацию лоренцевских индексов (α) в формах Картана (149) и классификацию их компонент на времениподобные $\omega_{(0)}$ и пространственноподобные $\omega_{(a)}$.

Гамильтонова динамика формулируется в специальной лоренцевской системе отсчета, которая характеризуется семейством гиперповерхностей $x^0 = \mathrm{const}$ с единичным нормальным вектором $\nu^\alpha = (1/N, -N^k/N)$ к гиперповерхности и задается линейными формами Маурера–Картана [22–24]:

$$\omega_{(0)} = N dx^0, \tag{152}$$

$$\omega_{(a)} = e_{(a)i}(dx^i + N^i dx^0); \tag{153}$$

здесь триады $e_{(a)i}$ образуют коэффициенты пространственной метрики

$$\gamma_{ij} = e_{(a)i}e_{(a)j}, \quad \gamma^{ij}{=}e^j_{(a)}e^i_{(a)}.$$

Следуя Дираку [23], можно отделить детерминант пространственной метрики путем выделения множителя ψ^2 из триад $e_{(a)i}$ и функции смещения N:

$$e_{(a)i} = \psi^2 \mathbf{e}_{(a)i}, \quad \det|\mathbf{e}| = 1, \tag{154}$$

$$N = N_d \psi^6. \tag{155}$$

Далее будем использовать симметрическую параметризацию форм Картана $\mathbf{w}_{(a)} = \mathbf{e}_{(a)i}dx^i$ (которая возникает как нелинейная реализация эквиаффинной симметрии [67]).

В этом случае действие ОТО принимает вид суммы

$$S_{\mathrm{OTO}} = \int dx^0 d^3x \left(\mathbf{K}[\varphi_0|e] - \mathbf{P}[\varphi_0|e] + \mathbf{S}[\varphi_0|e]\right) \tag{156}$$

кинетического $\mathbf{K}$, потенциального $\mathbf{P}$, и поверхностного $\mathbf{S}$ членов:

$$\mathbf{K}[\varphi_0|e] = N_d\varphi_0^2\left[-4v_\psi{}^2+\frac{v_{(ab)}^2}{6}\right], \tag{157}$$

$$\mathbf{P}[\varphi_0|e] = \frac{N_d\varphi_0^2\psi^{12}}{6}\ {}^{(3)}R(e), \tag{158}$$

$$\mathbf{S}[\varphi_0|e] = 2\varphi_0^2\Big[\partial_0 v_\psi-\partial_l(N^l v_\psi)\Big]-\frac{\varphi_0^2}{3}\partial_j[\psi^2\partial^j(\psi^6 N_d)]; \tag{159}$$

здесь использованы определения скоростей $v_{(ab)} = \dfrac{1}{2}\Big(\mathbf{e}_{(a)i}v^i_{(b)}+\mathbf{e}_{(b)i}v^i_{(a)}\Big)$, где

$$v_{(a)i}=\frac{1}{N_d}\left[\left(\partial_0-N^l\partial_l\right)\mathbf{e}_{(a)i}+\frac{1}{3}\mathbf{e}_{(a)i}\partial_l N^l-\mathbf{e}_{(a)l}\partial_i N^l\right], \tag{160}$$

$$v_\psi=\frac{1}{N_d}\left[\left(\partial_0-N^l\partial_l\right)\ln\psi-\frac{1}{6}\partial_l N^l\right], \tag{161}$$

которые показывают нам, как гиперповерхность вложена в 4-мерное пространство-время.

Трехмерная скалярная кривизна ${}^{(3)}R(e)$ после преобразования (154) принимает вид

$${}^{(3)}R(e)=\frac{1}{\psi^4}{}^{(3)}R(\mathbf{e})+\frac{8}{\psi^5}\triangle\psi, \tag{162}$$

где $\triangle\psi = \partial_i\left(\mathbf{e}^i_{(a)}\mathbf{e}^j_{(a)}\partial_j\psi\right)$, а ${}^{(3)}R(\mathbf{e})$ является кривизной, выраженной в триадах $\mathbf{e}_{(a)i}$:

$${}^{(3)}R(\mathbf{e})=-2\partial_i\ \left[\mathbf{e}^i_{(b)}\sigma_{(c)|(b)(c)}\right]-\sigma_{(c)|(b)(c)}\sigma_{(a)|(b)(a)}+\sigma_{(c)|(d)(f)}\sigma_{(f)|(d)(c)}, \tag{163}$$

где

$$\sigma_{(a)|(b)(c)}=\mathbf{e}^j_{(c)}\nabla_i\mathbf{e}_{(a)k}\mathbf{e}^k_{(b)}=\frac{1}{2}\mathbf{e}_{(a)j}\left[\partial_{(b)}\mathbf{e}^j_{(c)}-\partial_{(c)}\mathbf{e}^j_{(b)}\right] \tag{164}$$

— коэффициент спиновой связности [68], здесь использованы определение ковариантной производной через символы Кристоффеля

$$\nabla_i\mathbf{e}_{(a)j}=\partial_i\mathbf{e}_{(a)j}-\Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_{(a)k},\qquad \Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\mathbf{e}^k_{(b)}\left(\partial_i\mathbf{e}_{(b)j}+\partial_j\mathbf{e}_{(b)i}\right)$$

и тождество $\mathbf{e}^i_{(b)}\partial_j\mathbf{e}_{(a)i}=-\mathbf{e}_{(a)i}\partial_j\mathbf{e}^i_{(b)}$, а также обозначение

$$A_{(b)}=\mathbf{e}^j_{(b)}A_j=\mathbf{e}_{(b)i}A^i.$$

Условие поперечности триад

$$\partial_i\mathbf{e}^i_{(b)}=0 \tag{165}$$

означает условие на коэффициенты спиновой связности: $\sigma_{(b)|(b)(c)}=0$.

4.3. Инвариантный параметр эволюции. Группа диффеоморфизмов гамильтонова подхода [22,25], как мы видели в предыдущем разделе (см. (107)), включает подгруппу репараметризаций координатного параметра эволюции $x^0 \to \widetilde{x}^0 = \widetilde{x}^0(x^0)$, которая означает, что координатный параметр эволюции x^0 нельзя рассматривать в качестве наблюдаемой величины.

СТО и космология дали нам ряд аргументов в пользу отождествления такого наблюдаемого диффео-инвариантного параметра эволюции в ОТО с космологическим однородным масштабным фактором. Космологический масштабный фактор может быть введен в теорию (146) с помощью конформных преобразований всех полей с конформным весом (n): $F^{(n)} = a^n \widetilde{F}^{(n)}$, включая компоненты метрики

$$g_{\mu\nu} = a^2 \widetilde{g}_{\mu\nu} \to N_d = a^{-2} \widetilde{N}_d, \qquad \psi^2 = a \widetilde{\psi}^2. \tag{166}$$

Формула (166) используется как определение космологической теории возмущения [51,52].

Для однозначного определения полного набора канонических импульсов гамильтонова описания следует восстановить число переменных исходной ОТО, убирая однородную компоненту из детерминанта метрики $\sqrt{\widetilde{g}} = \widetilde{\psi}^6$ как нулевую фурье-гармонику его логарифма $\widetilde{\psi}$ с помощью условия связи, чтобы переменная

$$\log \psi = \log \sqrt{a(x^0)} + \log \widetilde{\psi} \tag{167}$$

не имела сразу две нулевые фурье-гармоники. Чтобы определить это условие связи, подставим преобразования (166) в действие (146), что приводит к выражению

$$S = \widetilde{S} - V_0 \int dx^0 \frac{(\partial_0 \varphi)^2}{N_0}, \tag{168}$$

где $V_0 = \int d^3x$ — объем координатного пространства, а усредненная функция хода $N_0(x^0)$

$$N_0(x^0)^{-1} = V_0^{-1} \int\limits_{V_0} d^3x \widetilde{N}_d^{-1}(x^0, x^i) \equiv \left\langle \widetilde{N}_d^{-1} \right\rangle \tag{169}$$

определяет диффео-инвариантное геометрическое время ζ:

$$d\zeta = N_0(x^0) dx^0, \tag{170}$$

$\widetilde{S} = \widetilde{S}_{\text{ОТО}} + \widetilde{S}_{\text{СМ}}$ есть сумма действий ОТО

$$\widetilde{S}_{\text{ОТО}} = \int dx^0 d^3x \left(\mathbf{K}[\varphi|e] - \mathbf{P}[\varphi|e] + \mathbf{S}[\varphi|e] \right) \tag{171}$$

и СМ $\widetilde{S}_{\mathrm{CM}}$, где все массы умножаются на масштабный фактор, включая массу Планка: $\varphi = \varphi_0 a$; действие (171) представлено в виде суммы кинетического $\mathbf{K}$, потенциального $\mathbf{P}$, и квазиповерхностного $\mathbf{S}$ членов

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}[\varphi|e] &= \widetilde{N}_d\varphi^2\left[-4\widetilde{v}_\psi^2 + \frac{v_{(ab)}^2}{6}\right], && (172)\\
\mathbf{P}[\varphi|e] &= \frac{\widetilde{N}_d\varphi^2\widetilde{\psi}^{12}}{6}\ {}^{(3)}R(e), && (173)\\
\mathbf{S}[\varphi|e] &= 2\varphi^2\left[\partial_0\widetilde{v}_\psi - \partial_l(N^l\widetilde{v}_\psi)\right] - \frac{\varphi^2}{3}\partial_j[\widetilde{\psi}^2\partial^j(\widetilde{\psi}^6\widetilde{N}_d)], && (174)
\end{aligned}$$

которые совпадают с (157), (158) и (159) с точностью до замены $\varphi_0 \to \varphi = \varphi_0 a$, $\psi \ \to\ \widetilde{\psi}$, $N_d \to \widetilde{N}_d$,

$$v_\psi \to \widetilde{v}_\psi = (\widetilde{N}_d)^{-1}\left[\left(\partial_0 - N^l\partial_l\right)\log\widetilde{\psi} - \frac{1}{6}\partial_l N^l\right] \qquad (175)$$

есть скорость логарифма пространственного детерминанта.

4.4. Нулевая однородная скорость локальной метрики. Рассмотрим пока без всяких дополнительных условий ту часть действия (171), которая описывает только пространственный детерминант (167) и которая после отделения масштабного фактора (166) принимает вид

$$S_D = -\int d^4x\widetilde{N}_d\left[4\varphi^2(\widetilde{v}_\psi)^2 + 4\varphi\partial_0\varphi\widetilde{v}_\psi + \frac{(\partial_0\varphi)^2}{N_0}\right] = \int dx^0 L_D = \int d^4x\mathcal{L}_D, \qquad (176)$$

где первый член возникает из кинетической части $\mathbf{K}[\varphi|e]$, второй происходит из квазиповерхностной части $\mathbf{S}[\varphi|e]$, которая не является полной производной ввиду зависимости масштабного фактора от времени, а третий — квадратичное действие для самого масштабного фактора.

Масштабный фактор здесь является динамической переменной, и его канонический момент может быть получен путем варьирования лагранжиана (176) относительно производной по времени $\partial_0\varphi$:

$$P_\varphi \equiv \frac{\partial L_D}{\partial(\partial_0\varphi)} = -\int d^3x\left[4\varphi\ \widetilde{v}_\psi\ + 2\frac{(\partial_0\varphi)}{N_0}\right] \equiv -2V_0\left[2\varphi\langle\widetilde{v}_\psi\rangle + \frac{(\partial_0\varphi)}{N_0}\right], \qquad (177)$$

в то время как среднее значение локального канонического импульса пространственного детерминанта $\widetilde{\psi}$

$$P_{\widetilde{\psi}} \equiv -\int d^3x\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_0\log\widetilde{\psi})} = -\int d^3x\widetilde{p}_\psi = -4\varphi V_0\left[2\varphi\langle\widetilde{v}_\psi\rangle + \frac{(\partial_0\varphi)}{N_0}\right] = 2\varphi P_\varphi \qquad (178)$$

совпадает с космологическим импульсом с точностью до множителя. Легко убедиться, что скорости $\partial_0\varphi/N_0, \langle\widetilde{v}_\psi\rangle$ не могут быть выражены в терминах канонических импульсов P_φ, P_ψ, поскольку соответствующая система уравнений (177) и (178) вырождена и не имеет решения.

Это значит, что действие (176) сингулярно из-за двойного счета однородной переменной пространственного детерминанта.

Для устранения двойного счета нужно убрать однородную компоненту переменной $\log\widetilde{\psi}$ в уравнении (167), определяя эту переменную в классе функций с нулевыми средними

$$\int\limits_{V_0} d^3x \log\widetilde{\psi} \equiv 0, \qquad \int\limits_{V_0} d^3x \widetilde{v}_\psi \equiv 0. \tag{179}$$

В этом случае логарифм квадратного корня из однородного масштабного фактора в сумме (167) определяется как усреднение по пространственному объему от логарифма детерминанта пространственной метрики $\log\sqrt{a} = \langle\log\psi\rangle$. И тогда условия (179) есть не что иное, как ортогональность космологического масштабного фактора и его скорости к переменной логарифма локального пространственного детерминанта $\log\widetilde{\psi}$ и скорости $\widetilde{v}_\psi$ соответственно.

После устранения однородной компоненты локальной метрики $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ с помощью условий (179) действие (168) принимает вид

$$S = \int d^4x\,(\mathbf{K}[\varphi|e] - \mathbf{P}[\varphi|e] + \mathcal{L}_{\text{CM}}(\varphi|F)) - V_0 \int dx^0 \varphi(x^0)\frac{(\partial_0\varphi)^2}{N_0}, \tag{180}$$

где $\mathcal{L}_{\text{CM}}$ — плотность лагранжиана материи, N_0 определяется уравнением (121), $\mathbf{K}[\varphi|e]$ и $\mathbf{P}[\varphi|e]$ даются уравнениями (172) и (173) соответственно.

Условия (179) позволяют нам сформулировать гамильтонов подход к теории гравитации, в котором локальная гамильтонова плотность $T_0^0 = -\delta\widetilde{S}/\delta\widetilde{N}_d$ не зависит от однородной космологической скорости, называемой параметром Хаббла.

4.5. Модель массивной электродинамики. В качестве модели материи рассмотрим массивную электродинамику в ОТО:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{\varphi_0^2}{6}R(g) + \mathcal{L}_m\right], \tag{181}$$

где $\mathcal{L}_{\text{m}}$ — лагранжиан массивных векторных и спинорных полей:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - M_0^2 A_\mu A_\nu g^{\mu\nu} - \overline{\Psi}i\gamma^\sigma(D_\sigma - ieA_\sigma)\Psi - m_0\overline{\Psi}\hat{\Psi}, \tag{182}$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор напряженности,

$$D_\delta = \partial_\delta - i\frac{1}{2}[\gamma_{(\alpha)}\gamma_{(\beta)}]\sigma_{\delta(\alpha)(\beta)} \tag{183}$$

— ковариантная производная Фока [21], $\gamma_{(\beta)} = \gamma^{\mu} e_{(\beta)\mu}$ — гамма-матрицы Дирака, свернутые с тетрадами $e_{(\beta)\nu}$; $\sigma_{\sigma(\alpha)(\beta)} = e^{\nu}_{(\beta)}(\nabla_{\mu} e_{(\alpha)\nu})$ — коэффициенты спиновой связности [21,68]; $M_0,\ m_0$ — массы векторных A_{μ} и спинорных полей Ψ соответственно.

Лагранжиан массивных полей (182) можно переписать в терминах переменных Лихнеровича [70–72]

$$A^{L}_{\mu} = A_{\mu}, \quad \Psi^{L} = a^{3/2}\widetilde{\psi}^{3}\Psi, \tag{184}$$

что приводит к полям с массами, зависящими от масштабного фактора $a\widetilde{\psi}^{2}$:

$$m_{(L)} = m_0 a\widetilde{\psi}^{2} = m\widetilde{\psi}^{2}, \qquad M_{(L)} = M_0 a\widetilde{\psi}^{2} = M\widetilde{\psi}^{2}, \tag{185}$$

находящимся в пространстве, заданном компонентами репера

$$\omega^{(L)}_{(0)} = \widetilde{\psi}^{4}\widetilde{N}_d dx^0, \tag{186}$$

$$\omega^{(L)}_{(a)} = \mathbf{e}_{(a)i}(dx^i + N^i dx^0) \tag{187}$$

с единичным детерминантом метрики $|\mathbf{e}| = 1$.

В результате лагранжиан полей материи (182) принимает вид

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\mathcal{L}_m(A,\overline{\Psi},\Psi) = \frac{1}{i}\overline{\Psi}^{L}\gamma^{0}\left(\partial_0 - N^k\partial_k + \frac{1}{2}\partial_l N^l - ieA_0\right)\Psi^{L} - \\ - \widetilde{N}_d\mathcal{H}_{\Psi} + N_d\Bigg[- J_{5(c)}v_{[ab]}\varepsilon_{(c)(a)(b)} + \\ + \frac{\widetilde{\psi}^{4}}{2}\left(v_{k(A)}v^{k}_{(A)} - \frac{1}{2}F_{kj}F^{kj} - M^2_{(L)}A^2_{(b)} + \frac{\pi_0^2}{M^2_{(L)}}\right)\Bigg] - \pi_0\left[A_0 + N^k A_k\right],\end{aligned} \tag{188}$$

где для линеаризации массового члена использовано преобразование Лежандра $A_0^2/(2N) = N\pi_0^2/2 - \pi_0 A_0$ с вспомогательным полем π_0;

$$\mathcal{H}_{\Psi} = -\psi^{4}\left[i\overline{\Psi}^{L}\gamma_{(b)}D_{(b)}\Psi^{L} + J^0_5\sigma - \partial_k J^k + m^{(L)}\overline{\Psi}^{L}\Psi^{L}\right] \tag{189}$$

есть гамильтонова плотность фермионов,

$$v_{[ab]} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_{(a)k}v^{k}_{(b)} - \mathbf{e}_{(b)k}v^{k}_{(a)}\right), \tag{190}$$

$$D_{(b)}\Psi^{L} = \left[\partial_{(b)} - \frac{1}{2}\partial_k\mathbf{e}^{k}_{(b)} - ieA_{(b)}\right]\Psi^{L} \tag{191}$$

$$v_{k(\mathrm{A})} = \frac{1}{\psi^{4}\widetilde{N}_d}\left[\partial_0 A_k - \partial_k A_0 + F_{kj}N^j\right] \tag{192}$$

— скорости полевых переменных, а величины

$$J_{5(c)} = \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}^L \gamma_5 \gamma_{(c)} \Psi^L\right), \quad J_5^0 = \frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}^L \gamma_5 \gamma^0 \Psi^L\right), \quad J_k = \frac{i}{2}\overline{\Psi}^L \gamma_k \Psi^L \quad (193)$$

являются токами, $\sigma = \sigma_{(a)(b)|(c)}\varepsilon_{(a)(b)(c)}$, где $\varepsilon_{(a)(b)(c)}$ обозначает тензор Леви–Чивита.

4.6. Действие в гамильтоновой форме. Перейдем от скоростей к канонически сопряженным импульсам переменных Лихнеровича (184):

$$\begin{aligned}
P_\varphi &= -2V_0 \frac{\partial_0 \varphi}{N_0} = -2V_0 \frac{d\varphi}{d\zeta} \equiv -2V_0 \varphi', && (194)\\
\widetilde{p}_\psi &= \frac{\partial \mathbf{K}[\varphi|e]}{\partial(\partial_0 \ln \widetilde{\psi})} = -8\varphi^2 \widetilde{v}_\psi, && (195)\\
\widetilde{p}^k_{(b)} &= \frac{\partial[\mathbf{K}[\varphi|e] + \sqrt{-g}\mathcal{L}_m]}{\partial(\partial_0 \mathbf{e}_{(a)k})} = \mathbf{e}^k_{(a)}\left[\frac{\varphi^2}{3} v_{(ab)} - J_{5(c)}\varepsilon_{(c)(a)(b)}\right], && (196)\\
P^k_{(A)} &= \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_m]}{\partial(\partial_0 A_k)} = \widetilde{\psi}^4 v^k_{(A)}, && (197)\\
P_{(\Psi)} &= \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_m]}{\partial(\partial_0 \Psi^L)} = \frac{1}{i}\overline{\Psi}^L \gamma^0. && (198)
\end{aligned}$$

Тогда действие (181) можно записать в гамильтоновой форме

$$S = \int dx^0 \left[-P_\varphi \partial_0 \varphi + N_0 \frac{P_\varphi^2}{4V_0} + \int d^3x \left(\sum_F \widetilde{P}_F \partial_0 \widetilde{F} + \mathcal{C} - \widetilde{N}_d T^0_{0t}\right)\right], \quad (199)$$

где $\widetilde{P}_F$ — набор полевых импульсов (195)–(198),

$$T^0_{0t} = \widetilde{\psi}^7 \hat{\triangle} \widetilde{\psi} + \sum_{I=0,4,6,8} \widetilde{\psi}^I \tau_I \quad (200)$$

есть сумма гамильтоновых плотностей, включая плотность гравитации

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^7 \hat{\triangle} \widetilde{\psi} &\equiv \widetilde{\psi}^7 \frac{4\varphi^2}{3} \partial_{(b)}\partial_{(b)} \widetilde{\psi}, && (201)\\
\tau_{I=0} &= \frac{6\widetilde{p}_{(ab)}\widetilde{p}_{(ab)}}{\varphi^2} - \frac{16}{\varphi^2} p_\psi^2 - \frac{\pi_0^2}{2M^2}, && (202)\\
\tau_{I=4} &= \frac{P_{k(A)}P^k_{(A)} + F_{kj}F^{kj}}{2} - \left[i\widetilde{\Psi}^L \gamma_{(b)} D_{(b)} \Psi^L + J_5^0 \sigma - \partial_k J^k\right], && (203)\\
\tau_{I=6} &= m\overline{\Psi}^L \Psi^L, && (204)\\
\tau_{I=8} &= \frac{\varphi^2}{6} R^{(3)}(\mathbf{e}), && (205)
\end{aligned}$$

где $\widetilde{p}_{(ab)} = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{k}}_{(\mathbf{a})}\widetilde{p}_{(b)k} + \mathbf{e}^{\mathbf{k}}_{(\mathbf{b})}\widetilde{p}_{(a)k}\right)$, $\widetilde{p}_{(b)k} = p_{(b)k} + \mathbf{e}_{(a)k}\varepsilon_{(c)(a)(b)}J_{(c)}$,

$$\mathcal{C} = A_0\left[\partial_k P^k_{(A)} + eJ_0 - \pi_0\right] + N_{(b)}T^0_{(b)t} + \lambda_0 p_\psi + \lambda_{(a)}\partial_k \mathbf{e}^k_{(a)} \qquad (206)$$

(где $J_0 = \overline{\Psi}^L\gamma_0\Psi^L$ — нулевая компонента тока; $A_0, N_d, N^i, \lambda_0, \lambda_{(a)}$ являются множителями Лагранжа) обозначает сумму связей, включающую условие Дирака минимальной трехмерной гиперповерхности [23]

$$\widetilde{p}_\psi = \widetilde{v_\psi} = 0 \to (\partial_0 - N^l\partial_l)\log\widetilde{\psi} = \frac{1}{6}\partial_l N^l, \qquad (207)$$

означающее положительную определенность плотности гамильтониана (202). Если обозначить компоненты полного тензора энергии-импульса $T^0_{(a)} = T^0_i \mathbf{e}^i_{(a)}$, то

$$T^0_{(a)_t} = -\widetilde{p}_\psi\partial_{(a)}\widetilde{\psi} + \frac{1}{6}\partial_{(a)}(\widetilde{p}_\psi\widetilde{\psi}) + 2p_{(b)(c)}\gamma_{(b)|(a)(c)} - \partial_{(b)}p_{(b)(a)} -$$
$$- \frac{1}{i}\overline{\Psi}^I\gamma^0\partial_{(a)}\Psi^I - \frac{1}{2i}\partial_{(a)}\left(\overline{\Psi}^I\gamma^0\Psi^I\right) - P^j_{(A)}F_{jk}\mathbf{e}^k_{(a)} - \pi_0 A_{(a)}. \qquad (208)$$

4.7. Гамильтонова редукция. Как мы видели в предыдущем разделе (см. формулы (124)–(127)), энергетическая связь $\delta S[\varphi|\widetilde{F}]/\delta N_d = 0$ в виде уравнения $N_0^2 P_\varphi^2/(\widetilde{N}_d)^2 = T^0_0(\varphi|\widetilde{F})$ (124) имеет точное решение

$$P^2_\varphi = E^2_\varphi, \quad \frac{N_0}{\widetilde{N}_d} = \frac{\sqrt{T^0_{0t}}}{\langle\sqrt{T^0_{0t}}\,\rangle}, \qquad (209)$$

где

$$E_\varphi = 2V_0\left\langle\sqrt{T^0_{0t}}\right\rangle, \qquad (210)$$

и подстановка этого решения $P_{\varphi(\pm)} = \pm E_\varphi$ в действие (199) дает редуцированное действие

$$S[\varphi_I|\varphi_0]|_{P_\varphi=\pm E_\varphi} = \int\limits_{\varphi_I}^{\varphi_0} d\varphi\left\{\left[\int d^3x\left(\sum_{\widetilde{F}}\widetilde{P}_F\partial_\varphi\widetilde{F} + \widetilde{\mathcal{C}}\right) \pm E_\varphi\right]\right\} \qquad (211)$$

в полевом пространстве событий $[\varphi|\widetilde{F}]$, здесь $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\partial_0\varphi$, φ_I — это точка рождения (или уничтожения) вселенной.

4.8. Диффео-инвариантная теория возмущений. Согласно условиям отделения параметра космологической эволюции, описанным формулами (179) $\int d^3x\log\widetilde{\psi} = 0$ и (169) $\int d^3x(N_0/\widetilde{N}_d) = 1$, компоненты метрики $(\widetilde{N}_d)^{-1}, \widetilde{\psi}$ можно записать в виде

$$\frac{N_0}{\widetilde{N}_d} = 1 + \overline{\nu}, \quad \widetilde{\psi} = e^{\overline{\mu}} \qquad (212)$$

с помощью функций с нулевыми средними по пространственному объему

$$\overline{\nu} = \nu - \langle\nu\rangle, \quad \overline{\mu} = \mu - \langle\mu\rangle \quad (\langle\overline{\mu}\rangle \equiv 0, \langle\overline{\nu}\rangle \equiv 0). \tag{213}$$

Эти функции однозначно определяются системой уравнений на μ и ν:

$$\overline{\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\overline{\mu}}} = \overline{(1+\overline{\nu})^{-1}\left[\sum_I I e^{\overline{\mu}I}\tau_I + 7e^{7\overline{\mu}}\hat{\triangle}e^{\overline{\mu}}\right] + e^{\overline{\mu}}\hat{\triangle}[e^{7\overline{\mu}}(1+\overline{\nu})^{-1}]} = 0, \tag{214}$$

$$1+\overline{\nu} \equiv \frac{\sqrt{T_0^0}}{\langle\sqrt{T_0^0}\rangle}, \tag{215}$$

полученных вариацией действия (211) с гамильтоновой функцией (200)

$$T_{0t}^0 \equiv e^{7\overline{\mu}}\hat{\triangle}e^{\overline{\mu}} + \sum_I e^{\overline{\mu}I}\tau_I, \quad \tau_I = \langle\tau_I\rangle + \overline{\tau}_I, \quad \langle\overline{\tau}_I\rangle \equiv 0. \tag{216}$$

Разложение гамильтоновой плотности (216) в ряд по $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$ и возмущениям $\overline{\tau}_I = \tau_I - \langle\tau_I\rangle$ парциальных гамильтоновых плотностей τ_I около их средних $\langle\tau_I\rangle$:

$$T_0^0 = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots, \tag{217}$$

$$T_0 = \langle\tau_{(0)}\rangle, \tag{218}$$

$$T_1 = \overline{\tau}_{(0)} + (\langle\tau_{(1)}\rangle + \hat{\triangle})\cdot\overline{\mu}, \tag{219}$$

$$T_2 = \overline{\mu}\left[\overline{\tau}_{(1)} + (\langle\tau_{(2)}\rangle + 14\hat{\triangle})\frac{\overline{\mu}}{2}\right] + \frac{1}{2}\hat{\triangle}(\overline{\mu}^2), \tag{220}$$

где $\tau_{(n)} = \sum_I I^n\tau_I$, будем называть диффео-инвариантной гамильтоновой теорией возмущения. Условие минимальной поверхности (или нулевой скорости локального детерминанта метрики) (207) принимает вид

$$\partial_{(b)}\left(e^{6\overline{\mu}}\mathcal{N}_{(b)}\right) = \partial_\zeta(e^{6\overline{\mu}}). \tag{221}$$

Первый порядок уравнения (215) имеет форму

$$1+\overline{\nu} = 1 + \frac{T_1}{2T_0} = 1 + \frac{\overline{\tau}_{(0)} + (\langle\tau_{(1)}\rangle + \hat{\triangle})\overline{\mu}}{2\langle\tau_{(0)}\rangle}. \tag{222}$$

Подстановка значения ν, полученного из этого уравнения, в уравнение на μ (214) в первом порядке разложения

$$\overline{\tau}_{(1)} + (\langle\tau_{(2)}\rangle + 14\hat{\triangle})\cdot\overline{\mu} - (\langle\tau_{(1)}\rangle + \hat{\triangle})\cdot\overline{\nu} = 0 \tag{223}$$

дает $\overline{\nu}$ и $\overline{\mu}$ в виде суммы

$$\overline{\mu} = \frac{1}{14\beta} \int d^3y \left[D_{(+)}(x,y)\overline{T}_{(+)}(y) - D_{(-)}(x,y)\overline{T}_{(-)}(y) \right], \qquad (224)$$

$$\overline{\nu} = \frac{1}{2\beta} \int d^3y \left[(1+\beta) D_{(+)}(x,y)\overline{T}_{(+)}(y) - (1-\beta) D_{(-)}(x,y)\overline{T}_{(-)}(y) \right], \qquad (225)$$

где

$$\beta = \sqrt{1 + [\langle\tau_{(2)}\rangle - 14\langle\tau_{(1)}\rangle]/(98\langle\tau_{(0)}\rangle)}, \;\; \overline{T}_{(\pm)} = 7(1 \pm \beta)\overline{\tau}_{(0)} - \overline{\tau}_{(1)} \qquad (226)$$

— локальные токи, а $D_{(\pm)}$ — функции Грина, удовлетворяющие уравнениям

$$\left[\pm \hat{m}^2_{(\pm)} - \hat{\triangle} \right] D_{(\pm)}(x,y) = \delta^3(x-y), \qquad (227)$$

$$\hat{m}^2_{(\pm)} = 14(\beta \pm 1)\langle\tau_{(0)}\rangle \mp \langle\tau_{(1)}\rangle. \qquad (228)$$

Редуцированная гамильтонова функция в действии (211) после разложения (217) принимает форму взаимодействия «ток на ток»

$$E_\varphi = 2\int d^3x \sqrt{T_0^0} = 2V_0\sqrt{\langle T_0\rangle}\left[1 + \frac{\langle T_2\rangle}{2\langle T_0\rangle} - \frac{\langle T_1^2\rangle}{8\langle T_0\rangle^2} + \ldots\right] =$$
$$= 2V_0\sqrt{\langle\tau_{(0)}\rangle} + \frac{1}{14\beta\sqrt{\langle\tau_{(0)}\rangle}} \int d^3x \int d^3y \Big[\overline{T}_{(+)}(x) D_{(+)}(x,y)\overline{T}_{(+)}(y) +$$
$$+ \overline{T}_{(-)}(x) D_{(-)}(x,y)\overline{T}_{(-)}(y) \Big]. \qquad (229)$$

В классическом случае точечных распределений масс в конечном объеме с нулевым давлением и плотностью $\overline{\tau}_{(1)} = \overline{\tau}_{(2)}/6 \equiv \sum\limits_J M_J \left[\delta^3(x-y_J) - 1/V_0\right]$ решения (224) и (225) принимают значимую форму

$$\overline{\mu}(x) = \sum_J \frac{r_{gJ}}{4r_J}\left[\gamma_1\, \mathrm{e}^{-m_{(+)}(z) r_J} + (1-\gamma_1)\cos m_{(-)}(z) r_J\right], \qquad (230)$$

$$\overline{\nu}(x) = \sum_J \frac{2r_{gJ}}{r_J}\left[(1-\gamma_2)\, \mathrm{e}^{-m_{(+)}(z) r_J} + \gamma_2\cos m_{(-)}(z) r_J\right], \qquad (231)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1+7\beta}{14\beta}, \quad \gamma_2 = \frac{(1-\beta)(7\beta-1)}{16\beta}, \quad r_{gJ} = \frac{3M_J}{4\pi\varphi^2}, \quad r_J = |x - y_J|.$$

Минимальная поверхность (221) $\partial_i[\widetilde{\psi}^6\mathcal{N}^i] - (\widetilde{\psi}^6)' = 0$ дает сдвиг начала координат в процессе эволюции, который для сферических координат можно написать в явном виде:

$$\mathcal{N}^i = \left(\frac{x^i}{r}\right)\left(\frac{\partial_\zeta V}{\partial_r V}\right), \qquad V(\zeta, r) = \int\limits_0^r d\widetilde{r}\ \widetilde{r}^2 e^{6\overline{\mu}(\zeta,\widetilde{r})}. \tag{232}$$

В пределе бесконечного объема $\langle\tau_{(n)}\rangle = 0$ эти решения принимают стандартную ньютоновскую форму

$$\overline{\mu} = D\tau_{(0)}, \quad \overline{\nu} = D[14\tau_{(0)} - \tau_{(1)}], \quad \mathcal{N}^i = 0, \tag{233}$$

где $\hat{\triangle}D(x) = -\delta^3(x)$. Нетрудно видеть, что уравнение (214) в вакууме $\tau_I = 0$ в пределе бесконечного объема сводится к уравнениям $\hat{\triangle}e^{\overline{\mu}} = 0$, $\hat{\triangle}\dfrac{e^{7\overline{\mu}}}{1+\overline{\nu}} = 0$, которым удовлетворяет изотропная версия решения Шварцшильда в ОТО $e^{\overline{\mu}} = 1 + \dfrac{r_g}{4r}$; $\dfrac{e^{7\overline{\mu}}}{1+\overline{\nu}} = 1 - \dfrac{r_g}{4r}$.

4.9. Крупномасштабная структура Вселенной. Можно сравнить диффеоинвариантную теорию возмущения со стандартной космологической теорией возмущения [50] $ds^2 = a^2(\eta)[(1+\overline{\Phi})d\eta^2 - (1-\overline{\Psi})(dx^i + N^i d\eta)^2]$, $\overline{\Phi} = \nu - 6\mu$, $\overline{\Psi} = 2\mu$, $N^i = 0$, где нулевые фурье-гармоники пространственного детерминанта принимаются во внимание дважды (т.е. $\langle\mu\rangle \neq 0$) и это является помехой при построении гамильтонова метода в формализме Дирака. Диффеоинвариантная теория возмущения показывает, что при устранении двойного счета ($\langle\mu\rangle = 0$) уравнения на скалярные потенциалы μ и ν (см. (215), (214)) не содержат производных по времени, которые отвечают за описание первичного спектра реликтового излучения в инфляционной модели [51, 69]. Однако диффео-инвариантная версия гамильтонова подхода к ОТО в формализме Дирака предлагает нам другую возможность описания спектра реликтового излучения и остальных важных проблем космологии при помощи космологического рождения векторных бозонов, о которых было сказано выше. Уравнения, описывающие продольные векторные бозоны в СМ в этом случае, имеют форму уравнений, которые получаются из теории возмущения Лифшица и которые используются в инфляционной модели для описания первичного спектра реликтового излучения.

Следующие отличия от стандартной теории возмущения заключаются в существовании ненулевого вектора сдвига и пространственных осцилляций скалярных потенциалов согласно выражениям (228) и (231). Диффузия системы частиц, движущихся в пространстве с интервалом $ds^2 = d\eta^2 - (dx^i + N^i d\eta)^2$ с периодически изменяющимся в пространстве вектором сдвига начала координат N^i и с нулевыми импульсами, может быть понята из анализа уравнений движения $dx^i/d\eta = N^i$, $N^i \sim \dfrac{x^i}{r}\sin\hat{m}_{(-)}r$, где $\hat{m}_{(-)}$ задано

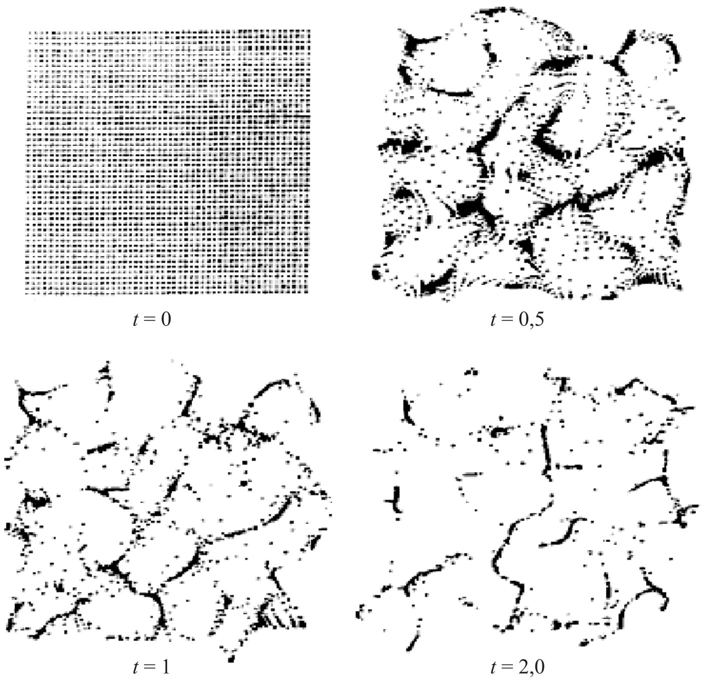

Рис. 4. Ненулевой вектор сдвига и пространственные осцилляции скалярных потенциалов, приводящие к характерной кластеризации однородной системы частиц

в (228), рассмотренного для двумерного случая в монографии [74], где $t = \hat{m}_{(-)}\eta$; процесс диффузии иллюстрируется рис. 4, взятым из этой монографии. Данные по сверхновым в конформной космологии [39] с доминантностью жесткого уравнения состояния $\Omega_{\rm stiff} \sim 1$ определяют параметр пространственных осцилляций в виде $\hat{m}^2_{(-)} = \dfrac{6}{7}H_0^2\left[\Omega_R(z+1)^2 + \dfrac{9}{2}\Omega_{\rm mass}(z+1)\right]$. Значение красного смещения в эпоху рекомбинации атомов водорода $z_r \sim 1100$ и параметр кластеризации [73] $r_{\rm clust} = \dfrac{\pi}{\hat{m}_{(-)}} \sim \dfrac{\pi}{H_0\Omega_R^{1/2}(1+z_r)} \sim 130$ Мпк, недавно обнаруженный в исследованиях крупномасштабной структуры в распределении красного смещения [73], ведут к разумному значению плотности радиации $10^{-4} < \Omega_R \sim 3\cdot 10^{-3} < 5\cdot 10^{-2}$ во времена этой эпохи. В этом случае, как можно видеть из рис. 5, кластеризация однородного распределения системы частиц с нулевыми импульсами ведет к рельефу Вселенной, который имеет четко выраженную фрактальную структуру с наличием пустых объемов. Галактики скучиваются в волокнистые и плоские образования, обрамляющие пустоты, что и наблюдается в крупномасштабном распределении галактических структур, показанном на рис. 5 [75].

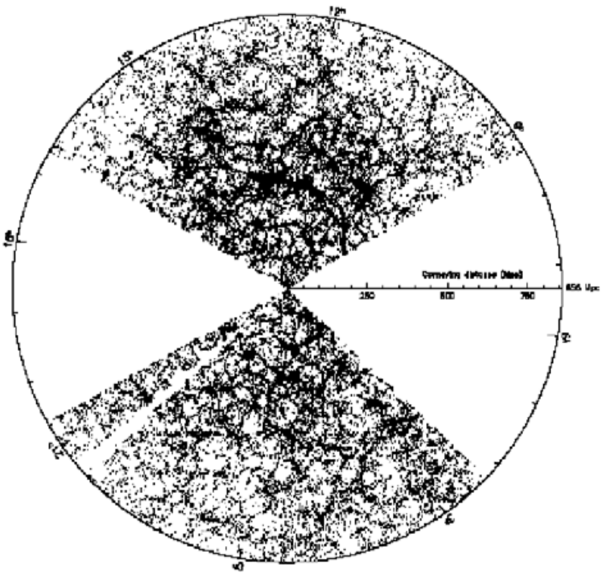

Рис. 5. Крупномасштабная структура Вселенной [75]

4.10. Преобразование систем отсчета. Лоренц-инвариантность уравнений ОТО в конкретной системе отсчета можно рассматривать по аналогии с лоренц-инвариантностью уравнений электродинамики, как это сделал Полубаринов [12]. Это значит, что при переходе в другую систему отсчета следует вернуться к исходным переменным и интервалу

$$ds^2 = \omega_{(0)}^2 - \omega_{(a)}^2 \tag{234}$$

и выбрать новые переменные и линейные формы $\overline{\omega}_{(0)}, \overline{\omega}_{(a)}$, связанные с прежними формами преобразованиями Лоренца

$$\omega_{(0)}(\zeta, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\overline{\omega}_{(0)}(\overline{\zeta}, \overline{x}_1, x_2, x_3) + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\overline{\omega}_{(1)}(\overline{\zeta}, \overline{x}_1, x_2, x_3),$$

$$\omega_{(1)}(\zeta, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\overline{\omega}_{(1)}(\overline{\zeta}, \overline{x}_1, x_2, x_3) + \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\overline{\omega}_{(0)}(\overline{\zeta}, \overline{x}_1, x_2, x_3).$$

И затем построить всю гамильтонову схему описания для дираковских переменных и координат, где новые формы $\overline{\omega}$ зависят от пространства-времени $(\overline{\zeta}, \bar{x})$ точно так же, как прежние формы ω зависели от (ζ, x).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общая теория относительности впервые привнесла в физическую теорию динамических систем новые геометрические принципы, ясно сформулированные в работе Гильберта «Основания физики» [15], в которой функционал действия дополнялся определением *геометрического интервала*, симметрия систем отсчета дополнялась симметрией относительно диффеоморфизмов, которые в дальнейшем получили название *калибровочных преобразований*, а уравнения движения дополнялись *уравнениями связи*.

Такая же *геометрическая* формулировка существует и для специальной теории относительности, и, как было показано в обзоре, именно эта формулировка дает возможность описать релятивистские эффекты динамическими вариационными уравнениями, а не кинематическими преобразованиями Лоренца. Кроме того, следует напомнить, что вся современная квантовая теория поля [18, 19] есть не что иное, как первичное и вторичное квантование *уравнения энергетической связи* релятивистской частицы, называемого массовой поверхностью.

В контексте единой *геометрической* формулировки обеих теорий СТО и ОТО с помощью одного и того же вариационного принципа Гильберта возникает вопрос: а нельзя ли применить к ОТО в формулировке Гильберта опыт построения современной квантовой теории поля, основанной на геометродинамике СТО, и тем самым найти прямой путь квантования геометродинамики ОТО по аналогии с первичным и вторичным квантованием энергетического уравнения связи в СТО в *конкретной* системе отсчета? Оказалось, что почти все элементы такого квантования ОТО уже были сформулированы различными авторами, которые использовали релятивистские и калибровочные симметрии не только как принципы построения действия теории, но и как принципы построения ее физических диффео-инвариантных переменных и наблюдаемых в конкретной системе отсчета.

1. Отделение преобразований систем отсчета в ОТО от калибровочных преобразований было сделано Фоком в 1929 г. [21] путем введения диффеоинвариантного ортогонального репера, изменяющегося при переходе к другой системе отсчета.

2. Конкретная система отсчета, соответствующая квантованию ОТО, была определена в 1958 г. Дираком [23].

3. Группа калибровочных преобразований, оставляющих инвариантным геометрический интервал в кинеметрической системе отсчета, была указана в 1976 г. Зельмановым [25]; эта группа содержит подгруппу преобразований координатного параметра эволюции, которая требует в СТО введения диффео-инвариантного времени как переменной в полевом пространстве событий.

5. Уилер и ДеВитт [40] в 1967 г. отождествили в космологии параметр эволюции с космологическим масштабным фактором и ввели в ОТО понятие полевого пространства событий, в котором движется релятивистская вселенная, описывая мировую гиперповерхность с геометрическим интервалом, измеряемым сопутствующим наблюдателем, по аналогии с понятием пространства событий Минковского, где движется релятивистская частица.

6. Преобразование, отделяющее этот космологический масштабный фактор, рассматриваемый как независимая переменная в ОТО [27], от всех полевых переменных, было указано еще в 1944 г. Лихнеровичем [70].

7. Для определения диффео-инвариантных физических измеряемых величин: времени, одночастичной энергии, числа частиц, числа вселенных и т.д. были использованы гамильтонова редукция [27, 28] и принцип соответствия с классической теорией поля, сформулированный Эйнштейном в СТО при определении энергии частицы [35]. Раскладывая согласно Эйнштейну редуцированное действие по физическим полям, мы получаем в низшем порядке космологию в формулировке Уилера–ДеВитта [40], а в следующем порядке — стандартную теорию поля в конформно-плоском пространстве-времени, где диффео-инвариантные наблюдаемые величины совпадают с конформными или относительными координатами и временем, введенными впервые еще Фридманом, для которых Вселенная покоится, а все массы растут как космологический масштабный фактор [38, 39].

8. Квантовая теория гравитации определяется согласно Уилеру и ДеВитту [40] как первичное и вторичное квантование энергетической связи в конкретной системе отсчета, в полном соответствии с современной квантовой теорией поля [18, 19], подтверждаемой огромным экспериментальным материалом в физике высоких энергий.

Мы показали, что полученная таким путем квантовая гравитация дает возможность решить проблемы статуса хаббловской эволюции, однородности, горизонта, стрелы времени, начальных данных и космологической сингулярности. Мы привели ряд теоретических и наблюдательных аргументов в пользу того, что на уровне такой квантовой теории гравитации можно получить ответы также на вопросы о космологическом рождении из вакуума Вселенной и заполняющей ее материи, о природе темной энергии и темной материи, описать наблюдаемую эволюцию материи во Вселенной и энергетический бюджет Вселенной в согласии с современными наблюдательными данными.

При этом было показано, что описание первичного спектра возмущений температуры реликтового излучения в инфляционной модели [52, 69] существенно основано на двойном счете масштабного фактора в космологической теории возмущений, предложенной в 1946 г. Лифшицем. В такой теории возмущений последовательное построение гамильтонова формализма и квантования невозможно. С другой стороны, именно квантовая гамильтонова теория, как мы видели в разд. 3, дает возможность описания возникновения реликтового излучения (и его первичного спектра возмущений температуры) как продукта распада первичных векторных W-, Z-бозонов, рожденных из стабильного боголюбовского вакуума, когда их масса совпадала с параметром Хаббла. В этом случае уравнения на продольные компоненты W-, Z-бозонов [56] близки к тем уравнениям инфляционной модели [52], которыми она описывает указанный выше первичный спектр возмущений температуры.

Рассмотренная здесь версия квантования ОТО с помощью отделения масштабного фактора обнаруживает скрытую масштабную симметрию ОТО и СМ, согласно которой законы природы, рассматриваемые как уравнения движения, не зависят не только от начальных данных, измеряемых в конкретной системе отсчета, но и от единиц измерения этих данных. Масса Планка исчезает из уравнений движения как фундаментальный параметр и появляется как современное значение динамической переменной, которой она достигла за время эволюции Вселенной, будучи заданной как одно из возможных начальных данных. В контексте такой масштабной симметрии ОТО математически эквивалентна теории конформного скалярного поля [76]. Масштабная симметрия указывает на возможную геометризацию частицы Хиггса, введение которой вместе с потенциалом Хиггса становится необязательным, и на определенные физические следствия такой геометризации для физики частиц [77], экспериментально проверяемые на современных ускорителях.

Благодарности. Мы благодарим Б. М. Барбашова, Д. Блашке, А. Боровеца, С. И. Виницкого, Е. А. Иванова, Э. А. Кураева, А. Н. Липатова, В. В. Нестеренко, С. А. Смолянского и А. Н. Сисакяна за плодотворное обсуждение проблем, рассматриваемых в настоящем обзоре. Один из авторов (А. Ф. З.) выражает благодарность Национальному фонду поддержки естественных наук (National Natural Science Foundation of China (NNSFC)), грант № 10233050, и Национальному фонду поддержки ведущих фундаментальных исследований (National Key Basic Research Foundation), грант № TG 2000078404, за частичную финансовую поддержку данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Einstein A.* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. B. 1915. Bd. 44, Nr. 2. S. 778; Bd. 48, Nr. 2. S. 844 (пер.: *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр. / Под ред. И. Е. Тамма, Я. А. Смородинского и Б. Г. Кузнецова. М., 1965–1967. Т. 1. Ст. 34. С. 425; Ст. 37. С. 448).
2. *Einstein A.* Vom Relativitäts-Prinzip. Vossische Zeitung. 1914. S. 33 (пер.: *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр. Т. 1. Ст. 31. С. 397; см. там же. С. 282; 284; 295; 425; 456; 560).
3. *Weyl H.* // Sitzungsber. Berl. Akad. 1918. S. 465.
4. *Weyl H.* // Zs. Phys. 1929. Bd. 56. S. 330.
5. *Fock V.* // Zs. Phys. 1926. Bd. 39. S. 226.
6. *Фок. В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

7. *Yang C. N., Mills R. L.* // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191.
8. *Янг И.* // УФН. 1980. Т. 132, вып. 1. С. 169.
9. *Utiyama R.* // Phys. Rev. 1956. V. 101. P. 1597.
10. *Kibble T. W. B.* // J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 212.
11. *Dirac P.* // Proc. Roy. Soc. A. 1927. V. 114. P. 243;
    Dirac P. // Can. J. Phys. 1955. V. 33. P. 650.
12. *Полубаринов И. В.* // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34. С. 377.
13. *Pervushin V. N.* // Part. Nucl. 2003. V. 3. P. 348; hep-th/0109218;
    Ланцман Л. Д., Первушин В. Н. // ЯФ. 2003. Т. 66. С. 1418.
14. *Нестеренко В. В.* Об интерпретации нетеровских тождеств. Препринт ОИЯИ Р2-86-284. Дубна, 1986.
15. *Hilbert D.* Die Grundlagen der Physik // Nachrichten von der Kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1915. H. 3. S. 395–407; (пер.: *Гильберт Д.* Вариационные принципы механики / Ред., послесл. и прим. Л. С. Полака. М., 1959. С. 589).
16. *Hilbert D.* Die Grundlagen der Physik // Math. Annalen. 1924. B. 92. S. 1.
17. *Nöther E.* // Göttinger Nachrichten. Math.-Phys. Kl. 1918. H. 2. S. 235 (пер.: *Нетер Э.* Вариационные принципы механики / Ред., послесл. и прим. Л. С. Полака. М., 1959. С. 611).
18. *Боголюбов Н. Н. и др.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
19. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
20. *Фаддеев Л. Д., Попов В. Н.* // УФН. 1973. Т. 111. С. 427.
21. *Fock V. A.* // Zs. Phys. 1929. Bd. 57. S. 261.
22. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.
23. *Dirac P. A. M.* // Proc. Roy. Soc. A. 1958. V. 246. P. 333; Phys. Rev. 1959. V. 114. P. 924.
24. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* // Ibid. V. 116. P. 1322; 1960. V. 117. P. 1595; 1961. V. 122. P. 997.
25. *Зельманов А. Л.* // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. С. 822.
26. *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1964.
27. *Pawlowski M., Pervushin V. N.* // Intern. J. Mod. Phys. 2001. V. 16. P. 1715; hep-th/0006116.
28. *Барбашов Б. М., Первушин В. Н., Проскурин Д. В.* // ТМФ. 2002. Т. 132. С. 181.
29. *Бурланков Д. Е.* Тяготение и абсолютное пространство. Работы Нильса Бьерна (1865–1909) // УФН. 2004. Т. 174. С. 899.
30. *Poincare H.* // Bulletin des Sciences Mathem. (Paris). 1904. V. 28, Ser. 2. P. 302.
31. *Einstein A.* Die Relativitätstheorie // Naturforsch. gesellschaft, Vierteljahresschrift. Zurich, 1911. Bd. 56. S. 1 (пер.: *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр. М., 1965. Т. 1. Ст. 15. С. 175).
32. *Логунов А. А.* Лекции по теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1987.
33. *Voigt W.* // Nachr. Ges. Wiss. Goettingen. 1887. Bd. 41.
34. *Poincare H.* // C. R. Acad. Sci. (Paris). 1905. V. 140. P. 1504; Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1906. V. 21. P. 129 (пер.: *Лоренц Г., Пуанкаре А., Минковский Г.* Принцип относительности. М., 1935. С. 51–129).
35. *Einstein A.* // Ann. Phys. 1905. Bd. 17. S. 891 (пер.: *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр. М., 1965. Т. 1. Ст. 1. С. 7).

36. *Jordan P.* // Zs. Phys. 1935. Bd. 93. S. 464.

37. *Первушин В. Н.* // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 1073;
Pervushin V. N. // Riv. Nuovo Cim. 1985. V. 8, No. 10. P. 1;
Илиева Н., Первушин В. Н. // ЭЧАЯ. 1991. Т. 22. С. 573.

38. *Narlikar J. V.* Introduction to cosmology. Boston: Jones and Bartlett, 1983.

39. *Behnke D. et al.* // Phys. Lett. B. 2002. V. 530. P. 20; gr-qc/0102039;
Blaschke et al. // Proc. of the XVIII IAP Colloquium «On the Nature of Dark Energy», Paris, July 1–5, 2002; Report-no: MPG-VT-UR 240/03; astro-ph/0302001.

40. *Wheeler J. A.* Lectures in Mathematics and Physics. N. Y.: Benjamin, 1968;
DeWitt B. C. // Phys. Rev. 1967. V. 160. P. 1113.

41. *Misner C.* // Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1319.

42. *Ryan M. P., Jr., Shapley L. C.* Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton: Princeton University Press, 1975;
Ryan M. P. Hamiltonian Cosmology // Lecture Notes in Physics. No. 13. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1972.

43. *Pervushin V. N., Smirichinski V. I.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 6191.

44. *Bogolubov N. N.* // J. Phys. 1947. V. 11. P. 23.

45. *Levi-Civita T.* // Prace Mat.-Fiz. 1906. V. 17. P. 1;
Shanmugadhasan S. // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 677;
Gogilidze S. A., Khvedelidze A. M., Pervushin V. N. // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 1760; Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 2160; Part. Nucl. 1999. V. 30. P. 66.

46. *Gyngazov L. N. et al.* // Gen. Relativity and Gravitation. 1998. V. 37. P. 128.

47. *Pavlovski M. et al.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 444. P. 293.

48. *Barbashov B. M. et al.* CMBR anisotropy: theoretical approaches. Invited talk at the V Intern. Conf. on Non-Accelerator New Physics, Dubna, June 20–25, 2005; astro-ph/0507368;
Pervushin V. N., Zinchuk V. A. // Quantum cosmological origin of Universes. Invited talk at the XXXIX PNPI Winter School on Nuclear Particle Physics and XI St. Petersburg School on Theoretical Physics, St. Petersburg, Repino, Feb. 14–20, 2005; gr-qc/0504123;
Barbashov B. M. et al. // Phys. Lett. B. 2006. V. 633. P. 458; hep-th/0501242.

49. *Gogilidze S., Ilieva N., Pervushin V.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. P. 3531.

50. *Лифшиц Е. М.* // УФН. 1963. Т. 80. С. 411; Adv. of Phys. 1963. Т. 12. С. 208.

51. *Bardeen J. M.* // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 1882;
Kodama H., Sasaki M. // Prog. Theor. Phys. 1984. V. 78. P. 1.

52. *Mukhanov V. F., Feldman H. A., Brandenberger R. H.* // Phys. Rep. 1992. V. 215. P. 206.

53. *Riess A. G. et al.* // Astron. J. 1998. V. 116. P. 1009;
Perlmutter S. et al. // Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 565;
Riess A. G. et al. // Astrophys. J. 2001. V. 560. P. 49; astro-ph/0104455.

54. *Weinberg S.* First Three Minutes. A Modern View of the Origin of the Universe. N. Y.: Basic Books, Inc., Publishers, 1977 (пер.: *Вайнберг С.* Первые три минуты. Ижевск: РХД, 2000).

55. *Pervushin V. N. et al.* // Grav. & Cosmology. 2002. V. 8. P. 181.

56. *Blaschke D. B. et al.* // Phys. At. Nucl. 2004. V. 67. P. 1050; gr-qc/0103114.

57. *Gusev A. A. et al.* // Astrophysics. 2004. V. 47. P. 242; astro-ph/0301543.

58. *Einstein A., Strauss E.* // Rev. Mod. Phys. 1945. V. 17. P. 120.

59. *Gusev A. et al.* Проблемы калибровочных теорий / Под ред. Б. М. Барбашова, В. В. Нестеренко. Дубна, 2004. С. 127–130.

60. *Сахаров А. Д.* // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 5. С. 24;
Kuzmin V. A., Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E. // Phys. Lett. B. 1985. V. 155. P. 36;
Рубаков В. А., Шапошников М. Е. // УФН. 1996. Т. 166. С. 493.

61. *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1981.

62. *Karachentsev I. D., Chernin A. D., Teerikorpi P.* // Astrofizika. 2003. V. 46. P. 491.

63. *Чернин А. Д.* // УФН. 2001. Т. 171. С. 1153.

64. *de Vaucouleurs G. et al.* Third Catalog of Bright Galaxies. N. Y.: Springer-Verlag, 1991.

65. *Kogut A. et al.* // Astrophys. J. 1993. V. 419. P. 1.

66. *Tonry J. L. et al.* // Astrophys. J. 2000. V. 530. P. 625.

67. *Borisov A. B., Ogievetsky V. I.* // Teor. Mat. Fiz. 1974. V. 21. P. 329.

68. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.

69. *Линде А. Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.

70. *Lichnerowicz A.* // J. Math. Pures Appl. 1944. V. 23. P. 37.

71. *York J. W., Jr.* // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26. P. 1656.

72. *York J. W., Jr.* // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 456.

73. *Bajan K. et al.* // Spacetime & Substance. 2003. V. 4. P. 225.

74. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.

75. *Gott R. J. et al.* astro-ph/0310571.

76. *Penrose R.* Relativity, Groups and Topology. London: Gordon and Breach, 1964;
Chernikov N., Tagirov E. // Ann. Inst. Henri Poincarè. 1968. V. 9. P. 109.

77. *Pawłowski M., Rączka R.* // Found. Phys. 1994. V. 24. P. 1305;
Pawłowski M., Rączka R. hep-ph/9503269, hep-ph/9503270.