ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2006. Т. 37. ВЫП. 5

УДК 539.1.01

О ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТРЕХГРАВИТОННОЙ ВЕРШИНЕ

*А. И. Никишов**

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

*E-mail: nikishov@lpi.ru

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2006. Т. 37. ВЫП. 5

УДК 539.1.01

О ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТРЕХГРАВИТОННОЙ ВЕРШИНЕ

*А. И. Никишов**

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

В общей теории относительности гравитон в трехгравитонной вершине взаимодействует с тензором, не являющимся тензором энергии-импульса гравитационного поля. Мы рассматриваем возможность того, что гравитон взаимодействует с вполне определенным тензором энергии-импульса гравитационного поля, найденным нами ранее в G^2-приближении. Этот тензор в калибровке, в которой нефизические степени свободы гравитационного поля не дают вклада, замечателен тем, что приводит к положительной плотности гравитационной энергии ньютоновского центра подобно тому, как это делает электромагнитный тензор энергии-импульса для кулоновского центра. Мы показываем, что принятая нами трехгравитонная вершина не приводит к противоречию с прецессией перигелия Меркурия. В используемом S-матричном подходе внешнее гравитационное поле является лишь вспомогательным понятием, подобным внешнему полю в квантовой электродинамике. S-матричный метод с принятой вершиной приводит к гравитационному полю, которое нельзя найти из самосогласованного гравитационного уравнения.

In General Relativity Theory the graviton interacts in 3-graviton vertex with a tensor which is not an energy-momentum tensor of gravitational field. We consider the possibility that the graviton interacts with some definite gravitational energy-momentum tensor found by us earlier in G^2-approximation. This tensor in a gauge, which excludes nonphysical degrees of freedom, is remarkable in that it gives positive gravitational energy density for the Newtonian center in the same manner as the electromagnetic energy-momentum tensor does for the Coulomb center. We show that the assumed 3-graviton vertex does not lead to contradiction with precession of Mercury perihelion. In the S-matrix approach used here the external gravitational field has only a subsidiary role similar to that of the external field in quantum electrodynamics. This approach with the assumed vertex leads to the gravitational field which cannot be obtained from consistent gravitational equation.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-полевой подход к гравитации приводит к дополнительному пониманию ряда проблем как в рамках общей теории относительности, так и вне нее. Так, этот подход помогает найти компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ привилегированной системы координат, в формирование которой не дают вклада нефизические степени свободы поля, искажающие свойства правильно выбранного тензора энергии-импульса гравитационного поля. С общей точки

*E-mail: nikishov@lpi.ru

зрения, также желательно иметь такую систему координат, которая отражает свойства метрики, вызванные гравитацией, но не содержит элементов, связанных с возможностью произвольного выбора системы координат. В общей теории относительности решение Шварцшильда может быть представлено в различных эквивалентных видах: стандартном, изотропном, гармоническом и других. (Обычно решение Шварцшильда приводится в стандартной по терминологии Вейнберга [1] форме.) Все три первых вида переходят в одну (для определенности) декартову систему после выключения поля. При включенном слабом поле гармоническая и изотропная системы свидетельствуют о том, что гравитационное поле сохраняет изотропию пространственных масштабов в рассматриваемой системе координат. Наоборот, стандартная система Шварцшильда наводит на мысль, что такой изотропии нет [2, 3].

В общей теории относительности вопрос о связи координат в $g_{\mu\nu}$ с координатами в л. с. к. может быть решен лишь после выполнения (в принципе, возможной) сложной процедуры (см. § 23.3 в [4]). Теоретико-полевой подход открывает здесь дополнительные возможности, в его рамках предпочтение отдается изотропии [5]. Действительно, наложение калибровочного условия Гильберта [5], или условия гармоничности [6] (в слабом поле эти условия совпадают), приводит к изотропии. В формировании же стандартной системы принимают участие нефизические степени свободы. Атом в изотропной метрике рассмотрен Тиррингом [5], он имеет ожидаемые свойства. В трактуемой таким же образом стандартной системе атом не изотропен.

Тирринг показал, что вычисленный (координатный) радиус атома в поле сферического тела уменьшен в линейном приближении по G в $(1+\phi)$ раз; ϕ — ньютоновский потенциал в месте расположения атома. Тогда радиальную координатную длину в этом поле можно измерять числом атомов, которые могут уместиться на этой длине и которые имеют вычисленный радиус. Физическая же радиальная длина определяется тем же числом атомов, но с нормальным радиусом, который они имели вне гравитационного поля. Действительно, уменьшенный в $(1+\phi)$ раз координатный радиус атома восстанавливается до нормального значения при умножении на $[g_{rr}(r)]^{1/2} \approx (1-\phi)$. Отсюда следует, что атомам на кольце радиуса R вокруг сферического тела должно быть тесно: измеримая длина окружности радиуса R меньше $2\pi R$, как это следует из свойств решения уравнений Эйнштейна для сферически-симметричного тела.

В моей предыдущей работе [7] в низшем нелинейном приближении рассмотрено несколько тензоров энергии-импульса гравитационного поля. Только один из них, а именно MTW-тензор (см. ниже), дает положительную плотность гравитационной энергии ньютоновского центра. Калибровка гравитационного поля (условие Гильберта в случае линейного приближения), в которой это условие имеет место, является физической (исключает продольные гравитоны), она определяет привилегированную систему отсчета. В любой другой системе отсчета тензор энергии-импульса должен получаться посредством преобразования из привилегированной. Если гравитационная плотность энергии всегда положительна (требование, представляющееся естественным), тогда черные дыры, по-видимому, невозможны [7, 8]. Как и в общем случае, MTW-тензор состоит из двух частей: чисто полевой части, отличной от нуля там, где имеется гравитационное поле, и локальной части, отличной от нуля только там, где находятся частицы.

В работах [5, 9] показано, что только прецессия перигелия планеты требует привлечения нелинейного приближения. Остальные наблюдаемые эффекты объясняются линейным приближением гравитационной теории. По этой причине в данной статье, как и в [7], основное внимание при рассмотрении альтернативного подхода к гравитации уделено прецессии перигелия планеты. Необходимая для этого поправка к ньютоновскому потенциалу искалась в [7] в чисто полевой части гравитационного тензора энергии-импульса. Это вынудило меня использовать в 3-гравитонной вершине полусумму MTW-тензора и тензора Тирринга, в которой локальная часть тензора отсутствует в рассматриваемом приближении. В этой версии теории мне не нравилось то, что полусумма $\frac{1}{2}\left[T_{\mu\nu}^{\mathrm{MTW}}+T_{\mu\nu}^{\mathrm{Thir}}\right]$ давала отрицательную плотность гравитационной энергии ньютоновского центра.

В этой статье я показываю, что нужная поправка к ньютоновскому потенциалу получается при учете как чисто гравитационного взаимодействия, определяемого нелокальными членами MTW-тензора, так и локального взаимодействия, содержащегося в MTW-тензоре и в тензоре энергии-импульса частиц, находящихся в гравитационном поле. Это полное взаимодействие входит в феноменологическую трехгравитонную вершину. Ничего, кроме вершины и пропагатора, в S-матричном методе не требуется. Нужно просто рисовать диаграммы Фейнмана и сопоставлять вершинам и пропагаторам соответствующие выражения (ср. с [10, 11]). Эволюция системы и движение частиц определяются этим методом без использования гравитационного уравнения. Оказывается, что находимое с помощью этого подхода гравитационное поле не может быть получено из самосогласованного гравитационного уравнения.

Эта статья является попыткой понять, что препятствует гравитону в 3-гравитонной вершине взаимодействовать с тензором энергии-импульса гравитационного поля. Априори можно думать о двух возможных причинах:

1) этот тензор не однозначен;

2) он не калибровочно-инвариантен.

Что касается второй причины, то с ней можно бороться, исключая нефизические степени свободы гравитационного поля. Относительно первой причины хочется спросить: существует ли хоть один тензор указанного вида, не ведущий к нежелательным следствиям? Проведенное рассмотрение показывает, что ответ, по-видимому, положительный. По этой причине желательно более глубокое рассмотрение этого вопроса.

В разд. 1 введены обозначения для «строительных блоков» тензора энергии-импульса. Это облегчает сравнение различных тензоров и различных теорий. В разд. 2 получен эффективный тензор энергии-импульса, входящий в трехгравитонную вершину. В разд. 3 найден вклад трехгравитонной вершины в метрику (в том смысле, как она определена в этом подходе) сферически-симметричного тела и показано, что в ней содержится поправка к ньютоновскому потенциалу, необходимая для объяснения прецессии перигелия Меркурия. Относительно прецессии перигелия в этом контексте см. [7] и [9]. В разд. 4 дано преобразование вклада от диаграмм одного типа во вклады от диаграмм другого типа.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Мы используем

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad h = h^{\alpha}_{\alpha}, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1). \tag{1}$$

Если не оговорено иначе, латинские и греческие индексы пробегают значения от 0 до 3. Поскольку приходится сравнивать различные гравитационные тензоры, полезно ввести специальные обозначения для строительных блоков этих тензоров. Мы определяем:

$$\begin{gathered}
\overset{1}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta,\gamma} h^{\gamma\beta,\alpha}; \quad \overset{2}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta,\gamma} h^{\alpha\beta,\gamma}; \quad \overset{3}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{,\rho} h^{\rho\sigma}{}_{,\sigma}\,; \\
\overset{4}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{,\rho} h^{,\rho}; \quad \overset{5}{\tau}{}^{jk} = h_{\alpha\beta}{}^{,j} h^{\alpha\beta,k}; \quad \overset{6}{\tau}{}^{jk} = h^{j\alpha,\beta} h^{k}{}_{\beta,\alpha}; \\
\overset{7}{\tau}{}^{jk} = h^{j\alpha,\beta} h^{k}{}_{\alpha,\beta}; \quad \overset{8}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,k} + h^{k\alpha,j}) h_{,\alpha}; \quad \overset{9}{\tau}{}^{jk} = h^{jk,\sigma} h_{,\sigma}; \\
\overset{10}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\sigma}{}_{,\sigma} h^{,k} + h^{k\sigma}{}_{,\sigma} h^{,j}); \quad \overset{11}{\tau}{}^{jk} = h^{,j} h^{,k}; \quad \overset{12}{\tau}{}^{jk} = h^{jk,\alpha} h_{\alpha\sigma}{}^{,\sigma}; \\
\overset{13}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}{}^{,k} + h^{k\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}{}^{,j}); \quad \overset{14}{\tau}{}^{jk} = h^{j\sigma}{}_{,\sigma} h^{k\alpha}{}_{,\alpha}; \\
\overset{15}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,k} + h^{k\alpha,j}) h_{\alpha\sigma}{}^{,\sigma}; \quad \overset{16}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta}{}^{,\beta} h^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma}; \quad h_{,i} = \frac{\partial h}{\partial x^{i}}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Аналогично для членов со вторыми производными:

$$
\begin{gathered}
\overset{a}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{,\sigma}{}^{\sigma} h; \quad \overset{b}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} h; \quad \overset{c}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h^{,\alpha\beta} h_{\alpha\beta}; \\
\overset{d}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{\sigma} h_{\alpha\beta}; \quad \overset{e}{\tau}{}^{jk} = \eta^{jk} h^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma}{}^{\beta} h_{\alpha\beta}; \quad \overset{f}{\tau}{}^{jk} = h^{,jk} h; \\
\overset{g}{\tau}{}^{jk} = h^{jk,\sigma}{}_{\sigma} h; \quad \overset{h}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\sigma,k}{}_{\sigma} + h^{k\sigma,j}{}_{\sigma}) h; \quad \overset{i}{\tau}{}^{jk} = h^{jk,\alpha\beta} h_{\alpha\beta}; \\
\overset{j}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,k\beta} + h^{k\alpha,j\beta}) h_{\alpha\beta}; \quad \overset{k}{\tau}{}^{jk} = h^{\alpha\beta,jk} h_{\alpha\beta}; \\
\overset{l}{\tau}{}^{jk} = h^{jk} h_{,\sigma}{}^{\sigma}; \qquad \overset{m}{\tau}{}^{jk} = h^{jk} h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta}; \\
\overset{n}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{,j\alpha} h_{\alpha}{}^{k} + h^{,k\alpha} h_{\alpha}{}^{j}); \quad \overset{o}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\sigma,\alpha}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{k} + h^{k\sigma,\alpha}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{j}); \\
\overset{p}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{j\alpha,\sigma}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{k} + h^{k\alpha,\sigma}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{j}); \quad \overset{q}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}(h^{\alpha\sigma,j}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{k} + h^{\alpha\sigma,k}{}_{\sigma} h_{\alpha}{}^{j}).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

(Т. е. в членах со вторыми производными латинские буквы над τ используются для нумерации блоков вместо цифр.)

Тензоры $\overset{1}{\mathcal{T}}{}^{jk}, \ldots, \overset{16}{\mathcal{T}}{}^{jk}$ и $\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{jk}, \ldots, \overset{q}{\mathcal{T}}{}^{jk}$ получаются из (2) и (3) в результате замены $h_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu}$. Так, $\overset{1}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \eta^{jk} \bar{h}_{\alpha\beta,\gamma} \bar{h}^{\gamma\beta,\alpha}$ и т. д. Имеют место соотношения, следующие из определения $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$
\begin{gathered}
\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{a}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{b}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \overset{b}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{c}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \overset{c}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{d}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{d}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{e}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{b}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{c}{\tau}{}^{jk} + \overset{e}{\tau}{}^{jk}; \; \overset{f}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{f}{\tau}{}^{jk}; \; \overset{g}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \overset{g}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{h}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2} \overset{f}{\tau}{}^{jk} - \overset{h}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{i}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{c}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{g}{\tau}{}^{jk} + \overset{i}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{j}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4} \overset{f}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{h}{\tau}{}^{jk} + \overset{j}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{n}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{k}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{k}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{l}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \overset{l}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{m}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{b}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{l}{\tau}{}^{jk} + \overset{m}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{n}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2} \overset{f}{\tau}{}^{jk} - \overset{n}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{o}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4} \overset{f}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{h}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{n}{\tau}{}^{jk} + \overset{o}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{p}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4} \overset{a}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{g}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{l}{\tau}{}^{jk} + \overset{p}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{q}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4} \overset{f}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{h}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2} \overset{n}{\tau}{}^{jk} + \overset{q}{\tau}{}^{jk},
\end{gathered}
\tag{4}
$$

а также

$$
\begin{gathered}
\overset{1}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{1}{\tau}{}^{jk} - \overset{3}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{4}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{2}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{2}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{3}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\overset{3}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{2}\overset{4}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{4}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{4}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{5}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{5}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{6}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{6}{\tau}{}^{jk} - \overset{8}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{11}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{7}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{4}\overset{4}{\tau}{}^{jk} + \overset{7}{\tau}{}^{jk} - \overset{9}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{8}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\overset{8}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{2}\overset{11}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{9}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \frac{1}{2}\overset{4}{\tau}{}^{jk} - \overset{9}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{10}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\overset{10}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{2}\overset{11}{\tau}{}^{jk}; \quad \overset{11}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{11}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{12}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\frac{1}{2}\overset{3}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{4}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2}\overset{9}{\tau}{}^{jk} + \overset{12}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{13}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\frac{1}{2}\overset{8}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2}\overset{10}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{11}{\tau}{}^{jk} + \overset{13}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{14}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\overset{10}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{11}{\tau}{}^{jk} + \overset{14}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{15}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\frac{1}{2}\overset{8}{\tau}{}^{jk} - \frac{1}{2}\overset{10}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{11}{\tau}{}^{jk} + \overset{15}{\tau}{}^{jk}; \\
\overset{16}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -\overset{3}{\tau}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{4}{\tau}{}^{jk} + \overset{16}{\tau}{}^{jk}.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Обратные соотношения получаются из (4) и (5) с помощью замены $\mathcal{T} \leftrightarrow \tau$. Например,

$$
\overset{1}{\tau}{}^{jk} = \overset{1}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{3}{\mathcal{T}}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{4}{\mathcal{T}}{}^{jk}.
$$

Далее мы введем ньютоновский потенциал ϕ. Для одного ньютоновского центра $\phi = -\dfrac{GM}{r}$, для нескольких центров

$$
\phi = -G\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \tag{6}
$$

В линейном приближении в калибровке Гильберта $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ гравитационное поле этих центров дается следующими выражениями [5]:

$$
\begin{gathered}
\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = -4\phi\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}, \quad h^{(1)}_{\mu\nu} = -2\phi\delta_{\mu\nu}, \quad h^{(1)} \equiv h^{(1)\sigma}_{\sigma} = -4\phi = -\bar{h}^{(1)}, \\
\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Такие же выражения получаются с использованием эвристического метода в [9]. В рассматриваемом приближении (7) фиксирует систему отсчета, и мы считаем эту систему привилегированной. Решение Шварцшильда в этом приближении согласуется с (7) в случаях изотропной и гармонической метрик.

В стандартной системе для решения Шварцшильда вместо (7) имеем

$$
\begin{gathered}
h_{00}^{(1)\mathrm{st}} = h_{00}^{(1)} = -2\phi, \quad h_{ij}^{(1)\mathrm{st}} = 2GM\frac{x_i x_j}{r^3} = h_{ij}^{(1)} - GM(\Lambda_{i,j} + \Lambda_{j,i}), \\
\Lambda_i = \frac{x_i}{r}, \quad i,j = 1,2,3.
\end{gathered} \tag{7a}
$$

Выражение $(\Lambda_{i,j} + \Lambda_{j,i})$ при произвольной функции Λ является решением линеаризованного уравнения Эйнштейна с правой частью, равной нулю. Другими словами, $(\Lambda_{i,j} + \Lambda_{j,i})$ не определяется тензором энергии-импульса материи. Естественно предположить, что в привилегированной системе отсчета нет членов такого типа.

Используя (7), мы получим $\mathcal{T}^{jk}$ для ньютоновских центров:

$$
\begin{gathered}
\overset{1}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{3}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{6}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{8}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{10}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{12}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{13}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{14}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{15}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{16}{\mathcal{T}}{}^{jk} = 0; \\
\overset{2}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{4}{\mathcal{T}}{}^{jk} = 16\eta^{jk}(\nabla\phi)^2; \quad \overset{5}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{11}{\mathcal{T}}{}^{jk} = 16\phi_{,j}\phi_{,k}; \\
\overset{7}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{9}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -16(\nabla\phi)^2\delta_{j0}\delta_{k0}; \quad \overset{a}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{d}{\mathcal{T}}{}^{jk} = 16\eta^{jk}\phi\phi_{,ii}; \\
\overset{g}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{l}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{p}{\mathcal{T}}{}^{jk} = -16\phi\phi_{,ii}\delta_{j0}\delta_{k0}; \quad \overset{f}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{k}{\mathcal{T}}{}^{jk} = 16\phi\phi_{,jk}; \\
\overset{b}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{c}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{e}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{h}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{i}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{j}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{m}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{n}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{o}{\mathcal{T}}{}^{jk} = \overset{q}{\mathcal{T}}{}^{jk} = 0,
\end{gathered} \tag{8}
$$

и для τ^{jk}:

$$
\begin{gathered}
\overset{1}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{4}\overset{2}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}\overset{3}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{4}\overset{4}{\tau}{}^{jk} = \overset{7}{\tau}{}^{jk} = \overset{16}{\tau}{}^{jk} = 4\eta^{jk}(\nabla\phi)^2; \\
\overset{5}{\tau}{}^{jk} = 4\,\overset{6}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{8}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{10}{\tau}{}^{jk} = \overset{11}{\tau}{}^{jk} = 4\,\overset{13}{\tau}{}^{jk} = 4\,\overset{14}{\tau}{}^{jk} = 4\,\overset{15}{\tau}{}^{jk} = 16\phi_{,j}\phi_{,k}; \\
\overset{9}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{12}{\tau}{}^{jk} = 8\delta_{jk}(\nabla\phi)^2; \\
\frac{1}{2}\overset{a}{\tau}{}^{jk} = \overset{b}{\tau}{}^{jk} = \overset{c}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}\overset{d}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{e}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{p}{\tau}{}^{jk} = 8\eta^{jk}\phi\phi_{,ii}; \\
\overset{g}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{i}{\tau}{}^{jk} = \overset{l}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{m}{\tau}{}^{jk} = 8\delta_{jk}\phi\phi_{,ii}; \\
\frac{1}{2}\overset{f}{\tau}{}^{jk} = \overset{h}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{j}{\tau}{}^{jk} = \frac{1}{2}\overset{k}{\tau}{}^{jk} = \overset{n}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{o}{\tau}{}^{jk} = 2\,\overset{q}{\tau}{}^{jk} = 8\phi\phi_{,jk},
\end{gathered} \tag{9}
$$

$j,k = 0,1,2,3$. В (8) и (9) предполагается, что $\eta_{jk} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1)$. В случае $\eta_{jk} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ следует заменить η_{jk} на $-\eta_{jk}$.

2. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

В моей предыдущей работе [7] в низшем нелинейном (т. е. h^2) приближении рассмотрено несколько гравитационных тензоров энергии-импульса. Один из них, соответствующий общей теории относительности, получается из лагранжиана

$$\overset{\mathrm{Thir}}{L} = \frac{1}{32\pi G}\left[-\frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta,\gamma}\bar{h}^{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{4}\bar{h}_{,\alpha}\bar{h}^{,\alpha} + \bar{h}_{\alpha\beta,\lambda}\bar{h}^{\lambda\beta,\alpha}\right]. \tag{10}$$

Другой тензор получается из выражения

$$\overset{\mathrm{MTW}}{L} = \frac{1}{32\pi G}\left[-\frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta,\gamma}\bar{h}^{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{4}\bar{h}_{,\alpha}\bar{h}^{,\alpha} + \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha}\bar{h}^{\beta\lambda}{}_{,\lambda}\right]. \tag{11}$$

Лагранжиан (11) есть уравнение (7.8b) из книги Мизнера, Торна и Уилера [4]; ранее он использовался Фейнманом (см. уравнения (3.6.1) и (3.6.5) в [12]). Приведенные лагранжианы различаются на полные производные:

$$\overset{\mathrm{Thir}}{L} = \overset{\mathrm{MTW}}{L} + \frac{1}{32\pi G}[(\bar{h}_{\alpha\beta}\bar{h}^{\lambda\beta,\alpha})_{,\lambda} - (\bar{h}_{\alpha\beta}\bar{h}^{\lambda\beta}{}_{,\lambda})^{,\alpha}].$$

Только тензор энергии-импульса, полученный из (11), дает положительную плотность энергии гравитационного поля ньютоновского центра в метрике (7). Дополняя, по Белинфанте, канонический тензор энергии-импульса, полученный из (11), и добавляя тензор взаимодействия $\overset{\mathrm{int}}{T}{}^{jk} = \overset{M}{T}{}^{jn}h_n{}^k$ (после чего тензор становится симметричным), получим [7]

$$\begin{aligned} t^{jk} = \frac{1}{32\pi G}\Bigg[&-\frac{1}{2}\overset{2}{T}{}^{jk} + \frac{1}{4}\overset{4}{T}{}^{jk} + \overset{5}{T}{}^{jk} - \frac{1}{2}\overset{11}{T}{}^{jk} + 2\overset{12}{T}{}^{jk} - 2\overset{13}{T}{}^{jk} - 2\overset{14}{T}{}^{jk} + \\ &+ 2\overset{15}{T}{}^{jk} - \overset{16}{T}{}^{jk} + 2\overset{j}{T}{}^{jk} - 2\overset{e}{T}{}^{jk} + 2\overset{m}{T}{}^{jk} - 2\overset{o}{T}{}^{jk}\Bigg] + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\overset{M}{T}{}^{jn}h_n{}^k + \overset{M}{T}{}^{kn}h_n{}^j\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\overset{M}{T}{}^{jk}$ есть тензор энергии-импульса частиц:

$$\overset{M}{T}{}^{jk} = \sum_a m_a u^j u^k \frac{ds}{dt}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)), \quad u^\mu = dx^\mu/ds. \tag{13}$$

Тензор взаимодействия $\overset{\mathrm{int}}{T}{}^{jk}$ добавлен «руками» для того, чтобы законы сохранения полного тензора энергии-импульса

$$\left(\overset{M}{T}{}^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0$$

давали такие же уравнения движения частиц, как в общей теории относительности (см. Тирринг [5]). Замечательное свойство тензора (12), названного в [7] MTW-тензором, состоит в том, что он дает плотность гравитационной энергии ньютоновских центров в метрике (7) в полной аналогии с электромагнитной энергией кулоновских центров:

$$t^{00} = 2 \overset{M}{T}{}^{00}\phi + \frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2. \tag{14}$$

Вместе с (13) это дает для медленно движущихся частиц соотношение

$$\overset{M}{T}{}^{00} + t^{00} = \sum_a m_a\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)) + \overset{M}{T}{}^{00}\phi + \frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2. \tag{15}$$

Здесь мы использовали уравнение (20) (см. ниже) и уравнение (7), согласно которому $h = -4\phi$. Теперь мы рассмотрим только две частицы m_a и m_b и опустим члены самодействия в $\overset{M}{T}{}^{00}\phi$:

$$\begin{aligned} &- [m_a\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + m_b\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b)]\left[\frac{Gm_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} + \frac{Gm_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}\right] \to \\ &\qquad \to -\frac{Gm_am_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \frac{Gm_am_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b). \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда видно, что пробная частица m_a, медленно движущаяся в поле m_b, имеет энергию

$$m_a\left(1 - \frac{Gm_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}\right),$$

см. члены, пропорциональные $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ в (15) и (16). Это как раз то, что нужно для непосредственного объяснения красного смещения согласно § 4 в гл. 2 в книге Швингера [13]. Действительно, пусть w_∞ есть частота атома вне гравитационного поля. Тогда $w_\infty(1 + \phi(r_a))$ есть частота в поле в терминах (координатного) времени t. В терминах наблюдаемого времени $t^{\mathrm{obs}} = \sqrt{|g_{00}|}t$ в точке r наблюдаемая частота равна $w_\infty(1 + \phi(r_a))(1 - \phi(r))$. В частности, около точки испускания $r = r_a$ наблюдаемая частота равна w_∞, т. е. частота та же самая, что и вне поля. Это согласуется с результатом Тирринга [5], который рассмотрел электрон-протонную систему в гравитационном поле, используя наблюдаемую длину и наблюдаемое время t^{obs}.

Мы видим, что тензор (12), по-видимому, является настоящим тензором энергии-импульса гравитационного поля, тогда как все остальные тензоры — это эффективные тензоры, приводящие к правильным выражениям только в специальных случаях, таких, как полная энергия системы или энергия плоской гравитационной волны. С учетом этих свойств MTW-тензора интересно исследовать возможность его использования для объяснения прецессии перигелия планеты (и вообще в трехгравитонной вершине).

В самой общей форме лагранжиан взаимодействия можно представить следующим образом:

$$\overset{\text{int}}{L} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} t^{\mu\nu}_{\text{eff}}, \quad t^{\mu\nu}_{\text{eff}} = \frac{1}{32\pi G} \sum_{s=1}^{16} a_s \overset{s}{T}{}^{\mu\nu}. \tag{17}$$

В общей теории относительности $t^{\mu\nu}_{\text{eff}}$ не является тензором энергии-импульса гравитационного поля (см. [7] и [14]). Зато, используя (17), с помощью $a_s = a_s^{\text{GR}}$ (см. табл. 1) можно получить уравнение гравитационного поля, т. е. уравнение Эйнштейна в рассматриваемом приближении.

Таблица 1

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_s^{GR}	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	-2	2	2	-2	2	-1	2	-4	0	0	0
a_s	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	4	2	$-\frac{5}{2}$	5	$-\frac{3}{2}$	2	-6	-2	0	0

В рассматриваемом подходе $t^{\mu\nu}_{\text{eff}}$ найдено по правилам построения тензора энергии-импульса в теории поля, см. ниже. Далее будет показано, что в этом случае нельзя получить самосогласованное гравитационное уравнение для $h_{\mu\nu}$. Это, конечно, усложняет рассмотрение, но хочется знать, какую возможность и почему выбрала Природа.

Получим теперь коэффициенты a_s в нашем случае. С помощью (4) и (5) запишем t^{jk} из (12) в виде

$$\begin{aligned} t^{jk} = \frac{1}{32\pi G} \Bigg[&- \frac{1}{2} \overset{2}{T}{}^{jk} + \frac{1}{2} \overset{4}{T}{}^{jk} + \overset{5}{T}{}^{jk} - \overset{9}{T}{}^{jk} + 2 \overset{10}{T}{}^{jk} - \overset{11}{T}{}^{jk} + \\ &+ 2 \overset{12}{T}{}^{jk} - 2 \overset{13}{T}{}^{jk} - 2 \overset{14}{T}{}^{jk} + 2 \overset{15}{T}{}^{jk} - \overset{16}{T}{}^{jk} + \overset{c}{T}{}^{jk} - 2 \overset{e}{T}{}^{jk} + 2 \overset{j}{T}{}^{jk} - \\ &- \overset{l}{T}{}^{jk} + 2 \overset{m}{T}{}^{jk} - 2 \overset{o}{T}{}^{jk} \Bigg] + \frac{1}{2} \left(\overset{M}{T}{}^{jn} h_n{}^k + \overset{M}{T}{}^{kn} h_n{}^j \right). \end{aligned} \tag{18}$$

Затем нужно прибавить к t^{jk} члены взаимодействия, содержащиеся в $\overset{M}{T}{}^{jk}$, см. (13). Одна возможность выделить из (13) линейный по h член такова.

Исходим из соотношения

$$ds^2 = -(\eta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j = ds_0^2 \left(1 - h_{ij}\frac{dx^i}{ds_0}\frac{dx^j}{ds_0}\right), \quad ds_0^2 = -\eta_{ij}dx^i dx^j.$$

Используя $ds = ds_0\left(1 - \dfrac{1}{2}h_{ij}\dfrac{dx^i}{ds_0}\dfrac{dx^j}{ds_0}\right)$ из (13), получим $\overset{M}{T}{}^{jk} = \overset{M}{T}{}^{jk}_{0} + \overset{\text{int}}{T}{}^{jk}_{M}$, где

$$\overset{\text{int}}{T}{}^{jk}_{M} = \frac{1}{2}h_{ln}\frac{dx^l}{ds_0}\frac{dx^n}{ds_0}\ \overset{M}{T}{}^{jk}_{0}. \tag{19}$$

Здесь $\overset{M}{T}{}^{jk}_{0}$ — это $\overset{M}{T}{}^{jk}$ при выключенном гравитационном поле, а нижний индекс в $\overset{\text{int}}{T}{}^{jk}_{M}$ напоминает о происхождении этого члена из $\overset{M}{T}{}^{jk}$.

Итак, принимая, что $\overset{M}{T}{}^{jk}$ дается выражением (13) (как в общей теории относительности), получаем (19). Возможность использования такого члена в S-матричном подходе подлежит отдельному рассмотрению, так как этот член не выражается через «строительные блоки» (3). Это может означать, что нельзя определить внешнее поле в G^2 в приближении для релятивистской пробной частицы.

Ввиду этого осложнения рассмотрим другую возможность, которая эквивалентна предыдущей, если скоростями можно пренебречь. Используя соотношение

$$ds = \sqrt{-g_{00}}\sqrt{1 - v^2}dt \approx (1 + \phi)\sqrt{1 - v^2}dt,$$

в котором v — физическая скорость (см. § 88 в книге Ландау и Лифшица [15]), запишем (13) в виде

$$\overset{M}{T}{}^{jk} = \sum_a m_a \frac{dx^j}{\sqrt{1 - v^2}dt}\frac{dx^k}{dt}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)) + \frac{1}{4}h\ \overset{M}{T}{}^{jk}_{0}. \tag{20}$$

Здесь $\overset{M}{T}{}^{jk}_{0}$ есть значение $\overset{M}{T}{}^{jk}$ при выключенном гравитационном поле, т. е. при $G = 0$, и учтено, что согласно (7) $\phi = -\dfrac{1}{4}h$. Интересующий нас член взаимодействия в правой части (20) с помощью линеаризованного уравнения Эйнштейна

$$-h^{jn,\sigma}{}_{\sigma} + h^{j\sigma}{}_{,\sigma}{}^{n} + h^{n\sigma}{}_{,\sigma}{}^{j} - h^{,jn} + \eta^{jn}(h_{,\sigma}{}^{\sigma} - h_{\sigma\lambda}{}^{,\sigma\lambda}) = 16\pi G\ \overset{M}{T}{}^{jn}_{0} \tag{21}$$

представим в виде

$$\frac{1}{4}h\ \overset{M}{T}{}^{jk}_{0} = \frac{1}{32\pi G}\left[\frac{1}{2}\ \overset{a}{T}{}^{jk} - \frac{1}{2}\ \overset{b}{T}{}^{jk} - \frac{1}{2}\ \overset{f}{T}{}^{jk} - \frac{1}{2}\ \overset{g}{T}{}^{jk} + \overset{h}{T}{}^{jk}\right]. \tag{22}$$

Для членов взаимодействия в (18), используя (21), найдем

$$\frac{1}{2}\left(\overset{M}{T}{}^{jn}h_n{}^k + \overset{M}{T}{}^{kn}h_n{}^j\right) = \frac{1}{16\pi G}\left[\overset{l}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{m}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{n}{\mathcal{T}}{}^{jk} + \overset{o}{\mathcal{T}}{}^{jk} - \overset{p}{\mathcal{T}}{}^{jk} + \overset{q}{\mathcal{T}}{}^{jk}\right]. \tag{23}$$

Итак, *тензор (18), в котором члены взаимодействия надо записать в виде (23), в сумме с (22) дает тензор, определяющий трехгравитонную вершину*. Его можно использовать вместо $t_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ в первом равенстве в (17). (Тогда при вычислении $h_{\mu\nu}$ в G^2-приближении появятся расходимости; они входят в перенормировку массы.) Тот же результат получится, если в этом тензоре превратить члены со вторыми производными в члены с первыми производными. Тогда получим $t_{\text{eff}}^{\mu\nu}$ во втором равенстве (17), и расходимости можно избежать, используя вместо диаграммы с пропагатором, дающим гравитационное поле, решение соответствующего гравитационного уравнения.

Перейдем теперь от членов со вторыми производными к членам с первыми производными. Для члена с $\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}$ имеем

$$h_{\mu\nu}\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}h_{,\sigma}{}^{\sigma}h = (h^{,\sigma}hh)_{,\sigma} - h^{,\sigma}2hh_{,\sigma}. \tag{24}$$

Опуская полную производную, запишем: $h_{\mu\nu}\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -2h_{\mu\nu}\overset{4}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}$, или символически: $\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -2\overset{4}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}$, и аналогично для остальных членов. Таким образом, в кубических по h членах (подобных левой части в (24)) можно сделать замены:

$$\begin{gathered}
\overset{a}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -2\overset{4}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{b}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -2\overset{3}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{c}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{3}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{11}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu};\\
\overset{d}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{2}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{9}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{e}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{1}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{8}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{f}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{3}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{11}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu};\\
\overset{g}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{2}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{9}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{h}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{1}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{8}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{i}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{5}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{12}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu};\\
\overset{j}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{13}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{15}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{k}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{5}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{12}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{l}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -2\overset{9}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu};\\
\overset{m}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -2\overset{12}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{n}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{8}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{10}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{o}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{6}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{13}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu};\\
\overset{p}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -2\overset{7}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}; \quad \overset{q}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{6}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{13}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \quad \text{или} \quad \overset{q}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{14}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{15}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Заметив, что вместе с $\overset{h}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{1}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{8}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}$ мы имеем также $\overset{h}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to -\overset{10}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{16}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}$, найдем

$$\overset{16}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \to \overset{1}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} + \overset{8}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} - \overset{10}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}. \tag{26}$$

Аналогично из двух последних соотношений в (25) следует

$$\overset{14}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} + \overset{15}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{6}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu} + \overset{13}{\mathcal{T}}{}^{\mu\nu}. \tag{27}$$

Кроме того, из (25) следует, что возможны также замены

$$\overset{c}{\tau}{}^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{f}{\tau}{}^{\mu\nu}, \quad \overset{d}{\tau}{}^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{g}{\tau}{}^{\mu\nu}, \quad \overset{e}{\tau}{}^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{h}{\tau}{}^{\mu\nu}, \quad \overset{i}{\tau}{}^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{k}{\tau}{}^{\mu\nu}, \quad \overset{o}{\tau}{}^{\mu\nu} \leftrightarrow \overset{q}{\tau}{}^{\mu\nu}.$$

(Заметим, между прочим, что замены $\tau \to \mathcal{T}$ в (25)–(27) дают соответствующие соотношения для кубических членов в терминах $\bar{h}$.)

Используя замены (25), в (18), (22) и (23) получим, как сказано перед (24), $t^{\mu\nu}_{\text{eff}}$ в (17) с a_s, приведенными в табл. 1.

3. НАХОЖДЕНИЕ МЕТРИКИ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Считая, что $\overset{\text{int}}{L}$ в (17) симметризовано по всем трем гравитонам, можно вычислить G^2-приближение для $h_{\mu\nu}$ вне сферически-симметричного тела. В общей теории относительности другим методом такое вычисление выполнено Даффом [11] (см. также Ивасаки [10]). Вклад в $h_{\mu\nu}$ поступает от диаграмм двух типов. Диаграмма A описывает взаимодействие гравитона пробной частицы с гравитационным тензором энергии-импульса внешнего поля. Эта часть $h_{\mu\nu}$ может быть найдена из соответствующего гравитационного уравнения. Две диаграммы B, дающие одинаковый вклад, описывают взаимодействие гравитона внешнего поля с гравитационным тензором энергии-импульса, образованного другим гравитоном внешнего поля и гравитоном пробной частицы. Часть $h_{\mu\nu}$, даваемая этими диаграммами, не может быть получена из самосогласованного гравитационного уравнения, если используется выбранная нами вершина.

В линейном приближении по G 3-гравитонной вершины нет. Поэтому в этом порядке все эффекты и определение гравитационного поля не затрагиваются рассматриваемым подходом. Наличие диаграмм B с феноменологической вершиной делает определение внешнего гравитационного поля несколько искусственным. Пробная частица сама участвует в создании поля, в котором она движется. Тем не менее в определении гравитационного поля пробная частица не фигурирует: конец пропагатора, который в полной диаграмме прикреплен к ней, оставляется «висящим в воздухе» и определяет поле. В полной диаграмме, т. е. в матричном элементе рассеяния, концы пропагаторов прикреплены к частицам. Именно в этом смысле мы понимаем поле в этом подходе.

После отмеченных пояснений можно приступить к вычислению поля вне сферически-симметричного тела. Полезно привести вклады в h_{00} (т. е. коэффициенты при ϕ^2) и в h_{ij}, $i,j = 1,2,3$ (т. е. коэффициенты при $\delta_{ij}\phi^2$ и $r^2\phi_{,i}\phi_{,j}$), для каждого члена $\dfrac{1}{32\pi G}\overset{s}{\tau}{}^{\mu\nu}$ в (17) отдельно. Другими словами, считаем сначала, что $a_s = 1, s = 1, 2, \ldots, 16$. Вклады от диаграммы А приведены в табл. 2.

Таблица 2

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ϕ^2	-1	-4	-2	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	-4	-1	-2	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$\delta_{ij}\phi^2$	1	4	2	4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$r^2\phi_{,i}\phi_{,j}$	0	0	0	0	2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Вклады от суммы диаграммы А и двух диаграмм В приведены в табл. 3.

Таблица 3

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ϕ^2	1	4	2	4	2	$\frac{1}{2}$	1	1	4	1	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\delta_{ij}\phi^2$	3	4	2	-4	0	1	-1	0	-4	0	-4	2	1	1	1	3
$r^2\phi_{,i}\phi_{,j}$	-8	0	-8	0	2	$-\frac{7}{2}$	0	-3	0	-3	2	-8	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-8

Некоторые детали вычислений даны в [7].

С помощью табл. 3 легко получить G^2-приближение для $h_{\mu\nu}$ при любом наборе коэффициентов a_s. Так, используя a_s^{GR} из табл. 1, найдем

$$
\begin{gathered}
h_{00}^{\mathrm{GR}} = -2\phi^2, \quad h_{ij}^{\mathrm{GR}} = [4\delta_{ij}\phi^2 - 8r^2\phi_{,i}\phi_{,j}] + \delta_{ij}\phi^2 + r^2\phi_{,i}\phi_{,j}, \\
i, j = 1, 2, 3; \quad r^2\phi_{,i}\phi_{,j} = \frac{G^2 M^2 x_i x_j}{r^4}.
\end{gathered} \tag{28}
$$

Выражение в квадратных скобках можно опустить (это чистая калибровка). Тогда получим гармоническую систему координат в G^2-приближении:

$$
g_{00}^{\mathrm{GR}} = -(1 + 2\phi + 2\phi^2), \quad g_{ij}^{\mathrm{GR}} = (1 - 2\phi)\delta_{ij} + \phi^2\left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2}\right). \tag{29}
$$

В нашем случае для a_s из табл. 1 аналогично получим

$$
g_{00} = -(1 + 2\phi + 2\phi^2), \quad g_{ij} = (1 - 2\phi + 9\phi^2)\delta_{ij} - 7\phi^2\frac{x_i x_j}{r^2}. \tag{30}
$$

Коэффициенты 9 и -7 в (30) не так симпатичны, как единичные коэффициенты в общей теории относительности в (29). На прецессии перигелия нерелятивистской планеты они не скажутся, так что явного противоречия с данными наблюдений нет. Можно было бы подумать, что в локальных членах (см. (22) и (23)) нужно учитывать только диаграммы B, а A не учитывать, но это не изменит результата (30). Заметим еще, что, если ф-ла (20) верна при всех скоростях, конкретные значения «несимпатичных» коэффициентов во втором равенстве в (30) существенны для определения движения пробной частицы. Этого нельзя сказать, если (20) верна только при малых скоростях.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВКЛАДА ОТ ДИАГРАММ B ВО ВКЛАДЫ ОТ ДИАГРАММ A

Вклады от диаграмм B можно свести к вкладам от диаграмм A. Продемонстрируем это на примере члена с $s = 1$, т. е. члена $\overset{1}{\tau}_{\gamma\theta} = \eta_{\gamma\theta} h_{\alpha\beta,\gamma} h^{\gamma\beta,\alpha}$ (см. (2)). Вклад этого члена в $h_{\mu\nu}$ пропорционален интегралу

$$\int d^4x' \left[\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} D_{\mu\nu\rho\sigma}(x-x')\right] h^{\lambda\sigma,\rho}(x')\eta_{\gamma\theta}h^{\gamma\theta}. \tag{31}$$

Этот интеграл описывает взаимодействие гравитона внешнего поля (фактор $h^{\gamma\theta}$ в (31)) с гравитационным тензором энергии-импульса, образованного гравитоном пробной частицы (представленной пропагатором $D_{\mu\nu\rho\sigma}(x-x')$) и гравитоном внешнего поля (фактор $h^{\lambda\sigma,\rho}$). Интегрирование по частям в (31) эквивалентно замене в подынтегральном выражении:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} D_{\mu\nu\rho\sigma}(x-x')\right] h^{\lambda\sigma,\rho}(x')\eta_{\gamma\theta}h^{\gamma\theta} \to \\ &\qquad \to -D_{\mu\nu\rho\sigma}(x-x')\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left[h^{\lambda\sigma,\rho}(x')h(x')\right] = \\ &\qquad\qquad = -D_{\mu\nu\rho\sigma}(x-x')\left[\overset{8}{\tau}{}^{\rho\sigma}(x') + \overset{h}{\tau}{}^{\rho\sigma}(x')\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Символически

$$\overset{1}{\tau}{}^{\rho\sigma}(B) \to -\left[\overset{8}{\tau}{}^{\rho\sigma}(A) + \overset{h}{\tau}{}^{\rho\sigma}(A)\right]. \tag{33}$$

Следовательно, для вклада всех трех диаграмм

$$\overset{1}{\tau}{}^{\rho\sigma}(A) + 2\,\overset{1}{\tau}{}^{\rho\sigma}(B) \to \overset{1}{\tau}{}^{\rho\sigma}(A) - 2\left[\left[\overset{8}{\tau}{}^{\rho\sigma}(A) + \overset{h}{\tau}{}^{\rho\sigma}(A)\right]\right] \tag{34}$$

и аналогично для других s.

Эта процедура эквивалентна тому, что мы используем $\overset{\text{int}}{L}$ в (17) в вариационном принципе для получения гравитационного уравнения. Для нашего набора a_s оно окажется не самосогласованным: определяемый этим уравнением источник поля не сохраняется. С этой точки зрения наша метрика (30) получена из несамосогласованного уравнения. Однако на рассмотренную процедуру можно смотреть как на формальный прием для учета вклада всех диаграмм. По этой причине я не вижу аргументов, согласно которым несамосогласованность уравнения, которое вообще не фигурировало в S-матричном подходе, противоречило бы использованию выбранной вершины. Может быть, этот факт можно интерпретировать так, что в S-матричном подходе допустимы метрики, не допустимые гравитационным уравнением.

Продолжим, однако, наше рассмотрение. Использование (17) в вариационном принципе приводит к тому, что к $\overset{M}{T}{}_0^{jn}$ в (21) следует прибавить

$$\tilde{t}^{jn} = 2\left[\frac{\partial \overset{\text{int}}{L}}{\partial h_{jn}} - \left(\frac{\partial \overset{\text{int}}{L}}{\partial h_{jn,\lambda}}\right)_{,\lambda}\right] = \frac{1}{32\pi G}\sum_{s=1}^{q} d_s \overset{s}{\tau}{}^{jn}, \qquad s = 1, 2, \ldots, 16, a, b, \ldots, q. \tag{35}$$

Коэффициенты d_s связаны с a_s в (17) следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
d_1 = a_1 - a_8, \quad d_2 = a_2 - a_9, \quad d_3 = -2a_{11}, \quad d_4 = -a_4, \quad d_5 = a_5 - a_{12}, \\
d_6 = a_6 - a_{13}, \quad d_7 = -a_7, \quad d_8 = -2a_1 + a_8 - a_{10}, \quad d_9 = -2a_2, \\
d_{10} = -a_8 + a_{10} - 2a_{16}, \quad d_{11} = -a_3 + a_{11}, \quad d_{12} = -2a_5, \\
d_{13} = -2a_6 + a_{13} - a_{15}, \quad d_{14} = a_{14} - a_{15}, \\
d_{15} = -a_{13} - 2a_{14} + a_{15}, \quad d_{16} = -a_{10} + a_{16}, \\
d_a = -2a_4, \quad d_b = -a_3, \quad d_c = -2a_{11}, \quad d_d = -a_9, \quad d_e = -a_8 - a_{10}, \\
d_f = -a_3, \quad d_g = -2a_2, \quad d_h = -2a_1 - 2a_{16}, \quad d_i = -2a_5, \\
d_j = -a_{13} - a_{15}, \quad d_k = -a_{12}, \quad d_l = -a_9, \quad d_m = -a_{12}, \\
d_n = -a_8 - a_{10}, \quad d_o = -a_{13} - a_{15}, \quad d_p = -2a_7, \quad d_q = -2a_6 - 2a_{14}.
\end{gathered} \tag{36}$$

Эти соотношения полезны при рассмотрении вопроса о том, можно ли какое-то заданное гравитационное уравнение получить на основе вариационного принципа, т. е. по заданным d_s найти a_s. Так как коэффициентов d_s более чем в два раза больше, чем a_s, то это возможно только в исключительных случаях.

Для a_s, приведенных в табл. 1, используя (36), получим

$$\begin{aligned}\tilde t^{jn} = \frac{1}{32\pi G}\Bigg[&-2\overset{1}{\tau}{}^{jn} + \frac{5}{2}\overset{2}{\tau}{}^{jn} + 3\overset{3}{\tau}{}^{jn} + \frac{1}{2}\overset{4}{\tau}{}^{jn} - \overset{5}{\tau}{}^{jn} + 4\overset{6}{\tau}{}^{jn} - 4\overset{7}{\tau}{}^{jn} - \\ &- 3\overset{8}{\tau}{}^{jn} + 3\overset{10}{\tau}{}^{jn} - 2\overset{11}{\tau}{}^{jn} - 2\overset{12}{\tau}{}^{jn} - 2\overset{13}{\tau}{}^{jn} - 2\overset{14}{\tau}{}^{jn} + 10\overset{15}{\tau}{}^{jn} - 5\overset{16}{\tau}{}^{jn} + \\ &+ \overset{a}{\tau}{}^{jn} - \frac{1}{2}\overset{b}{\tau}{}^{jn} + 3\overset{c}{\tau}{}^{jn} + \frac{5}{2}\overset{d}{\tau}{}^{jn} - 7\overset{e}{\tau}{}^{jn} - \frac{1}{2}\overset{f}{\tau}{}^{jn} - 2\overset{i}{\tau}{}^{jn} + 6\overset{j}{\tau}{}^{jn} - \\ &-2\overset{k}{\tau}{}^{jn} + \frac{5}{2}\overset{l}{\tau}{}^{jn} - 2\overset{m}{\tau}{}^{jn} - 7\overset{n}{\tau}{}^{jn} + 6\overset{o}{\tau}{}^{jn} - 8\overset{p}{\tau}{}^{jn} + 8\overset{q}{\tau}{}^{jn}\Bigg]. \qquad (37)\end{aligned}$$

Вне сферического тела с помощью (9) из (37) найдем

$$\tilde t^{00} = -\frac{9}{8\pi}\frac{GM^2}{r^4}, \quad \tilde t^{ij} = \frac{GM^2}{8\pi}\left[\frac{9\delta_{ij}}{r^4} - \frac{14x_ix_j}{r^6}\right], \quad i,j = 1,2,3. \qquad (38)$$

В терминах $\bar t^{jn} = t^{jn} - \frac{1}{2}\eta^{jn}t$ получим из (38), опустив тильду, чтобы не загромождать написание,

$$\bar t^{00} = \frac{GM^2}{4\pi r^4}, \quad \bar t^{ij} = -\frac{GM^2}{4\pi}\left[\frac{\delta_{ij}}{r^4} + \frac{7x_ix_j}{r^6}\right], \quad i,j = 1,2,3. \qquad (39)$$

Используя уравнение

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G\bar t_{\mu\nu} \qquad (40)$$

с $\bar t_{ij}$ из (39), снова получим G^2-члены в (30).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше рассмотрение показывает, что предположение о том, что гравитон в трехгравитонной вершине взаимодействует с гравитационным тензором энергии-импульса, не встречается явно с трудностями. Показано, что существует по крайней мере один тензор энергии-импульса гравитационного поля, построенный по правилам теории поля (по Белинфанте), который приводит к правильной прецессии перигелия планеты. По этой причине представляется интересным исследовать эту проблему глубже.

Благодарности. Я благодарю В. И. Ритуса и М. А. Васильева за ценные обсуждения и поддержку. Я признателен Р. Р. Мецаеву и А. О. Барвинскому за полезные дискуссии и критические замечания. Я благодарен также В. Н. Первушину за ценные замечания по улучшению рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке совета Научных школ и РФФИ (проекты № 1578.2003.2 и 05-02-17217).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. N. Y., 1972. 694 p.
2. *Einstein A.* // Ann. Phys. 1916. V. 49. P. 769–822.
3. *Cohn J.* // Intern. J. Theor. Phys. 1969. V. 2. P. 267.
4. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* Gravitation. San Francisco, 1973. 1279 p.
5. *Thirring W. E.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1961. V. 16. P. 96–117.
6. *Logunov A. A.* // Part. Nucl. 1998. V. 29, No. 1. P. 1–32; The Theory of Gravitational Field. M.: Nauka, 2000. 234 p. (in Russian).
7. *Nikishov A. I.* gr-qc/9912034; Part. Nucl. 2001. V. 32, No. 1. P. 5–32.
8. *Baryshev Yu.* gr-qc/9912003. 17 p.
9. *Dehnen H., Hönl H., Westpfahl K.* // Ann. der Phys. 1960. Bd. 6, 7. Folge, Band 6, Heft 7–8, S. 370–405.
10. *Iwasaki Y.* // Prog. Theor. Phys. 1971. V. 46. P. 1587–1609.
11. *Duff M. J.* // Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 2317–2326.
12. *Feynman R. P., Moringo F. B., Wagner W. G.* Feynman Lectures on Gravitation. Addison-Wesley Company, 1995. 296 p.
13. *Schwinger J.* Particles, Sources, and Fields. Addison-Wesley, 1970. V. 1. 502 p.
14. *Padmanabhan T.* gr-qc/0409089. 19 p.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., 1973. 505 с.