*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2006. Т. 37. ВЫП. 3*

УДК 539.1.01

# ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ: ПРЕДСКАЗАНИЕ ТЕОРИИ ИЛИ ФАНТАЗИЯ?

*В. В. Киселев, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили*

Государственный научный центр «Институт физики высоких энергий», Протвино, Россия

В статье приводятся аргументы в пользу того, что черные дыры не являются строгим следствием общей теории относительности.

We argue for the fact that black holes do not represent a strict consequence of general relativity.

В теории относительности Эйнштейна гравитация описывается метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ псевдориманова пространства-времени. Интервал такого пространства имеет общий вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \text{ с сигнатурой } (-2)\,. \tag{1}$$

Выделим в интервале (1) времениподобную и пространственноподобную части:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\ell^2\,, \tag{2}$$

здесь

$$d\tau = \frac{1}{c}\frac{g_{0\nu} dx^\nu}{\sqrt{g_{00}}} \tag{3}$$

— физическое время, а выражение

$$d\ell^2 = \varkappa_{ik} dx^i dx^k, \quad \varkappa_{ik} = \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}, \tag{4}$$

является квадратом пространственного расстояния между бесконечно близкими точками. Метрические коэффициенты $g_{\mu\nu}$ должны удовлетворять известным неравенствам Гильберта [1, 2].

А. Эйнштейн особо отмечал [3]: *«Поэтому не остается ничего другого, как признать все мыслимые* координатные системы принципиально равноправными для описания природы»*. Именно этому положению А. Эйнштейна мы далее и будем следовать.

---

*«Мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности».

Движение пробных тел осуществляется по времениподобным геодезическим линиям. В псевдоримановом пространстве-времени времениподобная геодезическая линия по определению ни в одной точке не может быть изотропной. Из основного положения теории — псевдоримановой геометрии пространства-времени — следует, что для физического решения уравнений гравитации на любой времениподобной геодезической линии должно выполняться строгое неравенство

$$v^2 = \left(\frac{d\ell}{d\tau}\right)^2 < 1\,. \tag{5}$$

Оно означает, что физическая скорость ни в одной точке (включая и бесконечно удаленные) времениподобной геодезической линии не может быть равной скорости света. При равенстве $v^2 = 1$ интервал становится изотропным, т. е. обращается в нуль. *В физическом решении* уравнений гравитации времениподобный интервал не допускает, чтобы физическая скорость была равна скорости света. Неравенство, соответствующее (5), должно выполняться в любой системе координат. Если оно в какой-то системе координат нарушается для некоторой времениподобной геодезической линии даже в точке, то это означает, что решение уравнений гравитации вступает в противоречие с исходными принципами теории. Такое решение имеет смысл только в области, где условие (5) выполняется.

Обратимся теперь к решению Шварцшильда. В январе 1916 г. К. Шварцшильд нашел точное сферически-симметричное решение уравнений гравитации

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2 - \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,, \tag{6}$$

здесь

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}\,. \tag{7}$$

Это решение, наряду с особенностью в точке $r = 0$, обладает также особенностью в точке $r = \alpha$. Именно эта особенность и получила название «особенность Шварцшильда» или «катастрофа Адамара».

Рассматривая в метрике Шварцшильда радиальное движение пробного тела по времениподобной геодезической линии, Д. Гильберт в 1917 г. получил уравнение [1]

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0 \tag{8}$$

и нашел интеграл движения

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3, \tag{9}$$

здесь $A$ — постоянная, определяемая начальными условиями. На основании (5) и (6) физическая скорость пробного тела равна

$$v^2 = \frac{r^2}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \tag{10}$$

Подставляя в это выражение равенство (9), получаем

$$v^2 = 1 + A\frac{r-\alpha}{r}. \tag{11}$$

Для времениподобной геодезической линии постоянная $A$ может принимать значения только в интервале

$$-\frac{r_0}{r_0-\alpha} \leqslant A < 0, \tag{12}$$

где $r_0 > \alpha$ или $r_0 < 0$, а значение $A = 0$ соответствует скорости света.

Из соотношения (11) видно, что на радиальной времениподобной геодезической линии тем не менее в точке $r = \alpha$ физическая скорость равна скорости света. Таким образом, решение Шварцшильда в точке $r = \alpha$ нарушает неравенство (5), обращая *времениподобную* линию в *изотропную*. Но именно это и несовместимо с ОТО. Поэтому такое решение имеет смысл только в области $r > \alpha$.

Аналогичное можно установить, если с помощью преобразования

$$t = \tau + 2\sqrt{\alpha r} + \alpha \ln\left|\frac{\sqrt{r}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{r}+\sqrt{\alpha}}\right| \tag{13}$$

перейти к интервалу в форме Пенлеве [4]

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)d\tau^2 + 2\sqrt{\frac{\alpha}{r}}drd\tau - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,. \tag{14}$$

Физическая скорость в этом случае равна

$$v^2 = \frac{r^2\left(\dfrac{dr}{d\tau}\right)^2}{\left[(r-\alpha) + \sqrt{\alpha r}\dfrac{dr}{d\tau}\right]^2}\,, \tag{15}$$

например, в случае $A = -1$ для радиальных геодезических движений

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\frac{\alpha}{r}}, \quad \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right). \tag{16}$$

Физическая скорость (15) равна
$$v^2 = \frac{\alpha}{r}\,. \tag{17}$$
Она также равна скорости света в точке $r = \alpha$, а следовательно, решение и в этой форме противоречит исходному фундаментальному положению теории в форме (5).

А. Эйнштейн, обсуждая сингулярность Шварцшильда, в 1939 г. в статье [5] писал: *«Основным результатом проведенного исследования является четкое понимание того, что в реальном мире отсутствуют "шварцшильдовские сингулярности". Хотя приведенная теория рассматривает только такие скопления, в которых частицы движутся по круговым траекториям, вряд ли следует сомневаться в том, что рассмотрение и самого общего случая приведет к тем же результатам. Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы, образующие скопления, достигнут скорости света»*.

Именно в последнем мы убедились, получив для физической скорости формулы (11) и (17). По мнению А. Эйнштейна, такая особенность в вакууме недопустима, поскольку она противоречит ОТО. Но если она тем не менее возникает, то само решение имеет ограниченный смысл. Оно справедливо только в области $r > \alpha$. Вышеприведенное предостережение А. Эйнштейна оставалось без должного внимания и анализа.

Весь дальнейший анализ решения Шварцшильда пошел по пути поиска таких координат, в которых метрические коэффициенты регулярны в точке $r = \alpha$. С помощью сингулярных преобразований это было осуществлено. Так, например, совершая преобразования к новым переменным $\tau, R$ по формулам [2, 6]
$$\tau = t + \int \frac{\sqrt{r}dr}{r-1}, \quad R = t + \int \frac{\sqrt{r}\,r}{r-1}dr \tag{18}$$
(здесь мы выбрали *систему единиц* $(2GM)/c^2 = 1$), интервал (6) преобразуется к виду
$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{1}{r}(dR)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,, \tag{19}$$
где
$$r = \left[\frac{3}{2}(R-\tau)\right]^{2/3}. \tag{20}$$
В координатах $\tau, R$ особенность метрических коэффициентов в точке $r = 1$ отсутствует. Особенность имеется только в точке $r = 0$.

Для интервала (19) физическая скорость вычисляется по формуле
$$v^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2. \tag{21}$$

На основе (9) выберем такое радиальное движение $A = -1$, когда скорость на бесконечности равна нулю:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r}}\Big(\frac{r-1}{r}\Big)\,. \tag{22}$$

С помощью (18) и (22) находим

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r}{r+1}\,.$$

Используя это равенство и (22), получаем

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{r}}\Big(\frac{r-1}{r+1}\Big)\,. \tag{23}$$

На основании этого соотношения и (20) находим

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{2r}{r+1}\,. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (21), получаем для интервала (19) физическую скорость

$$v^2 = \frac{4r}{(r+1)^2}\,. \tag{25}$$

Отсюда мы видим, что и в переменных $\tau, R$ физическая скорость в точке $r = 1$ равна скорости света, т. е. времениподобная геодезическая линия в этой точке становится изотропной. С помощью преобразований (19) особенность Шварцшильда в точке $r = 1$ устраняется в геодезическом радиальном движении

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\Big(\frac{r-1}{r}\Big)\,,$$

но она остается еще на геодезической линии

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r}}\Big(\frac{r-1}{r}\Big)\,.$$

Совершенно очевидно, что с помощью сингулярных преобразований она может быть также устранена из точки $r = 1$, но она тем не менее неизбежно возникает в другой точке.

Как мы видим, хотя в данном случае все метрические коэффициенты в (19) вне источника регулярны, тем не менее неравенство (5) нарушается на некоторой геодезической линии. Все это свидетельствует о том, что шварцшильдовское решение имеет в ОТО ограниченный смысл, поэтому его продолжение в другие области носит формально математический характер. Поэтому возникшие в литературе около пятидесяти лет назад «черные дыры» являются плодом чистой фантазии, поскольку они не имеют под собой теоретической основы.

Обратимся теперь к сингулярным преобразованиям Крускала. В переменных Крускала [7]:

$$U = \sqrt{r-1}\,\mathrm{e}^{r/2}\mathrm{ch}\frac{t}{2}\,,\qquad V = \sqrt{r-1}\,\mathrm{e}^{r/2}\mathrm{sh}\frac{t}{2}\,. \tag{26}$$

Интервал (6) в случае радиальных движений принимает вид

$$ds^2 = \frac{4}{r}\,\mathrm{e}^{-r}(dV^2 - dU^2)\,. \tag{27}$$

В интервале Шварцшильда $g_{00}$-компонента равна

$$g_{00} = \frac{r-1}{r}\,,$$

отсюда следует, что она обращается в нуль при $r = 1$, тогда как в интервале Крускала (27) $g_{00}$-компонента равна

$$g_{00} = \frac{4}{r}\,\mathrm{e}^{-r}$$

и обращается в нуль при $r \to \infty$. Для радиального движения по времениподобной геодезической линии

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\frac{r-1}{r}\right). \tag{28}$$

Физическая скорость в переменных $U$ и $V$ равна

$$\frac{dU}{dV} = \frac{V\sqrt{r}+U}{U\sqrt{r}+V}\,. \tag{29}$$

Согласно (28) после интегрирования получим

$$t = \beta(r) + \ln\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}, \quad \beta(r) = \frac{2}{3}r^{3/2} + 2\sqrt{r}\,. \tag{30}$$

На основании (26) и (30) находим

$$\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^\beta\left(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right) = \frac{U+V}{U-V}\,, \tag{31}$$

отсюда получим

$$\frac{V}{U} = \frac{\mathrm{e}^{\beta}(\sqrt{r}-1)-(\sqrt{r}+1)}{\mathrm{e}^{\beta}(\sqrt{r}-1)+(\sqrt{r}+1)}\,. \tag{32}$$

Подставляя выражение (32) в (29), находим

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\mathrm{e}^{\beta(r)}-1}{\mathrm{e}^{\beta(r)}+1}\,. \tag{33}$$

Для другого радиального геодезического движения

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\Big(\frac{r-1}{r}\Big)\,. \tag{34}$$

Тем же путем можно получить следующее выражение для физической скорости:

$$\frac{dU}{dV} = -\frac{\mathrm{e}^{\beta(r)}-1}{\mathrm{e}^{\beta(r)}+1}\,. \tag{35}$$

Из формул (33) и (35) следует, что при $r \to \infty$ физическая скорость на геодезической времениподобной линии становится равной скорости света, а *времениподобная* геодезическая линия становится *изотропной*.

Шварцшильдовская особенность метрических коэффициентов на сфере $r=1$ с помощью преобразований Крускала формально устранена, но тем не менее решение уравнений Гильберта–Эйнштейна не стало физическим, поскольку согласно ему физическая скорость на бесконечности стала равной скорости света, что недопустимо. В переменных Шварцшильда физическая скорость на бесконечности по переменной $r$ всегда меньше скорости света, тогда как при $r=1$ она равна скорости света. В переменных Крускала ситуация несколько иная, физическая скорость на бесконечности по переменной $r$ равна скорости света, тогда как при $r=1$ она всегда меньше скорости света. Наличие особенности Шварцшильда *несовместимо* с ОТО.

Таким образом, *точное* сферически-симметричное решение уравнений гравитации как в переменных Шварцшильда, так и в переменных Крускала *физически противоречиво* из-за наличия *особенности* Шварцшильда, поскольку оно нарушает условие (5). Но именно на этом решении уравнений гравитации и основывается вся *концепция* «черных дыр». Иначе говоря, наличие *особенности* Шварцшильда привело к «черным дырам». С другой стороны, наличие этой особенности противоречит ОТО. Поэтому нельзя *считать* «черные дыры» *следствиями* ОТО.

Из вышеприведенного анализа также следует, что особенность Шварцшильда нельзя устранить преобразованиями координат, поскольку она связана с обращением в нуль интервала $ds^2$. Она может быть удалена из метрических коэффициентов, но не из интервала. Следует особо подчеркнуть, что устранить сингулярности метрических коэффициентов возможно, лишь вводя координатные системы, функции перехода к которым сами содержат сингулярности. При этом зачастую полагают, что гладкость якобиана перехода является вполне достаточным условием проведения преобразования, что, с нашей точки зрения, представляется недопустимым, так как переход от одного пространства к другому подразумевает покомпонентную гладкость и обратимость координатных функций. Во всех приведенных нами выше примерах это общее положение, очевидно, прослеживается на вполне конкретных системах координат: устранение сингулярностей метрических коэффициентов достигается сингулярной заменой переменных. Но даже этими преобразованиями не удается избежать физических противоречий описания геодезических: сингулярности проявляют себя в каждой координатной системе.

Итак, мы видим, что концепция «черных дыр» основывается на наличии шварцшильдовской особенности, которая сама противоречит основе ОТО — псевдоримановой геометрии пространства-времени.

В заключение авторы выражают благодарность С. С. Герштейну, В. А. Петрову и Н. Е. Тюрину за ценные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hilbert D.* // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse. 1916. Bd. 23.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., 2001. С. 415.
3. *Эйнштейн А.* Основы общей теории относительности // Собр. науч. тр. М., 1965. Т. I. С. 452–504.
4. *Painlevé P.* La gravitation dans la Mécanique de Newton et dans la Mécanique d'Einstein // Comptes Rendus. Académie des Sciences. 1921. V. 173, No. 20. P. 873–887 (пер.: *Пенлеве П.* Гравитация в механике Ньютона и в механике Эйнштейна // Гравитация. 2001. Т. 5, вып. 1. С. 16–27).
5. *Эйнштейн А.* О стационарных системах, состоящих из многих гравитирующих частиц и обладающих сферической симметрией // Собр. науч. тр. М., 1966. Т. II. С. 514–531;
*Einstein A.* On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 922–936.
6. *Рылов Ю. А.* Об особенности в решении Шварцшильда для уравнений тяготения // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 1755–1757.
7. *Kruskal M. D.* Maximal extension of Schwarzschild metric // Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 1743–1745.